

# КВАРКОВЫЕ АНСАМБЛИ С БЕСКОНЕЧНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ДЛИНОЙ

Г. М. Зиновьев<sup>a</sup>, С. В. Молодцов<sup>b,c\*</sup>

<sup>a</sup> *Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Национальной академии наук Украины  
03143, Киев, Украина*

<sup>b</sup> *Объединенный институт ядерных исследований  
141980, Дубна, Московская обл., Россия*

<sup>c</sup> *Институт теоретической и экспериментальной физики  
117259, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 19 мая 2014 г.

Рассматривается ряд точно интегрируемых (кварковых) моделей квантовой теории поля с бесконечной корреляционной длиной. Отмечается неустойчивость стандартного вакуумного кваркового ансамбля — моря Дирака (в случае пространственно-временной размерности выше трех), связанная с сильной вырожденностью состояния, которая обусловлена характером распределения по энергии. При стремлении параметра обрезания по импульсу к бесконечности распределение становится бесконечно узким, приводящим к большим (неограниченным) флуктуациям. Проводится сравнение различных вакуумных ансамблей: моря Дирака, нейтрального ансамбля, цветового сверхпроводника и БКШ-состояния. В случае цветового кваркового взаимодействия делается однозначный выбор в пользу БКШ-состояния как основного состояния кваркового ансамбля.

DOI: 10.7868/S0044451015010058

## 1. ВВЕДЕНИЕ

На первый взгляд может показаться, что идея рассматривать квантовую теорию поля с бесконечной корреляционной длиной в корне противоречит одному из исходных постулатов теории, связанному с лоренц-пуанкаре-инвариантностью. Кажется, однако, правдоподобным, что в случае сильных взаимодействий проявляется естественный масштаб в виде шкалы  $\Lambda_{QCD}$  (в электродинамике — масса электрона, в электрослабой теории — масштаб бозона Хиггса). Свидетельство того, что корреляционная длина вакуумного ансамбля (физического вакуума), скорее всего, конечна, приходит из опыта в лице феноменологии сильных взаимодействий и из решеточных вычислений. Если отвлечься от многих других деталей, то именно возникновение естественного масштаба, по-видимому, и является ключевым вопросом построения правильной теории (см., например, [1]). Обретенные недавно результа-

ты работы Большого адронного коллайдера (ЛHC), по-видимому, существенно отодвигают (закрывают) сценарий суперсимметрии как способ борьбы с бесконечностями теории, преследующими ее с момента обнаружения расходимостей в начале тридцатых годов прошлого века. А что, если, вместо того чтобы искать решение этих проблем напрямую, получить подсказки, анализируя следствия, которые могут проявиться в квантовой теории поля, если масштаб возник. В случае сильных взаимодействий оправданным представляется рассмотреть модель с «бесконечной» корреляционной длиной, которая в данном конкретном случае определяется размером характерного (вакуумного) бокса  $L \sim \Lambda_{QCD}^{-1}$ . В другом контексте эти модели известны, и плодотворны в физике конденсированного состояния [2], и мы называем их моделями ККБ (по фамилиям авторов работ [2]). С чисто технической стороны мы получим существенное упрощение при рассмотрении кварковых ансамблей, поскольку, как выясняется, интересующие нас модели оказываются точно интегрируемыми (согласно работам Тирринга, Латтинжера). Это свойство, как известно, играет огромную роль в

\*E-mail: molodtsov@itep.ru

понимании проблем квантовой теории поля (см., например, [3]) и позволяет существенно продвинуться за рамки теории возмущений. Фактически мы уже пользовались этим приемом в наших предыдущих работах [4] при сопоставлении модели ККБ со случаем «точечного» взаимодействия, т. е. модели Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ). Отметим также, что на основе моделей с бесконечной корреляционной длиной возможно оценить роль только квантовых корреляций, когда формально в системе как бы отсутствует силовое воздействие в обычном понимании, как это имеет место, например, в классической динамике или электродинамике. Кроме того, нас будет интересовать проблема описания реакции системы на внешнее воздействие, и было бы желательно провести сравнение с результатами, получаемыми в рамках одночастичной теории возмущений (картина, которую подразумевают, иногда даже неосознанно, при описании системы, находящейся во внешнем поле).

Действие интересующего нас ансамбля может быть записано в виде

$$S = \int dt d^D x \times \left[ \bar{q}(i\hat{\partial} - m)q - \frac{g}{2} j_\mu^a \int d^D y j_\mu^a F(x, y) \right]. \quad (1)$$

Здесь  $j_\mu^a = \bar{q}t^a\gamma_\mu q$  — кварковый ток с соответствующими операторами кварковых полей  $q$ ,  $\bar{q} = q^\dagger\gamma_0$ , взятых в пространственной точке  $x$  (переменные со штрихом относятся к точке  $y$ ),  $m$  — токовая масса кварка,  $t^a = \lambda^a/2$  — генераторы цветовой калибровочной группы  $SU(N_c)$ ;  $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots, D$ ;  $\hat{\partial}$  — частные производные по времени  $t$  и координатам  $x$ , натянутые на соответствующие  $\gamma$ -матрицы. Цветовая форма взаимодействия кварков сыграет ниже очень важную роль, но мы начнем обсуждение с более простого, абелева варианта. В двумерном случае (одна временная компонента, другая — пространственная  $D = 1$ ) этот ансамбль, как известно, соответствует модели Тирринга, Латтинжера [3].  $F(x, y)$  представляет собой формфактор, который для простоты будем полагать трансляционно-инвариантным,  $F(x, y) = F(x - y)$ , и по определению безразмерным, выделив соответствующую константу  $g$ . В интересующем нас случае «бесконечной» корреляционной длины никакая пространственная точка не выделена (сила, которая определяется как градиент потенциала, равна нулю), и именно это мы подразумевали, говоря об отсутствии силового воздействия. Формально формфактор можно даже просто положить

равным единице,  $F(x) = 1$ . Тогда фурье-образ формфактора

$$\tilde{F}(p) = \int d^D x e^{ipx} F(x) = \delta(p)$$

имеет размерность  $[\tilde{F}(p)] = L^D$ . Размерность кварковых полей равна  $[q] = L^{-D/2}$ . Константа связи оказывается размерной:  $[g] = L^{-1}$ , и поэтому в случае сильных взаимодействий ее естественно измерять, например, в мегаэлектронвольтах. В дальнейшем будем интересоваться плотностями «измеримых» величин, например, энергии:  $\mathcal{E} = E/L^D$ , где  $E$  — полная энергия ансамбля. Чтобы не загромождать формулы коэффициентами  $L^{-D/2}$ , мы не будем включать их в определение фермионных полей, поскольку, во-первых, они легко восстанавливаются, а во-вторых, в наблюдаемых они проявляются в виде соответствующего множителя объема бокса  $V = L^D$ . Характерной и непривычной особенностью принимаемой формы взаимодействия оказывается формальное отсутствие рассеяния. В процессе рассеяния входящий импульс кварка совпадает с импульсом на выходе.

Следует, видимо, напомнить, каким образом, в принципе, из квантовой хромодинамики (КХД, QCD) может появиться эффективная форма взаимодействия вида (1). Предполагается, что кварки находятся под действием сильных стохастических вакуумных глюонных полей. Тогда, применяя процедуру усредненного описания квазистационарного состояния кваркового ансамбля, можно получить интересующее нас произведение кварковых токов, связанных соответствующим коррелятором глюонного поля  $\langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle$ . В простейшей форме он является синглетным по цветовым индексам. Для простоты мы ограничимся контактным по времени взаимодействием (без запаздывания)

$$\langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle = G \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2)$$

(в эту формулу мы не включили соответствующую дельта-функцию по времени). Кроме того, допустимы члены, натянутые на вектор относительного состояния  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ . Понятно, что эта простейшая корреляционная функция является лишь фрагментом соответствующей упорядоченной экспоненты, и помимо четырехфермионного взаимодействия возникает также сопутствующий бесконечный набор мультифермионных вершин [5].

## 2. МОДЕЛЬ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Модели вида (1) интенсивно изучались в двумерном случае и послужили основой целого направления исследований [3], они являются, по существу, тем единственным источником, из которого можно получить достоверную информацию (вне рамок одночастичной теории возмущений) об описании реакции системы на внешнее воздействие, именно как системы. Курьезным представляется то, что интересующий нас случай доминирования корреляций систематически исключался из рассмотрения посредством применения вычитательной процедуры, отбрасывающей вклад  $\tilde{F}(0)$ . Не менее курьезно то, что им пренебрегали в силу примитивности этого случая. Ведь с точки зрения теории рассеяния эту константу можно трактовать как некоторый ничего не значащий сдвиг фазы, который легко устраняется соответствующим сдвигом энергии. В двумерном случае аналог спиновых переменных вводится посредством дублета полей  $q = (q_1, q_2)$  (хотя можно рассмотреть и полноценные спиноры, но для наших целей это не понадобится). Пока мы ограничимся абелевой формой взаимодействия и опустим в действии (1) генераторы цветовой группы  $t^a$ . Гамма-матрицы возьмем в виде  $\gamma_0 = \sigma_2$ ,  $\gamma_1 = i\sigma_1$ , где  $\sigma_1, \sigma_2$  — матрицы Паули. В результате плотность лагранжиана можно привести к форме, типичной для моделей [3]

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\hat{\partial} - m)q - g(q_1^\dagger q_1 q_2'^\dagger q_2' + q_2^\dagger q_2 q_1'^\dagger q_1'). \quad (3)$$

Чтобы не загромождать формулы, мы не приводим знак интеграла по координате  $y$ , подразумевая его и поставив штрихи над соответствующими фермионными полями. Плотность гамильтониана рассматриваемой системы можно представить в виде

$$\mathcal{H} = q_1^\dagger p q_1 - q_2^\dagger p q_2 + m(q_1^\dagger q_2 + q_2^\dagger q_1) + g(q_1^\dagger q_1 q_2'^\dagger q_2' + q_2^\dagger q_2 q_1'^\dagger q_1'), \quad (4)$$

$p = i\partial_x$ . Вслед за Тиррингом введем опорное вакуумное состояние  $|0\rangle$ , аннулируемое компонентами фермионных полей  $q_{1x}|0\rangle = q_{2x}|0\rangle = 0$ . Поскольку рассматривается система в боксе конечной длины, подразумевается, что это условие выполняется в соответствующих дискретных пространственных точках для фермионов с периодическими граничными условиями. Рассмотрим сначала систему в киральном пределе ( $m = 0$ ), и определим два фурье-образа дублета ферми-поля:

$$a_{ik} = \int dx e^{-ikx} q_{ix}, \quad q_{ix} = \int d\tilde{k} e^{ikx} a_{ik}, \quad (5)$$

$\tilde{k} = k/2\pi$ . Когда это понятно из контекста, иногда не будем указывать пространственную точку (в приведенной выше формуле  $x$ ) для сокращения записи формул. Тогда плотность свободного гамильтониана и плотность члена взаимодействия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \sum_k k a_{1k}^\dagger a_{1k} - \sum_k k a_{2k}^\dagger a_{2k}, \\ \mathcal{V} &= 2g \sum_k a_{1k}^\dagger a_{1k} \sum_l a_{2l}^\dagger a_{2l} \end{aligned} \quad (6)$$

(точнее, последнее выражение должно быть симметризовано, но это не играет существенной роли для дальнейшего рассмотрения). Фермионные антиперестановочные соотношения приводят, как известно [3], к стандартной картине операторов рождения  $a^\dagger$ , уничтожения  $a$ , со стандартным антиперестановочным соотношением  $a^\dagger a + a a^\dagger = 1$  (индексы опускаем). Легко видеть, что в силу определения опорное состояние является собственным состоянием гамильтониана  $H = \int dx \mathcal{H}$ ,  $H = H_0 + V$  с нулевым собственным значением  $H|0\rangle = 0$ , поскольку  $H_0|0\rangle = 0$ ,  $V|0\rangle = 0$ . Если ориентироваться на теорию возмущений, то опасение вызывают состояния отрицательной энергии свободного гамильтониана. Из выражения (6) видим, что для частиц первого сорта это состояния с отрицательным импульсом  $a_{1k}, k < 0$ , а для частиц сорта два опасными представляются состояния с положительным импульсом  $a_{2k}, k > 0$ . Эту проблему решают путем заполнения частицами отрицательной энергии дираковского моря. Итак, будем полагать, что основное состояние имеет вид

$$|0\rangle = \prod_{k \geq -\Lambda}^{-P} a_{1k}^\dagger \prod_{l \geq P}^{\Lambda} a_{2l}^\dagger |0\rangle. \quad (7)$$

В этой формуле мы ввели некоторый искусственный импульс обрезания  $\Lambda$ , который согласно стандартам квантовой теории поля следует устремить к бесконечности. Также мы ввели некоторый граничный импульс  $P$ , смысл которого станет ясен из дальнейшего. «Заряд» системы

$$Q = \int dx (q_1^\dagger q_1 + q_2^\dagger q_2) = \sum_k (a_{1k}^\dagger a_{1k} + a_{2k}^\dagger a_{2k})$$

коммутирует с гамильтонианом  $H$ . Поэтому собственные состояния гамильтониана удобно классифицировать по заряду. Для свободного гамильтониана имеем

$$\mathcal{H}_0|0\rangle = \left( \sum_{-\Lambda}^{-P} k - \sum_P^{\Lambda} k \right) |0\rangle.$$

Для члена взаимодействия получим

$$\mathcal{V}|0\rangle = 2gL(\Lambda - P)^2|0\rangle,$$

т. е. плотность энергии такого моря Дирака имеет вид

$$\mathcal{E}_D = -\Lambda(\Lambda + \tilde{1}) + P(P + \tilde{1}) + 2gL(\Lambda - P)^2, \quad (8)$$

где по определению единицей импульса является  $\tilde{1} = 2\pi/L$ . Любопытно сразу же отметить, что для параметров связи  $2gL > 1$  ветви параболы как функции параметра обрезания  $\Lambda$  меняют направление, и море Дирака может даже оказаться конечной относительной глубины. Действительно, заполнение моря Дирака имеет смысл проводить до некоторой точки  $P$  при которой энергия моря Дирака минимальна:

$$\Lambda - P_{min} = \frac{1}{2} \frac{2\Lambda + \tilde{1}}{2gL + \tilde{1}},$$

$$\mathcal{E}_{min} = -\frac{1}{4} \frac{2\Lambda + \tilde{1}}{2gL + \tilde{1}} (2\Lambda + \tilde{1}). \quad (9)$$

Рассматривается система в боксе, поэтому речь идет о ближайшем к этой точке целом числе. Кроме того, интересно отметить, что почти для всех значений константы связи  $g$  «вакуумное» состояние моря Дирака почти вырождено (для некоторого дискретного набора констант связи двукратное вырождение точно), поскольку ближайшее целое число либо больше, либо меньше, чем (9). (Понятно, что если это свойство сохранится и в многомерной ситуации, то вырождение моря Дирака будет измеряться площадью соответствующей сферы, см. ниже). В двумерном случае речь идет именно об относительной глубине моря Дирака, поскольку, устремляя параметры  $\Lambda$  и  $P$  согласованным образом к бесконечности, можно получать неограниченно низкие значения  $\mathcal{E}_D$ . По-видимому, это все-таки специфика двумерного случая, анализ многомерной ситуации см. ниже. При малой константе связи,  $gL \rightarrow 0$ , имеется стандартная картина моря Дирака. Но вот уже для значений  $2gL \sim 1$  граничный импульс  $P$  становится сравним с масштабом обрезания  $P \approx \Lambda/2$ . Возбуждения такого моря Дирака выглядят несколько парадоксально. Добавление, удаление частицы с чудовищным импульсом  $\Lambda/2$  приводит к небольшому увеличению энергии — около  $d\mathcal{E}/dP|_{P=P_{min}}$ , что, по-видимому, никак не соответствует наблюдениям. С точки зрения здравого смысла рассматриваемое нами состояние выглядит довольно экзотически. Оно предполагает, что имеется какой-то меха-

низм сепарации частиц. Частицы первого сорта почему-то приобретают преимущественно отрицательные импульсы, а частицы второго сорта — положительные. Такое поведение обусловлено видом члена кинетической энергии в выражении (6) в нерелятивистском приближении, если рассматривать кинетическую энергию как малое отклонение от энергии Ферми. Рассмотрим для примера ансамбль с одинаковым числом состояний с положительными и с отрицательными импульсами для обоих сортов частиц. Итак, имеется  $L(\Lambda - P)$  частиц первого сорта с положительными импульсами и столько же частиц первого сорта с отрицательными импульсами. Аналогично и для частиц второго сорта. Для частиц первого сорта самая низкая энергия получается, если заполнение состояниями с отрицательным импульсом начинается со дна моря (т. е. начиная с импульса обрезания  $\Lambda$ ). Состояния же с положительными импульсами заполняют море, начиная от наименьшего положительного импульса, т. е. от единицы. Аналогично для второго сорта частиц, с очевидной перестановкой местами состояний с положительными и отрицательными импульсами. В итоге для плотности энергии можно получить

$$\mathcal{E}_n = -\Lambda(\Lambda + \tilde{1}) + P(P + \tilde{1}) + (\Lambda - P)(\Lambda - P + \tilde{1}) + 4gL(\Lambda - P)^2 = -(\Lambda - P)2P + 4gL(\Lambda - P)^2. \quad (10)$$

Мы видим, что по сравнению с дираковским морем для «нейтрального» ансамбля энергия просто контролируется полным числом частиц. Тем не менее можно показать, что и у такого моря абсолютная глубина не определена (стремится к минус бесконечности). Общее впечатление от рассмотрения этих конкретных примеров таково, что свойства системы, по-видимому, определяются не только самим гамильтонианом, но также и определенной фиксацией сектора гильбертова пространства, адекватного рассматриваемой задаче [6]. Трудно также поверить, что полученные нами результаты можно вывести (в одночастичном приближении) путем вычисления детерминанта гамильтониана. Ниже мы сравним эти результаты с результатами, получаемыми для модели Тирринга с точечной формой взаимодействия  $F(x) = \delta(x)$ .

Чтобы изложение в этом разделе было законченным, рассмотрим систему вне кирального предела. Теперь плотность свободного гамильтониана приобретает вид

$$\mathcal{H}_0 = \sum_k k(a_{1k}^\dagger a_{1k} - a_{2k}^\dagger a_{2k}) + m(a_{1k}^\dagger a_{2k} + a_{2k}^\dagger a_{1k}). \quad (11)$$

Диагонализуем эту форму путем канонического преобразования к новым операторам рождения, уничтожения:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1k} &= a_{1k} \cos \varphi_m + a_{2k} \sin \varphi_m, \\ \tilde{A}_{2k} &= -a_{1k} \sin \varphi_m + a_{2k} \cos \varphi_m. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\sin \theta_m = m/k$ ,  $\cos \theta_m = k/k_0$ ,  $k_0 = (k^2 + m^2)^{1/2}$ ,  $\theta_m = 2\varphi_m$ . Вместо выражения (5) разложение кварковых операторов по операторам уничтожения теперь записывается как

$$q_{jx} = \sum_k e^{ikx} [\tilde{U}_k(j) \tilde{A}_{1k} + \tilde{V}_k(j) \tilde{A}_{2k}], \quad (13)$$

$j = 1, 2$ . При  $k > 0$  спиноры имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{U}_k(1) &= \left(\frac{k_0 + k}{2k_0}\right)^{1/2} \theta_k, \\ \tilde{U}_k(2) &= \left(\frac{k_0 - k}{2k_0}\right)^{1/2} \theta_k, \\ \tilde{V}_k(1) &= -\tilde{U}_k(2), \quad \tilde{V}_k(2) = \tilde{U}_k(1), \end{aligned} \quad (14)$$

$\theta_k$  — тета-функция ( $\theta_k = 1, k > 0$ ,  $\theta_k = 0, k \leq 0$ ). При  $k < 0$  аналогично имеем

$$\begin{aligned} \tilde{U}_k(1) &= \left(\frac{k_0 + |k|}{2k_0}\right)^{1/2} \theta_{-k}, \\ \tilde{U}_k(2) &= -\left(\frac{k_0 - |k|}{2k_0}\right)^{1/2} \theta_{-k}, \\ \tilde{V}_k(1) &= -\tilde{U}_k(2), \quad \tilde{V}_k(2) = \tilde{U}_k(1). \end{aligned} \quad (15)$$

В киральном пределе  $m = 0$  будем употреблять обозначения  $u_k(j)$ ,  $v_k(j)$ ,  $j = 1, 2$ , как предельные выражения представленных формул. Можно показать, что «заряд» системы

$$Q = \int dx (q_1^\dagger q_1 + q_2^\dagger q_2) = \sum_k (\tilde{A}_{1k}^\dagger \tilde{A}_{1k} + \tilde{A}_{2k}^\dagger \tilde{A}_{2k})$$

коммутирует с гамильтонианом  $H$ , поэтому состояния системы удобно классифицировать по заряду. Подсчитывая энергию моря Дирака, вместо формулы (8) имеем

$$\mathcal{E}_D = -2 \sum_{k=P}^{\Lambda} k_0 + 2gL(\Lambda - P)^2, \quad (16)$$

т. е., в принципе, мы получаем ту же картину, что и в киральном пределе, с точностью до членов порядка  $O(m)$ . Аналогично и для «нейтрального» состояния формулы модифицируются малыми поправками  $O(m)$ .

Рассмотрим состояние, введенное в физику сильных взаимодействий Боголюбовым, Намбу, Иона-Лазинио, которое аналогично состоянию спаренных БКШ-электронов в сверхпроводнике [7–9]. Сначала проведем анализ в киральном пределе. Положим граничный импульс  $P$  в формуле (7) для заполненного вакуумного состояния равным нулю и применим известное каноническое преобразование [10], введя операторы частиц  $a$  для состояний с положительной энергией и античастиц  $b$  для состояний с отрицательной энергией:

$$\begin{aligned} q_{1x} &= \sum_{k \geq 0}^{\Lambda} e^{ikx} a_k + \sum_{k \geq -\Lambda}^0 e^{ikx} b_{-k}^\dagger = \\ &= \sum_k e^{ikx} (\tilde{\theta}_k a_k + \tilde{\theta}_{-k} b_{-k}^\dagger), \\ q_{2x} &= \sum_{k \geq -\Lambda}^0 e^{ikx} a_k + \sum_{k \geq 0}^{\Lambda} e^{ikx} b_{-k}^\dagger = \\ &= \sum_k e^{ikx} (\tilde{\theta}_{-k} a_k + \tilde{\theta}_k b_{-k}^\dagger). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $a^\dagger$ ,  $a$  и  $b^\dagger$ ,  $b$  — операторы рождения и уничтожения кварков и антикварков,  $a|0\rangle = 0$ ,  $b|0\rangle = 0$ . В представлениях (17) удобно также использовать тета-функции  $\tilde{\theta}_k$  на соответствующих отрезках, определения которых, надеемся, понятны из записи. Плотность свободного гамильтониана принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \sum_k k a_k^\dagger a_k (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{-k}) + \\ &+ \sum_k k b_{-k} b_{-k}^\dagger (\tilde{\theta}_{-k} - \tilde{\theta}_k). \end{aligned} \quad (18)$$

Предполагается, что при достаточно сильном взаимодействии основное состояние системы образовано парами кварк–антикварк с противоположными импульсами, с квантовыми числами вакуума, и его выбирают в виде смешанного состояния с боголюбовской пробной функцией (тем самым вводится некоторая выделенная система отсчета)

$$|\sigma\rangle = T|0\rangle, \quad T = \prod_p \exp[\varphi_p (a_p^\dagger b_{-p}^\dagger + a_p b_{-p})].$$

Напомним, что одевающее преобразование  $T$  превращает кварковые операторы в операторы рождения и

уничтожения квазичастиц:  $A = TaT^\dagger$ ,  $B^\dagger = Tb^\dagger T^\dagger$ . Представления (17) приобретают теперь вид

$$\begin{aligned} q_{1x} &= \sum_k e^{ikx} (U_k A_k + U_{-k} B_{-k}^\dagger), \\ q_{2x} &= \sum_k e^{ikx} (V_k A_k + V_{-k} B_{-k}^\dagger), \end{aligned} \quad (19)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} U_k &= u_k \cos \varphi - u_{-k} \sin \varphi, \\ U_{-k} &= u_k \sin \varphi + u_{-k} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогичные формулы имеют место для компонент  $V$  с заменами  $U \rightarrow V$ ,  $u \rightarrow v$ . В этих определениях мы также для единообразия унифицировали запись формул, введя компоненты  $u, v$  согласно определениям (они окажутся удобными вне кирального предела)

$$\begin{aligned} u_k &= \tilde{\theta}_k, & v_k &= \tilde{\theta}_{-k}, \\ u_{-k} &= \tilde{\theta}_{-k}, & v_{-k} &= \tilde{\theta}_k. \end{aligned} \quad (21)$$

Плотность свободного гамильтониана преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \sum_k k \cos \theta (A_k^\dagger A_k - B_{-k}^\dagger B_{-k}) (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{-k}) + \\ &+ \sum_k k \sin \theta (A_k^\dagger B_{-k}^\dagger + B_{-k} A_k) (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{-k}), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\theta = 2\varphi$ . Член взаимодействия можно представить как

$$\begin{aligned} q_1^\dagger q_1 q_2^\dagger q_2 &= \sum_k (U_k^\dagger A_k^\dagger + U_{-k}^\dagger B_{-k}^\dagger) (U_k A_k + U_{-k} B_{-k}^\dagger) \times \\ &\times \sum_l (V_l^\dagger A_l^\dagger + V_{-l}^\dagger B_{-l}^\dagger) (V_l A_l + V_{-l} B_{-l}^\dagger). \end{aligned} \quad (23)$$

Угол спаривания находится из условия минимума средней энергии  $\langle \sigma | H | \sigma \rangle$ . В силу принимаемого порядка следования операторов ненулевые вклады в это среднее значение дают только следующие матричные элементы:

$$\begin{aligned} &\langle \sigma | B_{-k} B_{-k}^\dagger | \sigma \rangle, \\ &\langle \sigma | B_{-k} A_k A_l^\dagger B_{-l}^\dagger \tilde{F}(k-l) | \sigma \rangle, \\ &\langle \sigma | B_{-k} B_{-k}^\dagger B_{-l} B_{-l}^\dagger \tilde{F}(k-l) \tilde{F}(0) | \sigma \rangle. \end{aligned}$$

Мы оставили в записи матричных элементов вклад формфактора, чтобы можно было проследить, какие модификации потребуются при переходе к взаимодействию общего вида. Первый вклад относится к свободному гамильтониану. Второй матричный элемент, с учетом вида формфактора для

интересующей нас модели  $\tilde{F}(k) = \delta(k)$ , приводит к вкладу вида

$$U_{-k}^\dagger V_{-k} U_k V_k^\dagger = -\frac{\sin^2 \theta}{4} (\tilde{\theta}_k + \tilde{\theta}_{-k}).$$

Первый и второй матричные элементы могут приводить к выигрышу по энергии, в отличие от строго положительного вклада, связанного с третьим матричным элементом. Но как это отмечалось в работах [4], для кварковых токов, содержащих генераторы цветовой группы  $t^a$ , третий вклад строго обращается в нуль, поскольку он отвечает «головастичным» диаграммам, где в каждой вершине след по генератору цветовой группы обращается в нуль в силу полноты спинорного базиса (здесь по цветовым индексам). Собирая все вместе, можно получить следующее выражение для функционала средней энергии (мы не будем выписывать вклады следов генераторов цветовой группы, поскольку это сводится к определенному переопределению константы связи и несущественно для дальнейшего):

$$\langle \sigma | \mathcal{H} | \sigma \rangle = \sum_{k=0}^{\Lambda} (-2k \cos \theta - g \sin^2 \theta). \quad (24)$$

Минимум функционала дается решениями следующего уравнения:

$$\sin \theta (-k + g \cos \theta) = 0. \quad (25)$$

Нетривиальное решение получается для импульсов  $k < g$ :

$$\cos \theta = k/g.$$

Не усложняя задачи, ограничимся только такими состояниями и положим формально импульс обрезания равным константе связи  $\Lambda = g$ . Более сложная конструкция, с продолжением решения с помощью тривиальной ветви  $\theta = 0$ , здесь будет излишней. Подсчитывая плотность энергии конденсата, имеем

$$\langle \sigma | \mathcal{H} | \sigma \rangle = -\frac{4}{3} g^2. \quad (26)$$

Сравнивая это выражение с плотностью энергии «нейтральной» системы (10), можно видеть, что при достаточной плотности ансамбля энергия «нейтрального» ансамбля становится положительной, т. е. энергетически более выгодным оказывается болюбовское заполнение моря. Сам же конденсат характеризуется плотностью заряда

$$\langle \sigma | Q | \sigma \rangle = 2gL, \quad Q = \int dx (q_1^\dagger q_1 + q_2^\dagger q_2). \quad (27)$$

Вне кирального предела в представлении кварковых операторов (19) компоненты  $U, V$  имеют вид

$$\begin{aligned} U_k &= \tilde{U}_{k>0}(1) + \tilde{V}_{k<0}(1), \\ U_{-k} &= \tilde{U}_{k<0}(1) + \tilde{V}_{k>0}(1), \\ V_k &= \tilde{V}_{k<0}(2) + \tilde{U}_{k>0}(2), \\ V_{-k} &= \tilde{V}_{k>0}(2) + \tilde{U}_{k<0}(2). \end{aligned} \quad (28)$$

Каноническое и одевающее преобразования проводятся уже с соответствующими операторами  $\tilde{A}_i, i = 1, 2$ ,

$$|\sigma\rangle = T|0\rangle, \quad T = \prod_p \exp[\varphi_p(\tilde{A}_p^\dagger \tilde{B}_{-p}^\dagger + \tilde{A}_p \tilde{B}_{-p})],$$

$A = T \tilde{A} T^\dagger, B^\dagger = T \tilde{B}^\dagger T^\dagger$ , см. выражение (13). Свободный гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \sum_k k_0 \varepsilon(k) \cos \theta (A_k^\dagger A_k - B_{-k} B_{-k}^\dagger) (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{-k}) + \\ &+ \sum_k k_0 \varepsilon(k) \sin \theta (A_k^\dagger B_{-k}^\dagger + B_{-k} A_k) (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{-k}). \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь функция  $\varepsilon(k)$  обозначает знак импульса  $k$ . Вклад второго матричного элемента преобразуется к виду

$$U_{-k}^\dagger V_{-k} U_k V_k^\dagger = -\frac{\sin^2(\theta - \theta_m)}{4} (\tilde{\theta}_k + \tilde{\theta}_{-k}),$$

определение вспомогательного угла  $\theta_m$  см. в выражении (12). В результате функционал средней энергии приводится к виду

$$\langle \sigma | \mathcal{H} | \sigma \rangle = \sum_{k=0}^{\Lambda} [-2k \cos \theta - g \sin^2(\theta - \theta_m)]. \quad (30)$$

Можно показать, что в двумерном случае мы имеем незначительные поправки  $O(m)$  по сравнению с результатами, полученными в киральном пределе. Но уже в трехмерном случае ситуация разительно меняется, как это уже отмечалось нами в работах [4].

Проведем сравнение для модели Тирринга с точечной формой взаимодействия,  $F(x) = \delta(x)$ . Сначала приведем результаты в киральном пределе, следуя обозначениям работы [9]. Оговорим, что константа взаимодействия в этом случае безразмерна и отличается от константы связи для случая дельтообразного формфактора в импульсном пространстве. Как известно, гамильтониан модели можно диагонализировать при помощи подстановки Бете:

$$\begin{aligned} |k_1, \dots, k_N\rangle &= \int \prod_{i=1}^{N_1} dx_i \exp(ik_i x_i) \times \\ &\times \int \prod_{j=1}^{N_2} dy_j \exp(ik_{N_1+j} y_j) \times \\ &\times \prod_{i,j} [1 + \lambda_{ij} \epsilon(x_i - y_j)] \prod_{i=1}^{N_1} q_1^\dagger(x_i) \prod_{j=1}^{N_2} q_2^\dagger(y_j) |0\rangle, \end{aligned}$$

в которой  $\epsilon(x)$  — функция в виде ступеньки,  $\epsilon(x) = -1$  при  $x < 1$ ,  $\epsilon(x) = 1$ , при  $x > 1$ ,  $k_i$  — импульс  $i$ -й частицы, фазовый фактор  $\lambda_{ij} = -g/2S_{ij}$ ,

$$S_{ij} = \frac{k_i E_j - k_j E_i}{k_i k_j - E_i E_j - \varepsilon^2},$$

$\varepsilon$  — бесконечно малый инфракрасный регуляризатор,  $E_i$  — энергия частицы, (в рассматриваемом случае безмассовых частиц  $E_i = |k_i|$ ). Уравнение для собственных функций гамильтониана приводится при этом к виду

$$H|k_1, \dots, k_N\rangle = \sum_{i=1}^N E_i |k_1, \dots, k_N\rangle,$$

$N = N_1 + N_2$ . Из периодических граничных условий следуют условия для импульсов частиц:

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L} + \frac{2}{L} \sum_{j \neq i} \arctg \frac{gS_{ij}}{2},$$

где  $n_i = 0, \pm 1, \dots, \pm N_0, N_0 = (N - 1)/2$ . Для «симметричного» вакуумного состояния эти условия выполняются для следующей последовательности импульсов частиц:

$$\begin{aligned} k_0 &= 0, \quad n_0 = 0, \\ k_i &= \frac{2\pi n_i}{L} + \frac{2N_0}{L} \arctg \frac{g}{2}, \quad n_i = 1, 2, \dots, N_0, \\ k_i &= \frac{2\pi n_i}{L} - \frac{2N_0}{L} \arctg \frac{g}{2}, \quad n_i = -1, -2, \dots, -N_0. \end{aligned}$$

Для энергии вакуума имеем

$$E_0^{sym} = -\Lambda \left[ N_0 + 1 - \frac{2N_0}{\pi} \arctg \frac{g}{2} \right] \quad (31)$$

(знак перед слагаемым, содержащим взаимодействие, может быть получен из соображений непрерывности, начиная, например, с формулы (8)). Принимая во внимание явное выражение для числа состояний

$$N_0 = \frac{L}{2\pi} \Lambda,$$

легко видеть, что фактически получается формула для энергии основного состояния вида (8), если

иметь в виду связь плотности энергии и энергии ансамбля  $\mathcal{E} = E/L$ . Интересно отметить, что в случае точечного взаимодействия, в силу очевидного ограничения  $|\arctg x| < \pi/2$ , член взаимодействия не может изменить сигнатуру параболы для энергии вакуума, в отличие от случая дельта-образного формфактора в импульсном пространстве. Аналогичные формулы имеют место и в случае модели Гросса–Невье [11]. Для массивной модели Тирринга с точечным взаимодействием,  $F(x) = \delta(x)$ , известно, что распределение моря Дирака отличается от свободного ( $g = 0$ ) лишь перенормировкой быстроты:

$$\alpha \rightarrow \frac{\pi}{(\pi + g)\alpha}, \quad \alpha = \ln \frac{k_0 - k}{m}.$$

Условие конечности массы физического возбуждения приводит к требованию перенормировки токовой массы

$$m = c \exp\left(-\frac{2\varphi}{(\pi + 2\varphi)\Lambda}\right), \quad \sin \varphi = \frac{g}{(4 + g^2)^{1/2}}.$$

В спектре модели появляются связанные состояния. В работах [8, 9] было показано, что помимо «симметричного» вакуумного состояния имеется энергетически более выгодное состояние. Мы не будем более останавливаться на анализе ситуации в двумерном случае и ограничимся только этими поверхностными сведениями. С современным состоянием исследований в этой области можно познакомиться в работах [3].

### 3. ТОЧНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ МОДЕЛИ ККБ

Поведение кваркового ансамбля с бесконечной корреляционной длиной в пространстве больших размерностей проиллюстрируем на примере  $(3 + 1)$ -теории, как случае, представляющем наибольший интерес. Необходимые модификации при переходе к  $(D + 1)$ -задачам будут очевидны. Прежде всего специфицируем представление полей кварков:

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{x}} &= \int d\tilde{\mathbf{p}} \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2p_0)^{1/2}} \left[ a_{\mathbf{p},s} u_{\mathbf{p},s} + b_{-\mathbf{p},s}^\dagger v_{-\mathbf{p},s} \right], \\ \bar{q}_{\mathbf{x}} &= \int d\tilde{\mathbf{p}} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2p_0)^{1/2}} \left[ a_{\mathbf{p},s}^\dagger \bar{u}_{\mathbf{p},s} + b_{-\mathbf{p},s} \bar{v}_{-\mathbf{p},s} \right], \end{aligned} \quad (32)$$

где  $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/(2\pi)^3$ , спиноры  $u$  и  $v$  имеют стандартный вид и нормировки, которые мы не приводим. Вообще говоря, следуя рассмотрению двумерной ситуации в предыдущем разделе, следовало бы вместо

оператора рождения (уничтожения)  $b$  ввести оператор уничтожения (рождения) дополнительной частицы иного сорта. Мы ввели определения операторов частиц и античастиц, подразумевая, что соответствующее каноническое преобразование с частицами и дырками уже выполнено. Это удобно для дальнейшего при работе с БКШ-состоянием. Нам понадобится следующее одновременное перестановочное соотношение

$$\{q_{i\alpha\mathbf{x}}, \bar{q}_{j\beta\mathbf{y}}\} = \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta_{ij} \delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}. \quad (33)$$

Напомним форму гамильтониана взаимодействия

$$V = gv, \quad v = \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) j_\mu^a(\mathbf{x}) j_\mu^a(\mathbf{y}),$$

где использованы операторы тока

$$j_\mu^a(\mathbf{x}) = \bar{q}_{\mathbf{x}} \Gamma q_{\mathbf{x}}, \quad (34)$$

причем для упрощения записи последующих формул мы пользуемся сокращенным обозначением  $\Gamma = \gamma_\mu t^a$ , несмотря на некоторую непоследовательность определения. Можно показать, что гамильтониан интересующего нас ансамбля коммутирует с оператором барионного заряда системы:

$$[H, Q] = 0, \quad Q = \int d\mathbf{x} \bar{q}_{\mathbf{x}} \gamma_0 q_{\mathbf{x}}.$$

Поэтому, как и в двумерном случае, можно воспользоваться приемом Тирринга и назначить опорное состояние  $|0\rangle$ , аннулируемое кварковым оператором,

$$q_{\mathbf{x}}|0\rangle = 0,$$

во всех соответствующих дискретных точках бокса (т. е. все состояния античастиц, описываемые операторами типа  $b$ , заполнены). Собственные векторы гамильтониана  $H$  разыскиваются при этом в виде

$$|N\rangle = \bar{q}_{\mathbf{z}_1} \bar{q}_{\mathbf{z}_2} \dots \bar{q}_{\mathbf{z}_N} \chi_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 \dots \mathbf{z}_N} |0\rangle. \quad (35)$$

В формуле (35) подразумевается интегрирование по всем координатам  $\mathbf{z}_i$ , которые для сокращения записи опускаем. По индукции можно показать, что действие свободного гамильтониана на собственный вектор приведет к суперпозиции вкладов вида

$$\mathcal{H}_0 |N\rangle = \sum_{\mathbf{k}} k_0 (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^\dagger) |N\rangle, \quad (36)$$

где  $k_0 = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$  — энергия кварка. Аналогично для члена взаимодействия можно получить

$$\begin{aligned} [v, \bar{q}_1 \bar{q}_2 \dots \bar{q}_N] \chi &= 2N \bar{q}_1 \bar{q}_2 \dots \bar{q}_N \Gamma \gamma^0 j \chi + \\ &+ N(N-1) \bar{q}_1 \dots \bar{q}_{N-1} \Gamma \gamma^0 \bar{q}_N \Gamma \gamma^0 \chi + \\ &+ N \bar{q}_1 \dots \bar{q}_N \Gamma \gamma^0 \Gamma \gamma^0 \chi. \end{aligned} \quad (37)$$



Поясним, что в этой записи подразумеваются соответствующие перестановки индексов  $1 \dots N$  в первом и третьем членах, а также перестановки по всем парам индексов во втором слагаемом, но мы их опускаем, просто указывая, что возникает  $N$  или  $N(N - 1)$  эквивалентных вкладов. Также мы опустили пространственные индексы у кварковых операторов и аналогично индексы у оператора кваркового тока  $j$  (34). По построению оператор тока при действии на опорный вектор дает нуль,  $j|0\rangle = 0$ . Пользуясь этим, легко найти действие оператора взаимодействия на разыскиваемый собственный вектор (35). Прямое произведение  $\lambda$ -матриц, которое стоит во втором слагаемом выражения (37), может быть разложено на симметричную и антисимметричную по цветовым индексам спинов составяющие:

$$\lambda \otimes \lambda = \frac{4}{3}\Lambda_s - \frac{8}{3}\Lambda_a, \quad \Lambda_s + \Lambda_a = E_\Lambda, \quad (38)$$

где  $E_\Lambda$  — единичный тензор. Аналогично легко видеть, что прямое произведение пространственных  $\gamma\gamma^0$ -матриц,

$$\gamma\gamma^0 = \left\| \begin{array}{cc} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{array} \right\|, \quad \gamma\gamma^0 = \left\| \begin{array}{cc} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{array} \right\|$$

(соответственно в киральном (Вейля) и стандартном представлениях) действует на спинорные индексы так же, как действует прямое произведение  $\sigma$ -матриц:

$$\sigma \otimes \sigma = \Sigma_s - 3\Sigma_a, \quad \Sigma_s + \Sigma_a = E_\Sigma, \quad (39)$$

где  $E_\Sigma$  — единичный тензор. Тогда для прямого произведения  $\gamma_\mu\gamma^0$ -матриц получим

$$\gamma_\mu\gamma^0 \otimes \gamma^\mu\gamma^0 = \Sigma_s + \Sigma_a - (\Sigma_s - 3\Sigma_a) = 4\Sigma_a. \quad (40)$$

Здесь, аналогично случаю цветовых матриц подразумеваются симметричный и антисимметричный проекторы в пространстве спинов. В результате для интересующей нас в случае фермионов антисимметричной по цветовым и спинорным индексам комбинации можно получить

$$\lambda \otimes \lambda \gamma\gamma^0 \otimes \gamma\gamma^0 = \frac{16}{3}\Lambda_s\Sigma_a. \quad (41)$$

Коэффициент при составляющей  $\Lambda_a\Sigma_s$ , очевидно, равняется нулю. Координатная волновая функция выбирается антисимметричной. (Комбинация  $\Lambda_a, \Sigma_a$  с симметричной координатной функцией приводит к отталкиванию, и поэтому не представляет интереса.) В третьем слагаемом (37), которое содержит

произведение  $\Gamma\gamma^0\Gamma\gamma^0$ , для свертки цветовых матриц имеем

$$\lambda\lambda = 2\frac{N_c^2 - 1}{N_c} = \frac{16}{3}E_\Lambda(N_c = 3). \quad (42)$$

Аналогично для произведения  $\gamma\gamma^0$ -матриц получим

$$\gamma_\mu\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = -2E_\Sigma. \quad (43)$$

Теперь действие коммутатора (37) на опорный вектор  $|0\rangle$  можно привести к виду

$$\begin{aligned} [v, \bar{q}_1 \dots \bar{q}_N]\chi|0\rangle &= \\ &= \frac{4}{3}N[\Lambda_s\Sigma_a(N - 3) - 2\Lambda_a\Sigma_s]|N\rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

Рассмотрим модель в киральном пределе. Отрицательная энергия (плотность энергии), приходящая от свободного гамильтониана оценивается как

$$\mathcal{E}_0 = -2N_c 4\pi \int_P^\Lambda \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} = -\frac{2N_c}{2\pi^2} \frac{1}{4}(\Lambda^4 - P^4). \quad (45)$$

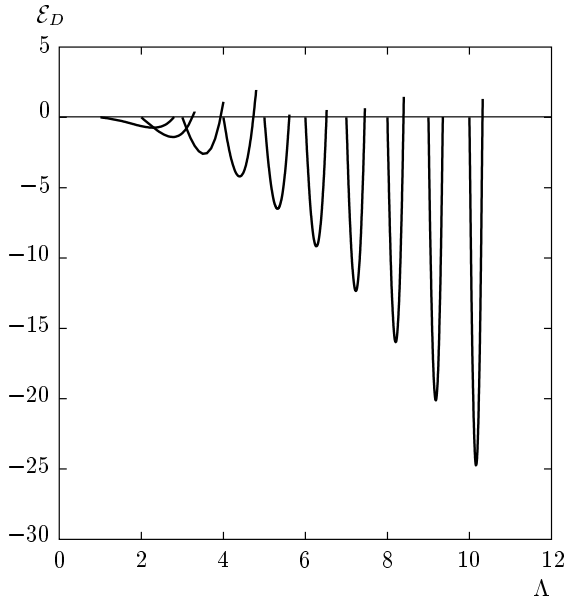
Аналогично полное число частиц с отрицательной энергией выражается в виде

$$\begin{aligned} N &= \mathcal{N}L^3, \\ \mathcal{N} &= 2N_c 4\pi \int_P^\Lambda \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} = \frac{2N_c}{2\pi^2} \frac{1}{3}(\Lambda^3 - P^3), \end{aligned} \quad (46)$$

где  $\mathcal{N}$  — плотность частиц. Теперь почти все готово, чтобы записать энергию моря Дирака аналогично выражению (8). Положим для простоты оценки, что вклады  $\Lambda_s\Sigma_a$  и  $\Lambda_a\Sigma_s$  комбинаций одинаковы, тогда плотность энергии моря Дирака равна

$$\mathcal{E}_D = \mathcal{E}_0 + g\frac{4}{3}\mathcal{N}(N - 1) - g\frac{16}{3}\mathcal{N}. \quad (47)$$

Допустим, что числа заполнения большие. Тогда правомочно пренебречь вкладом малого третьего члена. Во втором слагаемом пренебрежем единицей. Теперь можно видеть (что ясно и по соображениям размерности), что параметром взаимодействия служит  $a = gL^3$ . На рис. 1 показана энергия моря Дирака как функция параметра  $\Lambda$  при  $a = 1.025$  для ряда значений граничного импульса  $P = 1, \dots, 10$ . Оказывается, ровно так же, как и в двумерном случае, абсолютная глубина моря Дирака не определена (стремится к минус бесконечности при устремлении параметра обрезания к бесконечности). Но в силу того, что в формуле (47) обусловленный взаимодействием старший член содержит высокую (шестую) степень



**Рис. 1.** Плотность энергии моря Дирака как функция обрезającego параметра  $\Lambda$ , при  $a = 1.025$  для ряда значений граничного импульса  $P = 1, \dots, 10$

параметра обрезания, а член кинетической энергии пропорционален его четвертой степени, распределение энергии с ростом  $P$  сильно сжимается (что легко видеть на рис. 1), вырождаясь в пределе в вертикальный отрезок, так что фактически море Дирака отвечает просто как бы связанному состоянию. Поскольку по построению импульс, при котором достигается минимум энергии, должен быть целым числом, должно выполняться определенное соотношение, содержащее константу связи. При большом граничном импульсе  $P$  два действительных корня уравнения  $\mathcal{E}_D = 0$  в случае  $(D + 1)$ -измерений, равны

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= P, \quad \Lambda_2 = P + \Delta_\Lambda, \\ \Delta_\Lambda &\approx \frac{(D+1)P}{D[aDP^{D-1} - (D+1)/2]} \approx \frac{D+1}{aD^2} P^{2-D}, \\ a &= \frac{D+1}{D^2} 2N_c \frac{S_D}{(2\pi)^D} gL^D, \quad S_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}. \end{aligned} \quad (48)$$

Будем характеризовать распределение энергии шириной, которая дается разностью этих двух корней,  $\Delta_\Lambda = \Lambda_2 - \Lambda_1$ . Минимум плотности энергии моря Дирака расположен примерно посередине между этими корнями,  $\Lambda' \approx (\Lambda_1 + \Lambda_2)/2$ , и определяется соотношением

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_D(\Lambda') &\approx -\frac{(D+1)^2 P^{D+1}}{4D[aDP^{D-1} - (D+1)/2]} \approx \\ &\approx -\frac{(D+1)^2}{4aD^2} P^2. \end{aligned} \quad (49)$$

Соответствующую параболу (огibaющую точек минимума энергии) и сужение распределения энергии легко видеть на рис. 1. В случае  $(2 + 1)$ -измерения ширина распределения постоянна. Для размерности  $1 + 1$ , напомним, ширина пропорциональна параметру обрезания  $\Lambda$ . Значение параметра  $\Lambda$ , при котором ширина распределения становится сравнимой с минимальным размером ячейки по импульсам  $-2\pi/L$ , можно назвать критическим  $\Lambda_c$ , поскольку при достижении этого предела вырождение может оказаться уже существенным. В случае  $(3 + 1)$ -измерений

$$\Lambda_c \approx \frac{2N_c}{2gL} \frac{2\pi}{L}.$$

В представленной записи мы выделили безразмерную константу связи  $gL$ , которая служит естественным безразмерным параметром теории (см. ниже разд. 4, посвященный константе связи). Отметим также, что в двумерном случае бесцветного взаимодействия мы уже встречались с аналогичным соотношением, причем оно связывалось с изменением сигнатуры параболы, описывающей море Дирака. Из работ [4] (из феноменологии) следует оценка  $g \approx 300$  МэВ, и с учетом того, что характерный размер  $L$  определяется через  $\Lambda_{QCD}$ , видим, что  $\Lambda_c$  не может быть большим числом.

Отметим очень важное обстоятельство. Состояния, доставляющие относительный минимум дираковского моря, сильно вырождены, поскольку целочисленная решетка импульсов (напомним, мы рассматриваем кварковый ансамбль с периодическими граничными условиями в боксе конечных размеров  $L$ ) не всегда точно попадает на сферу радиуса  $\Lambda'$ . В двумерном случае, как мы это обсуждали выше, максимальная степень вырождения интересующих нас состояний, формирующих море Дирака, равнялась только двум. Легко понять, что степень вырождения «вакуумного» состояния при фиксированном параметре обрезания пропорциональна площади сферы радиуса  $\Lambda'$ , при котором достигается минимум энергии дираковского моря. В пределе  $P \rightarrow \infty$  степень вырождения бесконечна. Из квантовой механики следует, что энергию ансамбля, имеющего вырожденный уровень, можно, в принципе, понизить, если снять вырождение путем нарушения симметрии состояния.

Теперь примем во внимание второе важное обстоятельство. В пространстве времени, большем или

равном  $3 + 1$ , ширина распределения энергии стремится к нулю при стремлении параметра обрезания к бесконечности. Энергия же вакуума стремится к минус бесконечности по закону  $-\Lambda^2$ . (Можно видеть аналогию с результатами конформной теории [12].) Понятно, что флуктуации (одновременно можно сказать и снятие вырождения состояния) будут приводить к разрушению такого бесконечно тонкого слоя. Снятие вырождения может быть реализовано путем корреляций парных состояний.

Воспользуемся теперь известной классификацией, применяемой для таких импульсных распределений по полному импульсу пары  $\mathbf{P}$ . При ненулевом импульсе число пар частиц, как известно, пропорционально периметру окружности пересечения двух сфер характерного радиуса  $\Lambda$ , центры которых находятся на расстоянии  $|\mathbf{P}|$  друг от друга. При нулевом импульсе число пар значительно больше, оно пропорционально площади сферы радиуса  $\Lambda$ . Понятно, что именно такой подансамбль дает доминирующий вклад. С другой стороны, мы знаем, что в антитриплетном цветовом канале обнаруживается притяжение кварков, и выгодным может оказаться дикварковое состояние. Это дает намек рассмотреть в качестве вакуумного ансамбля дикварковое море (состояние цветового сверхпроводника), причем, как выясняется, необязательно стартовать с дираковского слоя. Эту задачу и сравнение с БКШ-состоянием (поскольку феноменология сильных взаимодействий свидетельствует, что это разумный выбор) мы подробно рассмотрели в нашей работе [13], и ниже приведем нужные для нас сведения.

Начнем с напоминания, что БКШ-состояние не является собственным состоянием гамильтониана, а представляет собой смешанное состояние, образованное конденсатом пар кварк-антикварк. БКШ-состояния в модели ККБ были подробно изучены в наших работах [14]. Функционал средней энергии, приходящейся на один кварк,  $w = E/V\gamma$ , имеет вид

$$w = \int d\tilde{\mathbf{p}} p_0 (1 - \cos \theta) - \frac{1}{2} \int d\tilde{\mathbf{p}} \sin(\theta - \theta_m) M(\mathbf{p}), \quad (50)$$

где  $M(\mathbf{p})$  — индуцированная масса кварка,

$$M(\mathbf{p}) = 2G \int d\tilde{\mathbf{q}} \sin(\theta' - \theta'_m) F_{\mathbf{p},\mathbf{q}}, \quad (51)$$

$\theta = 2\varphi_{\mathbf{p}}$ ,  $\varphi_{\mathbf{p}}$ , напомним, обозначает угол спаривания,  $p_0 = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ . Мы привели формулу для

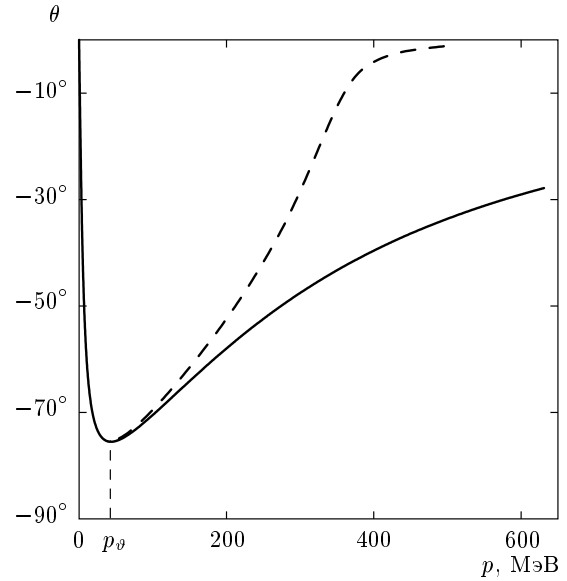


Рис. 2. Наиболее устойчивые равновесные углы  $\theta$  как функции импульса  $p$ . Сплошная линия соответствует модели НИЛ, штриховая линия — модели ККБ

формфактора общего вида, и переменные со штрихом здесь и ниже отвечают интегрированию по импульсу  $\mathbf{q}$ , в частности,  $\theta' = 2\varphi_{\mathbf{q}}$ . Угол  $\theta_m$  определяется из соотношения  $\sin \theta_m = m/p_0$ . Единица в первом слагаемом в правой части формулы (50) вводилась в целях нормировки, такой чтобы при выключенном взаимодействии энергия вакуумного состояния равнялась нулю. Но в интересующем нас контексте эта зависимость должна быть восстановлена.

На рис. 2 для сравнения приведены наиболее устойчивые экстремали функционала (50) для моделей НИЛ и ККБ, полученные для нормальных условий ( $T = 0, \mu = 0$ ). Непосредственно для дельтообразного потенциала в координатном пространстве (модель НИЛ) выражение (50) расходится, и для получения разумных результатов вводится обрезающий верхний предел интегрирования по импульсу  $\Lambda$ , который наряду с константой взаимодействия  $G$  и токовой массой кварка  $m$  является настроечным параметром модели. Ниже мы употребляем один из стандартных наборов модели НИЛ:  $\Lambda = 631$  МэВ,  $G\Lambda^2/2\pi^2 \approx 1.3$ ,  $m = 5.5$  МэВ. Параметры модели ККБ выбраны такими, чтобы при одинаковых токовых массах динамические массы кварков в обеих моделях — НИЛ и ККБ — совпадали при нулевом импульсе кварка. Импульс  $p_0$  отвечает максимальному притяжению кварка и антикварка. Обратная величина этого параметра определяет ха-

рактерный размер квазичастицы. Для рассмотренных моделей он оказывается приблизительно равным  $p_\theta \approx (mM_q)^{1/2}$ , где  $M_q$  — характерная динамическая масса кварка, т. е. размер квазичастицы сравним с размером  $\pi$ -мезона. Примечательно, что размер квазичастицы, как это демонстрирует рис. 2, не зависит существенным образом от вида формфактора, иными словами, от масштаба, а определяется в основном константой взаимодействия.

Преобразуем теперь выражение для удельной энергии кварка (50) к виду, характерному для стандартного приближения среднего поля. Тригонометрический коэффициент представим в виде некоторой динамической массы кварка  $M_q$ :

$$\sin(\theta - \theta_m) = \frac{M_q}{P_0}, \quad P_0 = (\mathbf{p}^2 + M_q(\mathbf{p}))^{1/2}. \quad (52)$$

Проводя алгебраические преобразования, можно показать, что имеет место естественное соотношение между токовой индуцируемой и динамической массами кварка:

$$M_q(\mathbf{p}) = M(\mathbf{p}) + m, \quad (53)$$

причем выражение (50) преобразуется к виду

$$w = \int d\tilde{\mathbf{p}} p_0 - \int d\tilde{\mathbf{p}} P_0 + \frac{1}{4G} \int d\tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} F_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \tilde{M}(\mathbf{p}) \tilde{M}(\mathbf{q}), \quad (54)$$

где  $\tilde{M}(\mathbf{p})$  — плотность индуцированной массы кварка,  $P_0 = [\mathbf{p}^2 + M_q^2(\mathbf{p})]^{1/2}$  — энергия квазичастицы кварка с динамической массой

$$M_q(\mathbf{p}) = m + M(\mathbf{p}) = m + \int d\tilde{\mathbf{q}} F_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \tilde{M}(\mathbf{q}). \quad (55)$$

В частном случае модели ККБ имеем

$$M(\mathbf{p}) = 2G \frac{M_q(\mathbf{p})}{P_0}. \quad (56)$$

На практике удобнее пользоваться обратной функцией  $p(M_q)$ . В частности, в киральном пределе  $M_q = (4G^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2}$  при  $|\mathbf{p}| < 2G$ ,  $M_q = 0$  при  $|\mathbf{p}| > 2G$ . Отметим, что состояния кварка с импульсами  $|\mathbf{p}| < 2G$  вырождены по энергии  $P_0 = 2G$ . На рис. 3 показаны три ветви решений уравнения (56) для динамической массы кварка. Точками показаны мнимые части решений, которые образуются в месте слияния двух вещественных корней. Подынтегральные члены в выражении (54) в этом случае оцениваются как

$$p_0 - P_0 + \frac{1}{4G} M^2 \approx -\frac{Gm^2}{p^2},$$

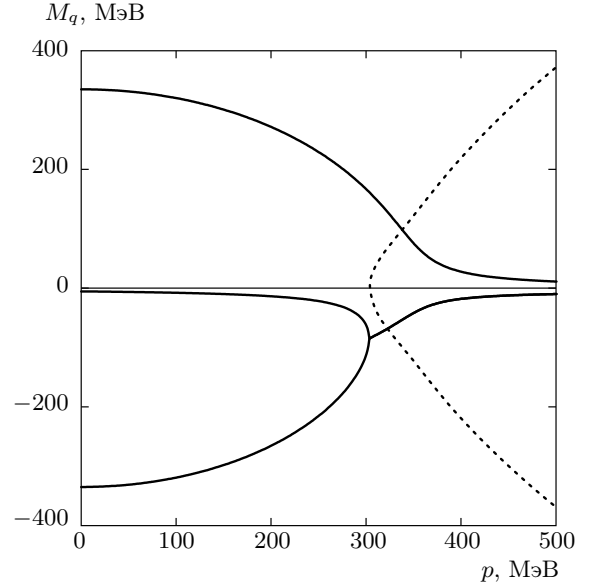


Рис. 3. Три ветви решений для динамической массы кварка для модели ККБ как функция импульса. Точками показаны мнимые части решений

и тогда для удельной энергии ансамбля в случае  $(3+1)$ -измерений получается линейно расходящийся интеграл:

$$w \approx - \int \frac{dpp^2}{2\pi^2} \frac{Gm^2}{p^2}.$$

В случае большего  $D + 1$  числа измерений имеем вклад, пропорциональный  $-\Lambda^{D-2}$ . Для  $D = 1$  интеграл сходится, а для  $D = 2$  имеется логарифмическая расходимость. Мы уже упоминали, что в выражениях (50) и (54) использовалась естественная регуляризация, и чтобы получить плотность энергии, приходящуюся на один кварк, мы обязаны вернуть вклад

$$w_0 = - \int d\tilde{\mathbf{p}} p_0,$$

который в случае размерности  $D + 1$  пропорционален  $-\Lambda^{D+1}$ . Сопоставляя все вместе, мы видим, что для БКШ-состояния определенно можно получить заметно меньшую энергию  $-\Lambda^{D+1}$ ,  $D > 1$ , чем вклад дираковского моря  $-\Lambda^2$ . Корреляционный вклад, который в функционале (50) дают члены, содержащие  $\sin(\theta - \theta_m)$ , существенно подавлен по сравнению с вкладом  $\Lambda^6$ ,  $D = 3$ , дираковского моря ( $\Lambda^{2D}$  в случае  $(D + 1)$ -измерений), и для них неактуальна проблема сужения распределения энергии. Также привлекательны БКШ-состояния и с точки зрения феноменологии, поскольку характеризуются отличным от нуля киральным конденсатом, конечным

в киральном пределе и расходящимся при  $m \neq 0$  (тем не менее, мезонные наблюдаемые оказываются конечными [15]).

Аналогичным образом было рассмотрено дикварковое состояние [13], и в антитриплетном канале была найдена щель (в киральном пределе)

$$\Delta = (4G_d^2 - p^2)^{1/2}$$

с энергией  $E = 2G_d \approx 114$  МэВ. Эта энергия примерно в три раза меньше, чем энергия кварка в БКШ-состоянии, что обусловлено уменьшением константы связи в антитриплетном канале. Было продемонстрировано, что БКШ-состояние для нормальных условий при нулевой температуре и нулевой барионной плотности энергетически выгоднее состояния цветового сверхпроводника.

Подведем некоторые итоги. Вырожденность основного состояния в виде моря Дирака, обусловленная сужением распределения по энергии, может послужить причиной перестройки вакуумного состояния. Уже на этом этапе, не вдаваясь в детали, можно сказать даже больше. Основного состояния в традиционном понимании у таких кварковых ансамблей не существует вовсе, система как бы обречена флуктуировать. И не находимся ли мы под некоторым гипнозом трудностей, характерных для свободного гамильтониана и связанных с состояниями с отрицательной энергией, когда заполняем море Дирака? Вопрос заключается в том, чтобы распорядиться резервуаром состояний жесткой части спектра наиболее выгодным образом. В заключение отметим, что квантовые фазовые переходы и аномальное поведение ферми-систем являются в последнее время объектами самого пристального внимания также в физике конденсированного состояния [16].

#### 4. КОНСТАНТА СВЯЗИ

Модель ККБ предоставляет нам еще одну интересную возможность — проследить связь между наблюдаемой и затравочной константами взаимодействия во всем диапазоне передаваемой энергии. Это рассмотрение актуально, поскольку БКШ-состояние (смешанное состояние) не является собственным состоянием изучаемого гамильтониана. Несмотря на свой, кажущийся «игрушечным» вид, модель ККБ является вполне полноценной теорией поля, со всеми присущими ей атрибутами, в частности, расходимостями. Мы отмечали в работах [15], что помимо регулярных диаграмм имеются сингулярные,

которые расходятся как в ультрафиолетовом диапазоне, так и в инфракрасном. В настоящей работе мы рассмотрим ряд диаграмм, приводящих к модификации затравочных констант связи в скалярном и псевдоскалярном секторах. На рис. 4 показаны начальные члены ряда теории возмущений. Мы изобразили четырехфермионное взаимодействие, подчеркнув его нелокальный характер, как произведения двух цветовых токов, сосредоточенных в точках  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ . Исключительной технической особенностью модели ККБ является то, что все интегрирования по импульсам факторизуются, и в качестве актуальной переменной, по которой в диаграммах проводится интегрирование, выступает только энергия квазичастицы (виртуальной квазичастицы). В результате задача становится фактически одномерной, т. е. в этом смысле кажется самой простой.

Будем далее полагать, что во всех виртуальных процессах участвуют квазичастицы с динамической массой, соответствующей переносимой частицей импульсу, например,  $\mathbf{p}$ ,  $M(\mathbf{p})$  (в этом разделе мы, для краткости записи формул, будем употреблять это обозначение для динамической массы кварка). Это предположение (приближение) представляется вполне правдоподобным, если учесть, что в модели ККБ динамическая масса кварка, как это демонстрирует рис. 3, гладко переходит в массу голого (токового) кварка. Нетрудно показать, что ряд теории возмущений, изображенный на рис. 4, может быть выражен посредством поляризационного оператора

$$\tilde{\Pi}^{\pi, \sigma} = 4N_c \int \frac{d\mathbf{k}}{E} \frac{-2E^2 + M^2 \mp M^2}{\varepsilon^2/4 - E^2}, \quad (57)$$

где  $\varepsilon$  — передаваемая энергия,  $E = [\mathbf{k}^2 + M^2(\mathbf{k})]^{1/2}$  — энергия квазичастицы в петле, в виде

$$G_o = G + VG\tilde{\Pi} + (VG\tilde{\Pi})^2 + \dots \quad (58)$$

Здесь  $V = L^3$  — объем, в котором заключена система. Объем системы и есть тот самый инфракрасный вклад, о котором мы упоминали выше. Он является как следствие нелокальности модели в виде дополнительной дельта-функции  $\delta^3(0)$ , стандартная регуляризация вклада которой и приводит к обсуждаемому множителю. Из выражения (57) можно заключить, что интеграл содержит сильную ультрафиолетовую расходимость. Обсуждая формулы для удельной энергии кварка (50), (54), мы упоминали естественный способ придания смысла формально расходящимся выражениям, который заключается в нормировке их на свободный лагранжиан (гамильто-

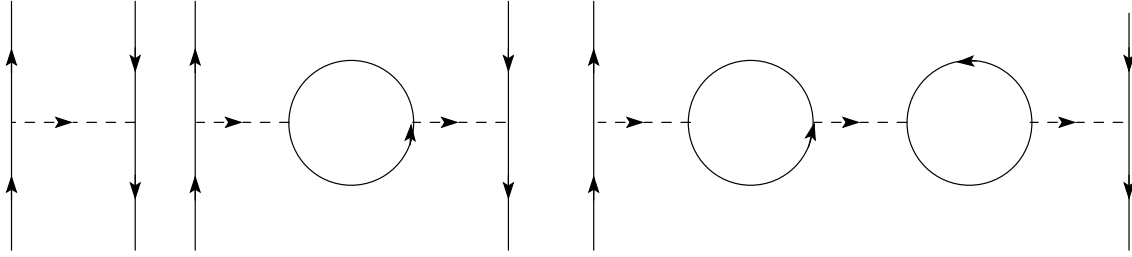


Рис. 4. Первые члены ряда теории возмущений для наблюдаемой константы связи

ниан). Поступим аналогичным образом (в духе теории перенормировок) и в рассматриваемом случае. Будем полагать, что в качестве наблюдаемого поляризационного оператора  $\Pi$  выступает разность оператора  $\tilde{\Pi}$  и оператора  $\Pi_0$ , который генерируется токовыми кварками с массой  $m$ ,

$$\Pi = \tilde{\Pi} - \Pi_0. \quad (59)$$

Динамическая масса кварка при больших импульсах гладко переходит в токовую массу кварка, поэтому понятно, что при достаточно быстром стремлении к токовой массе любая диаграмма теории возмущений будет приводить к конечному(!) выражению. В частности, в киральном пределе интегралы (автоматически) строго обрезаются на импульсе  $2G$ . Посмотрим теперь в деталях, как это происходит для рассматриваемого ряда рис. 4.

Итак, представим выражение (57) в виде

$$\tilde{\Pi} = N_c (\tilde{I} + \varepsilon^2 \tilde{J} - \tilde{K}^{\pi, \sigma}), \quad (60)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\tilde{I} = 2 \int d\tilde{\mathbf{k}} \frac{1}{E}, \quad \tilde{J} = \frac{1}{2} \int d\tilde{\mathbf{k}} \frac{1}{E} \frac{1}{E^2 - \varepsilon^2/4},$$

$$\tilde{K}^\sigma = 2 \int d\tilde{\mathbf{k}} \frac{1}{E} \frac{M^2}{E^2 - \varepsilon^2/4}, \quad K^\pi = 0.$$

Масса в модели ККБ связана с энергией соотношением  $M - m = 2GM/E$ . Принимая во внимание определение энергии  $E^2 = \mathbf{k}^2 + M^2$ , можно преобразовать интеграл по импульсу в интеграл по энергии:

$$k dk = E dE \left( 1 + \frac{2Gm^2}{(E - 2G)^3} \right),$$

причем

$$k = \frac{E}{E - 2G} [(E - 2G)^2 - m^2]^{1/2}.$$

Интегралы  $\tilde{I}$ ,  $\tilde{J}$ ,  $\tilde{K}$  берутся в элементарных функциях. Для первого интеграла можно получить

$$\tilde{I} = \frac{1}{\pi^2} \left[ \left( \frac{\tilde{E}_\Lambda}{2} + 2G - G \frac{m^2}{\tilde{E}_\Lambda^2} \right) \tilde{s}_\Lambda + \frac{4G^2}{3} \frac{\tilde{s}_\Lambda^3}{\tilde{E}_\Lambda^3} - \frac{m^2}{2} \ln \frac{\tilde{E}_\Lambda + \tilde{s}_\Lambda}{m} - Gm \arccos \frac{m}{E} \right],$$

где использованы обозначения

$$\tilde{E} = E - 2G, \quad E_\Lambda = [\Lambda^2 + M^2(\Lambda)]^{1/2}, \\ \tilde{s}_\Lambda = [(E_\Lambda - 2G)^2 - m^2]^{1/2},$$

$\Lambda$  — формальный верхний предел интегрирования по импульсу. Как мы уже отмечали, физически осмысленные результаты получаются, если вычесть интеграл  $I_0$ , посчитанный с «голым» кварком,

$$I_0 = 2 \int d\tilde{\mathbf{k}} \frac{1}{e} = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{e_\Lambda s_\Lambda}{2} - \frac{m^2}{2} \ln(e_\Lambda + s_\Lambda) \right),$$

где  $e = (k^2 + m^2)^{1/2}$ . Полагая обрезаящий импульс интегрирования большим,  $\Lambda \gg G, m$ , раскладываем полученные выражения, выделяя конечный вклад

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} I = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \tilde{I} - I_0 \rightarrow -\frac{1}{\pi^2} \left( \frac{10}{3} G^2 + \frac{\pi}{2} Gm \right).$$

Для интеграла  $\tilde{J}$  можно получить:

$$\tilde{J} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \left[ j_- i_- - j_+ i_+ + \sum_{n=1}^4 j_n i_n \right], \\ j_\pm = 1 - \frac{v_1}{2G_\pm} + \frac{v_2}{(2G_\pm)^2} - \frac{v_3}{(2G_\pm)^3} + \frac{v_4}{(2G_\pm)^4}, \\ j_1 = v_1 a_1 - v_2 a_2 + v_3 a_3 - v_4 a_4, \\ j_2 = v_2 a_1 - v_3 a_2 + v_4 a_3, \quad (61)$$

$$j_3 = v_3 a_1 - v_4 a_2,$$

$$j_4 = v_4 a_1,$$

$$i_\pm = \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E_\pm}, \quad i_n = \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{\tilde{E}^n},$$

где

$$E_{\pm} = E \pm \frac{\varepsilon}{2}, \quad G_{\pm} = G \pm \frac{\varepsilon}{4}, \quad v_1 = 2G, \quad v_2 = 0,$$

$$v_3 = 2Gm^2, \quad v_4 = 4G^2m^2,$$

$$a_n = \frac{1}{(2G_-)^n} - \frac{1}{(2G_+)^n}, \quad n = 1, 2, 3, 4$$

(в выражении для  $K^\sigma$  появятся также слагаемые, содержащие  $n = 5, 6$ ). Расходящаяся часть интеграла  $J^d$  определяется асимптотиками следующих интегралов:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E_{\pm}} \rightarrow E_\Lambda - 2G_{\pm} \ln \frac{2E_\Lambda}{m},$$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E} \rightarrow E_\Lambda, \quad \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E^2} \rightarrow \ln \frac{2E_\Lambda}{m}.$$

Остальные члены, входящие в выражение для  $\tilde{J}$ , относительно расходящихся пренебрежимо малы. Используя определение  $a_n$ , можно видеть, что в асимптотике  $\Lambda \rightarrow \infty$  расходимость интеграла является всего лишь логарифмической:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \tilde{J}^d \rightarrow \frac{1}{4\pi^2} \ln \frac{2E_\Lambda}{m}.$$

Мы нормируем результаты на свободный лагранжиан, и в применении к интегралу  $\tilde{J}$  это означает, что следует вычесть вклад

$$J_0 = \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \frac{1}{e^2 - \varepsilon^2/4}.$$

Для расходящейся части можно получить

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} J_0^d \rightarrow \frac{1}{4\pi^2} \ln \frac{2e_\Lambda}{m}.$$

Учитывая, что  $E_\Lambda \rightarrow e_\Lambda$  при  $\Lambda \rightarrow \infty$ , видим, что расходящиеся части в выражении для  $J = \tilde{J} - J_0$  в точности компенсируются. Для регулярной части можно получить

$$J^r = \tilde{J}^r - J_0^r, \quad \tilde{J}^r = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \left[ j_- A_- - j_+ A_+ - j_1 \left( 2G + \frac{\pi m}{2} \right) - j_2 + j_3 \frac{\pi}{4m} + j_4 \frac{1}{3m^2} \right],$$

где используются обозначения:

$$A_{\pm} = \begin{cases} -\alpha_{\pm} \ln \left| \frac{2G_{\pm} - \alpha_{\pm}}{m} \right|, & |2G_{\pm}| \geq m, \\ \beta_{\pm} \left( \arcsin \frac{2G_{\pm}}{m} - \arcsin \frac{2G_{\pm} + m}{|2G_{\pm} + m|} \right), & |2G_{\pm}| < m. \end{cases}$$

$$\alpha_{\pm} = [(2G_{\pm})^2 - m^2]^{1/2}, \quad \beta_{\pm} = [m^2 - (2G_{\pm})^2]^{1/2}.$$

Для  $J_0^r$  имеем

$$J_0^r = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} (A_-^0 - A_+^0),$$

$$A_{\pm}^0 = \begin{cases} -\gamma \ln \left| \frac{\pm \frac{\varepsilon}{2} - \gamma}{m} \right|, & |\varepsilon/2| \geq m, \\ \delta \left( \arcsin \frac{\pm \varepsilon}{2m} - \arcsin \frac{\pm \varepsilon/2 + m}{|\pm \varepsilon/2 + m|} \right), & m > |\varepsilon/2|, \\ \gamma = \left[ \frac{\varepsilon^2}{4} - m^2 \right]^{1/2}, \quad \delta = \left[ m^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right]^{1/2}. \end{cases}$$

Аналогичные результаты могут быть получены для интеграла  $K^\sigma = \tilde{K}^\sigma - K_0^\sigma$ . Исходный интеграл

$\tilde{K}^\sigma$  может быть представлен в виде, аналогичном формуле (61):

$$\tilde{K}^\sigma = \frac{m^2}{\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \left[ k_- i_- - k_+ i_+ + \sum_{n=1}^6 k_n i_n \right],$$

$$k_\pm = 1 - \frac{w_1}{2G_\pm} + \dots + \frac{w_6}{(2G_\pm)^6},$$

$$k_1 = w_1 a_1 - \dots - w_6 a_6,$$

$$k_2 = w_2 a_1 - \dots + w_6 a_5,$$

$$\dots$$

$$k_6 = w_6 a_1,$$

где  $w_1 = 6G$ ,  $w_2 = 12G^2$ ,  $w_3 = 8G^3$ ,  $w_4 = 12G^2 m^2$ ,  $w_5 = 24G^3 m^2$ ,  $w_6 = 16G^4 m^2$ . Выделяя регулярную часть, имеем

$$K_\sigma^r = \tilde{K}_\sigma^r - K_{0\sigma}^r,$$

$$\tilde{K}_\sigma^r = \frac{m^2}{\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \left[ k_- A_- - k_+ A_+ - k_1 \left( 2G + \frac{\pi m}{2} \right) - k_2 + \right.$$

$$\left. + k_3 \frac{\pi}{4m} + k_4 \frac{1}{3m^2} + k_5 \frac{\pi}{16m^3} + k_6 \frac{2}{15m^4} \right],$$

$$K_{0\sigma}^r = \frac{m^2}{\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \left( A_-^0 - A_+^0 \right).$$

Удобно пользоваться безразмерными переменными  $m \rightarrow m/G$ ,  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon/G$ . Можно видеть, что параметром теории, характеризующим силу взаимодействия, выступает комбинация объема и константы связи вида  $V G^3$  (что ясно и по соображениям размерности).

Наблюдаемая константа связи  $G_o$  (сумма бесконечного ряда рис. 4, взятая для каждого канала отдельно) выражается через регуляризованный поляризационный оператор как

$$G_o^{\pi,\sigma} = \frac{G}{1 - V G^3 \Pi^{\pi,\sigma}}. \quad (62)$$

При этом в выражении (62) поляризационный оператор  $\Pi$  представлен в безразмерном виде, исходно он пропорционален квадрату константы связи,  $\Pi \propto G^2$ . Введенные поляризационные операторы освобождают теорию от расходимостей и не содержат типичных логарифмических особенностей. Для определенности рассмотрим положительную передачу энергии  $\varepsilon > 0$  (случай отрицательных передач энергии симметричен). Из представленных формул следует, что в поляризационном операторе содержатся сильные полюсные особенности при энергии  $\varepsilon = 4$  (в размерных единицах  $\varepsilon = 4G$ ), при которой переменная  $G_-$  обращается в нуль. Окрестность этой точки, как, собственно, и все полученные выражения, заслуживают того, чтобы досконально изучить их аналитически. Но чтобы не загромождать текст, ограничимся здесь лишь беглым качественным анализом и приведем для наглядности ряд рисунков. Полюсные

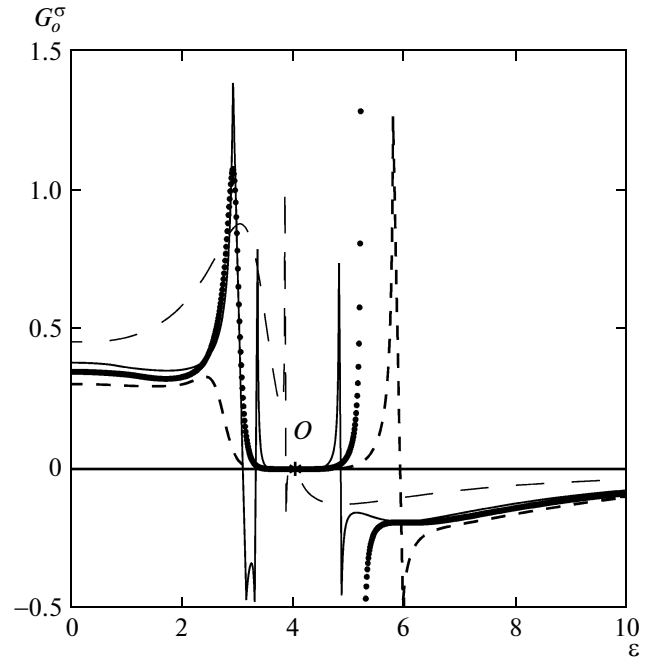


Рис. 5. Наблюдаемая константа связи  $G_o^\sigma$  как функция передаваемой энергии  $\varepsilon$  (в безразмерных переменных). Штриховая кривая получена для  $m = 0.9$ , пунктирная — для  $m = 0.6$ , сплошная — для  $m = 0.4$ . Всюду параметр  $V = 1$ . Точка  $O$  показывает место, где  $G_o^{\pi,\sigma} = 0$ . Штриховая кривая с большим шагом отвечает  $m = 0.01$

особенности (максимальная степень равна четырем в интеграле  $\tilde{J}$  и шести в интеграле  $\tilde{K}^\sigma$ ) приводят к тому, что при энергии  $\varepsilon = 4$  наблюдаемая константа связи  $G_o^{\pi,\sigma}$  обращается в нуль. Понятно, что в непосредственной окрестности этой точки можно пользоваться теорией возмущений, границы применимости которой определяются параметрами  $V G^3$  и  $m$ , однако мы опустим подробный анализ.

Также понятно, что в непосредственной близости к этой области могут примыкать связанные состояния, которые определяются нулями знаменателя выражения (62), поскольку все остальные вклады ничтожно малы по сравнению с полюсными особенностями, и может появиться возможность получить нуль в знаменателе либо справа, либо слева от обсуждаемой области, в зависимости от чередования знаков в старших полюсных особенностях. На рис. 5, 6 показаны наблюдаемые константы связи  $G_o^\sigma$ ,  $G_o^\pi$ , соответственно, как функции передаваемой энергии  $\varepsilon$  (в безразмерных переменных). Кривые получены для  $m = 0.9, 0.6, 0.4$ . Объем системы для определенности положен равным единице:  $V = 1$ . Точка  $O$



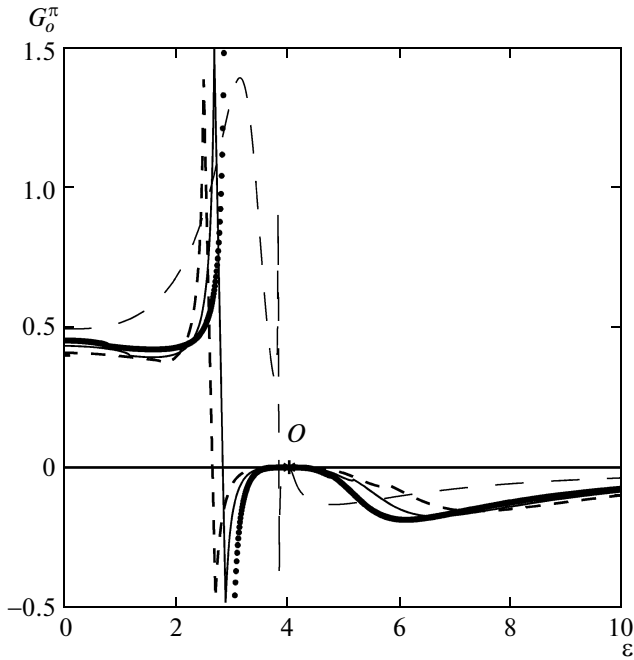


Рис. 6. Наблюдаемая константа связи  $G_0^\pi$  как функция передаваемой энергии  $\epsilon$ . Обозначения такие же, как для случая скалярного мезона на рис. 5

отмечает то место, где наблюдаемая константа связи обращается в нуль:  $G_0^{\pi,\sigma} = 0$ . Сопоставляя кривые, можно наглядно увидеть эволюцию некоторого нового («резонансного») состояния, которое проявляется в виде отчетливого достаточно широкого пика, который вместе с уменьшением параметра  $m$  (начиная от значения  $m = 0.9$  до  $m = 0.4$ ), превращается в связанное состояние. (Полюсные особенности на рисунках несколько сглажены по масштабу некоторым искусственным обрезанием, чтобы на их фоне не терялись регулярные «резонансные» структуры). В случае сигма-канала при уменьшении параметра  $m$  появляется сразу несколько связанных состояний, см. соответствующую кривую с  $m = 0.4$ . На рис. 5, 6 также продемонстрирован вариант, когда параметр  $m$  уменьшается до значений, характерных для модели НИЛ, — порядка  $m \sim 0.01$ . Эти данные показаны кривыми со штриховкой, выполненной с большим шагом. На рисунках показаны не все связанные состояния. Некоторые из них настолько узки, что их неудобно изображать в заданном на рис. 5, 6 масштабе. Авторам не известна ни одна другая теоретико-полевая модель, которая бы позволяла анализировать превращение резонанса в связанное состояние.

При увеличении параметра  $VG^3$  зависимость от параметра  $m$  становится более резкой (жесткой). В области малых энергий наблюдаемая константа связи сильно уменьшается, что отвечает переходу к качественно другому масштабу, но мы не приводим подобные данные в настоящей работе. В целом можно заключить, что если ответственный за силу взаимодействия параметр  $VG^3$  мал ( $VG^3 < 10$ ), то наблюдаемая константа связи достаточно плавно зависит от передаваемой энергии вплоть до значений  $\epsilon \approx 3-4$ , где начинает сказываться влияние связанных состояний. Как следствие, на таких масштабах может быть получена адекватная картина спонтанного нарушения киральной инвариантности с разумным спектром мезонных наблюдаемых и с правдоподобным сценарием дикварковой конденсации, что вполне вписывается в рамки сегодняшней феноменологии сильных взаимодействий.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы видели, что картина основного состояния (кваркового) ансамбля фермионов в случае развития (доминирования) сильных корреляций может существенно отличаться от принимаемого интуитивно привычного сценария обменного взаимодействия, выносимого нами из повседневного опыта (из физики конденсированного состояния). Море Дирака оказывается конечной относительной глубины, которая убывает как  $-\Lambda^2$  с увеличением импульса обрезания  $\Lambda$ . В одномерной (по пространству) ситуации имеется некоторое критическое значение константы связи  $g_1$ , и в случае слабой связи  $g < g_1$  море Дирака имеет стандартный вид. Ширина моря Дирака в одномерном случае ( $g > g_1$ ) линейно растет с увеличением параметра обрезания  $\Lambda$ . В двумерном случае ширина постоянна. В случае больших пространственных измерений ( $D$ ) ширина моря Дирака сужается по закону

$$\Delta_\Lambda \sim \frac{D+1}{gL^D D^2} \Lambda^{2-D}.$$

Можно указать критическое значение параметра обрезания  $\Lambda_c \approx (2N_c/2gL) \cdot 2\pi/L$ , при котором ширина моря Дирака совпадает с размером элементарной ячейки  $\tilde{l} = 2\pi/L$  ( $D = 3$ ). Имеющиеся на сегодня данные свидетельствуют, что параметр обрезания  $\Lambda_c$  не может быть макроскопическим числом. Море Дирака оказывается сильно вырожденным, со степенью вырождения, пропорциональной поверхности  $(D-1)$ -сферы. Такое основное состояние сильно

неустойчиво, и согласно теоремам квантовой механики истинное основное состояние должно снимать вырождение. Трудно отделаться от ощущения, что получающееся основное состояние сильно напоминает Большой взрыв (Big Bang).

В случае, когда включено цветовое взаимодействие кварков, обнаруживается правдоподобный сценарий снятия вырождения (перестройки вакуумного состояния) в виде боголюбовского состояния спаренных пар кварк–антикварк с нулевым полным импульсом с квантовыми числами вакуума. Энергия такого состояния в среднем оказывается самой низкой. Техническая причина появления этой возможности состоит в равенстве нулю вклада диаграмм «головастичного» типа.

Мы рассмотрели энергетическую зависимость константы взаимодействия модели ККБ, полученную путем комбинирования приближения среднего поля и теории возмущений для матрицы рассеяния в случае смешанного БКШ-состояния. Модификация затравочного взаимодействия может оказаться весьма существенной, при этом различной для разных каналов, но наиболее заметно взаимодействие модифицируется в скалярном секторе. Путем применения простой процедуры вычитания удалось получить конечное выражение для поляризованного оператора (понятно, что аналогичные данные могут быть получены в векторном и аксиально-векторном каналах), записанное в элементарных функциях. Модель ККБ представляет собой нелокальную теорию поля, а переход к локальной теории поля может быть, в принципе, осуществлен по непрерывности, путем модификации формфактора (потенциала) взаимодействия в импульсном пространстве, и комбинированием (суперпозицией) элементарных блоков модели ККБ. Полученная энергетическая зависимость задает естественный временной масштаб взаимодействия, поставленная задача в приближении среднего поля с учетом энергетической зависимости константы взаимодействия требует отдельного рассмотрения.

Интересно отметить, что рассматриваемые модели, несмотря на кажущийся игрушечным вид, обладают всеми атрибутами квантовой теории поля, включая расходимости. Можно убедиться, что в промежуточных выкладках теории возмущений имеются сильно сингулярные диаграммы, но в конечных выражениях, в частности для основного состояния и состояний возбуждения, от расходимостей не остается и следа, и, по-видимому, общий вид теории определяется сценарием заполнения моря Дирака. В случае цветового взаимодействия и

боголюбовского основного состояния имеет смысл проводить вычитания на шкале свободного гамильтониана вместо стандартного вычитания на асимптотически большой шкале. При этом удастся проследить в аналитической форме характерные зависимости наблюдаемой и затравочной константы связи во всем диапазоне энергий.

Работа поддержана проектом НАН Украины «Фундаментальные особенности физических систем в экстремальных условиях».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Фаддеев, ТМФ **148**, 133 (2006).
2. М. В. Садовский, *Диаграмматика*, Ин-т компьютерных исследований, М.-Ижевск (2010) [M. V. Sadovskii, *Diagrammatics*, World Sci., Singapore (2006)]; Л. В. Келдыш, Дисс. ... докт. физ.-матем. наук, ФИАН (1965); Е. V. Кане, Phys. Rev. **131**, 79 (1963); В. Л. Бонч-Бруевич, сб. *Физика твердого тела*, Изд. ВИНТИ, Москва (1965).
3. W. Tirting, Ann. Phys. **3**, 91 (1958); J. M. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963); D. Mattis and E. N. Lieb, J. Math. Phys. **6**, 304 (1965); В. Klaiber, *Lectures in Theoretical Physics*, ed. by A. Barut and W. Britten, Gordon and Breach, New York (1968); Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*, Наука, Москва (1992); V. Mastropietro and D. C. Mattis, *Luttinger Model. The First 50 Years and Some New Directions*, Series on Directions in Condensed Matter Physics, Vol. 20 (2014); А. Б. Замолотчиков, Ал. Б. Замолотчиков, *Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах*, МЦМО (2009).
4. Г. М. Зиновьев, С. В. Молодцов, ТМФ **160**, 444 (2009); S. V. Molodtsov and G. M. Zinovjev, Phys. Rev. D **80**, 076001 (2009); S. V. Molodtsov, A. N. Sissakian, and G. M. Zinovjev, Europhys. Lett. **87**, 61001 (2009).
5. Yu. A. Simonov, Phys. Lett. B **412**, 371 (1997).
6. J. V. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin (1932).
7. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
8. M. Faber and A. N. Ivanov, Europ. Phys. J. C **20**, 723 (2001); Phys. Lett. B **563**, 231 (2003); T. Fujita, M. Hiramoto, T. Homma, and H. Takahashi, J. Phys. Soc. Jpn. **74**, 1143 (2005).

9. T. Fujita, M. Hiramoto, and H. Takahashi, *Bosons after Symmetry Breaking in Quantum Field Theory*, Nova Sci. Publ., New York (2009).
10. Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, Москва (1986).
11. N. Andrei and J. H. Lowenstein, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1698 (1979).
12. F. C. Alcazar, M. N. Barber, and M. T. Batchelor, *Ann. Phys.* **182**, 280 (1988); J. L. Cardy, *J. Phys. A* **17**, L385 (1984); H. W. J. Blöte, J. H. Cardy, and M. P. Nightingale, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 742 (1986); I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 746 (1986).
13. S. V. Molodtsov and G. M. Zinovjev, arXiv:1311.6606 [hep-ph].
14. S. V. Molodtsov and G. M. Zinovjev, *Europhys. Lett.* **93**, 11001 (2011); S. V. Molodtsov and G. M. Zinovjev, *Phys. Rev. D* **84**, 036011 (2011); Г. М. Зиновьев, С. В. Молодцов, *ЯФ* **75**, 262 (2012).
15. Г. М. Зиновьев, С. В. Молодцов, *ЯФ* **75**, 1387 (2012); Г. М. Зиновьев, М. К. Волков, С. В. Молодцов, *ТМФ* **161**, 408 (2010).
16. В. Р. Шагинян, М. Я. Амусья, К. Г. Попов, *УФН* **177**, 585 (2007); С. М. Стишов, *УФН* **174**, 853 (2004); S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1998).