

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАГНЕТИКОВ СО СПИНОМ $S = 3/2$ И НЕГЕЙЗЕНБЕРГОВСКИМ ИЗОТРОПНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

О. А. Космачев^а, Ю. А. Фридман^{а*}, Е. Г. Галкина^б, Б. А. Иванов^с

^а Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского
295077, Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация

^б Институт физики Национальной академии наук Украины
03028, Киев, Украина

^с Институт магнетизма Национальной академии наук Украины
03142, Киев, Украина

Поступила в редакцию 4 августа 2014 г.

Исследованы динамические свойства магнетика со спином магнитного иона $3/2$ и изотропным взаимодействием спинов общего вида. В рассматриваемой системе при различных соотношениях материальных параметров возможна реализация только четырех фазовых состояний, ферро- и антиферромагнитная фазы с насыщенным значением спина и состояний с тензорными параметрами порядка — нематического и антинематического. Для этих фаз спонтанное нарушение симметрии определяется октупольным параметром порядка, содержащим средние значения, тринейные по компонентам оператора спина на данном узле. Определены спектры элементарных возбуждений во всех фазах. Во всех четырех фазовых состояниях возникают дополнительные ветви возбуждений.

DOI: 10.7868/S0044451015020121

1. ВВЕДЕНИЕ

Упорядочение в спиновых системах обычно ассоциируется со стандартным магнитным порядком, для которого средние значения спинов $\langle \mathbf{S}_n \rangle$ на узлах отличны от нуля и образуют различные магнитные структуры (ферромагнетики, антиферромагнетики и др., см. [1, 2]). Основным свойством магнитоупорядоченных систем является нарушение симметрии относительно отражения времени, $\langle \mathbf{S}_n \rangle \rightarrow -\langle \mathbf{S}_n \rangle$ при $t \rightarrow -t$. Однако уже достаточно давно была указана возможность существования состояния спинового нематика, для которого средние значения спинов на узлах $\langle \mathbf{S}_n \rangle$ равны нулю, но спонтанное нарушение симметрии спиновой системы связано с анизотропией некоторых высших корреляторов проекций спина [3]. Состояние спинового нематика может возникать из-за корреляции спинов на различных узлах, такой что симметрия относительно отражения

времени для всей системы не нарушена [3]. Вероятно, такие состояния обнаружены для низкоразмерного магнетика LiCuVO_4 [4, 5]. Не менее интересна возможность реализации нематических состояний за счет существования спиновых мультипольных параметров порядка, в которые входят произведения средних значений проекций оператора спина на одном и том же узле. Такой порядок обусловлен нетривиальными средними вида $\langle S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \dots S_{\alpha_n} \rangle$, для спина S имеет смысл рассматривать значения $n \leq 2S$. Здесь $n = 1$ соответствует дипольному параметру порядка, т. е. среднему значению спина $\langle \mathbf{S} \rangle$, $n = 2$ — квадрупольному, $n = 3$ — октупольному и т. д. В работе [3] был рассмотрен пример спинового нематика с квадрупольным порядком для системы со спином $S = 1$. Проблема спиновых нематиков такого типа (одноузельных) тесно связана с проблемой квадрупольного упорядочения и специфической квадрупольной динамики, которая достаточно давно обсуждается в литературе, см., например, работы [6–14].

*E-mail: yuriiifridman@gmail.com

Нематический порядок, связанный с нетривиаль-

ными спиновыми мультипольными параметрами порядка на одном узле при $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$, является исключительно квантовым явлением. Его описание связано с выходом за рамки так называемых спиновых когерентных состояний, или когерентных состояний группы Ли $SO(3) \sim SU(2)$, см. [13, 14]. Для этих состояний модуль среднего значения оператора спина всегда отличен от нуля; причем для спина S величина $|\langle \mathbf{S} \rangle| = S$. Спиновые когерентные состояния дают точное описание системы для гамильтониана, содержащего только слагаемые, линейные по операторам спина на данном узле, в частности, для обычного билинейного обменного взаимодействия вида $-J(\mathbf{S}_l \cdot \mathbf{S}_{l'})$. Для такого гамильтониана в случае, когда начальное состояние является $SU(2)$ -когерентным состоянием, динамика спина определяется системой уравнений Ландау–Лифшица для спинов [13, 14]. Поэтому для реализации нематических состояний гамильтониан системы со спином $S = 1$ должен, кроме билинейного взаимодействия, включать в себя и высшие (негейзенберговские) слагаемые. Для изотропной системы со спином $S = 1$ возможно биквадратичное обменное взаимодействие вида $-K(\mathbf{S}_l \cdot \mathbf{S}_{l'})^2$, где \mathbf{S}_l и $\mathbf{S}_{l'}$ — операторы спинов на соседних узлах l и l' ; J, K — константы соответственно гейзенберговского и биквадратичного обменов и именно константа K определяет наличие нематического состояния [3].

Наиболее изучены системы со спином магнитного иона $S = 1$, и мы обсудим их свойства в той мере, в какой это нужно для цели нашей работы — анализа нематических состояний для систем с высшими спинами. Состояние спинового нематика с $S = 1$, в котором параметр дипольного спинового упорядочения равен нулю, $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$, характеризуется спонтанным нарушением вращательной симметрии, которое связано со спиновыми квадрупольными параметрами $S_{ik} = \langle S_i S_k + S_k S_i \rangle$, $i, k = x, y, z$ [10, 15]. Это состояние инвариантно относительно обращения времени, но для него имеет место спонтанное нарушение вращательной симметрии, связанное с квадрупольными средними.

В качестве геометрического образа этих средних можно выбрать квадрупольный эллипсоид, т. е. эллипсоид с направлениями главных осей $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и \mathbf{e}_3 , выбранными таким образом, чтобы иметь $\langle S_i S_k + S_k S_i \rangle = 0$ при $i \neq k$, $i, k = 1, 2, 3$, и полуоси которого равны $\langle S_1^2 \rangle, \langle S_2^2 \rangle$ и $\langle S_3^2 \rangle$. При нулевой температуре $T = 0$ состояние спина на каждом узле определяется чистыми квантовыми состояниями спина $S = 1$. В приближении среднего поля нематическая фаза магнетика с билинейным и биквадратич-

ным обменным взаимодействием ближайших соседей устойчива при $J < K$ и $J > 0$. Используя состояния $|0\rangle$ и $|\pm 1\rangle$ с заданной проекцией спина на некоторую ось квантования z , можно показать, что в этом приближении фазе спинового нематика при $T = 0$ отвечает состояние на узле $|\psi_{SN}\rangle = |0\rangle$ [3]. Вероятно, это простейший случай нематического порядка: квадрупольный эллипсоид вырождается в плоский диск, $\langle S_x^2 \rangle = \langle S_y^2 \rangle = 1$, $\langle S_z^2 \rangle = 0$. При температуре, отличной от нуля, но меньшей критической температуры, $T < T_C$, величина $0 < \langle S_z^2 \rangle < \langle S_{x,y}^2 \rangle$; при $T > T_C$ восстанавливается вращательная симметрия $S_{\alpha\beta}$ [8, 16, 17]. Поскольку в силу изотропии спиновых взаимодействий направление оси квантования z произвольно, состояние спинового нематика можно описать введением вектора-директора \mathbf{n} , который направлен вдоль оси вращения квадрупольного эллипсоида. Понятно, что состояния с \mathbf{n} и $-\mathbf{n}$ неразличимы, и величина $S_{\alpha\beta}$ является квантовым аналогом параметра порядка Де Жена, который вводится для обычных нематических жидких кристаллов [18]. Вопрос о стабильности нематической фазы при выходе за рамки приближения среднего поля в двумерном случае (или в одномерном случае при нулевой температуре) является открытым, см. [15, 19–21]. Однако в интересующем нас трехмерном случае нет оснований сомневаться, что нематическое состояние устойчиво при конечной температуре и приближение среднего поля пригодно для его описания вдали от критической области [15, 19]. В том случае, когда обменный интеграл $J < 0$ отрицателен, для кристаллического магнетика возникают состояния с двумя магнитными подрешетками. (Считается, что решетка допускает разбиение на две эквивалентные подрешетки (bipartite lattice).) Если гейзенберговский обмен превышает биквадратичный, то в магнетике реализуется обычное антиферромагнитное состояние. В противоположном случае ситуация более интересная и вопрос об основном состоянии становится нетривиальным, поскольку состояния с \mathbf{n} и $-\mathbf{n}$ тождественны. В рамках приближения среднего поля можно показать, что в системе реализуется состояние ортогонального нематика, для которого в двух подрешетках направления \mathbf{n} ортогональны [19, 22, 23]. Поскольку существуют три таких направления вектора \mathbf{n} , в одномерном случае это состояние трактуется как не полностью упорядоченное (semiordeed) [22], хотя устойчивость двухподрешеточной фазы в рамках приближения среднего поля доказана для квадратной решетки [23], а трехподрешеточного — для треугольной решетки [24, 25] (см. рис. 1, 2 в работе [25]). Для низкоразмерных сис-

тем вопрос до сих пор открыт; численное моделирование одномерных систем указывает на состояния с тримеризацией [26, 27]. Фазовые переходы ортогональный нематик–ферромагнетик и ортогональный нематик–антиферромагнетик, происходящие при изменении параметра J/K , являются вырожденными переходами первого рода [23].

Таким образом, исследования простейшей модели спинового нематика позволяют утверждать, что подобного рода системы обладают целым рядом необычных свойств. На протяжении последних двадцати лет такие состояния активно изучались в кристаллических магнетиках [9, 10], включая низкоразмерные системы [15, 19–21]. В настоящее время появился дополнительный интерес к таким состояниям, связанный с изучением ультрахолодных атомных газов с целым значением спина [28–32], особенно с конденсацией Бозе–Эйнштейна для таких газов в оптических ловушках или решетках [28]. Существенно также, что для таких конденсатов характерно сильное негеизенберговское взаимодействие спинов, необходимое для существования нематических состояний [30].

Таким образом, нематические состояния для спина $S = 1$ достаточно широко изучены: для них исследованы процессы взаимодействия элементарных возбуждений и процессы релаксации [19, 33–36], найдены нелинейные возбуждения — солитоны [37–40]. Получены как одномерные солитоны [37, 38], которые похожи на открытые много лет назад либовские состояния неидеального бозе-газа [41], так и топологические двумерные солитоны [39, 40]. Эти солитоны похожи также и на соответствующие возбуждения в антиферромагнетиках, см. [42–44] (в обоих случаях можно использовать приближенное описание на основе сигма-модели [15]), но они имеют уникальные свойства около точки перехода нематик–ферромагнетик [40] и в самой этой точке [40, 45]. Построены феноменологическая теория релаксационной динамики [36] и неравновесная термодинамика [46, 47] спиновых нематиков. Теоретически исследовано неупругое рассеяние нейтронов и показано, как оно может использоваться для анализа элементарных возбуждений в этих системах [25].

Вопрос о существовании нематических состояний в системах со спинами $S > 1$ является более сложным, хотя и он изучается достаточно давно [19, 48, 49]. Наиболее интересной особенностью таких систем является возможность появления нетривиальных корреляторов от нечетного числа спинов (например, трех), которые не инвариантны относительно отражения времени даже при $\langle S \rangle = 0$. Хо-

тя обычно спиновыми нематиками называют состояния, инвариантные при замене $t \rightarrow -t$ [3, 48], использование термина «спиновый нематик» для таких состояний [19, 50] в данной работе не приведет к недоразумениям. Недавно возник большой интерес к анализу нематических состояний в ультрахолодном бозе-газе со спином $S = 2$ [51–55].

Не менее интересна возможность существования спиновых нематических состояний для систем с полулцелым спином (минимальная величина полуцелого спина, допускающая негеизенберговское взаимодействие и нетривиальные высшие спиновые корреляторы, составляет $S = 3/2$). Такие состояния изучены хуже, хотя этот вопрос имеет важное значение для исследования физических свойств ультрахолодных ферми-газов, примером которых являются газы ^{132}Cs , ^9Be , ^{135}Ba со спином $S = 3/2$ в оптических решетках, в которых на одну ячейку приходится один атом [56–59].

Нематические состояния магнетика со спином $S = 3/2$, для которых $\langle S \rangle = 0$ и нетривиальны средние, кубические по операторам спиновых проекций, были получены достаточно давно [19, 49]. Для общей модели изотропного магнетика со спином $3/2$ (см. ниже формулу (1)) было показано [19], что нематическое состояние существует в непосредственной окрестности фазового перехода в ферромагнитное состояние. В работе [50] в приближении среднего поля была построена фазовая диаграмма изотропного магнетика со спином магнитного иона $3/2$ и найдены антиматические состояния с двумя подрешетками. Состояния спинов в различных подрешетках различаются, но они переходят друг в друга при обращении времени. Таким образом, все нематические фазы магнетика со спином $S = 3/2$, дополнительно к спонтанному нарушению вращательной симметрии, обнаруживают также нарушение симметрии относительно обращения времени.

Особенности статических свойств нематических фаз магнетика со спином $S = 3/2$, в частности, антиматических фаз, позволяют надеяться на существование нетривиальных свойств коллективных возбуждений в таких системах. Однако вопрос о динамических свойствах негеизенберговских магнетиков, особенно о физическом смысле различных ветвей спектра, практически не исследован (в работе [50] спектры обсуждались лишь в той мере, в которой они важны для изучения устойчивости фаз). Целью данной работы является исследование спектра элементарных возбуждений изотропного магнетика со спином магнитного иона $3/2$ при различных соотношениях обменных интегралов, а также анализ

вопроса о полноте всех тех спиновых состояний, которые были найдены в работах [19, 48, 50].

2. МОДЕЛЬ, ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА СПЕКТРОВ

Рассмотрим изотропный магнетик со спином магнитного иона $S = 3/2$. В общем случае гамильтониан системы со спином $3/2$ и изотропным обменным взаимодействием между ближайшими соседями имеет вид

$$\mathcal{H} = - \sum_{l \neq l'} [J \mathbf{S}_l \mathbf{S}_{l'} + K (\mathbf{S}_l \mathbf{S}_{l'})^2 + L (\mathbf{S}_l \mathbf{S}_{l'})^3], \quad (1)$$

где \mathbf{S}_l — спиновый оператор в l -м узле, J , K и L — обменные интегралы между ближайшими спинами, суммирование в формуле (1) проводится по всем парам ближайших соседей и каждая пара ближайших соседей учитывается один раз. Мы ограничимся рассмотрением только решеток, которые допускают разбиение на две эквивалентные подрешетки, например, кубическую или квадратную. Дальнейшие вычисления будем проводить для случая низких температур ($T \rightarrow 0$), поскольку именно в этом случае наиболее ярко проявляются квантовые свойства системы. Система, описываемая гамильтонианом (1), инвариантна относительно преобразований группы вращений $SO(3) \sim SU(2)$. Гамильтониан (1) удобно представить в терминах операторов Стивенса, которые представляют собой набор неприводимых комбинаций операторов спиновых компонент [60]. Для спина $3/2$ эти операторы выбираются в виде

$$\begin{aligned} O_2^0 &= 3(S^z)^2 - S(S+1), \quad O_2^1 = [S^z, S^x]_+, \\ \tilde{O}_2^1 &= [S^z, S^y]_+, \quad O_2^2 = \frac{1}{2} ((S^+)^2 + (S^-)^2), \\ \tilde{O}_2^2 &= \frac{1}{2i} ((S^+)^2 - (S^-)^2), \\ O_3^0 &= 5(S^z)^3 - 3S(S+1)S^z + S^z, \\ O_3^1 &= \frac{1}{2} \left[\left(5(S^z)^2 - S(S+1) - \frac{1}{2} \right), S^x \right]_+, \\ \tilde{O}_3^1 &= \frac{1}{2} \left[\left(5(S^z)^2 - S(S+1) - \frac{1}{2} \right), S^y \right]_+, \\ O_3^2 &= \frac{1}{4} [S^z, ((S^+)^2 + (S^-)^2)]_+, \\ \tilde{O}_3^2 &= \frac{1}{4i} [S^z, ((S^+)^2 - (S^-)^2)]_+, \\ O_3^3 &= \frac{1}{2} ((S^+)^3 + (S^-)^3), \quad \tilde{O}_3^3 = \frac{1}{2i} ((S^+)^3 - (S^-)^3), \end{aligned}$$

где $S^\pm = S_x \pm iS_y$, $[A, B]_+ = AB + BA$ означает антикоммутатор соответствующих операторов.

В терминах операторов Стивенса гамильтониан (1) с точностью до аддитивной константы можно представить в виде суммы билинейных комбинаций:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \times \sum_{n \neq n'} \left\{ \tilde{J} (\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'}) + \tilde{K} O_{2n} O_{2n'} + L O_{3n} O_{3n'} \right\}, \quad (2)$$

где обозначено

$$\tilde{K} = \frac{1}{2}K - L, \quad \tilde{J} = J - \frac{1}{2}K + \frac{587}{80}L,$$

$$\begin{aligned} O_{2n} O_{2n'} &= \frac{1}{3} O_{2n}^0 O_{2n'}^0 + O_{2n}^1 O_{2n'}^1 + \\ &+ \tilde{O}_{2n}^1 \tilde{O}_{2n'}^1 + O_{2n}^2 O_{2n'}^2 + \tilde{O}_{2n}^2 \tilde{O}_{2n'}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_{3n} O_{3n'} &= \frac{1}{10} O_{3n}^0 O_{3n'}^0 + \frac{3}{20} (O_{3n}^1 O_{3n'}^1 + \tilde{O}_{3n}^1 \tilde{O}_{3n'}^1) + \\ &+ \frac{3}{2} (O_{3n}^2 O_{3n'}^2 + \tilde{O}_{3n}^2 \tilde{O}_{3n'}^2) + \frac{1}{4} (O_{3n}^3 O_{3n'}^3 + \tilde{O}_{3n}^3 \tilde{O}_{3n'}^3). \end{aligned}$$

Такая запись позволяет использовать представление когерентных состояний для группы $SU(4)$, которое использовалось в работе [50].

Рассматриваемая система не имеет выделенного направления, и направление оси квантования (оси z) может быть выбрано произвольно. Выделяя в гамильтониане (2) средние поля, связанные со средним магнитным моментом (на один узел) $\langle S^i \rangle$, и средние мультипольные поля $q_j^i = \langle O_j^i \rangle$, получим одноузельный гамильтониан в виде

$$\mathcal{H}_0 = -zJ \sum_i \langle S^i \rangle S^i - zK \sum_i q_2^i O_2^i - zL \sum_i q_3^i O_3^i, \quad (3)$$

где z — число ближайших соседей.

Для диагонализации гамильтониана (3) воспользуемся методом, развитым в работе [61], в основе которого лежит использование алгебры операторов Хаббарда [62]. На базе собственных функций оператора S^z построим операторы Хаббарда $X^{ij} \equiv |i\rangle\langle j|$, где векторы состояний $|i\rangle$ представляют собой стандартный полный набор собственных состояний оператора спина с заданной z -проекцией спина [62, 63]. Связь спиновых операторов с операторами Хаббарда имеет вид

$$\begin{aligned} S^+ &= \sqrt{3} X^{\frac{3}{2} \frac{1}{2}} + 2X^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + \sqrt{3} X^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}, \\ S^- &= (S^+)^{\dagger}; \quad S^z = \frac{1}{2} (S^+ S^- - S^- S^+). \end{aligned} \quad (4)$$

Формально одноузельный гамильтониан в представлении операторов Хаббарда можно записать в виде

$$\mathcal{H}_0 = \sum_i \varepsilon_i X^{ii} + \sum_{i \neq j} V_{ij} X^{ij}, \quad V_{ji} = (V_{ij})^*,$$

где ε_i, V_{ij} — соответственно диагональные и недиагональные амплитуды. В результате унитарного преобразования

$$U = U \left(\alpha_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}, \alpha_{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}, \alpha_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}, \alpha_{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}, \alpha_{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}, \alpha_{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} \right)$$

одноузельный гамильтониан можно привести к диагональному виду

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = \sum_i E_i X^{ii},$$

при этом параметры унитарных преобразований определяются системой уравнений

$$\tilde{V}_{ij} \left(\alpha_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}, \alpha_{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}, \dots \right) = 0.$$

Задача диагонализации существенно упрощается тем фактом, что все средние, кроме $\langle S^z \rangle, q_2^0, q_3^0, q_3^3$, равны нулю. Это условие вытекает из симметрии системы и может быть проверено непосредственно. Тогда одноузельный гамильтониан принимает вид

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = -\bar{H} S^z - B_2^0 O_2^0 - B_3^0 O_3^0 - B_3^3 O_3^3, \quad (5)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \bar{H} &= z \tilde{J} \langle S^z \rangle, & B_2^0 &= z \frac{\tilde{K}}{3} q_2^0, \\ B_3^0 &= z \frac{L}{10} q_3^0, & B_3^3 &= z \frac{L}{4} q_3^3, \\ q_2^0 &= \langle O_2^0 \rangle = 3 \langle (S^z)^2 \rangle - \frac{15}{4}, & (6) \\ q_3^0 &= \langle O_3^0 \rangle = 5 \langle (S^z)^3 \rangle - \frac{41}{4} \langle S^z \rangle, \\ q_3^3 &= \langle O_3^3 \rangle = \frac{1}{2} (\langle (S^+)^3 \rangle + \langle (S^-)^3 \rangle). \end{aligned}$$

Для диагонализации гамильтониана (5) достаточно совершить один «унитарный поворот» $\alpha_{3/2,-3/2}$, который имеет смысл обобщенного u - ν -преобразования Боголюбова. Анализ показал, что состояния $|\psi(1/2)\rangle$ и $|\psi(-1/2)\rangle$ никогда не являются «экстремальными»; минимальному и максимальному значениям собственных чисел всегда соответствуют состояния, получаемые унитарным поворотом из $|3/2\rangle$ и $|-3/2\rangle$. Выберем состояния $|\psi(3/2)\rangle$ и $|\psi(-3/2)\rangle$ так, чтобы им отвечали наименьшее и наибольшее собственные значения,

которые обозначим соответственно E_{min} и E_{max} , и запишем полный набор состояний в виде

$$\begin{aligned} |\psi(3/2)\rangle &= \cos \alpha |3/2\rangle + \sin \alpha |-3/2\rangle, \\ |\psi(-3/2)\rangle &= -\sin \alpha |3/2\rangle + \cos \alpha |-3/2\rangle, \\ |\psi(1/2)\rangle &= |1/2\rangle, \quad |\psi(-1/2)\rangle = |-1/2\rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

где уровни энергии определяются формулами

$$\begin{aligned} E_{min} &= -3B_2^0 - \frac{3}{2} (\bar{H} + B_3^0) \cos 2\alpha - 3B_3^3 \sin 2\alpha, \\ E_{max} &= -3B_2^0 + \frac{3}{2} (\bar{H} + B_3^0) \cos 2\alpha + 3B_3^3 \sin 2\alpha, \\ E_{1/2} &= 3B_2^0 - \frac{1}{2} (\bar{H} - 9B_3^0), \\ E_{-1/2} &= 3B_2^0 + \frac{1}{2} (\bar{H} - 9B_3^0). \end{aligned} \quad (8)$$

Параметр α обобщенного u - ν -преобразования определяется уравнением

$$(\bar{H} + B_3^0) \sin 2\alpha - 2B_3^0 \cos 2\alpha = 0. \quad (9)$$

Из связи спиновых операторов с операторами Хаббарда, построенными на базе собственных функций (7), можно определить параметры порядка системы при произвольных соотношениях обменных интегралов:

$$\begin{aligned} \langle S^z \rangle &= \frac{3}{2} \cos 2\alpha, & q_2^0 &= 3, \\ q_3^0 &= \frac{3}{2} \cos 2\alpha, & q_3^3 &= 3 \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Легко видеть, что уравнение (9) с учетом равенств (6) и (10) может быть преобразовано к виду $\Lambda_1 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 0$, где введено обозначение

$$\Lambda_1 = J - \frac{K}{2} + \frac{103}{16} L. \quad (11)$$

Из полученного уравнения следует, что в случае, когда комбинация обменных интегралов Λ_1 не обращается в нуль, параметр диагонализации гамильтониана α может принимать только значения, кратные $\pi/4$.

Поскольку мы рассматриваем случай низких температур, свободная энергия системы (в расчете на один спин) в приближении среднего поля совпадает с нижним энергетическим уровнем магнитного иона E_{min} . Таким образом, для плотности свободной энергии получаем

$$F = -3B_2^0 - \frac{3}{2} (\bar{H} + B_3^0) \cos 2\alpha - 3B_3^3 \sin 2\alpha,$$

что с учетом формул (6) и (10) дает

$$F = -\frac{3z}{2} \left(\frac{K}{2} - L \right) - \frac{9z}{8} \left(J - \frac{K}{2} + \frac{119}{16} L \right) \cos^2 2\alpha - \frac{9z}{8} L \sin^2 2\alpha. \quad (12)$$

Минимизируя плотность свободной энергии по α , приходим вновь к выражению $\Lambda_1 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 0$, см. (11), т. е. минимуму плотности свободной энергии могут отвечать только значения $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/4$.

Если $\Lambda_1 > 0$, то выгодно состояние с $\alpha = 0$, а если $\Lambda_1 < 0$, то состояние с $\alpha = \pi/2$. При $\alpha = 0$ значения $\langle S^z \rangle = 3/2$, $q_2^0 = 3$, $q_3^0 = 3/2$, $q_3^3 = 0$, что соответствует ферромагнитной фазе с максимально возможным значением магнитного момента на узле. Аналогично, при значении $\alpha = \pi/2$ получаем такое же насыщенное состояние, но с противоположным направлением спина, $\langle S^z \rangle = -3/2$. Эти состояния эквивалентны, и далее обсуждается только случай $\alpha = 0$.

Для состояния с $\alpha = \pi/4$ значение $\langle S^z \rangle = 0$ и $q_3^0 = 0$. Ненулевое квадрупольное среднее имеет то же значение, что и для ферромагнитной фазы, $q_2^0 = 3$; но при этом возникают нетривиальные средние $\langle (S^+)^3 \rangle$ и $\langle (S^-)^3 \rangle$, величина $q_3^3 = 3$, см. (6). Таким образом, при $\alpha = \pi/4$ реализуется нематическое состояние с равным нулю средним значением магнитного момента на узле. Заметим, что здесь ситуация существенно иная, чем для случая магнетика со спином единица, для которого ферромагнитная и нематическая фазы различались не только средним значением спина, но и значениями квадрупольных средних. Как будет показано ниже, это различие статических свойств приводит к принципиальному различию спектров коллективных мод в этих двух случаях.

Таким образом, при $\Lambda_1 \rightarrow \pm 0$ существуют фазы с немалым различием параметров, в частности, $\Lambda_1 \rightarrow +0$ в ферромагнитной фазе $\langle S^z \rangle = 3/2$, а при $\Lambda_1 \rightarrow -0$ в нематической фазе $\langle S^z \rangle = 0$, см. (10). При $\Lambda_1 = J - K/2 + 103L/16 = 0$ энергии фаз совпадают. Эти два свойства характерны для фазового перехода первого рода. Этот результат совпадает с тем, что было получено в ранних работах разными методами [19, 50], в том числе путем вычисления свободной энергии на основе когерентных состояний группы $SU(4)$. Однако, в отличие от стандартной ситуации, значение параметра α при $\Lambda_1 = 0$ становится неопределенным, т. е. в этой точке все состояния с $\alpha \neq 0, \pi/4$ имеют одинаковую энергию. Также известно, что обе эти фазы теряют устойчивость при подходе к точке $\Lambda_1 = 0$, ферромагнитная — при $\Lambda_1 \rightarrow +0$ и нематическая — при $\Lambda_1 \rightarrow -0$ [50]. На

языке стандартных моделей магнетиков это означает наличие вырожденной точки перехода первого рода. Такое вырождение обычно устраняется обобщением модели (обычно путем учета высших инвариантов), в результате чего получается либо конечная область сосуществования фаз, либо «расщепление точки» на два перехода второго рода через промежуточную фазу с низкой симметрией ($\alpha \neq 0, \pi/2$, в нашем случае), см. [64]. Однако для квантовой модели (1) такой путь невозможен, поскольку высшие слагаемые типа $(\mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i'})^n$ с $n > 3$ сводятся к уже выписанным в (1). Такое поведение нетипично для перехода первого рода и определяется повышением симметрии модели (от вращательной симметрии $SU(2)$ до, как минимум, $SU(3)$ при $\Lambda_1 = 0$), т. е. это значение отвечает квантовой критической точке, см. [50, 65]. Та же ситуация реализуется и для переходов между другими фазами в этой модели (антиферромагнитной, антинематической), а также известна для изотропного магнетика со спином $S = 1$ [22, 23, 49].

Для анализа элементарных возбуждений в магнетике с $S = 3/2$ можно использовать метод функций Грина для операторов Хаббарда [62, 66], который в данном случае является наиболее адекватным исследованием сильнокоррелированных систем. В нашем случае этот подход требует громоздких вычислений, но при использовании некоторых приближений допускает аналитическое вычисление спектров во всей области параметров гамильтониана и волновых векторов. Энергетический спектр возбуждений сильнокоррелированных систем определяется полюсами функции Грина [66–68]. В качестве малого параметра, позволяющего применить теорию возмущений, используется, как и в работе [68], обратный радиус взаимодействия.

Определим мацубаровские функции Грина следующим образом [49]:

$$G^{\lambda\lambda'}(n, \tau; n', \tau') = -\langle \hat{T} \tilde{X}_n^\lambda(\tau) \tilde{X}_{n'}^{\lambda'}(\tau') \rangle,$$

где \hat{T} — оператор Вика, $\tilde{X}_n^\lambda(\tau) = \exp(\mathcal{H}\tau) X_n^\lambda \times \exp(-\mathcal{H}\tau)$ — оператор Хаббарда в гейзенберговском представлении, $\lambda = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2S+1}$, $M_1, M_2, \dots, M_{2S+1}$; $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}$.

Дальнейшие вычисления будем проводить в приближении среднего поля, поэтому нам понадобится только «поперечная» часть обменного гамильтониана \mathcal{H}_{int} , которую можно представить в виде

$$\mathcal{H}_{int} = -\frac{1}{2} \sum_{n, n', \lambda, \lambda'} \left\{ \mathbf{c}(\lambda), \hat{A}_{nn'} \mathbf{c}(\lambda') \right\} X_n^\lambda X_{n'}^{\lambda'},$$

где компоненты вектора $\mathbf{c}(\lambda)$ определяются из свя-

зи спиновых операторов с операторами Хаббарда, а матрицу $\hat{A}_{nn'}$ можно представить в виде

$$\hat{A}_{nn'} = \frac{\tilde{J}_{nn'}}{2} (2 \cdot \hat{1} \oplus \hat{I}) \oplus \frac{\tilde{K}_{nn'}}{2} (6 \cdot \hat{1} \oplus \hat{I} \oplus \hat{I}) \oplus \frac{\tilde{L}_{nn'}}{160} (16 \cdot \hat{1} \oplus 3\hat{I} \oplus 30\hat{I} \oplus 20\hat{I}), \quad \hat{I} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда фурье-образ системы уравнений для функций Грина можно записать как

$$G^{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}, \omega_n) = \Sigma^{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}, \omega_n) - \frac{1}{2} \Sigma^{\lambda\lambda^1}(\mathbf{k}, \omega_n) \times \left\{ \mathbf{c}(-\lambda_1), \hat{A}(\mathbf{k})\mathbf{c}(\lambda_2) \right\} G^{\lambda_2\lambda'}(\mathbf{k}, \omega_n),$$

и фурье-компоненты $G^{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}, \omega_n)$ отличны от нуля только для четных частот $\omega_n = 2\pi nT$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а неприводимые по Ларкину графики могут быть следующих типов:

$$\Sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n), \Sigma^{\alpha M}(\mathbf{k}, \omega_n), \Sigma^{M\alpha}(\mathbf{k}, \omega_n), \Sigma^{MM'}(\mathbf{k}, \omega_n).$$

Однако в нулевом приближении по обратному радиусу взаимодействия система уравнений для функций Грина существенно упрощается, поскольку в этом приближении

$$\Sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) = \delta_{\alpha\alpha'} b(\alpha) G_0^\alpha(\omega_n),$$

$$\Sigma^{\alpha M}(\mathbf{k}, \omega_n) = \Sigma^{M\alpha}(\mathbf{k}, \omega_n) = 0,$$

$$\Sigma^{MM'}(\mathbf{k}, \omega_n) = -\frac{n_{MM'}}{T} \delta_{\omega_n, 0},$$

где $G_0^\alpha(\omega_n) = [i\omega_n + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}]^{-1}$ — нулевая функция Грина, $b(\alpha) = \langle \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{X} \rangle_0$ — концевой множитель, $\boldsymbol{\alpha}$ — корневой вектор, компоненты которого определяются алгеброй операторов Хаббарда [62, 65]. Таким образом, в нулевом приближении по обратному радиусу взаимодействия дисперсионное уравнение имеет вид

$$\det \|\delta_{ij} + x_{ij}\| = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, 15,$$

где

$$x_{ij} = G_0^\alpha(\omega_n) b(\alpha) c_{ij}(\alpha), \quad c_{ij}(\alpha, \beta) = a_{ik}(\alpha, \beta) A_{kj};$$

$$a_{ik}(\alpha, \beta) = c_i(\alpha) c_k(-\beta).$$

Поскольку техника операторов Хаббарда позволяет точно учесть одноузельные корреляторы, дисперсионное уравнение справедливо при произвольных соотношениях обменных интегралов, т. е. в различных фазовых состояниях. Результаты анализа спектров в различных фазах приведены ниже в разд. 3–6.

После обсуждения общих подходов и формулировки проблемы перейдем к конкретному анализу спиновых состояний и спектров элементарных возбуждений в различных фазах магнетика, описывающихся гамильтонианом (1).

3. ФЕРРОМАГНИТНАЯ ФАЗА

Рассмотрим систему в ферромагнитной фазе. Как отмечалось ранее, этому фазовому состоянию отвечает решение уравнения (11) $\alpha = 0$. Спиновые средние, характеризующие ферромагнитную фазу, имеют вид

$$\langle S^z \rangle = \frac{3}{2}, \quad q_2^0 = 3 \langle (S^z)^2 \rangle - S(S+1) = 3,$$

$$q_2^2 = \langle (S^x)^2 \rangle - \langle (S^y)^2 \rangle = 0,$$

$$q_3^0 = 5 \langle (S^z)^3 \rangle - [3S(S+1) - 1] \langle S^z \rangle = \frac{3}{2},$$

$$q_3^3 = \frac{1}{2} (\langle (S^+)^3 \rangle + \langle (S^-)^3 \rangle) = 0.$$

Низшим энергетическим уровнем в ферромагнитном состоянии является E_{min} , а волновая функция основного состояния есть состояние с максимальной проекцией спина, $|\psi(3/2)\rangle = |3/2\rangle$. Кроме того, в этом состоянии квадрупольные средние определяются выражениями

$$\langle (S^z)^2 \rangle = \frac{9}{4}, \quad \langle (S^x)^2 \rangle = \langle (S^y)^2 \rangle = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, геометрический образ квадрупольных средних в ферромагнитной фазе (квадрупольный эллипсоид) представляет собой эллипсоид вращения в спиновом пространстве. Симметрия этого эллипсоида определяется направлением магнитного момента, которое совпадает с направлением главной оси эллипсоида. В отличие от магнетика со спином $S = 1$, форма квадрупольного эллипсоида одинакова для ферромагнитной и нематической фаз. Кроме того, нетривиальное октупольное среднее q_3^3 равно нулю, а величина q_3^0 является тривиальной константой и не влияет на динамику системы. Следовательно, в ферромагнитной фазе, как и для системы со спином $S = 1$, симметрия квадрупольных средних полностью определяется симметрией магнитного момента. Присутствие «недипольных» средних не проявляется в симметрии основного состояния ферромагнитной фазы.

Однако возможность существования таких «недипольных» средних принципиально меняет динамику системы по сравнению со случаем $S = 1$. Используя общее дисперсионное уравнение, определим спектры возбуждений в ферромагнитной фазе. В низкотемпературном приближении в системе будут существовать три магнонные ветви возбуждений [6], спектры которых в приближении ближайших соседей имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(k) &= \frac{3z}{4} \left[J - J_k + \frac{3}{2}(K - K_k) + \frac{63}{16}(L - L_k) \right], \\ \varepsilon_2(k) &= \frac{3z}{2} \left[K - K_k - \frac{5}{4}(L - L_k) + \right. \\ &\quad \left. + J - \frac{1}{2}K + \frac{103}{16}L \right], \\ \varepsilon_3(k) &= \frac{9z}{4} \left[(L - L_k) + J - \frac{K}{2} + \frac{103}{16}L \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь и далее $J_k = JC(\mathbf{k})$, $K_k = KC(\mathbf{k})$, $L_k = LC(\mathbf{k})$ определяют фурье-компоненты соответствующих обменных интегралов,

$$zC(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{a}} \cos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}),$$

суммирование проводится по всем z векторам ближайших соседей \mathbf{a} , \mathbf{k} — безразмерный волновой (точнее, квазиволновой) вектор. Для оценок гиперкубической решетки $C(\mathbf{k}) = 1$ при $\mathbf{k} \rightarrow 0$ и $C(\mathbf{k}) = -1$ на краю зоны Бриллюэна (в одномерной модели это значение $k = k_B = \pi$, в трехмерной — это граница зоны в направлении типа (111)), $C(\mathbf{k}) = 1/3$ и $C(\mathbf{k}) = -1/3$ на границе зоны соответственно в направлениях (100) и (110). Отметим общее свойство спектров: значения частот $\varepsilon_1(k)$ и $\varepsilon_2(k)$ при всех значениях параметров задачи совпадают на краю зоны Бриллюэна, где $C(\mathbf{k}) = -1$, см. рис. 1.

Из формулы (13) следует, что ветвь ε_1 — бесщелевая голдстоуновская мода с параболическим законом дисперсии при малых \mathbf{k} , характерная для изотропного ферромагнетика. Анализ показывает, что в этой моде «поперечные» колебания спиновой плотности связаны с поворотами направления главной оси квадрупольного эллипсоида.

Обсудим теперь остальные моды, с частотами ε_2 и ε_3 . Легко видеть, что в случае равенства нулю константы бикубического взаимодействия ($L = 0$) хорошо определенными модами остаются только две ветви возбуждений — ε_1 и ε_2 , а частота ε_3 становится чисто локальным состоянием, $\varepsilon_3(k) \rightarrow 9(2J - K)/8$ при $L \rightarrow 0$. Отметим, что для магнетика с $S = 1$ при $K = 0$, когда специфика негейзенберговского магнетика исчезает (в частности, отсутствует немагнитическая фаза), ситуация аналогичная: одна из мод теряет дисперсию и становится чисто локальным состоянием. В предельном случае $L = 0$ ветви ε_1 и ε_2 имеют тот же вид, что и две коллективные моды спектра для магнетика с $S = 1$ (ср. (13) и формулы в [15, 22, 37]). Все это позволяет сделать вывод, что физический смысл моды ε_2 такой же, как для ферромагнетика со спином $S = 1$, т. е. мода с $\varepsilon = \varepsilon_2$ описывает «продольную» динамику спина [37, 69]. Эта

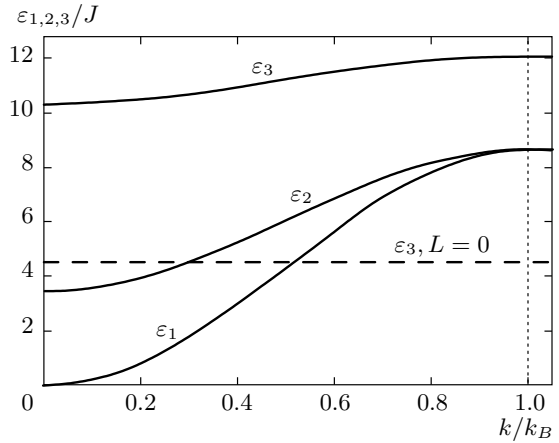


Рис. 1. Законы дисперсии элементарных возбуждений в ферромагнитной фазе, значения частот нормированы на величину J , величина k_B определяет границу зоны Бриллюэна. Здесь и далее на рисунках для простоты построение проведено для одномерного случая (выбрано $z = 2$), обобщение на случай произвольной размерности при симметричном направлении \mathbf{k} не представляет труда. Сплошные линии — спектры элементарных возбуждений в центре области устойчивости ферромагнитной фазы (выбраны значения $K = J$ и $L = J/10$). Штриховая линия демонстрирует отсутствие дисперсии моды с $\varepsilon_3(k)$ при $L = 0$

мода включает продольные колебания модуля вектора намагниченности, направление которого остается параллельным главной оси эллипсоида квадрупольных моментов, деформацию эллипсоида и его поворот вокруг намагниченности (см. подробнее работу [69] и рис. 2 в ней). С другой стороны, мода ε_3 определяется спецификой динамики магнетика со спином $S = 3/2$, которая обусловлена нетривиальными октупольными средними.

Рассмотрим теперь устойчивость ферромагнитной фазы относительно произвольных возмущений, которые соответствуют спектрам (13). Как легко видеть из вида спектров элементарных возбуждений в ферромагнитной фазе, при $k = 0$ магнонные ветви $\varepsilon_{2,3}$ имеют энергетическую щель, пропорциональную величине

$$\Lambda_1 = J - \frac{1}{2}K + \frac{103}{16}L.$$

Отсюда следует, что условие устойчивости относительно однородных возмущений имеет вид $\Lambda_1 > 0$, что совпадает с известным результатом [19]. Этот результат получается также из анализа выписанной выше свободной энергии относительно вариации па-

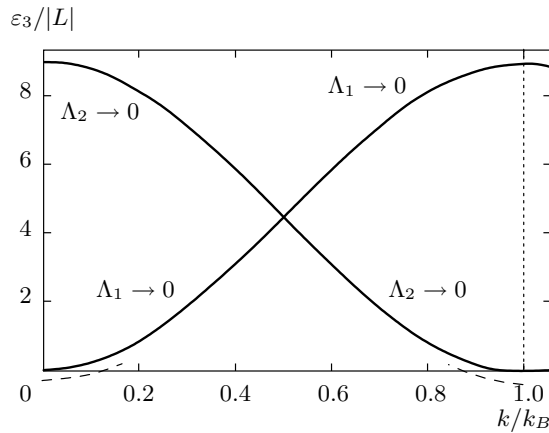


Рис. 2. Закон дисперсии «октупольной» ветви элементарных возбуждений $\varepsilon_3(k)$ в ферромагнитной фазе в окрестности фазовых переходов в нематическую фазу ($\Lambda_1 \rightarrow 0$) и антиматическую фазу ($\Lambda_2 \rightarrow 0$). Для данного значения частот удобно нормировать на величину $|L|$ (величина L положительна при $\Lambda_1 \rightarrow 0$ и отрицательна при $\Lambda_2 \rightarrow 0$). Сегменты тонких штриховых линий при $k \sim 0$ и в углу зоны Бриллюэна $k \sim \pi/a$ представляют схематически зависимость $\varepsilon_3^2(k)$ при $\Lambda_1 < 0$, $L > 0$ и $\Lambda_2 < 0$, $L < 0$, что отвечает области неустойчивости фазы

раметра α . Таким образом, линия $\Lambda_1 = 0$ является линией фазового перехода между ферромагнитной и нематической фазами.

Анализ полных законов дисперсии (13) показывает, что их экстремумы достигаются в симметричных точках зоны Бриллюэна, и потеря устойчивости (изменение знака частоты) связано с поведением спектра или при $\mathbf{k} = 0$, или на краю зоны Бриллюэна, где $C(\mathbf{k}) = -1$. В этой точке частота моды ε_3 имеет вид

$$\varepsilon_{3,edge} = J - \frac{1}{2}K + \frac{135}{16}L = \Lambda_2, \quad (14)$$

при $\Lambda_2 \rightarrow 0$ значение $\varepsilon_{3,edge} \rightarrow 0$, при этом другие частоты положительны. Таким образом, условие устойчивости включает неравенство $\Lambda_2 > 0$. Далее мы убедимся, что линия $\Lambda_2 = 0$ является линией фазового перехода из ферромагнитной в антиматическую фазу.

Таким образом, область устойчивости ферромагнитного состояния определяется следующими неравенствами:

$$\Lambda_1 > 0, \quad \Lambda_2 > 0. \quad (15)$$

На рис. 1 приведена зависимость энергий коллективных возбуждений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ исследуемой системы

от волнового вектора в ферромагнитной фазе вдали от границ области устойчивости ферромагнитной фазы. Видно, что спектр ε_1 определяет голдстоуновскую моду, а ветви $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ являются активационными.

Устойчивость системы вблизи линий фазового перехода описывается «октупольной» модой ε_3 , которая размягчается в окрестности линий потери устойчивости ферромагнитной фазы, а именно, при $\Lambda_2 = 0$ линии фазового перехода в нематическую фазу $\Lambda_1 = 0$ и перехода в антиматическую фазу $\Lambda_2 = 0$, что отвечает размягчению спектра в центре зоны Бриллюэна $k \rightarrow 0$ и в углу зоны Бриллюэна (при $C(\mathbf{k}) = -1$), см. рис. 2.

4. НЕМАТИЧЕСКАЯ ФАЗА

Теперь исследуем динамические свойства системы в нематической фазе. Как уже отмечалось ранее, в этом случае $\alpha = \pi/4$. Как следует из формулы (9), параметры порядка в этом состоянии равны

$$\langle S^z \rangle = 0, \quad q_2^0 = 3, \quad q_3^0 = 0, \quad q_3^3 = 3.$$

Низшим энергетическим уровнем в нематическом состоянии также является E_{min} , и волновая функция основного состояния имеет вид

$$\left| \psi \left(\frac{3}{2} \right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{3}{2} \right\rangle + \left| -\frac{3}{2} \right\rangle \right).$$

Простой расчет показывает, что квадрупольные средние определяют некоторую анизотропию системы,

$$\langle (S^z)^2 \rangle = \frac{9}{4}, \quad \langle (S^x)^2 \rangle = \langle (S^y)^2 \rangle = \frac{3}{4},$$

и геометрическим образом квадрупольных средних нематического состояния в спиновом пространстве является эллипсоид вращения. Форма этого эллипсоида такая же, как в ферромагнитной фазе. В рамках общего феноменологического подхода [2] для коллективных колебаний системы таких эллипсоидов можно ожидать существования двух вырожденных безактивационных мод. Однако на самом деле симметрия нематического состояния не содержит оси C_∞ ; она ниже, чем определяемая квадрупольным эллипсоидом. Действительно, в отличие от ферромагнитного состояния, в нематической фазе отличны от нуля кубические средние вида

$$\langle (S^x \cos \chi + S^y \sin \chi)^3 \rangle = \frac{3}{4} \cos 3\chi,$$

а среднее значение $\langle S_z^3 \rangle = 0$. Фактически, угол χ определяет поворот спиновой системы вокруг оси z , поэтому ненулевые кубические средние определяют ось третьего порядка (а также комбинированное преобразование, т. е. поворот на $\pi/3$ в сочетании с инверсией времени). В этом случае можно ожидать появления еще одной моды, связанной с поворотом «октупольного треугольника». Заметим, что эти же элементы симметрии присутствуют для антиферромагнетика с тремя магнитными подрешетками, рас-

положенными в плоскости и составляющими углы $2\pi/3$, и с макроскопической точки зрения поведение этих существенно различных систем должно быть похожим [48, 49].

Определим спектры элементарных возбуждений в нематической фазе. Отметим, что в этом состоянии происходит вырождение двух возбужденных энергетических уровней $E_{\frac{1}{2}} = E_{-\frac{1}{2}}$. В результате этого, хотя в системе реализуются три ветви возбуждений с частотами

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2}(k) &= \frac{3z}{2\sqrt{2}} \sqrt{\left[K - K_k - \frac{5}{4}(L - L_k) \right] \left[K - \frac{5}{4}L - \frac{1}{2} \left(J_k + \frac{3K_k}{2} + \frac{63}{16}L_k \right) \right]}, \\ \varepsilon_3(k) &= \frac{9z}{4} \sqrt{(L - L_k) \left(L - J_k + \frac{K_k}{2} - \frac{119}{16}L_k \right)}, \end{aligned} \quad (16)$$

законы дисперсии двух первых мод совпадают, их частоты остаются конечными при $L = 0$. Из формулы (16) следует, что при $L = 0$ частота «октупольной» ветви $\varepsilon_3 = 0$, а для мод с $\varepsilon = \varepsilon_{1,2}(k)$ в пределе $L \rightarrow 0$ получается

$$\varepsilon_{1,2}(k) = (3z/2) \sqrt{(K - K_k) \{2K - (J_k + 3K_k/2)\}},$$

т. е. их спектр похож на спектр элементарных возбуждений в нематической фазе магнетика с $S = 1$ [22, 23]. Следовательно, ветви $\varepsilon_{1,2}$ описывают колебания квадрупольного эллипсоида, что и определяет двукратное вырождение этих мод. Таким образом, основная специфика системы со спином $S = 3/2$ определяется ветвью ε_3 , которая связана с обменным интегралом L и обусловлена динамикой октупольных параметров q_3^3 . Она связана с поворотом «октупольного треугольника» вокруг оси z , см. выше.

На рис. 3 изображены спектры элементарных возбуждений в нематической фазе $\varepsilon_{1,2}$, ε_3 вдали от границ области устойчивости фазы, а также спектр «квадрупольных» мод вблизи перехода в ферромагнитную фазу (при $\Lambda_1 \rightarrow 0$). Видно, что моды $\varepsilon_{1,2}(k)$ при условии $\Lambda_1 \rightarrow 0$ размягчаются, и при $\Lambda_1 > 0$ определяют нестабильность нематической фазы. Однако полные условия нарушения устойчивости нематической фазы могут быть получены только из исследования «октупольной» ветви $\varepsilon_3(k)$.

Однако полные условия нарушения устойчивости нематической фазы могут быть получены только из исследования «октупольной» ветви $\varepsilon_3(k)$. Действительно, в центре зоны Бриллюэна законы дисперсии всех мод линейные, $\varepsilon_{1,2,3} \rightarrow c_{1,2,3}k$ при $k = 0$.

Скорость октупольной моды c_3 пропорциональна $\sqrt{-\Lambda_1}$, см. рис. 4 (этим же свойством обладают и скорости $c_1 = c_2$, см. рис. 3). Отсюда следует необходимое условие устойчивости нематической фазы $\Lambda_1 < 0$. Кроме того, легко показать, что в угловой точке зоны Бриллюэна (при $C(\mathbf{k}) = -1$)

$$\varepsilon_{3,edge} = \frac{9z}{4} \sqrt{L \left(J - \frac{K}{2} + \frac{136}{16}K \right)}, \quad (17)$$

т. е. ветвь ε_3 устойчива при $L\Lambda_2 > 0$ и размягчается вблизи линии перехода в антиферромагнитную фазу, $\Lambda_2 = 0$, см. рис. 4. Учитывая выписанное ранее условие, получаем, что область устойчивости нематической фазы определяется следующими неравенствами:

$$\Lambda_1 < 0, \quad \Lambda_2 > 0, \quad (18)$$

что может выполняться только при $L > 0$.

5. АНТИНЕМАТИЧЕСКАЯ И АНТИФЕРРОМАГНИТНАЯ ФАЗЫ

Возникает вопрос, какое упорядочение имеет место вне областей устойчивости двух описанных выше фаз. В гейзенберговском магнетике с единственным билинейным обменным взаимодействием при отрицательном обменном интеграле $J < 0$ существует антиферромагнитный порядок, связанный с появлением двух подрешеток. Антиферромагнитное состояние имеет место и для негейзенберговских магнетиков со спином $S = 1$ и $S = 3/2$. Для системы

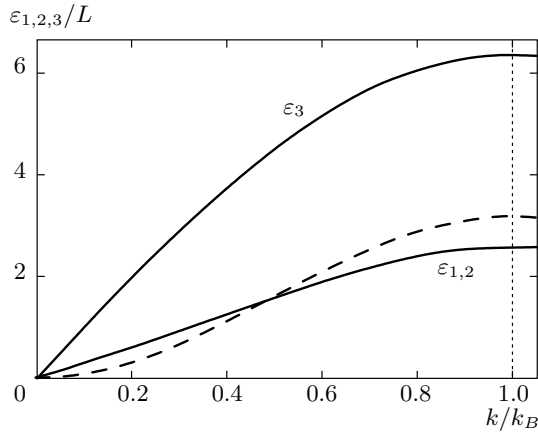


Рис. 3. Законы дисперсии элементарных возбуждений в нематической фазе (в единицах L , напомним, что эта фаза устойчива только при $L > 0$). Спектры элементарных возбуждений в центре области устойчивости нематической фазы, при условии $\Lambda_1 + \Lambda_2 = 0$, т. е. $\Lambda_1 = -L$ и $\Lambda_2 = L$, построены сплошными линиями. При построении функций $\varepsilon_{1,2}(k)$ для определенности выбрано $K = 2L$. Штриховая линия изображает спектры мод $\varepsilon_{1,2}(k)$ в окрестности фазового перехода нематик–ферромагнетик (при $\Lambda_1 \rightarrow 0$)

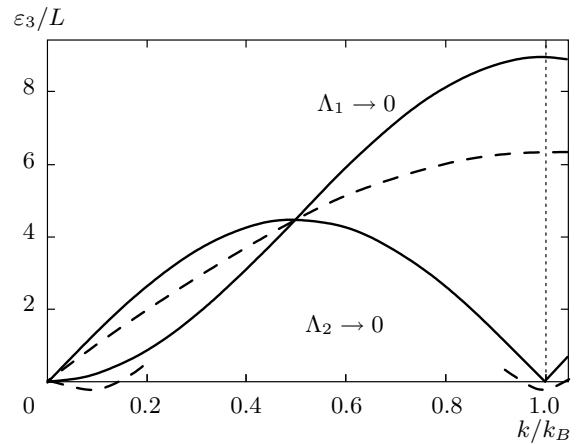


Рис. 4. Закон дисперсии «октупольной» ветви элементарных возбуждений $\varepsilon_3(k)$ в нематической фазе в окрестности фазовых переходов в ферромагнитную фазу ($\Lambda_1 \rightarrow 0$) и антиферромагнитную фазу ($\Lambda_2 \rightarrow 0$) в единицах L (в области устойчивости $L > 0$). Сегменты тонких штриховых линий при $k \sim 0$ и в углу зоны Бриллюэна при $k \sim \pi/a$ представляют схематически зависимость $\varepsilon_3^2(k)$ при $\Lambda_1 > 0$ и $\Lambda_2 < 0$; отрицательные значения ε_3^2 отвечают неустойчивости нематической фазы. Штриховая линия приведена для сравнения при тех же параметрах, что и на рис. 3, и определяет спектр вдали от критических линий

со спином $S = 3/2$ отмечалась также возможность существования антинематического спинового состояния, которое также связано с формированием двух различных подрешеток. Таким образом, можно ожидать, что для общей модели (1) все состояния исчерпываются или простыми одноподрешеточными, или двухподрешеточными структурами в распределении локальных спиновых состояний. В исследуемой нами системе возможна реализация как антиферромагнитного, так и антинематического упорядочений [50].

Параметры порядка в антинематической фазе имеют вид

$$\langle S_1^z \rangle = 0, \quad q_{2(1)}^0 = 3, \quad q_{3(1)}^0 = 0, \quad q_{3(1)}^3 = 3,$$

$$\langle S_2^z \rangle = 0, \quad q_{2(2)}^0 = 3, \quad q_{3(2)}^0 = 0, \quad q_{3(2)}^3 = -3,$$

а параметры обобщенного $u - \nu$ -преобразования равны $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = -\pi/4$, соответственно для первой и второй подрешеток. Волновые функции основного состояния первой и второй подрешеток в антинематической фазе равны соответственно

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|3/2\rangle + |-3/2\rangle), \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|3/2\rangle - |-3/2\rangle). \end{aligned} \quad (19)$$

При этом, естественно, квадрупольные средние для каждой подрешетки имеют такой же вид, как и в нематической фазе. Однако для первой и второй подрешеток кубические корреляторы различаются знаком:

$$\langle (S_i^x \cos \chi + S_i^y \sin \chi)^3 \rangle = \pm \frac{3}{4} \cos 3\chi, \quad \langle (S_i^z)^3 \rangle = 0,$$

где $i = 1, 2$ — номера подрешеток. Угол χ определяет поворот в спиновом пространстве вокруг оси z . Таким образом, оси третьего порядка для спиновых состояний подрешеток совпадают, а кубические корреляторы, определяющие планарную структуру, переходят друг в друга при повороте на угол $\chi = \pi/3$, что эквивалентно отражению времени.

Исследуем спектры элементарных возбуждений в антинематической фазе. Для упрощения математических вычислений при расчете спектра для одной из подрешеток (для определенности — второй) совершим поворот вокруг оси z ,

$$U(\varphi) = \prod_n \exp(i\varphi S_n^z), \quad (20)$$

на угол $\varphi = \pi$ в спиновом пространстве. Это отвечает преобразованию операторов вида

$$S_{n_2}^x \rightarrow \tilde{S}_{n_2}^x = -S_{n_2}^x, \quad S_{n_2}^y \rightarrow \tilde{S}_{n_2}^y = -S_{n_2}^y,$$

$$S_{n_2}^z \rightarrow \tilde{S}_{n_2}^z = S_{n_2}^z,$$

что соответствует спиновой структуре подрешеток антинематика.

Одноузельный гамильтониан в терминах новых операторов $\tilde{S}_{n_2}^i$ имеет вид, аналогичный выражению (5), с заменой $B_3^3 \rightarrow -B_3^3$. Анализ показал, что для расчетов спектров элементарных возбуждений можно рассматривать гамильтониан в терминах как старых $S_{n_1}^i$, так и новых операторов $\tilde{S}_{n_2}^i$, используя один и тот же квазиимпульс для обоих операторов. Фактически, это означает использование схемы расширенных зон. В данном случае оказывается, что

это представление достаточно удобно и наглядно, поскольку подрешетки эквивалентны. В силу этого на границе «магнитной» зоны Бриллюэна не возникают особенностей, и для спектров всех мод антинематической фазы наличие «магнитной» зоны Бриллюэна вообще не проявляется, см. ниже рис. 6. Для задач динамики решетки такая ситуация возникает в том случае, если кристалл состоит из различных частиц, которые, однако, имеют одинаковую массу и константы взаимодействия.

Так же, как и в нематической фазе, в этом состоянии происходит вырождение двух возбужденных энергетических уровней $E_{\frac{1}{2}} = E_{-\frac{1}{2}}$, и в результате этого две ветви возбуждений совпадают. В итоге спектры определяются выражениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2}(k) &= \frac{3z}{2\sqrt{2}} \sqrt{\left[K + K_z - \frac{11}{4}(L + L_k) \right] \left[K - \frac{11}{4}L + \frac{1}{2} \left(J_k - \frac{5}{2}K_k + \frac{191}{16}L_k \right) \right]}, \\ \varepsilon_3(k) &= \frac{9z}{4} \sqrt{(L - L_k) \left(L + J_k - \frac{1}{2}K_k - \frac{119}{16}L_k \right)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Отметим, что энергия ветви $\varepsilon = \varepsilon_3(k)$, которая связана с обменным интегралом L и определяется динамикой октапольных параметров q_3^3 , получается из формулы для нематической фазы изменением знака второй скобки под корнем. Поэтому специфическое поведение этой ветви легко увидеть из графиков для $\varepsilon = \varepsilon_3(k)$ для нематической фазы, приведенных на рис. 4, если на них поменять местами индексы $\Lambda_1 \rightarrow 0$ и $\Lambda_2 \rightarrow 0$. Ясно, что как и во всех предыдущих примерах, для антинематического состояния устойчивость системы определяется именно этой ветвью. Дополнительно, нестабильность антинематической фазы вблизи критической линии $\Lambda_1 = 0$ видна и из зависимости $\varepsilon_{1,2}(k)$, см. рис. 5.

Анализ поведения спектров позволяет определить область устойчивости антинематической фазы в следующем виде:

$$\Lambda_1 > 0, \quad \Lambda_2 < 0, \tag{22}$$

что может выполняться только при $L < 0$ (напомним, что нематическая фаза может существовать только при $L > 0$). В модели с $L = 0$ обе нематические фазы отсутствуют (точнее, существуют только на линии $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$). Если не учитывать этого высшего инварианта, то $\Lambda_1 = \Lambda_2$ и фазы с тензорными параметрами порядка не реализуются.

Заметим, что использование схемы расширенных зон проявляется в том, что моды $\varepsilon_{1,2}(k)$ и $\varepsilon_3(k)$ имеют бесщелевое поведение в разных точках зоны Бриллюэна, см. рис. 5. Ранее такое поведение было установлено для спектров элементарных возбуждений в фазе ортогонального нематика магнетика со спином $S = 1$ [23]. Понятно, что при переходе к естественной для двухподрешеточной системы схеме приведенных зон стандартный вид спектра восстанавливается, см. рис. 6.

Переход к редуцированной «магнитной» зоне Бриллюэна, построенной для одной подрешетки, представляет собой простую геометрическую задачу, в результате число ветвей удваивается. Как следствие, для обоих типов коллективных мод восстанавливается голдстоуновское поведение и для обеих кривых появляются аналоги «акустических» и «оптических» коллективных мод. Здесь возникает важный вопрос, а именно: следует ли в данном случае переходить к редуцированной «магнитной» зоне Бриллюэна. Иными словами, имеет ли смысл рассматривать колебания в редуцированной зоне Бриллюэна и говорить о существовании акустических и оптических ветвей и связанных с последними резонансов при малых волновых векторах.

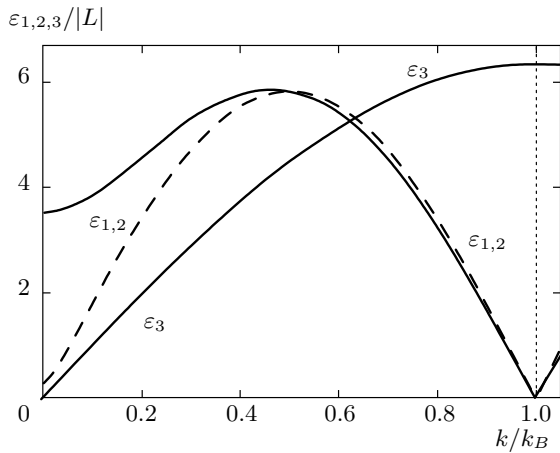


Рис. 5. Законы дисперсии элементарных возбуждений в антинематической фазе (в единицах $|L|$, фаза устойчива только при $L < 0$), построенные в схеме расширенных зон в центре области существования антинематической фазы, т.е. при условии $\Lambda_1 + \Lambda_2 = 0$, $\Lambda_1 = -L = |L|$ и $\Lambda_2 = L = -|L|$ (сплошные линии). При построении функций $\varepsilon_{1,2}(k)$ для определенности выбрано $K = 0$. Штриховая линия представляет собой закон дисперсии мод с $\varepsilon_{1,2}(k)$ вблизи критической линии $\Lambda_1 = 0$

На языке обычной динамики решетки такой вопрос возникает для кристалла, состоящего из частиц, имеющих одинаковые массы и константы взаимодействия, но физически различающихся значением какого-то параметра. Ответ на этот вопрос состоит в следующем. Понятно, что если частицы в кристалле различаются каким-либо физическим свойством, то существует некоторое поле, которое по-разному действует на указанные частицы двух сортов (если такого поля не существует в принципе, то говорить о различии частиц бессмысленно). Воздействие на эту систему переменного поля, однородного в пространстве (волны с нулевым волновым вектором и конечной частотой), приведет к разному действию на частицы из различных подрешеток, и в результате возможно линейное резонансное возбуждение нормальной моды, в которой указанные частицы двух сортов колеблются в противофазе.

Такое поведение хорошо известно для оптических фононов и некоторых типов коллективных мод в магнитных сверхрешетках [70], оно имеет место и в случае антинематика. Различие магнитных состояний подрешеток в антинематике не настолько существенно, чтобы привести к возникновению щели на границе зоны Бриллюэна основной решетки. Однако предложенные в работе [50] оптические методы

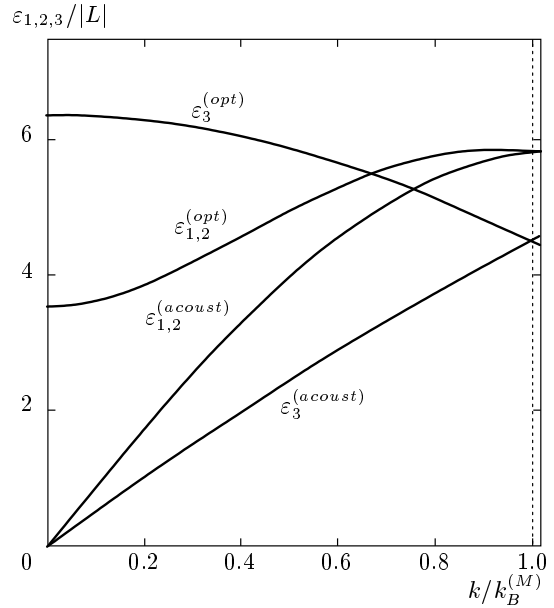


Рис. 6. Те же законы дисперсии в центре области существования антинематической фазы, что и на рис. 5, но построенные согласно схеме приведенных зон, $k_B^{(M)}$ — край магнитной зоны Бриллюэна, в одномерном случае $k_B^{(M)} = \pi/2a$. Для наглядности использованы обозначения $\varepsilon_{1,2}^{(acoust)}$ и $\varepsilon_{1,2}^{(opt)}$, $\varepsilon_3^{(acoust)}$ и $\varepsilon_3^{(opt)}$

анализа нематических фаз приводят к различным эффектам для разных подрешеток. Тогда при однородном в пространстве воздействии на систему будут возбуждаться противофазные колебания, отвечающие конечной частоте при $k = 0$ на рис. 6.

Перейдем теперь к анализу антиферромагнитного состояния, для которого спины в двух подрешетках антипараллельны и коллинеарны оси z . Используя формулы (8), легко получить, что в антиферромагнитной фазе параметры порядка подрешеток имеют вид

$$\langle S_1^z \rangle = \frac{3}{2}, \quad q_{2(1)}^0 = 3, \quad q_{3(1)}^0 = \frac{3}{2}, \quad q_{3(1)}^3 = 0,$$

$$\langle S_2^z \rangle = -\frac{3}{2}, \quad q_{2(2)}^0 = 3, \quad q_{3(2)}^0 = -\frac{3}{2}, \quad q_{3(2)}^3 = 0,$$

а параметры обобщенного $u - \nu$ -преобразования для первой и второй подрешетки равны соответственно $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \pi/2$. Волновые функции основного состояния подрешеток в этом состоянии имеют вид соответственно

$$\langle \psi_1 \rangle = \left| \frac{3}{2} \right\rangle \quad \text{и} \quad \langle \psi_2 \rangle = \left| -\frac{3}{2} \right\rangle.$$

Так же, как и для случая антинематического состояния, удобно совершить поворот $U(\varphi) = \prod_n \exp(i\varphi S_n^x)$ на угол $\varphi = \pi$ в спиновом пространстве одной из подрешеток (для определенности — второй). Тогда

$$S_{n_2}^x \rightarrow \tilde{S}_{n_2}^x = S_{n_2}^x, \quad S_{n_2}^y \rightarrow \tilde{S}_{n_2}^y = -S_{n_2}^y,$$

$$S_{n_2}^z \rightarrow \tilde{S}_{n_2}^z = -S_{n_2}^z,$$

и основному состоянию отвечает «однородное» распределение средних значений операторов $\tilde{S}_{n_2}^i$. Одно-

узельный гамильтониан получается из формулы (5) заменой

$$\bar{H} \rightarrow -\bar{H}, \quad B_3^0 \rightarrow -B_3^0$$

для спинов второй подрешетки. Однако модификация гамильтониана задачи в терминах новых операторов $\tilde{S}_{n_2}^i$ более существенная, чем для рассмотренного выше случая антинематика. В силу различия знаков эффективного поля \bar{H} для двух подрешеток их динамика не эквивалентна (такое свойство имеет место для «стандартных» антиферромагнетиков) и представление приведенных зон возникает естественным образом. Простой, но громоздкий расчет спектров приводит к выражениям

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(k) &= \frac{3z}{4} \sqrt{\left(\frac{5}{2}K - J - \frac{191}{16}L\right)^2 - \left(\frac{5}{2}K_k - J_k - \frac{191}{16}L_k\right)^2}, \\ \varepsilon_2(k) &= \frac{3z}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{2}K - J - \frac{147}{16}L\right)^2 - \left(K_k - \frac{11}{4}L_k\right)^2}, \\ \varepsilon_3(k) &= \frac{9z}{4} \sqrt{\left(\frac{K}{2} - J - \frac{119}{16}L\right)^2 - (L_k)^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Отметим, что во все эти выражения входят только квадраты фурье-образов обменных констант, что формально и определяет меньший период в зависимостях $\varepsilon_{1,2,3} = \varepsilon_{1,2,3}(k)$. Законы дисперсии элементарных возбуждений в антиферромагнитной фазе представлены на рис. 7. Сплошные линии $\varepsilon_{1,2,3}$ описывают спектры в «центре» области стабильности фазы; штриховая линия описывает размягчение моды $\varepsilon = \varepsilon_2(k)$ в окрестности точки фазового перехода в нематическую фазу ($\Lambda_1 \rightarrow 0$).

В использованной схеме приведенных зон видимое число кривых, определяющих ветви спектра, равно трем, как и для одной подрешетки. Это связано с тем обстоятельством, что каждая кривая соответствует двум вырожденным ветвям спиновых возбуждений. В целом, эта картина типична для магнов в стандартном гейзенберговском антиферромагнетике без внешнего поля. Заметим, что стандартная магنونная ветвь с голдстоуновским поведением при $k \rightarrow 0$ не показывает никаких нестабильностей, что отражает тот факт, что антиферромагнитная фаза, как и ферромагнитная, теряет стабильность по «мультипольному» сценарию. Что касается ветви $\varepsilon_2(k)$, то, как и в случае ферромагнетика, она связана с колебаниями квадрупольного эллипсоида.

Именно эта ветвь размягчается в окрестности фазового перехода в антинематическую фазу.

Ветвь возбуждений с $\varepsilon_3(k)$ описывает связанные колебания октапольных параметров q_3^3 для спинов подрешеток, равновесное значение которых в антиферромагнитной фазе, как и в ферромагнитной фазе, равно нулю. Ее дисперсия, как для других фаз, определяется только величиной L . Отметим, что ее дисперсия при достаточно малых $L \ll J, K$ и далеко от линий потери стабильности весьма слабая, так как она квадратична по малым параметрам L/J и L/K . Однако около линий неустойчивости фазы линейная зависимость от L восстанавливается, причем кривые $\varepsilon_3(k)$ совпадают (в схеме приведенных зон) при одинаковых значениях $|\Lambda_1|$ и $|\Lambda_2|$, см. рис. 8. Эта ветвь определяет неустойчивость антиферромагнитной фазы и при $\Lambda_1 > 0$, и при $\Lambda_2 > 0$.

Таким образом, анализ спектров подтверждает, что нарушение устойчивости антиферромагнитной фазы связано с центром приведенной (магнитной) зоны Бриллюэна $k = 0$. Условие устойчивости антиферромагнитной фазы можно записать в виде двух неравенств:

$$\Lambda_1 < 0, \quad \Lambda_2 < 0. \quad (24)$$

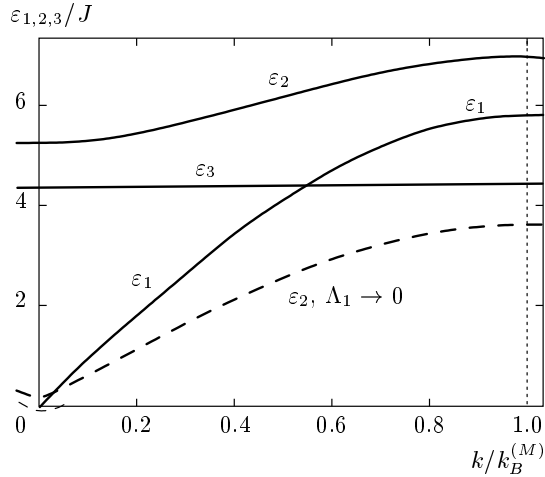


Рис. 7. Законы дисперсии элементарных возбуждений в антиферромагнитной фазе в схеме приведенных зон, $k_B^{(M)}$. Сплошные линии — спектры элементарных возбуждений в области устойчивости этой фазы (выбраны значения $K = J > 0$ и $L = -J/5$). Штриховая линия изображает спектр квадрупольной ветви $\varepsilon_2(k)$ в окрестности переходов антиферромагнетик–антинематик (при $\Lambda_1 \rightarrow 0$, $\Lambda_1 < 0$). Здесь и на следующем рисунке сегменты тонкой штриховой линий в центре зоны Бриллюэна представляют схематически эту зависимость в области неустойчивости фазы (при $\Lambda_1 \rightarrow 0$, $\Lambda_1 > 0$)

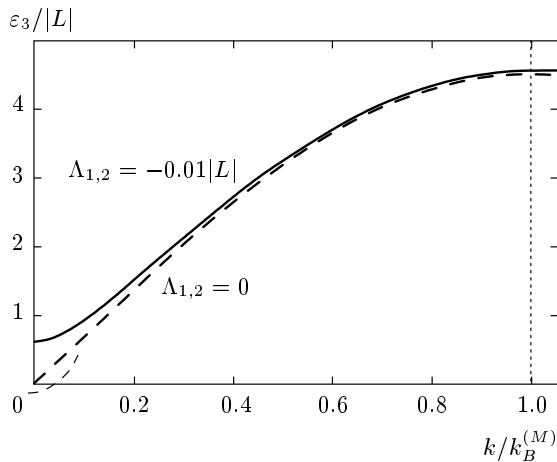


Рис. 8. Закон дисперсии ветви $\varepsilon_3(k)$ (в единицах $|L|$) в антиферромагнитной фазе в окрестности фазовых переходов (сплошные линии) и на самих линиях при $\Lambda_1 = 0$ или $\Lambda_2 = 0$ (штриховые линии)

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе проведен анализ плотности свободной энергии и спектров элементарных возбужде-

ний негейзенберговского изотропного магнетика с $S = 3/2$ с размерностью $d \geq 2$, что позволяет применять приближение среднего поля, и решеткой, допускающей разбиение на две эквивалентные подрешетки. В рассматриваемой системе при различных соотношениях материальных параметров возможна реализация только четырех фазовых состояний. Кроме состояний с преобладающим гейзенберговским обменом, характеризуемых векторным параметром порядка (ферро- и антиферромагнитная фазы), в магнетике с $S = 3/2$ и преобладающими высшими обменными интегралами возможна реализация состояний с тензорными параметрами порядка — нематическая и антинематическая фазы. Основную роль в свойствах этих фаз играют средние, кубические по компонентам спиновых операторов, прежде всего, октупольный параметр порядка q_3^3 , содержащий средние типа $\langle (S_x \pm iS_y)^3 \rangle$. Формирование октупольного порядка связано с учетом бикубического обменного взаимодействия.

С помощью полученных результатов можно построить фазовую диаграмму негейзенберговского магнетика с $S = 3/2$ для различных соотношений между обменными интегралами. Поскольку общий энергетический масштаб в рассмотренном случае нулевой температуры не существует, фактически важны лишь соотношения обменных интегралов. Для наглядного представления результатов можно ввести два независимых параметра, в качестве которых удобно выбрать $\kappa = K/J$, $\lambda = L/J$. Фазовая диаграмма в этих переменных для случая $J > 0$ представлена на рис. 9.

Переходы между всеми фазами происходят на различных лучах линии $\Lambda_1 = 0$ или линии $\Lambda_2 = 0$. Ферромагнитная фаза устойчива в области $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 > 0$, а антиферромагнитная фаза при $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$. На рис. 9 это области, лежащие выше или ниже обеих линий $\Lambda_1 = 0$ или $\Lambda_2 = 0$. Нематическая фаза существует в интервале параметров $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 > 0$, а антинематическая фаза устойчива в области $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 < 0$, т.е. между лучами этих линий, расположенных соответственно при $L > 0$ или $L < 0$. Все фазовые переходы по материальным параметрам являются вырожденными переходами первого рода, т.е. линии потери устойчивости мод совпадают с линиями фазовых переходов. Такое же свойство имеет место и для негейзенберговского магнетика со спином $S = 1$. Как и в случае $S = 1$, для модели со спином $S = 3/2$ линии переходов характеризуются более высокой симметрией. Однако в нашем случае ситуация является более интересной, поскольку области существования всех че-

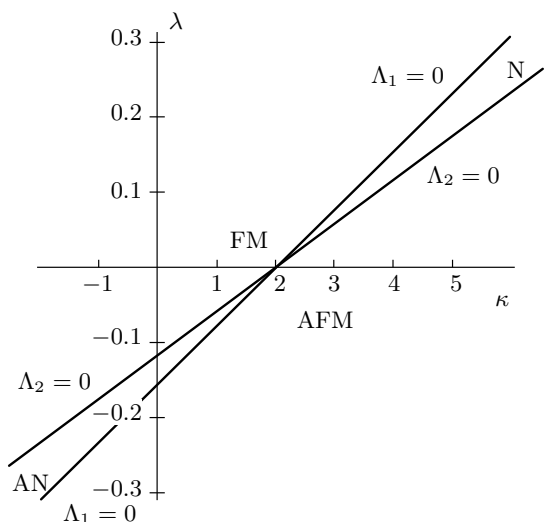


Рис. 9. Фазовая диаграмма изотропного негеизенберговского магнетика со спином магнитного иона $S = 3/2$ в переменных $\kappa = K/J$, $\lambda = L/J$ при $J > 0$. Области существования ферромагнитной, антиферромагнитной, нематической и антиматической фаз обозначены соответственно FM, AFM, N и AN

тырех фаз соприкасаются в точке $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$ или $2J = K$, $L = 0$ ($\kappa = 2$, $\lambda = 0$ на рис. 9). В этой точке все четыре фазы имеют одинаковую энергию и $\varepsilon_3(\mathbf{k}) = 0$, а остальные спектры возмущений демонстрируют сильное вырождение.

Фазовые состояния рассматриваемой системы характеризуются ненулевыми квадрупольными и октупольными средними. Квадрупольные средние, в отличие от системы со спином $S = 1$, не являются определяющими для описания симметрии фаз, а в векторных фазах октупольный параметр равен нулю. Однако эти переменные оказывают существенное влияние на динамические (спектральные) свойства магнетика с $S = 3/2$ во всех фазах, магнитных и нематических. В результате, во всех фазах присутствуют три ветви элементарных возмущений. Одна из этих ветвей, октупольная ветвь, энергия которой обозначена выше как $\varepsilon_3(\mathbf{k})$, связана прежде всего с колебаниями октупольного параметра порядка. Эта ветвь описывает положение всех линий неустойчивости фаз, хотя на некоторых из них теряет устойчивость также и квадрупольная ветвь с $\varepsilon = \varepsilon_2(\mathbf{k})$. Интересно отметить, что в точке сосуществования четырех фаз $2J = K$, $L = 0$ энергия $\varepsilon_3(\mathbf{k}) = 0$, однако остальные моды имеют конечную жесткость. Спектры возмущений демонстрируют сильное вырождение для всех фаз

$\varepsilon_1(\mathbf{k}) = \varepsilon_2(\mathbf{k})$, и имеет место универсальная зависимость от квазиимпульса: в нематической и ферромагнитной фазах $\varepsilon_{1,2}(k) \propto (J - J_k) = J[1 - C(\mathbf{k})]$, а в антиматической и антиферромагнитной фазах $\varepsilon_{1,2}(k) \propto \sqrt{J^2 - J_k^2} = J\sqrt{1 - C^2(\mathbf{k})}$.

Экспериментальная реализация рассмотренных здесь эффектов представляется более сложной, чем для материалов со спином $S = 1$, см. обзоры [9,10]. Нам неизвестны стандартные кристаллические магнитные материалы, для которых установлено достаточно большое значение бикубического обмена, более того, неизвестны даже работы, где этот параметр измерялся. С другой стороны, в последние годы находят все больше материалов с так называемым «скрытым порядком», в которых отсутствует магнитный порядок, но свойства не поддаются объяснению также и в рамках простых спин-нематических фаз (в качестве примера приведем URu_2Si_2 , свойства которого остаются неясными уже почти 10 лет) [71, 72]. Однако модель (1) применима для описания чисто спиновых состояний ультрахолодных ферми-газов со спином $S = 3/2$ (^{132}Cs , ^9Be , ^{135}Ba) в оптических решетках, в которых на одну ячейку приходится один атом [56–59]. Здесь важно отметить, что стандартной ситуацией для ультрахолодных газов являются немалые значения высших обменных интегралов. В частности, при расчете обменных интегралов для газа со спином $S = 3/2$ простейшее приближение приводит к соотношению, близкому к условию $\Lambda_1 = 0$ [56]. Таким образом, хотя в целом относительная часть областей на фазовой диаграмме, занятых нематическими фазами, невелика по сравнению со случаем системы со спином $S = 1$, эти состояния могут быть существенными для анализа ультрахолодных газов атомов со спином $S = 3/2$.

Мы признательны В. Г. Барьяхтару и А. К. Колезуку за полезные обсуждения. Исследование двух соавторов (О. Космачев, Ю. Фридман) выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Республики Крым РФ в рамках научного проекта 14-42-01527 «р_юг_а».

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука (1992).
2. А. Ф. Андреев, В. И. Марченко, УФН **130**, 39 (1980).
3. А. Ф. Andreev and I. A. Grishchuk, *Sov. Phys. JETP* **60**, 267 (1984).

4. L. E. Svistov, T. Fujita, H. Yamaguchi, S. Kimura, K. Omura, A. Prokofiev, A. I. Smirnov, Z. Honda, and M. Hagiwara, *JETP Lett.* **93**, 21 (2011).
5. M. E. Zhitomirsky and H. Tsunetsugu, *Europhys. Lett.* **92**, 37001 (2010).
6. С. Л. Гинзбург, *ФТТ* **12**, 1805 (1970).
7. Y. Y. Hsieh and M. Blume, *Phys. Rev. B* **8**, 2684 (1972).
8. В. М. Матвеев, *ЖЭТФ* **65**, 1626 (1973).
9. E. L. Nagaev, *Sov. Phys. Usp.* **25**, 31 (1982).
10. V. M. Loktev and V. S. Ostrovskii, *Low Temp. Phys.* **20**, 775 (1994).
11. Ф. П. Онуфриева, *ЖЭТФ* **80**, 2372 (1981).
12. Ф. П. Онуфриева, *ЖЭТФ* **89**, 2270 (1988).
13. А. М. Переломов, *УФН* **123**, 23 (1977).
14. A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer-Verlag, Berlin (1986).
15. B. A. Ivanov and A. K. Kolezhuk, *Phys. Rev. B* **68**, 052401 (2003).
16. Yu. A. Fridman and D. V. Spirin, *Phys. Stat. Sol. (b)* **231**, 165 (2002).
17. D. V. Spirin and Yu. A. Fridman, *J. Magn. Magn. Mat.* **260**, 215 (2003).
18. П. Де Жен, *Физика жидких кристаллов*, Мир, Москва (1977).
19. A. V. Chubukov, *J. Phys.: Condens. Matter* **2**, 1593 (1990).
20. K. Buchta, G. Fáth, Ö. Legeza, and J. Sólyom, *Phys. Rev. B* **72**, 054433 (2005).
21. A. Läuchli, G. Schmid, and S. Trebst, *Phys. Rev. B* **74**, 144426 (2006).
22. N. Papanicolaou, *Nucl. Phys. B* **305**, 367 (1988).
23. Yu. A. Fridman, O. A. Kosmachev, and Ph. N. Klevevets, *J. Magn. Magn. Mat.* **325**, 125 (2013).
24. A. Läuchli, F. Mila, and K. Penc, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 087205 (2006).
25. A. Smerald and N. Shannon, *Phys. Rev. B* **88**, 184430 (2013).
26. G. Fáth and J. Sólyom, *Phys. Rev. B* **44**, 11836 (1991).
27. Y. Xian, *J. Phys.: Condens. Matter* **5**, 7489 (1993).
28. D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2027 (1998).
29. A. Imambekov, M. Lukin, and E. Demler, *Phys. Rev. A* **68**, 063602 (2003).
30. F. Zhou and M. Snoek, *Ann. Phys. (N. Y)* **308**, 692 (2003); *Phys. Rev. B* **69**, 094410 (2004).
31. F. Zhou, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080401 (2001); E. Demler and F. Zhou, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 163001 (2002).
32. F. Zhou, *Int. J. Mod. Phys. B* **17**, 2643 (2003).
33. В. И. Бутрим, Б. А. Иванов, А. С. Кузнецов, Р. С. Химин, *ФНТ* **34**, 1266 (2008).
34. A. Kolezhuk and S. Sachdev, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 087203 (2006).
35. В. И. Бутрим, Б. А. Иванов, А. С. Кузнецов, *Письма в ЖЭТФ* **92**, 172 (2010).
36. V. G. Bar'yakhtar, V. I. Butrim, A. K. Kolezhuk, and B. A. Ivanov, *Phys. Rev. B* **87**, 224407 (2013).
37. Б. А. Иванов, Р. С. Химин, *ЖЭТФ* **131**, 343 (2007).
38. S. Komineas and N. Papanicolaou, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 070402 (2002).
39. Б. А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **84**, 90 (2006).
40. B. A. Ivanov, R. S. Khymyn, and A. K. Kolezhuk, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 047203 (2008).
41. E. H. Lieb, *Comm. Math. Phys.* **67**, 69 (1979).
42. И. В. Барьяхтар, Б. А. Иванов, *ЖЭТФ* **85**, 328 (1983).
43. B. A. Ivanov and D. D. Sheka, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 404 (1994).
44. E. G. Galkina, A. Yu. Galkin, B. A. Ivanov, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **81**, 184413 (2010).
45. N. A. Mikushina and A. S. Moskvina, *Phys. Lett. A* **302**, 8 (2002).
46. M. Y. Kovalevsky and A. V. Glushchenko, *Ann. Phys.* **349**, 55 (2014).
47. M. Y. Kovalevsky and A. V. Glushchenko, *J. Magn. Magn. Mat.* **355**, 192 (2014).
48. V. I. Marchenko, *JETP Lett.* **48**, 427 (1988).
49. A. V. Chubukov, K. I. Ivanova, P. Ch. Ivanov, and E. R. Korutcheva, *J. Phys.: Condens. Matter* **3**, 2665 (1991).

50. Yu. A. Fridman, O. A. Kosmachev, A. K. Kolezhuk, and B. A. Ivanov, Phys. Rev. Lett. **106**, 097202 (2011).
51. C. V. Ciobanu, S. K. Yip, and T. L. Ho, Phys. Rev. A **61**, 033607 (2000).
52. J. L. Song, G. W. Semenoff, and F. Zhou, Phys. Rev. Lett. **98**, 160408 (2007).
53. A. M. Turner, R. Barnett, E. Demler, and A. Vishwanath, Phys. Rev. Lett. **98**, 190404 (2007).
54. R. Barnett, A. M. Turner, and E. Demler, Phys. Rev. Lett. **97**, 180412 (2006).
55. A. M. Turner, R. Barnett, E. Demler, and A. Vishwanath, Phys. Rev. Lett. **98**, 190404 (2007).
56. C. Wu, J. P. Hu, and S. C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **91**, 186402 (2003).
57. C. Wu, Mod. Phys. Lett. B **20**, 1707 (2006).
58. C. Wu, Phys. Rev. Lett. **95**, 266404 (2005).
59. H.-H. Tu, G.-M. Zhang, and L. Yu, Phys. Rev. B **74**, 174404 (2006).
60. K. Stevens, Proc. Phys. Soc. A **65**, 209 (1952).
61. В. В. Вальков, ТМФ **76**, 143 (1988).
62. Р. О. Зайцев, ЖЭТФ **68**, 207 (1975).
63. Yu. A. Fridman, O. A. Kosmachev, and Ph. N. Klepets, J. Magn. Magn. Mat. **320**, 435 (2008).
64. К. П. Белов, А. К. Звездин, А. М. Кадомцева, Р. З. Левитин, *Ориентационные переходы в редкоземельных магнетиках*, Наука, Москва (1979).
65. A. K. Kolezhuk and T. Vekua, Phys. Rev. B **83**, 014418 (2011).
66. В. В. Вальков, С. Г. Овчинников, *Квазичастицы в сильнокоррелированных системах*, Изд-во СО РАН, Новосибирск (2001).
67. В. Г. Барьяхтар, В. Н. Криворучко, Д. А. Яблонский, *Функции Грина в теории магнетизма*, Наук. думка, Киев (1984).
68. В. Г. Вакс, А. И. Ларкин, С. А. Пикин, ЖЭТФ **53**, 1089 (1967).
69. E. G. Galkina, V. I. Butrim, Yu. A. Fridman, B. A. Ivanov, and F. Nori, Phys. Rev. B **88**, 144420 (2013).
70. А. Ю. Галкин, Б. А. Иванов, ЖЭТФ **136**, 87 (2009).
71. P. Santini, S. Carretta, G. Amoretti, R. Caciuffo, N. Magnani, and G. H. Lander, Rev. Mod. Phys. **81**, 807 (2009).
72. J. A. Mydosh and P. M. Oppeneer, Rev. Mod. Phys. **83**, 1301 (2011).