

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕВЫХ СДВИГОВ РЕЗОНАНСОВ РАМСИ НА УЛЬТРАХОЛОДНЫХ АТОМАХ И ИОНАХ

К. С. Табатчикова^{a,b,*}, А. В. Тайченачев^{b,c}, А. К. Дмитриев^{a,c}, В. И. Юдин^{a-d}

^a Новосибирский государственный технический университет
630073, Новосибирск, Россия

^b Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия

^c Институт лазерной физики Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

^d Российский квантовый центр
142025, Сколково, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 9 августа 2014 г.

Рассмотрено влияние конечной ширины спектральной линии лазерного излучения и спонтанной релаксации уровней на эффективность подавления полевого сдвига центрального резонанса для обобщенной схемы Рамси с импульсами разной длительности и скачком фазы во втором импульсе. Определены оптимальные условия схемы, соответствующие минимальному сдвигу частоты и максимальной амплитуде резонанса.

DOI: 10.7868/S0044451015020042

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время лазерная спектроскопия и фундаментальная метрология являются одними из наиболее важных и активно развивающихся направлений в современной физике. Актуальной задачей современной лазерной спектроскопии является создание оптических стандартов частоты с относительной неопределенностью на уровне 10^{-18} и ниже. Увеличение точности измерения частоты позволяет выполнять проверку фундаментальных физических теорий, таких как теория относительности (как специальная, так и общая), квантовая электродинамика, квантовая хромодинамика, теория, предсказывающая дрейф фундаментальных физических констант, и др. От точности измерения частоты и времени напрямую зависят технические характеристики информационно-телекоммуникационных сетей, глобальных систем спутниковой навигации и т. д. [1]. Наибольший прогресс, безусловно, достигнут в областях, связанных с разработкой оптических стандар-

тов частоты на одиночных ионах в радиочастотной ловушке [2], и стандартов на ансамбле нейтральных атомов в оптической решетке [3, 4].

В оптической спектроскопии сверхвысокого разрешения для достижения предельно узкой ширины резонанса используются сильно запрещенные переходы [5–7]. В связи с этим наибольшим частотным сдвигом является полевой сдвиг, так как высокая интенсивность пробного поля, необходимая для возбуждения сильно запрещенного перехода, неизбежно ведет к сдвигу уровней из-за динамического эффекта Штарка. Учесть влияние полевого сдвига можно, вычисляя поправку к измеряемой частоте резонанса [8], однако введение такой поправки, как показывает практика, весьма затруднительно, например, из-за невысокой точности определения интенсивности возбуждающего излучения [9–12].

В работе [13] был предложен обобщенный метод рамсеевской спектроскопии, позволяющий эффективно подавлять сдвиг вершины центрального резонанса Рамси из-за полевого сдвига уровней атома во время действия импульсов пробного поля. Основным принципом обобщенного метода Рамси является в следующем. Ансамбль нейтральных локализо-

*E-mail: k.tabatchikova@gmail.com

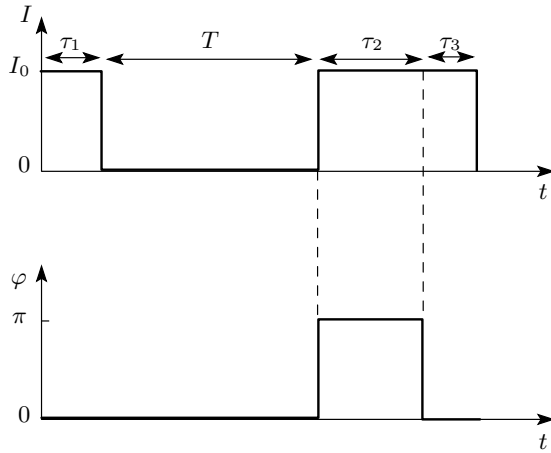


Рис. 1. Обобщенная схема Рамси с длительностью темного периода T : $I(t)$ — зависимость интенсивности пробного поля от времени, $\varphi(t)$ — зависимость фазы пробного поля от времени

ванных атомов или одиночный локализованный ион подвергаются действию двух импульсов лазерного излучения. При определенных соотношениях между длительностями импульсов зависимость частотного сдвига центрального резонанса от сдвига резонансной частоты атома становится близкой к кубической. Таким образом, появляется интервал значений сдвига частоты перехода, для которого практически полностью отсутствует полевой сдвиг центрального резонанса Рамси (интервал подавления).

В условиях реального эксперимента в точке нахождения атома (или иона) трудно контролировать интенсивность пробного поля, поэтому типичные флуктуации частоты Раби достигают порядка нескольких процентов. Такие флуктуации частоты Раби приводят к резкому снижению эффективности подавления полевого сдвига. Для того чтобы избавиться от сильного влияния флуктуаций частоты Раби в работе [13] было предложено воспользоваться дополнительной степенью свободы в выборе фазы импульса. В таком случае второй импульс становится композитным, т. е. во время первой части импульса фаза возбуждающего излучения скачком меняется на π . Теоретический анализ, проведенный в работе [14], полностью подтверждает сглаживание влияния колебаний интенсивности на эффективность подавления полевого сдвига. Поэтому далее рассматривается только схема со скачком фазы во втором импульсе (рис. 1).

Первые эксперименты с использованием данного метода были проведены на октупольном перехо-

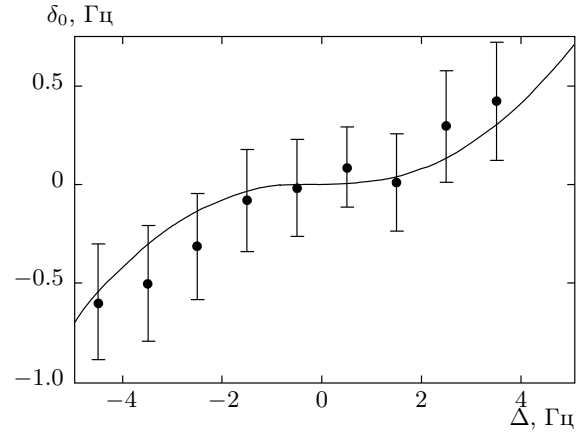


Рис. 2. Зависимость частотного сдвига центрального резонанса δ_0 от сдвига резонансной частоты иона Δ для $T = 144$ мс, $\tau_1 = \tau_3 = \tau_2/2 = 36$ мс, $\gamma = 5 \cdot 10^{-10}$ Гц, $\gamma_d = 10^{-1}$ Гц, $\Omega_0 = 45$ Гц, полученная экспериментально в работе [15]

де иона иттербия в РТВ (Германия) при совместном участии коллектива ученых ИЛФ СО РАН (Россия) [15]. Они подтвердили высокую эффективность описанного метода (см. рис. 2). На рисунке видно, что зависимость сдвига частоты центрального резонанса от сдвига резонансной частоты перехода иона близка к кубической.

Применение обобщенного метода рамсеевской спектроскопии открывает достаточно широкие возможности для создания оптических часов с относительной неопределенностью 10^{-18} и ниже. Основная задача данной работы состоит в теоретическом исследовании обобщенной схемы Рамси, предложенной и описанной в работе [13], определении оптимальных параметров возбуждения и степени влияния конечной ширины спектральной линии лазерного излучения и спонтанной релаксации уровней на ширину интервала подавления полевого сдвига.

2. ОБОБЩЕННАЯ СХЕМА РАМСИ

Будем исходить из следующей постановки задачи. В минимумах оптического потенциала на магической длине волны локализованы ультрахолодные двухуровневые атомы, область локализации которых много меньше длины волны возбуждающего излучения, поэтому эффектом Доплера и эффектом отдачи можно пренебречь. Атомы находятся в основном состоянии $|g\rangle$. Переход атомов в возбужденное состояние $|e\rangle$ осуществляется по обобщенной схеме Рамси, приведенной на рис. 1. Для одиночного иона

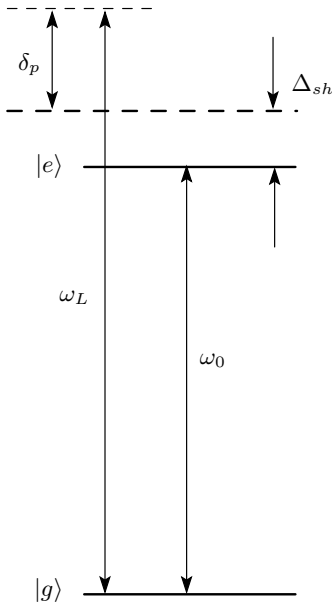


Рис. 3. Схема уровней двухуровневого атома с нижним основным состоянием $|g\rangle$ и частотой резонансного перехода ω_0

в радиочастотной ловушке имеет место аналогичная постановка задачи, поэтому дальнейшие вычисления будут справедливы и для случая с одиночным ионом.

Для описания взаимодействия атомов с импульсным полем (рис. 1) воспользуемся квантовым кинетическим уравнением для матрицы плотности [16, 17]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \hat{\Gamma}\{\hat{\rho}\}, \quad (1)$$

где $\hat{\rho}$ — матрица плотности:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{ee} & \rho_{eg} \\ \rho_{ge} & \rho_{gg} \end{pmatrix},$$

\hat{H} — гамильтониан, $\hat{\Gamma}\{\hat{\rho}\}$ — оператор релаксации.

Для промежутков времени τ_1 и τ_3 , когда ансамбль атомов подвергается действию внешнего электромагнитного поля, гамильтониан записывается в следующем виде:

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\delta_p & \Omega_0 \\ \Omega_0^* & \delta_p \end{pmatrix},$$

где Ω_0 — частота Раби, $\delta_p = \omega_L - \omega_0 - \Delta_{sh}$ — отстройка частоты пробного поля от частоты возмущенного перехода, Δ_{sh} — сдвиг частоты перехода атома во время действия лазерных импульсов (рис. 3). Для

промежутка времени τ_2 , когда фаза возбуждающего электромагнитного поля скачком меняется на π (рис. 1), в гамильтониане Ω_0 заменяется на $-\Omega_0$. Во время темного периода T частота Раби Ω_0 обращается в нуль и полный сдвиг уровней отсутствует, соответственно δ_p заменяется на δ — отстройку частоты поля от частоты невозмущенного перехода. Оператор релаксации во время действия импульсов пробного поля имеет следующий вид:

$$\hat{\Gamma}\{\hat{\rho}\} = \begin{pmatrix} -\gamma\rho_{ee} & \Gamma\rho_{eg} \\ \Gamma\rho_{ge} & \gamma\rho_{ee} \end{pmatrix},$$

где $\Gamma = -(\gamma + \gamma_d)/2$, γ — константа спонтанной релаксации уровней атома, γ_d — константа затухания недиагональных элементов матрицы плотности ρ_{eg} и ρ_{ge} за счет конечной ширины спектральной линии лазерного излучения. Следует отметить, что учет конечной ширины спектральной линии лазерного излучения за счет введения константы γ_d в уравнения для недиагональных элементов матрицы плотности является математически строгим результатом только для лазерного излучения с белым шумом частоты, т. е. имеющих линию спектра лоренцевской формы [17, 18]. Хорошо известно [18, 19], что эта модель диффузии фазы хорошо описывает так называемые естественные шумы излучения одномодового лазера много выше порога генерации. В общем случае в любой реальной лазерной системе присутствуют в той или иной степени технические шумы, для которых не существует универсальной математической модели. Поэтому применимость количественных результатов, полученных в данной работе в рамках упрощенной модели флуктуаций лазерного излучения, требует дополнительного анализа конкретной лазерной системы. Однако общие качественные выводы о влиянии флуктуаций частоты на эффективность обобщенного метода Рамси и выбор оптимальных параметров останутся справедливыми и для более сложной модели шумов.

Уравнение (1) можно переписать как систему из четырех однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и далее представить в матричной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \hat{L}_i \rho, \quad (2)$$

где $\rho = (\rho_{ee} \rho_{eg} \rho_{ge} \rho_{gg})^T$, \hat{L}_i — лиувиллиан для i -го промежутка времени. Для промежутков времени τ_1 и τ_3 лиувиллиан записывается в следующем виде:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -\gamma & \frac{i\Omega_0^*}{2} & -\frac{i\Omega_0}{2} & 0 \\ \frac{i\Omega_0}{2} & \Gamma + i\delta_p & 0 & -\frac{i\Omega_0}{2} \\ -\frac{i\Omega_0^*}{2} & 0 & \Gamma - i\delta_p & \frac{i\Omega_0}{2} \\ \gamma & -\frac{i\Omega_0^*}{2} & \frac{i\Omega_0}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для остальных промежутков времени для лиувиллиана имеют место аналогичные замены, описанные ранее. Считается, что в начальный момент времени заселен только нижний уровень:

$$\rho|_{t=0} = (0001)^T = \rho_0.$$

Для того чтобы найти населенности уровней в конце действия последнего импульса, уравнение (2) последовательно решается сначала для первого импульса, затем для темного периода и, наконец, для первой и далее второй частей последнего импульса. Населенности уровней в конце первого импульса являются начальными условиями уравнения (2), описывающего поведение системы во время темного периода, населенности уровней в конце темного периода являются начальными условиями для уравнения, описывающего эволюцию системы во время первой части второго импульса и так далее. Отсюда населенность верхнего уровня ρ_{ee} :

$$\rho_{ee} = M \exp(\hat{L}_T \tau_3) \exp(\hat{L}_t \tau_2) \times \exp(\hat{L}_T T) \exp(\hat{L}_t \tau_1) \rho_0, \quad (3)$$

где \hat{L}_T — лиувиллиан во время темного периода, \hat{L}_t — лиувиллиан для промежутка времени τ_2 , $M = (1000)$.

Чтобы найти сдвиг положения центрального резонанса, исходя из самых общих математических соображений, представим сигнал (3) в виде ряда Тейлора по степеням отстройки δ :

$$\rho_{ee} = a^{(0)} + a^{(1)}\delta + a^{(2)}\delta^2 + \dots$$

Отсюда видно, что сдвиг центрального резонанса

$$\delta_0 \approx -\frac{a^{(1)}}{2a^{(2)}}. \quad (4)$$

Если сдвиг частоты перехода во время действия лазерного импульса сравним или больше частоты Раби Ω_0 , то при реализации обобщенного метода рамсеевской спектроскопии необходимо выполнить следующее. Во время действия электромагнитного

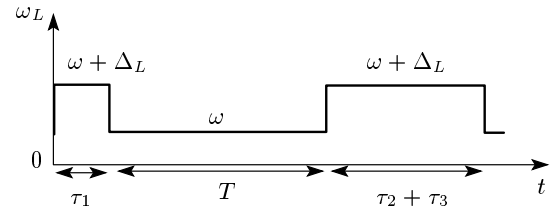


Рис. 4. Дополнительный скачок частоты лазера ω на Δ_L во время действия импульсов пробного поля

поля на ансамбль атомов или одиночный ион частота лазерного излучения скачком меняется на некоторую величину Δ_L , сопоставимую с величиной сдвига частоты перехода во время действия импульсов Δ_{sh} (рис. 3). В итоге частота лазерного излучения во время действия импульсов может быть записана как $\omega_L = \omega + \Delta_L$. При реализации экспериментальных схем оптических стандартов частоты данный скачок частоты на фиксированную величину можно получить, например, с помощью акустооптического модулятора. В результате наблюдаемый сдвиг частоты перехода уменьшается и $\delta_p = \omega - \omega_0 - \Delta$, где $\Delta = \Delta_{sh} - \Delta_L$, что обеспечит выполнение условия $|\Delta/\Omega_0| \ll 1$. Во время темного периода акустооптический модулятор отключается и частота лазерного излучения становится равной ω и $\delta = \omega - \omega_0$ (рис. 4). Далее коэффициент $a^{(1)}$ в связи с малостью параметра Δ/Ω_0 можно представить в виде разложения в ряд по степеням (Δ/Ω_0) :

$$a^{(1)} = a_1^{(1)} \left(\frac{\Delta}{\Omega_0}\right) + a_3^{(1)} \left(\frac{\Delta}{\Omega_0}\right)^3 + \dots \quad (5)$$

Из соображений симметрии при одновременной замене $\delta \rightarrow (-\delta)$ и $\Delta \rightarrow (-\Delta)$ населенность верхнего уровня после действия последнего импульса не должна меняться, поэтому в разложении (5) присутствуют только слагаемые нечетных степеней.

Из выражений (4) и (5) видно, что когда $a_1^{(1)} = 0$, доминирующая зависимость сдвига частоты резонанса δ_0 от сдвига частоты перехода Δ — кубическая, когда $a_1^{(1)} \neq 0$ — линейная. Поэтому следующим шагом является определение условий, при которых коэффициент $a_1^{(1)}$ обращается в нуль.

Свободными параметрами, за счет которых можно добиться подавления полевого сдвига центрального резонанса Рамси, являются длительности импульсов и соответственно коэффициент $a_1^{(1)}$ является функцией трех аргументов: $a_1^{(1)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Множество точек, отвечающих нулевому значению коэффициента $a_1^{(1)}$ при фиксированных значениях

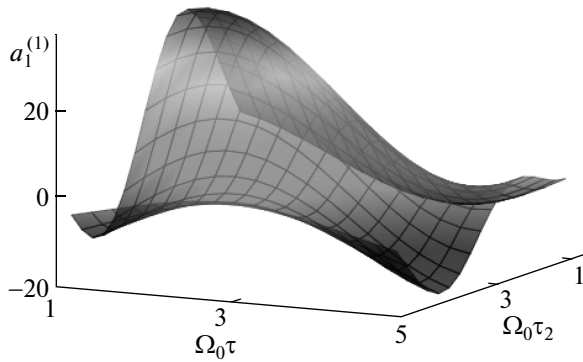


Рис. 5. Зависимость коэффициента $a_1^{(1)}$ от длительностей импульсов для случая, когда $\tau_1 = \tau_3 = \tau$

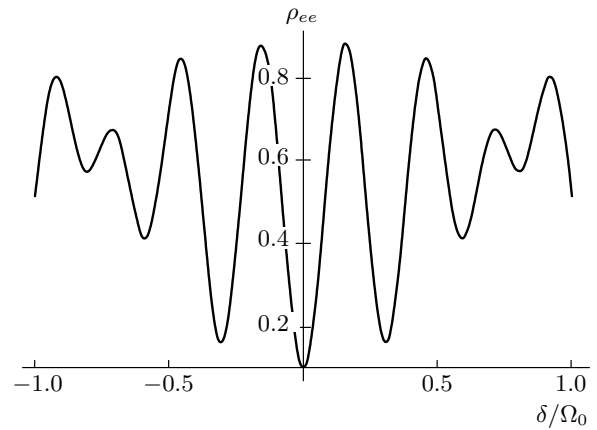


Рис. 7. Обобщенные резонансы Рамси для оптимальных длительностей

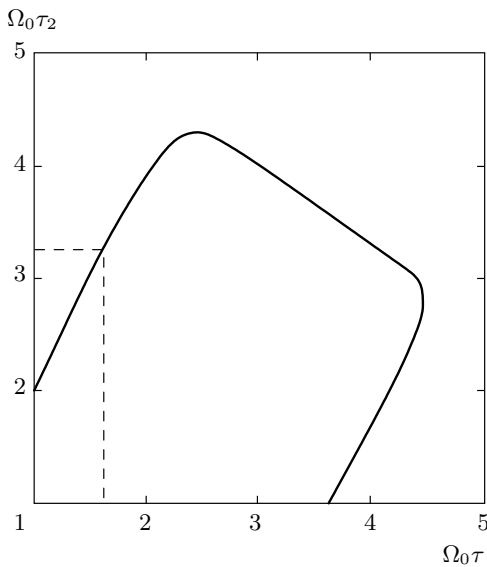


Рис. 6. Кривая, описываемая уравнением $a_1^{(1)}(\Omega_0 \tau, \Omega_0 \tau_2) = 0$, для фиксированных значений параметров $\Omega_0 T = 20$, $\gamma/\Omega_0 = \gamma_d/\Omega_0 = 0.01$, $\Omega_0 = 1$ Гц

остальных параметров, представляет собой трехмерную поверхность, которая может быть описана уравнением $\tau_1 = \tau_1(\tau_2, \tau_3)$. Для множества точек этой поверхности доминирующая зависимость частотного сдвига центрального резонанса от сдвига резонансной частоты атома является кубической. Однако оптимальным условиям возбуждения соответствует лишь часть точек на этой поверхности, для которых амплитуда центрального (реперного) резонанса и ширина интервала подавления максимальны.

Для того чтобы наглядно изобразить зависимость коэффициента $a_1^{(1)}$ от длительностей импульсов, рассмотрим частный случай. Положим, что $\tau_1 = \tau_3 = \tau$. В результате, коэффициент $a_1^{(1)}$ становится функцией двух аргументов $a_1^{(1)}(\tau, \tau_2)$, что позволяет нам перейти от четырехмерной поверхности к трехмерной (рис. 5). Из соображений удобства далее будем рассматривать зависимость $a_1^{(1)}$ от $\Omega_0 \tau$ и $\Omega_0 \tau_2$. Проанализируем зависимость $a_1^{(1)}(\Omega_0 \tau, \Omega_0 \tau_2)$, для этого рассмотрим численный пример, выбрав характерные экспериментальные значения остальных параметров: $\Omega_0 T = 20$, $\gamma/\Omega_0 = 0.01$, $\gamma_d/\Omega_0 = 0.01$, $\Omega_0 = 1$ Гц. Точке с координатами $\Omega_0 \tau_1 = \Omega_0 \tau_2 = 1.64$, $\Omega_0 \tau_2 = 3.25$, принадлежащей кривой $a_1^{(1)}(\Omega_0 \tau, \Omega_0 \tau_2) = 0$ (рис. 6), соответствует максимальная амплитуда резонанса 0.8 (рис. 7). Зависимость сдвига частоты центрального резонанса от сдвига резонансной частоты атома для выбранных значений длительностей импульсов, как и ожидалось, имеет вид близкий к кубической параболе, что обеспечивает подавление полевого сдвига (рис. 8, кривая 1).

Было установлено, что если колебания параметров $\Omega_0 \tau_1$, $\Omega_0 \tau_2$ и $\Omega_0 \tau_3$ превышают величину порядка 0.02, то это приводит к появлению линейной составляющей в зависимости $\delta_0(\Delta)$ и соответственно к исчезновению эффекта подавления полевого сдвига (рис. 8). Экспериментальная точность контроля длительностей импульсов позволяет добиться величины флуктуации параметров $\Omega_0 \tau_1$, $\Omega_0 \tau_2$ и $\Omega_0 \tau_3$, не превышающих 0.02, что позволяет нам эффективно пользоваться обобщенным методом рамсеевской

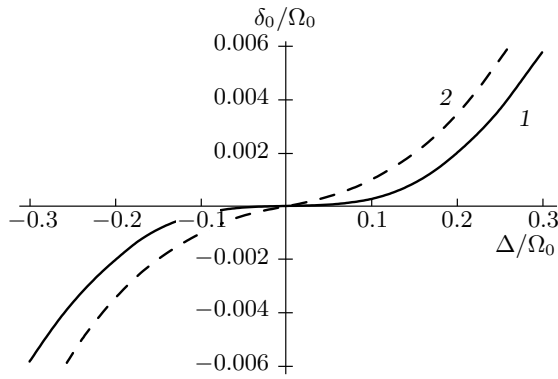


Рис. 8. Зависимости частотного сдвига центрального резонанса от сдвига резонансной частоты атома для $a_1^{(1)}(1.64; 3.25)$ (1) и для $a_1^{(1)}(1.69; 3.30)$ (2) при $\gamma/\Omega_0 = \gamma_d/\Omega_0 = 0.01$, $\Omega_0 T = 20$

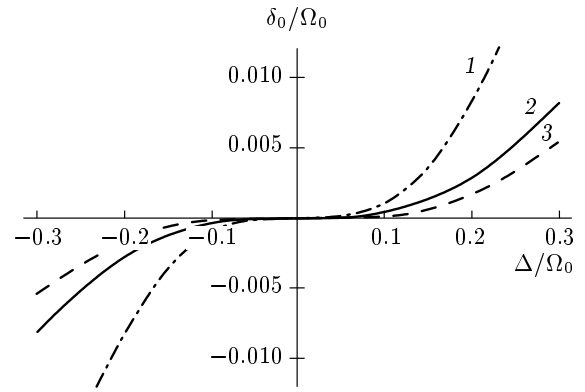


Рис. 10. Зависимости сдвига частоты центрального резонанса от сдвига резонансной частоты атома для различных γ_d : $\gamma_d/\Omega_0 = 0.3$, $\Omega_0 \tau_1 = \Omega_0 \tau_2 = 1.67$, $\Omega_0 \tau_2 = 2.80$ (1); $\gamma_d/\Omega_0 = 0.2$, $\Omega_0 \tau_1 = \Omega_0 \tau_2 = 1.63$, $\Omega_0 \tau_2 = 2.90$ (2); $\gamma_d/\Omega_0 = 0.1$, $\Omega_0 \tau_1 = \Omega_0 \tau_2 = 1.58$, $\Omega_0 \tau_2 = 3.11$ (3) с фиксированными значениями параметров $\gamma = 0$ и $\Omega_0 T = 20$

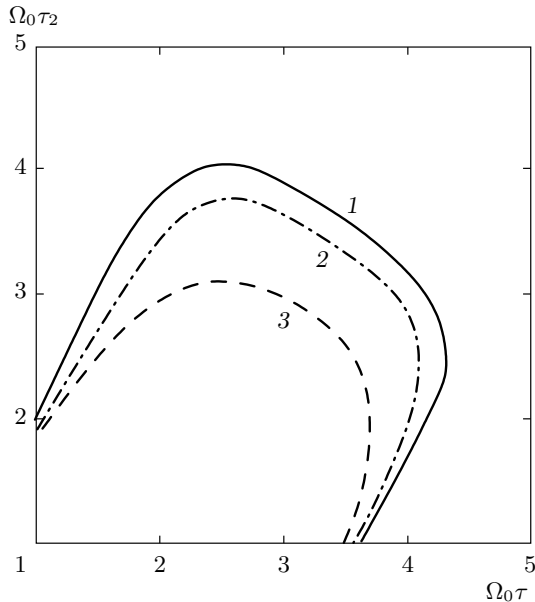


Рис. 9. Линии нулевого уровня функции $a_1^{(1)}(\Omega_0 \tau, \Omega_0 \tau_2)$ для случаев $\gamma/\Omega_0 = 0.02$ (1), $\gamma/\Omega_0 = 0.05$ (2) и $\gamma/\Omega_0 = 0.10$ (3)

спектроскопии и получать зависимость частотного сдвига центрального резонанса от сдвига резонансной частоты атома близкой к кубической [15].

Изменение любой из констант γ или γ_d ведет к изменению длительностей импульсов, обеспечивающих подавление полевого сдвига центрального резонанса Рамси. Было получено, что начиная с $\gamma/\Omega_0 = 0.01$, заметно меняются оптимальные длительности импульсов. На рис. 9 приведен ряд линий

нулевого уровня зависимости $a_1^{(1)}(\Omega_0 \tau, \Omega_0 \tau_2)$ для различных значений константы спонтанной релаксации γ при фиксированных значениях остальных параметров: $\Omega_0 T = 20$, $\gamma_d/\Omega_0 = 0.01$. Как видно на графиках, изменение длительностей импульсов превышает 0.02, что неизбежно ведет к появлению линейной составляющей в зависимости $\delta_0(\Delta)$. Поэтому при расчете оптимальных значений длительностей импульсов необходимо учитывать обе константы.

Одной из основных характеристик лазера является ширина спектральной линии лазерного излучения. Наиболее узкая ширина спектральной линии лазерного излучения получена в РТВ (Германия) [20], она составляет 40 мГц. На сегодняшний день это значение является рекордным. Как правило, в большинстве современных экспериментальных установок используется возбуждающее лазерное излучение, имеющее более широкую спектральную линию. Поэтому поправка к недиагональным элементам матрицы плотности γ_d/Ω_0 может достигать порядка $1 \cdot 10^{-1}$. Как показано на рис. 10, увеличение γ_d влияет не только на изменение оптимальных длительностей импульсов, но также приводит к сужению области, в пределах которой осуществляется подавление полевого сдвига. Таким образом, эффективность подавления полевого сдвига ограничивается величиной ширины спектральной линии лазерного излучения. Поэтому, чтобы добиться максимального эффекта подавления, необходимо использовать лазеры с наиболее узкой спектральной линией.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выполнено теоретическое исследование обобщенного метода Рамси в прецизионной спектроскопии ультрахолодных атомов и ионов. В частности, решена задача о взаимодействии двухуровневой квантовой системы с нижним основным состоянием с последовательностью импульсов электромагнитного излучения. Теоретический анализ показал, что, начиная с величины $\gamma_d/\Omega_0 = 0.1$ для случая сильно запрещенных переходов, например октупольный переход в ионе $^{171}\text{Yb}^+$ ($\gamma = 5 \cdot 10^{-10}$ Гц [21]), область, в пределах которой осуществляется эффективное подавление полевого сдвига, начинает сужаться, при этом кубический характер зависимости сдвига частоты резонанса от сдвига частоты перехода сохраняется. Так же было установлено, что, начиная с величины $\gamma/\Omega_0 = 0.01$ (например, для квадрупольного перехода в ионе $^{88}\text{Sr}^+$ $\gamma = 4 \cdot 10^{-1}$ Гц [21]), меняются значения длительностей импульсов, обеспечивающие эффективное подавление полевого сдвига. Таким образом, для большинства современных оптических стандартов необходимо учитывать ширину спектральной линии лазерного излучения и/или спонтанную релаксацию уровней. В противном случае эффективность подавления полевого сдвига существенно снижается.

Практическая ценность представленной работы заключается в том, что полученные теоретические результаты позволяют вычислять длительности импульсов, обеспечивающие одновременно максимальную амплитуду резонанса и наиболее эффективное подавление полевого сдвига в схеме Рамси с композитным импульсом. Кроме того, полученные результаты позволяют определять максимально достижимую величину интервала подавления полевого сдвига центрального резонанса по ширине спектральной линии лазера. Таким образом, теоретические результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы при разработке и оптимизации оптических стандартов частоты на охлажденных и захваченных атомах и ионах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 14-02-00806, 14-02-00712, 14-02-00939, 12-02-00454), Министерства образования и науки РФ (гранты Президента МК-4680.2014.2, НШ-4096.2014.2 (проектная часть гос. задания, код проекта 1316)), Российской академией наук и Президиума СО РАН, а также Российского квантового центра («Сколково», Москва).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. A. Diddams, J. C. Bergquist, S. R. Jefferts et al., *Science* **306**, 1318 (2004).
2. T. Rosenband, D. B. Hume, P. O. Schmidt et al., *Science* **319**, 1808 (2008).
3. C. W. Chou, D. B. Hume, D. J. Wineland et al., *Phys. Rev. Lett.* **104**, 070802 (2010).
4. A. D. Ludlow, T. Zelevinsky, G. K. Campbell et al., *Science* **319**, 1805 (2008).
5. T. Badr, M. D. Plimmer, P. Juncar et al., *Phys. Rev. A* **74**, 062509 (2006).
6. N. Huntemann, M. Okhapkin, B. Lipphardt et al., *Phys. Rev. Lett.* **108**, 090801 (2012).
7. N. Poli, Z. W. Barber, N. D. Lemke et al., *Phys. Rev. A* **77**, 050501 (2008).
8. H. Häffner, S. Gulde, M. Riebe et al., *Phys. Rev. Lett.* **90**, 143602 (2003).
9. C. G. Parthey, A. Matveev, J. Alnis et al., *Phys. Rev. Lett.* **107**, 203001 (2011).
10. S. A. King, R. M. Godun, S. A. Webster et al., *New J. Phys.* **14**, 013045 (2012).
11. T. Akatsuka, M. Takamoto, and H. Katori, *Phys. Rev. A* **81**, 023402 (2010).
12. A. V. Taichenachev, V. I. Yudin, C. W. Oates et al., *Phys. Rev. Lett.* **96**, 083001 (2006).
13. V. I. Yudin, A. V. Taichenachev, C. W. Oates et al., *Phys. Rev. A* **82**, 011804 (2010).
14. К. С. Табатчинова, А. В. Тайченачев, В. И. Юдин, *Письма в ЖЭТФ* **97**, 354 (2013).
15. N. Huntemann, B. Lipphardt, M. Okhapkin et al., *Phys. Rev. Lett.* **109**, 213002 (2012).
16. L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, Dover, New York (1978).
17. G. S. Agarwal, *Phys. Rev. A* **18**, 1490 (1978).
18. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяконов, А. С. Чиркин, *Введение в статистическую радиопфизику и оптику*, Москва (1981).
19. Ф. Ареки, М. Скалли, Г. Хакен и др., *Квантовые флуктуации излучения лазера*, Москва (1974).
20. T. Kessler, C. Hagemann, C. Grebing et al., *Nature Photon.* **6**, 687 (2012).
21. Ф. Риле, *Стандарты частоты: Принципы и приложения*, Наука, Москва (2009).