

КОНФИГУРАЦИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ОПТИЧЕСКИХ КОНУСОВ В ГИРОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛАХ ПРИ НАЛИЧИИ ДИХРОИЗМА

*В. С. Меркулов**

*Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению
220072, Минск, Беларусь*

Поступила в редакцию 3 апреля 2014 г.

Рассмотрены оптические конические сингулярности в кристаллах при наличии линейного дихроизма и естественной оптической активности в точке пересечения кривых дисперсии главных показателей преломления. Показана возможность существования особенностей типа узловой точки, точки касания, тройной точки и точек возврата первого и второго рода. Установлены 49 различных типов неприводимых сингулярных оптических конусов четвертого порядка, которые получаются путем последовательных бифуркаций восьми основных сингулярных конусов. В основу классификации положены понятия грубости систем, зависящих от параметров.

DOI: 10.7868/S0044451015020029

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] показано, что в гиротропных кристаллах в условиях изотропии симметричной части диэлектрического тензора возникают замкнутые линии пересечения поверхностей рефракции, отвечающие конусам и, в частности, плоскостям оптических осей. Эти конусы исчезают при малых анизотропных изменениях действительной части диэлектрического тензора, и на их месте остаются только некоторые поляризационные аномалии. Однако в кристаллах, в которых на определенной длине волны наблюдается пересечение кривых дисперсии главных показателей преломления, совсем не обязательно совпадение мнимых частей показателей. Другими словами, мнимая симметричная часть диэлектрического тензора, приводящая к линейному дихроизму, не обязательно изотропна. Этому способствует тот факт, что длина волны так называемой «изотропной» точки, как правило, очень близка к зоне поглощения кристалла [2–4], что обуславливает сильную дисперсию показателей преломления и приводит к пересечению кривых дисперсии. Кристалл, оставаясь прозрачным ($\alpha\lambda \ll 1$), тем не менее имеет значительный коэффициент поглощения $\alpha \sim 1\text{--}10 \text{ см}^{-1}$.

Поэтому разность мнимых частей показателей преломления отлична от нуля и даже может быть сравнимой с гиротропным вкладом. В такой ситуации конусы (плоскости) оптических осей (в обычном их понимании) не могут существовать вообще. В работе [5] показано, что даже незначительный дихроизм приводит к расщеплению конусов оптических осей на конусы сингулярных оптических осей, между которыми образуется «щель» с равными скоростями собственных волн. Сингулярный конус разделяет области равных скоростей и равных поглощений собственных волн. Заметим, что в негиротропных кристаллах могут иметь место только линии равных скоростей и равных поглощений [6]. Для кристаллов средних сингоний возможны различные сочетания сингулярных конусов второго порядка и сингулярных плоскостей [5]. По аналогии с работой [1] представляет интерес рассмотрение сингулярных конусов и для кристаллов низших сингоний. При учете дихроизма в этом случае следует ожидать большего разнообразия конфигураций сингулярных конусов, чем в магнитооптике [7]. В настоящей работе с целью развития соображений, выказанных в работе [5], установлены различные типы неприводимых сингулярных оптических конусов для кристаллов произвольной сингонии при условии изотропии вещественной симметричной части диэлектрического тензора.

*E-mail: merkul@physics.by

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматриваемой задаче соответствует специальный случай, когда анизотропная симметричная часть обратного диэлектрического тензора кристалла является антиэрмитовой, а антисимметричная часть — эрмитовой:

$$\eta_{ij} = \eta_0 \delta_{ij} + id_{ij} + ie_{ijk} g_{kl} n_l, \quad (1)$$

где тензор дихроизма d_{ij} и тензор гирации g_{ij} являются действительными и симметричными, δ_{ij} — символ Кронекера, e_{ijk} — антисимметричный тензор третьего порядка, n_i — единичный вектор, параллельный волновому. В дальнейшем будем полагать $\text{Re } \eta_0 \gg \text{Im } \eta_0, |g_{ij}|, |d_{ij}|$.

Согласно [8, 9] уравнение для определения направлений, в которых совпадают показатели преломления для собственных волн (не важно, представляют они изолированные оптические оси или конусы осей), можно записать в следующем виде:

$$(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{d}}\mathbf{n}) - [(\mathbf{n}, \mathbf{d}\mathbf{n}) - d_{tr}]^2 / 4 + (\mathbf{n}, \mathbf{g}\mathbf{n})^2 = 0, \quad (2)$$

где $\tilde{\mathbf{d}}$ — тензор, дуальный тензору \mathbf{d} , d_{tr} — след тензора. Левая часть уравнения (2) представляет собой $\Delta\eta^2$ — квадрат полуразности собственных значений $\eta_{\pm} = \eta_0 \pm \Delta\eta$ тензора η_{ij} . Для показателей преломления имеем $n_{\pm} = \eta_{\pm}^{-1/2}$. Видно, что в уравнение (2) входит только анизотропная часть тензора η и решение не зависит от выбора η_0 , поэтому примем для удобства $\eta_0 = (\eta_{xx} + \eta_{yy})/2$, тогда $d_{xx} = -d_{yy}$, $d_{tr} = d_{zz}$.

В малой окрестности исследуемой оптической оси, изначально направленной вдоль оси z , удобно выразить координаты вектора \mathbf{n} через координаты (x, y) соответствующей точки в плоскости $z = 1$:

$$\mathbf{n} = (x, y, 1) / \sqrt{1 + x^2 + y^2}. \quad (3)$$

После подстановки выражения (3) в (2) получим уравнение четвертой степени с действительными коэффициентами

$$f_{ab} x^a y^b = 0, \quad (4)$$

где подразумевается суммирование по a и b от 0 до 4 ($a + b \leq 4$). Значения коэффициентов, которые понадобятся в дальнейшем, даны в Приложении.

Таким образом, возможные конические поверхности (в частных случаях оси или плоскости) отображаются в вещественные алгебраические кривые четвертой степени на плоскости xy . Отдельные оси естественно отображаются в изолированные точки на этой плоскости.

Положение оптики анизотропных сред о том, что распространение плоских однородных волн вдоль выбранного направления определяется двумерной матрицей $\hat{\eta}$, составленной из компонент обратного диэлектрического тензора в плоскости фронта [10], остается в силе при произвольном (в общем случае комплексном и неэрмитовом) тензоре. Если волновой вектор направлен вдоль оси z , то

$$\hat{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_0 + id_{xx} & id_{xy} - ig_{zz} \\ id_{xy} + ig_{zz} & \eta_0 - id_{xx} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

В качестве собственных векторов электрической индукции можно взять следующие:

$$\mathbf{D}_{\pm} = \begin{bmatrix} d_{xx} \pm i\Delta\eta \\ d_{xy} + g_{zz} \end{bmatrix} \cdot \text{const}, \quad (6)$$

или равносильные им

$$\mathbf{D}_{\pm} = \begin{bmatrix} d_{xy} - g_{zz} \\ -d_{xx} \pm i\Delta\eta \end{bmatrix} \cdot \text{const}$$

на тот случай, если какой-нибудь из векторов окажется нулевым.

При распространении через кристалл вектор \mathbf{D} результирующей волны изменяется с расстоянием следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \exp(ikz\hat{\eta}^{-1/2}) \mathbf{D}_0 = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \delta - \frac{d_{xx}}{\Delta\eta} \sin \delta & \frac{g_{zz} - d_{xy}}{\Delta\eta} \sin \delta \\ \frac{-g_{zz} - d_{xy}}{\Delta\eta} \sin \delta & \cos \delta + \frac{d_{xx}}{\Delta\eta} \sin \delta \end{bmatrix} \mathbf{D}_0 e^{i\varphi}, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\varphi \pm \delta = n_{\pm} k z$ — набег фаз собственных волн. Последнее равенство в (7) записано при условии $\Delta\eta \neq 0$.

Поляризация волны изменяется с расстоянием таким образом, что нормированный вектор Стокса

$$\xi_i = \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} \frac{D_{\alpha} D_{\beta}^*}{D_{\gamma} D_{\gamma}^*}$$

($\sigma_{\alpha\beta}^{(i)}$ — матрицы Паули) описывает определенные траектории на сфере Пуанкаре $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$. Азимут большей оси эллипса поляризации $\rho = \arctg(\xi_1/\xi_3)/2$, эллиптичность поляризации $\theta = \arcsin(\xi_2)/2$.

3. СИНГУЛЯРНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ОСЬ И СИНГУЛЯРНЫЙ КОНУС

Рассмотрим сингулярную ось, расположенную в начале координат, т.е. $f_{00} = 0$, при $g_{zz} =$

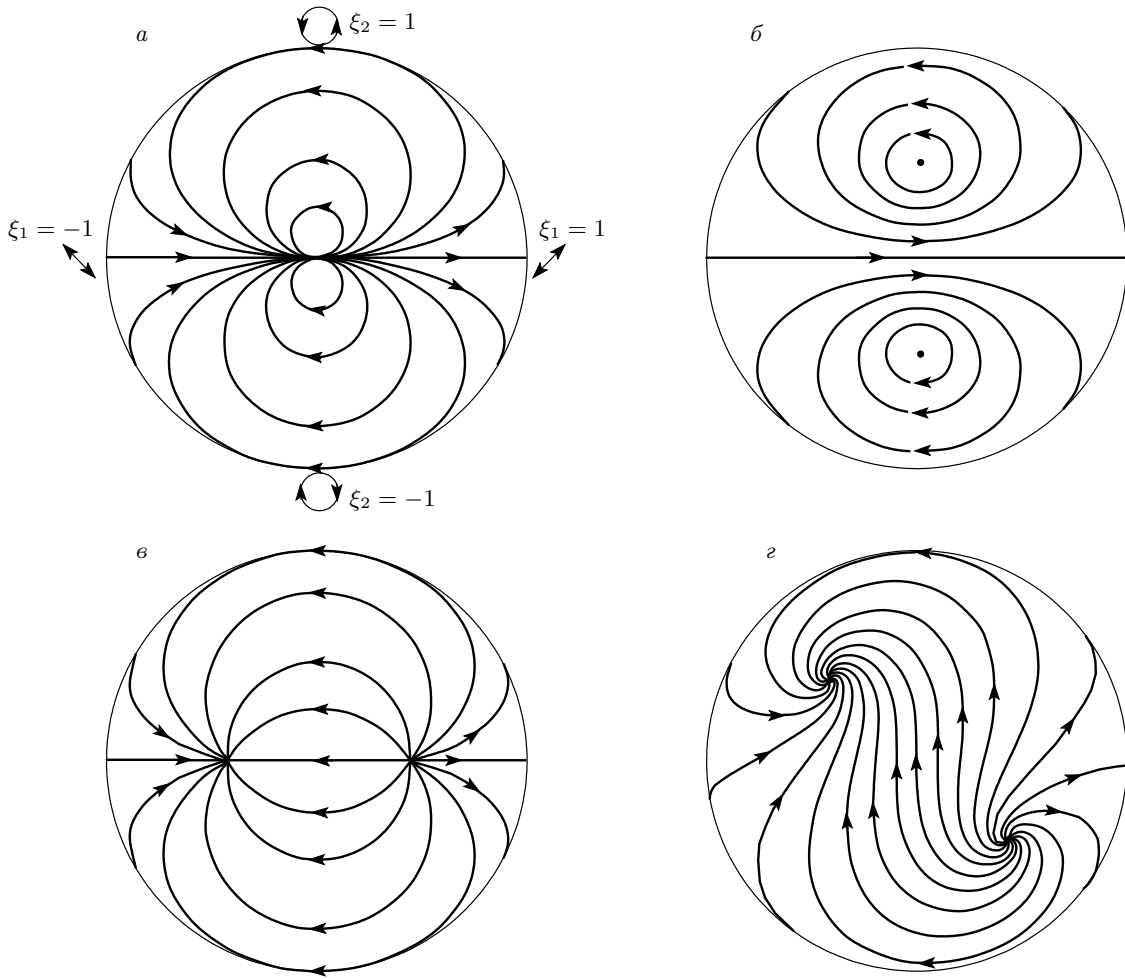


Рис. 1. Траектории, описываемые концом нормированного вектора Стокса на сфере Пуанкаре при распространении волны через кристалл: *a* — случай сингулярной линейной оси при $g_{zz} = -d_{xy}$, состояния поляризации изображены рядом с соответствующими точками сферы Пуанкаре, центральной точке соответствует $\xi_3 = 1$; *б* — случай равных поглощений собственных волн; *в* — случай равных скоростей собственных волн; *г* — общий случай при сдвиге длины волны от «изотропной» точки

$= \pm \sqrt{d_{xx}^2 + d_{xy}^2} \neq 0$. Собственные значения и собственные векторы матрицы $\hat{\eta}$ одинаковые. Единственная собственная волна линейно поляризована и $\text{tg } 2\rho = -d_{xx}/d_{xy}$. Имеет место сингулярная линейная ось по аналогии с сингулярной круговой осью [10]. В кристалле может распространяться сингулярная волна с амплитудой, линейно изменяющейся с расстоянием. Из выражения (7) при $\Delta\eta \rightarrow 0$ получим

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i\varphi} - \frac{1}{2} ikz (\hat{\eta} - \eta_0) \eta_0^{-3/2} \mathbf{D}_0 e^{i\varphi}. \quad (8)$$

При распространении через кристалл поляризация волны описывает траектории на сфере Пуанкаре, как показано на рис. 1*a* при $g_{zz} = -d_{xy}$. Естественно рассматривать распространение волн на

расстояниях $x < \alpha^{-1}$; тогда отношение амплитуды сингулярной волны к амплитуде обычной меньше единицы. Поэтому физический смысл имеют только малые отрезки дуг, показанных на рис. 1*a*, причем они не могут достигать точки, соответствующей собственной поляризации. Если поляризация входного излучения \mathbf{D}_0 совпадает с поляризацией собственной волны (центральная точка на рис. 1*a*), то второй член в формуле (8) обращается в нуль и сингулярная волна вообще не возбуждается. Этот момент необходимо учитывать при интерпретации результатов измерений оптического вращения в кристаллах при наличии линейного дихроизма.

Суть возникновения сингулярной линейной оси заключается в том, что действие естественной опти-

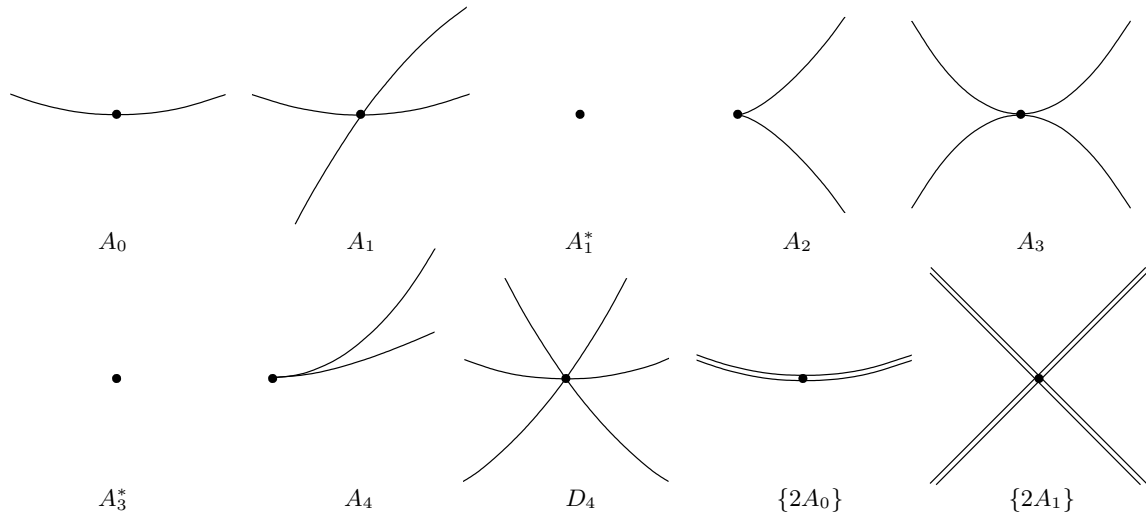


Рис. 2. Точки общего положения и особые точки на сингулярном конусе (обозначения в тексте)

ческой активности приводит к повороту линейной поляризации волны всегда в одном направлении, а линейный дихроизм стремится повернуть поляризацию к оси меньшего поглощения. Когда эти факторы равны и противоположны по знаку, возникает сингулярная ось, соответствующая нулевому повороту поляризации. Существенно, что положение точки нулевого вращения сохраняется при малых сдвигах длины волны от «изотропной» точки. Траектории могут принимать вид, представленный на рис. 1г, но траектория, проходящая через центр рисунка, обязательно имеет вертикальную касательную, что является «следом» сингулярной оси.

Теперь рассмотрим малую окрестность сингулярной оси. Если коэффициенты первого порядка f_{10} и/или f_{01} не равны нулю, то поворотом системы координат можно обратить в нуль коэффициент f_{10} и сделать f_{01} больше нуля. Тогда в первом приближении вдоль оси x имеем $\Delta\eta \approx 0$, т. е. рассматриваемая сингулярная ось занимает общее положение на сингулярном конусе (рис. 2, кривая A_0). В направлении оси y имеем корневую зависимость $\Delta\eta \approx \sqrt{f_{01}y}$. Если $y > 0$, то в первом приближении азимуты поляризации собственных волн совпадают, а их эллиптичности одинаковы по модулю, но противоположны по знаку. Коэффициенты поглощения собственных волн практически совпадают в связи с действительностью величины $\Delta\eta$ и условием $\text{Re } \eta_0 \gg \text{Im } \eta_0$. На рис. 3а изображены зависимости действительных и мнимых частей η_{\pm} от y , а также поляризации собственных волн для случая $g_{zz} = -d_{xy}$. Нормированный вектор Стокса описывает траектории на сфере

Пуанкаре, как показано на рис. 1б.

Если $y < 0$, то значение $\Delta\eta$ чисто мнимое, и собственные волны линейно поляризованы согласно (6) (рис. 3а). Фазовые скорости собственных волн практически одинаковы (в связи с $\text{Re } \eta_0 \gg \text{Im } \eta_0$). Расчет согласно (7) при замене тригонометрических функций на гиперболические дает изменение поляризаций волн при распространении через кристалл, показанное на рис. 1в.

4. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Если коэффициенты первого порядка f_{10} и f_{01} равны нулю, а это возможно при

$$\begin{aligned} g_{xz} &= -(d_{xx}d_{xz} + d_{xy}d_{yz})/2g_{zz}, \\ g_{yz} &= (d_{xx}d_{yz} - d_{xy}d_{xz})/2g_{zz}, \end{aligned} \tag{9}$$

то имеем особую точку и необходимо рассматривать коэффициенты второго порядка. Если дискриминант $\Delta_1 = f_{11}^2 - 4f_{02}f_{20} > 0$, то реализуется пересечение двух ветвей конической поверхности и соответствующая узловая точка A_1 , показанная на рис. 2. В дальнейшем обозначения особых точек будут совпадать с обозначениями простых алгебр Ли [11]. Поворотом системы координат можно обратить в нуль коэффициент f_{20} и тем самым направить касательную к одной из ветвей вдоль оси x . Если $f_{02} > 0$, то по обе стороны в направлении оси y имеем линейную зависимость $\Delta\eta \approx \sqrt{f_{02}y}$ и секторы равных поглощений собственных волн (рис. 3б). Если $f_{02} < 0$, то получаем линейную зависимость

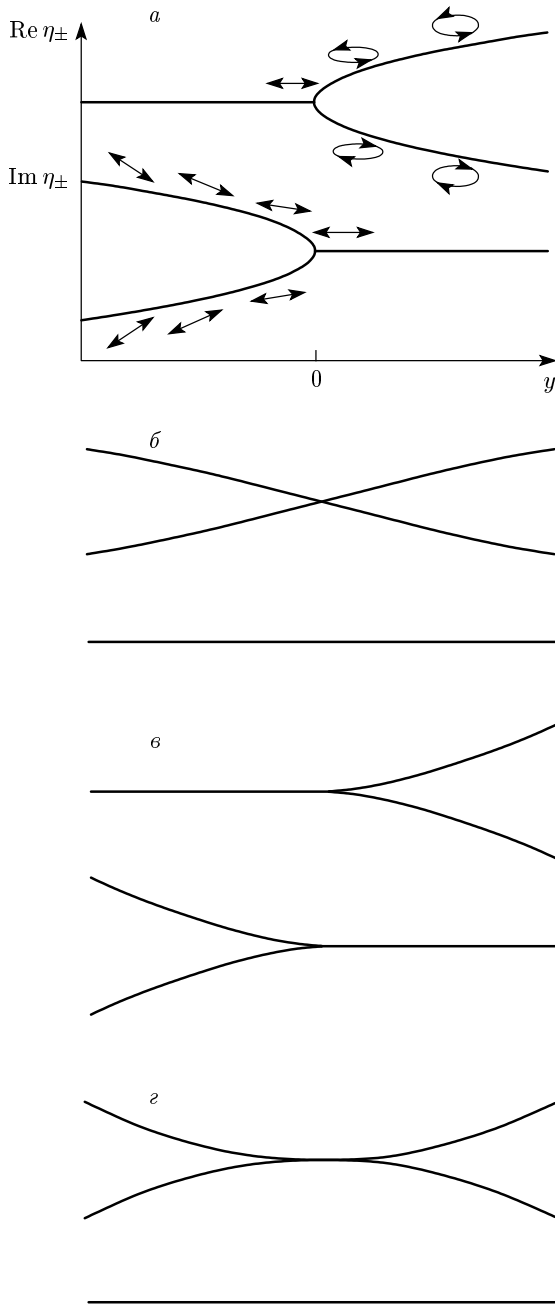


Рис. 3. Зависимости действительных и мнимых частей собственных значений η_{\pm} от координаты y : *a* — в малой окрестности точки общего положения на сингулярном конусе (поляризации собственных волн изображены рядом с кривыми для случая $g_{zz} = -d_{xy} > 0$); *б* — в окрестности узловой точки (здесь и далее не указывается, какой части соответствует каждая кривая, так как возможны оба варианта); *в* — в окрестности точки возврата (вдоль оси x) и тройной точки; *г* — в окрестности вырожденных двойного и четверного узлов

мнимой части $\Delta\eta$ и секторы равных скоростей. В связи с этим на рис. 3б–3г не указывается, какой части η_{\pm} , действительной или мнимой, соответствует каждая кривая; возможны оба варианта.

Если дискриминант $\Delta_1 < 0$, то имеем изолированную точку A_1^* (см. рис. 2) в области равных поглощений или равных скоростей в зависимости от знака f_{02} .

При $\Delta_1 = 0$ ($f_{02} \neq 0, f_{20} = f_{11} = 0$) и $f_{30} \neq 0$ возникает особенность типа полукубической точки возврата A_2 (см. рис. 2):

$$y^2 = -(f_{30}/f_{02})x^3 + o(x^3). \quad (10)$$

Это возможно при условии

$$\begin{aligned} g_{xx} &= (4g_{yz}^2 + g_{zz}^2 + d_{xx}d_{zz})/2g_{zz}, \\ g_{xy} &= (d_{xy}d_{zz} - 4g_{xz}g_{yz})/g_{zz}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для собственных значений получаем тоже полукубические зависимости от x (рис. 3в).

Если $f_{30} = 0$, то необходимо рассмотреть дискриминант $\Delta_2 = f_{21}^2 - 4f_{02}f_{40}$. При $\Delta_2 > 0$ реализуется особенность типа точки касания или самоприкосновения A_3 (см. рис. 2):

$$y = \left(-f_{21} \pm \sqrt{\Delta_2}\right) x^2/2f_{02} + o(x^2). \quad (12)$$

При $\Delta_2 < 0$ имеем изолированную точку касания A_3^* (см. рис. 2).

При $\Delta_2 = 0$ вычисления следующего дискриминанта дают $\Delta_3 = f_{21}f_{31}/2 - f_{12}f_{40} = 0$, и другие двойные особые точки не возникают, что обусловлено наличием связей между коэффициентами в выражении (4). Получаем дважды вырожденную кривую второго порядка $\{2A_0\}$ (см. рис. 2, фигурные скобки означают, что кривые не являются неприводимыми кривыми четвертого порядка). Зависимости η_{\pm} линейные (рис. 3б).

И, наконец, при $f_{02} = f_{20} = f_{11} = 0$ возможна тройная точка D_4 , в которой пересекаются три ветви конической поверхности (см. рис. 2). К условиям (11) добавится еще

$$g_{yy} = (4g_{xz}^2 + g_{zz}^2 - d_{yy}d_{zz})/2g_{zz}.$$

В малой окрестности такой точки имеем

$$(f_{03}y^2 + f_{12}yx + f_{21}x^2)y \approx 0$$

при $f_{30} = 0$ и $\Delta_4 = f_{12}^2 - 4f_{03}f_{21} > 0$. Приведем пример тройной точки при $g_{xx} = 2g_{yz} = 2g_{yy} = g_{zz} = d_{xy} = -d_{xz}$ (остальные компоненты равны нулю). Отметим, что $\Delta\eta \approx \sqrt{f_{03}y^3}$, и при движении

вдоль оси y происходит переход из области равных поглощений в область равных скоростей (или наоборот). Для собственных значений получаем полукубические зависимости (см. рис. 3б). Другие тройные особые точки не возникают в связи с тем, что не реализуется случай $\Delta_4 < 0$. При $\Delta_4 = 0$ все коэффициенты третьего порядка равны нулю и мы имеем вырожденный двойной узел $\{2A_1\}$ (см. рис. 2), например, при $2g_{xx} = 2g_{yy} = g_{zz} = d_{xy}$, причем зависимость $\Delta\eta \approx \sqrt{f_{04}} y^2$ квадратичная при движении вдоль оси y (см. рис. 3з).

Отдельного рассмотрения требует окрестность обычной оптической оси при $d_{xx} = d_{xy} = g_{zz} = 0$. В этом случае всегда $f_{10} = f_{01} = 0$, что означает постоянное наличие особой точки, и ось не может занимать общее положение на невырожденном конусе четвертого порядка. Повторяя шаги, как и в случае сингулярной оси, можно убедиться в наличии при определенных условиях особых точек A_1, A_1^*, A_2, A_3 и A_3^* . Однако при $\Delta_2 = 0$ возможен случай $\Delta_3 \neq 0$, когда существует точка возврата второго рода или клюв A_4 (см. рис. 2) — обе ветви расположены по одну сторону по отношению к общей касательной

$$y = -\frac{f_{21}}{2f_{02}} x^2 \pm \frac{\sqrt{\Delta_3}}{f_{02}} x^{5/2} + o(x^2). \quad (13)$$

Например, такая точка возможна при $g_{xy} = g_{xz} = g_{yy} = d_{yz}/2$.

Заметим, что вдоль оси y для точек A_2, A_3 и A_4 с обычной оптической осью всегда находится область равных скоростей, поскольку $f_{02} < 0$.

При $\Delta_3 = 0$ другие двойные особые точки не возникают, и мы получаем дважды вырожденную кривую второго порядка ($\{2A_0\}$, см. рис. 2). Тройной узел тоже отсутствует, что обусловлено наличием связей между коэффициентами в выражении (5). Могут иметь место вырожденный двойной узел $\{2A_1\}$, распадающийся четверной узел [5], распадающаяся четверная изолированная точка, а также четырежды вырожденная плоскость. Во всех случаях зависимость $\Delta\eta$ от y квадратичная (см. рис. 3з).

5. КОНФИГУРАЦИЯ СИНГУЛЯРНЫХ КОНУСОВ

В работе [12] получена полная классификация неприводимых вещественных кривых четвертой степени. Всего имеется 99 типов, которые можно получить путем последовательных бифуркаций некоторых четырех основных кривых. В основу классификации положены понятия грубости и степеней негру-

бости систем, зависящих от параметров. Эти понятия имеют важный физический смысл и впервые использовались в теории колебаний [13]. Всякой кривой ставится в соответствие точка в конфигурационном пространстве коэффициентов. Кривая называется грубой (или имеющей нулевую степень негрубости), если при любых малых вариациях коэффициентов получаются кривые, гомеоморфные исходной. Кривая имеет $(l + 1)$ -ю степень негрубости, если при вариациях коэффициентов могут получаться кривые l -й степени негрубости, а также, возможно, кривые, гомеоморфные исходной. Это определение следует читать последовательно для $l = 0, 1, 2$ и т. д.

Кривые без особых точек являются грубыми. В работе [12] установлено, какие наборы из 13 возможных видов особых точек может иметь неприводимая кривая четвертой степени и показано, что наибольшая степень негрубости кривой равна шести.

Поскольку в рассматриваемой оптической задаче имеют место только семь видов особых точек, следует ожидать, что число типов кривых значительно уменьшится. Перечислим здесь возможные бифуркации, приводящие к понижению степени негрубости кривой на единицу для имеющегося набора особых точек:

- изолированная точка A_1^* может превращаться в овал или исчезать;
- узел A_1 может распадаться на две ветви;
- точка возврата A_2 может превращаться в узел или распадаться на изолированную точку A_1^* и одну ветвь;
- точка касания A_3 может превращаться в точку возврата A_2 или распадаться на два связанных узла A_1 ;
- изолированная точка касания A_3^* может превращаться в точку возврата A_2 или распадаться на две изолированные точки A_1^* ;
- клюв A_4 может превращаться в точку касания A_3 или распадаться на изолированную точку касания A_3^* и одну ветвь, на связанные точку возврата A_2 и узел A_1 ; на точку возврата A_2 и изолированную точку A_1^* ;
- тройная точка D_4 может превращаться в точку касания A_3 и одну ветвь.

Распады особых точек описываются в точности распадом соответствующих диаграмм Дынкина [11].

Наибольшая степень негрубости неприводимых кривых в данной задаче равна четырем. Это кривые, содержащие единственный клюв A_4 или тройную точку D_4 , и еще шесть типов $A_1^* A_3^*, A_1 A_3, 2A_2, A_1^* \tilde{A}_3, 2\tilde{A}_1 \tilde{A}_2, \tilde{A}_1 \tilde{A}_3$, изображенных на рис. 4 и 5, где

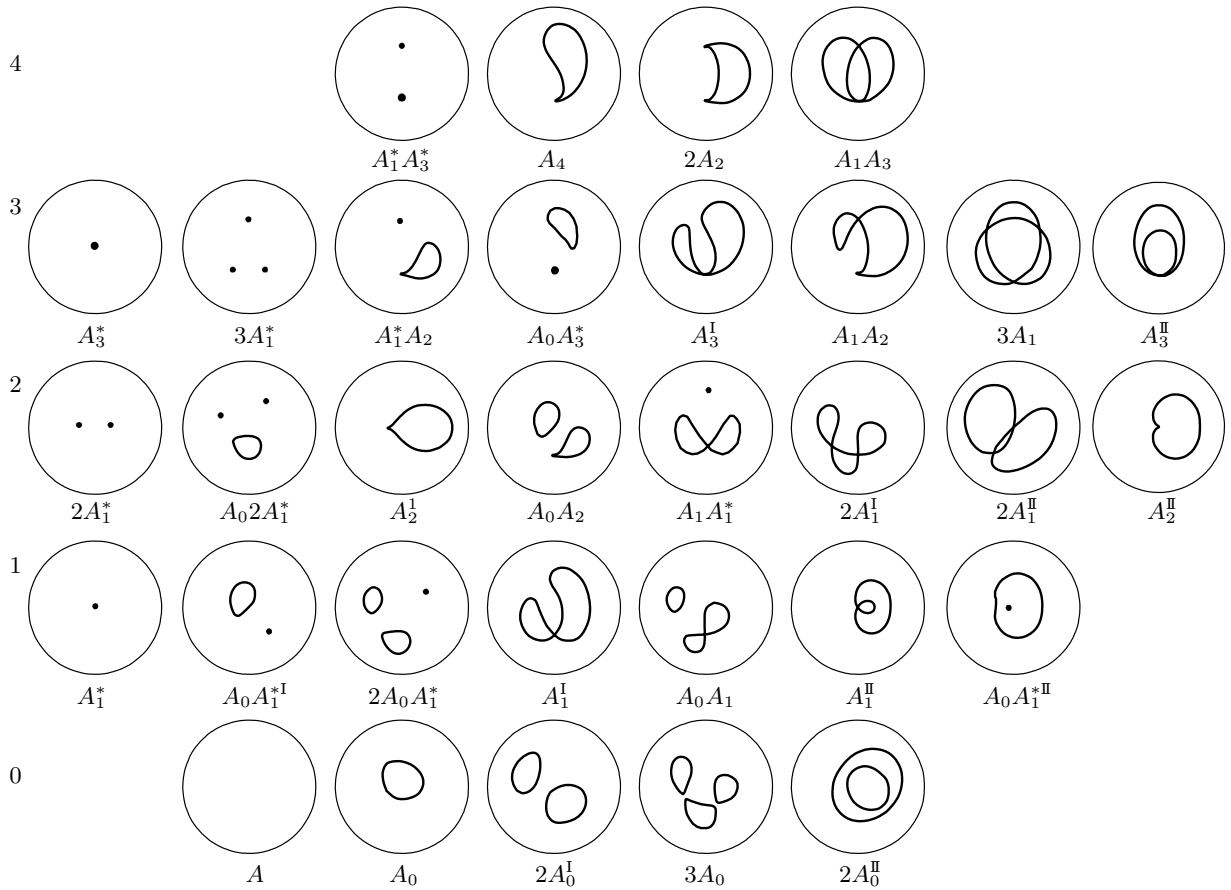


Рис. 4. Конфигурации закрытых конусов. Цифры в начале строк обозначают степени негрубости конусов

тильда означает открытый характер кривой. Кривые открытого типа получаются путем бифуркаций вырожденных двойных узлов $\{2\tilde{A}_1\}$, а закрытого типа — путем бифуркаций вырожденных двойных овалов $\{2A_0\}$ (можно сказать, что они имеют пятую степень негрубости, если распространить это понятие и на вырожденные кривые). Последовательные бифуркации этих кривых приводят к 49 неприводимым типам проективных кривых, а следовательно, и сингулярных конусов.

На рис. 4 и 5 изображены стереографические проекции линии пересечения конусов с единичной сферой для всех типов. Горизонтальные строки соответствуют различным степеням негрубости. Все типы, за исключением A_2^I и A_2^{II} , различаются таким образом, что никакими непрерывными однозначными отображениями их нельзя преобразовать друг в друга при условии сохранения набора особых точек. Бифуркации открытых конусов могут приводить к закрытым, но обратное утверждение не верно. Открытый конус $3\tilde{A}_1^{II}$ получается путем прямой бифурка-

ции вырожденного двойного узла $\{2\tilde{A}_1\}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что все типы реализуются. Так, на рис. 4 и 5 приведены расчетные кривые при конкретных значениях компонент тензоров. Отметим, что мы не выделяем в отдельные типы неприводимые конусы с комплексными особыми точками (которые могут иметь место), поскольку они не дают новых топологических типов конусов. Также могут иметь место приводимые конусы, являющиеся различными сочетаниями плоскостей, конусов второй и третьей степеней. Их перечисление не представляет особых математических затруднений, но менее изящно.

Отметим, что в магнитооптике без учета пространственной дисперсии возможны только 13 типов неприводимых сингулярных конусов, включая изолированные оси [6, 14], среди которых, однако, имеются и два типа топологически отличных от рассмотренных выше, которые получаются из $3\tilde{A}_1^{II}$ и $2A_1^{II}$ путем ребифуркации двух узлов в одну точку касания. Последний тип в кристаллах с естественной

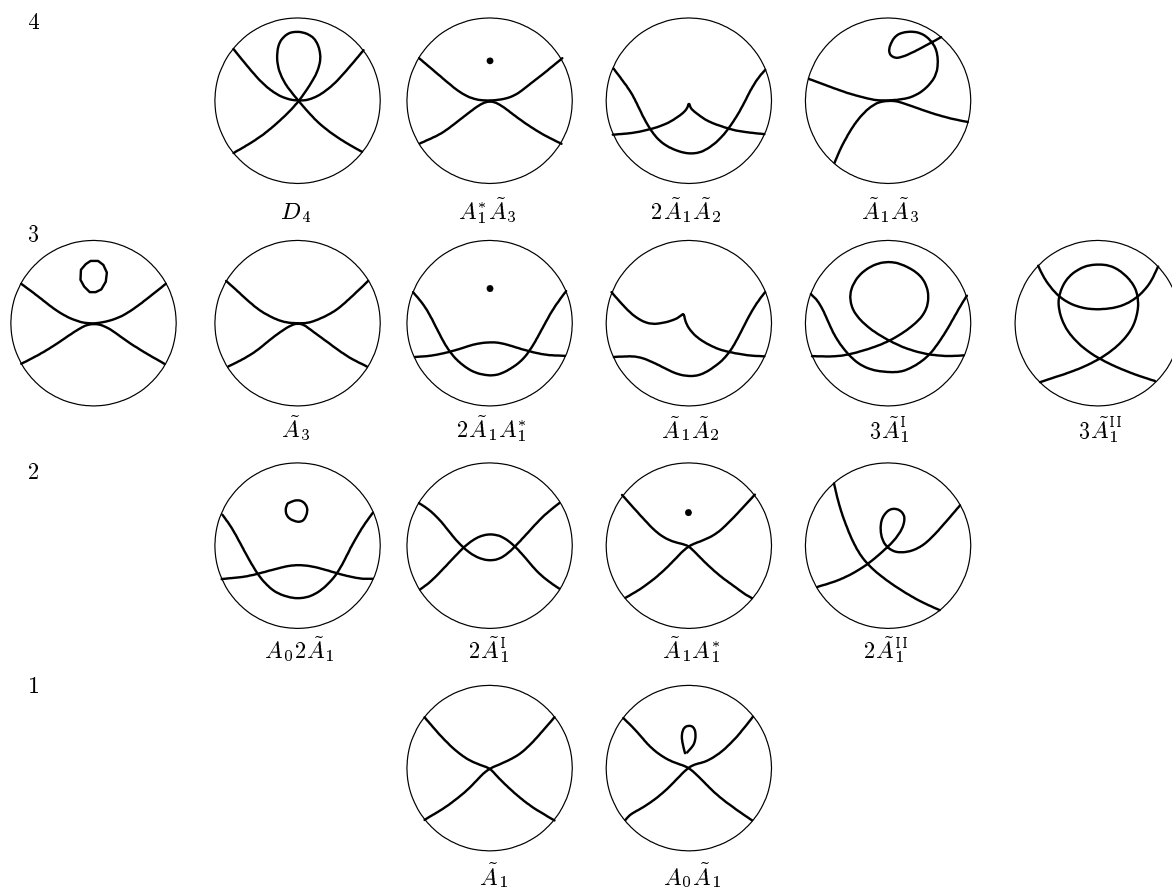


Рис. 5. Конфигурации открытых конусов

оптической активностью оказывается приводимым, т. е. соответствует двум касающимся конусам второй степени.

Теперь зададимся вопросом, на какой угол повернется поляризация собственной волны при обходе по замкнутому контуру конуса без особых точек A_0 . Согласно работе [8], для искомого контурного интеграла получим

$$\oint d\rho = 2\pi \sum_i C_i, \tag{14}$$

где C_i — топологические индексы точек, соответствующих выходам оптических осей (без учета гиротропии), попадающих внутрь контура. Так как индексы точек могут принимать значения $+1$ (оптическая ось одноосного кристалла) или $+1/2$ (оптическая ось двуосного кристалла), а сингулярные круговые оси с индексами $+1/4$ отсутствуют, то движение по замкнутому контуру может приводить к повороту поляризации на 0 , $+\pi$ или $+2\pi$.

6. О МАЛОМ ПАРАМЕТРЕ В КРИСТАЛЛООПТИКЕ

В теории колебаний из соображений устойчивости принято ограничиваться изучением грубых систем. Негрубые случаи являются своеобразными «водоразделами» между различными грубыми состояниями. Исходя из такой аналогии, в рассматриваемой задаче наибольшее значение представляют случаи сингулярных конусов без особых точек, и чем выше степень негрубости, тем маловероятней соответствующее состояние. Однако ситуация в кристаллооптике совершенно противоположная и ближе по своей сути к теории возмущений. В качестве многокомпонентного малого параметра выступают все компоненты тензоров d_{ij} и g_{ij} . Если один из тензоров, например g_{ij} , привести к диагональному виду, то без ограничения общности достаточно рассматривать восьмимерный малый параметр в пространстве R^8 . Началу координат будет соответствовать обычная изотропная среда, обладающая наибольшими симметрией и степенью негрубости. Точ-

кам в малой окрестности начала координат будут соответствовать все рассмотренные типы конусов. Это связано с тем, что решения уравнения (2) не изменяются при одновременном масштабировании всех компонент тензоров. Грубым сингулярным конусам соответствуют области пространства R^8 . Конусам l -й степени негрубости соответствуют гиперповерхности размерности $8 - l$. Одноосным кристаллам соответствуют линии, имеющие размерность 1. Малой окрестности любой точки этой линии соответствуют все закрытые типы конусов. Можно сказать, что все закрытые конусы возникают в результате бифуркаций оптической оси одноосного кристалла.

Отметим, что все типы конусов сохраняются и при одновременном умножении всей анизотропной части тензора η_{ij} на произвольное комплексное число. В частности, при умножении на мнимую единицу i анизотропная симметричная часть становится эрмитовой, а антисимметричная часть — антиэрмитовой. Во всем предыдущем изложении меняются местами области равных скоростей и равных поглощений, а кривые на рис. 1 оказываются повернутыми на $\pi/2$.

7. ОЦЕНКИ И ВОЗМОЖНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНЫХ КОНУСОВ

Приведем некоторые оценки для кристалла CdP₂ (симметрия D_4). В «изотропной» точке на длине волны 654 нм [2] имеем существенную анизотропию поглощения. Главные коэффициенты поглощения для света, поляризованного вдоль и поперек оптической оси, составляют $\alpha_{\parallel} = 58 \text{ см}^{-1}$ и $\alpha_{\perp} = 22 \text{ см}^{-1}$. Отсюда получаем значения компонент тензора дихроизма $d_{xx} = 0.5 \cdot 10^{-5}$ и $d_{zz} = 1.3 \cdot 10^{-5}$. Несмотря на то что гиротропия очень слабое свойство и удельное вращение плоскости поляризации для данного кристалла вдоль оптической оси составляет около $510^\circ/\text{мм}$, для пластинки толщиной, равной глубине поглощения $\alpha^{-1} \approx 0.2 \text{ мм}$, получаем значительное вращение около 100° . Это связано с тем, что компоненты тензора гирации (в разложении обратного диэлектрического тензора) $g_{xx} = 1.0 \cdot 10^{-5}$, $g_{zz} = -4.0 \cdot 10^{-5}$ [15] сопоставимы по величине с компонентами тензора дихроизма (при расчетах показатель преломления взят $n_0 = 3.6$).

Конфигурация сингулярных конусов в CdP₂ соответствует типу $2A_0^{\text{II}}$, имеем два вложенных соосных конуса второго порядка. Из уравнения (2) полу-

чена следующая формула для полярных углов β_{\pm} образующих конусов:

$$\text{tg } \beta_{\pm} = \sqrt{\frac{2g_{xx} \pm (d_{zz} - d_{xx})}{2g_{zz}}}.$$

Оценки дают значения углов $\beta_+ = 37^\circ$, $\beta_- = 31^\circ$, и расхождение образующих конусов составляет 6° . Рассмотренные особенности могут проявляться в интерференции в сходящемся пучке света в скрещенных поляризаторах. При наблюдении коноскопической картины на пластинке, вырезанной перпендикулярно какой-либо образующей, при изменении азимута входной поляризации на $\pi/2$ должен происходить сдвиг центральной полосы нулевой интенсивности на угол, соответствующий разности углов $\beta_+ - \beta_-$.

Расчеты для кристалла AgGaS₂ (симметрия D_{2d}), проведенные в работе [5], и для кристалла CdGa₂S₄ (симметрия S_4) [3, 16] также подтверждают наличие в «изотропной» точке распадающегося четверного узла, состоящего из плоскостей сингулярных оптических осей.

Известные данные по гиротропии кристаллов показывают ограниченные возможности по реализации различных топологических конфигураций сингулярных конусов. Один из путей реализации условий «изотропной» точки в кристаллах низших сингоний состоит в том, чтобы меняя длину волны, попытаться найти совпадение хотя бы двух главных показателей преломления. Третий показатель преломления можно подстроить путем приложения соответствующего одноосного механического напряжения за счет пьезооптического эффекта (возможно, при согласованном сдвиге длины волны). Другим путем может служить интенсивно развивающееся в последнее время направление исследований трехмерных фотонных метаматериалов. Показана принципиальная возможность искусственного конструирования материалов с заданными показателями преломления и соотношениями компонент тензоров гирации и поглощения на заданной длине волны [17].

Отметим, что реализованный топологический подход перекликается с описанием возможных конфигураций линий равных скоростей и равных поглощений в негиротропных кристаллах [18]. Полученные результаты показывают, что кристаллооптика может служить удобным объектом для изучения различных поляризационных сингулярностей и топологических эффектов, в частности, конических.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Значения коэффициентов в уравнении (4) следующие:

$$\begin{aligned}
 f_{00} &= g_{zz}^2 - d_{xx}^2 - d_{xy}^2, \\
 f_{10} &= 4g_{xz}g_{zz} + 2d_{xx}d_{xz} + 2d_{xy}d_{yz}, \\
 f_{20} &= 2g_{xx}g_{zz} + 4g_{xz}^2 - d_{xx}^2 - d_{xy}^2 - d_{xz}^2 - d_{yz}^2 - d_{xx}d_{zz}, \\
 f_{11} &= 4g_{xy}g_{zz} + 8g_{xz}g_{yz} - 2d_{xy}d_{zz}, \\
 f_{30} &= 4g_{xx}g_{xz} + (d_{xx} + d_{zz})d_{xz} + 2d_{xy}d_{yz}, \\
 f_{21} &= 4g_{xx}g_{yz} + 8g_{xy}g_{xz} + (d_{zz} - 3d_{xx})d_{yz}, \\
 f_{40} &= g_{xx}^2 - (d_{xx} + d_{zz})^2/4 - d_{yz}^2, \\
 f_{31} &= 4g_{xx}g_{xy} - (d_{xx} + d_{zz})d_{xy} + 2d_{xz}d_{yz}, \\
 f_{22} &= 2g_{xx}g_{yy} + 4g_{xy}^2 + (d_{xx}^2 - d_{zz}^2)/2 - d_{xy}^2 - d_{xz}^2 - d_{yz}^2.
 \end{aligned}$$

Остальные шесть коэффициентов получаем при одновременной перестановке индексов $a \leftrightarrow b$ и $x \leftrightarrow y$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, ЖЭТФ **13**, 853 (2008).
2. S. I. Beril, I. G. Stamov, N. N. Syrbu, and V. V. Zalamai, Physica B **422**, 12 (2013).
3. M. May, S. Debrus, J. Amzallag et al., J. Opt. Soc. Amer. A **9**, 1412 (1992).
4. O. S. Kushnir, O. S. Dzendzelyuk, and V. A. Hrabovskyy, Semicond. Phys., Quant. Electr. and Optoelectr. **10**, 48 (2007).
5. В. С. Меркулов, Письма в ЖЭТФ **99**, 447 (2014).
6. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, УФН **183**, 1123 (2013).
7. В. С. Меркулов, Опт. и спектр. **114**, 101 (2013).
8. M. V. Berry and M. R. Dennis, Proc. Roy. Soc. London A **459**, 1261 (2003).
9. Ф. И. Федоров, *Оптика анизотропных сред*, Эдиториал УРСС, Москва (2004).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
11. В. И. Арнольд, УФН **141**, 569 (1983).
12. Д. А. Гудков, Г. А. Уткин, М. Л. Тай, Матем. сб. **69**, 222 (1966).
13. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, ДАН СССР **14**, 247 (1937).
14. В. С. Меркулов, Ж. прикл. спектр. **79**, 377 (2012).
15. G. Babonas, N. S. Korets, and S. Marcinkevičius, Phys. Stat. Sol. (b) **117**, 477 (1983).
16. M. V. Hobden, Acta Cryst. A **24**, 676 (1968); **25**, 633 (1969).
17. C. M. Soukoulis and M. Wegener, Nature Photonics **5**, 523 (2011).
18. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, Л. А. Шувалов, Кристаллография **46**, 742 (2001).