

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ДВУХТОЧЕЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ГРИНА $\mathcal{N} = 1$ СКЭД С N_f АРОМАТАМИ, РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, В ТРЕХПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

*А. Е. Казанцев**, *К. В. Степаньянц***

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 октября 2014 г.

Проверяется тождество, которое связывает двухточечные функции Грина $\mathcal{N} = 1$ СКЭД с N_f ароматами, регуляризованной высшими производными, с помощью явных вычислений в трехпетлевом приближении. Это тождество объясняет, почему в пределе нулевого внешнего импульса двухточечная функция Грина калибровочного суперполя задается интегралами от двойных полных производных в импульсном пространстве. Также оно позволяет вывести β -функцию NSVZ точно во всех петлях, если ренормгрупповые функции определяются в терминах голой константы связи. Для проверки рассматриваемого тождества оно используется для построения интегралов, определяющих трехпетлевую β -функцию, на основе двухточечных функций Грина для суперполей материи в двухпетлевом приближении. Показано, что результаты для этих интегралов совпадают с суммами соответствующих трехпетлевых суперграфов.

DOI: 10.7868/S0044451015040060

1. ВВЕДЕНИЕ

β -функция Новикова–Шифмана–Вайнштейна–Захарова (NSVZ) представляет собой нетривиальное соотношение между β -функцией $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий и аномальными размерностями суперполей материи. Для чистой $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса она дает точное во всех порядках выражение для β -функции, которое оказывается геометрической прогрессией. β -функция NSVZ была получена с использованием различных общих аргументов, а именно, структуры инстантонных вкладов [1–3], супермультиплетов аномалий [4–6], перенормировки топологического слагаемого [7]. Аналоги β -функции NSVZ были также найдены в теориях с мягко нарушенной суперсимметрией для перенормировки массы калибрино [8–10] и для $\mathcal{N} = (0, 2)$ деформированных $(2, 2)$ двумерных сигма-моделей [11].

В данной работе мы рассматриваем $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричную квантовую электродинамику (СКЭД) с N_f ароматами, для которой β -функция NSVZ имеет вид

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2 N_f}{\pi} (1 - \gamma(\alpha)), \quad (1)$$

где $\gamma(\alpha)$ — аномальная размерность киральных суперполей материи, а α обозначает аргумент функций в этом соотношении. В абелевом случае β -функция NSVZ была впервые получена в работах [12, 13]. Для абелевых теорий вывод NSVZ-соотношения явным суммированием диаграмм Фейнмана был выполнен в работах [14, 15] во всех порядках для ренормгрупповых (РГ) функций, определенных в терминах голой константы связи, в случае использования регуляризации высшими производными.

Если РГ-функции определены в терминах перенормированной константы связи, то, сравнивая β -функцию NSVZ с явными вычислениями (супер)диаграмм Фейнмана, необходимо принимать во внимание неоднозначность в выборе схемы вычитаний [16]. В теориях с одной константой связи β -функция является схемно-зависимой, начиная с трехпетлевого приближения. Аномальная размер-

*E-mail: kazancev@physics.msu.ru

**E-mail: stepan@m9com.ru

ность является схемно-зависимой, начиная с двухпетлевого приближения. Следовательно, слагаемые, пропорциональные α^4 в обеих частях NSVZ-соотношения, являются схемно-зависимыми. Схема вычитаний, в которой имеет место NSVZ-соотношение (так называемая NSVZ-схема), в абелевом случае была построена во всех порядках в работе [17] с использованием регуляризации высшими производными.

Тем не менее наиболее популярной процедурой для проведения вычислений в суперсимметричных теориях является размерная редукция [18], дополненная схемой вычитаний $\overline{\text{DR}}$. С помощью этого метода NSVZ-соотношение проверялось вплоть до четырехпетлевого приближения [19–23] (см. также недавний обзор [24]). Оказалось, что схемно-независимые слагаемые, пропорциональные α^2 и α^3 , являются одинаковыми. Однако, начиная с трехпетлевого приближения, вычисления, сделанные в $\overline{\text{DR}}$ -схеме, дают результаты, которые не удовлетворяют NSVZ-соотношению. Тем не менее возможно найти конечную перенормировку, после которой NSVZ-соотношение восстанавливается [20, 21, 25]. При этом возможность совершить эту конечную перенормировку является нетривиальной [20]. Причина заключается в том, что в высших петлях некоторые слагаемые в NSVZ-соотношении являются схемно-независимыми. В частности, для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД с N_f ароматами слагаемые, пропорциональные первой степени N_f , являются схемно-независимыми и должны удовлетворять NSVZ-соотношению во всех порядках [26]. В неабелевом случае это справедливо для слагаемых, пропорциональных $\text{tr}(C(R)^L)$ в L петлях [27]. Таким образом, даже в высших петлях NSVZ-соотношение накладывает нетривиальные ограничения на расходимость. Тем не менее (в настоящее время) вычисления, выполненные с помощью размерной редукции, не позволяют во всех порядках построить схему, в которой справедливо NSVZ-соотношение. Кроме того, размерная редукция (в отличие от размерной регуляризации [28–31], которая нарушает суперсимметрию [32]) является математически противоречивой [33]. Ценой удаления противоречий является потеря явной суперсимметрии [34]. Это означает, что суперсимметрия может нарушаться квантовыми поправками в высших петлях [35, 36]. Вычисления, сделанные в работе [35] и впоследствии подправленные в работе [37], демонстрируют это нарушение в трехпетлевом приближении для $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса (без гипермультиплетов). Большинство других регуляризаций (см., например, [38, 39]) обыч-

но использовались только для вычислений в одно- и двухпетлевом приближениях, где вопросы, связанные со схемной зависимостью, несущественны.

Оказалось, что очень удобной регуляризацией для вычислений квантовых поправок в суперсимметричных теориях является регуляризация высшими ковариантными производными, предложенная Славновым [40, 41]. В отличие от размерной редукции, регуляризация высшими ковариантными производными является непротиворечивой. Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий она может быть сформулирована явно суперсимметричным образом [42, 43]. Поэтому при использовании этой регуляризации суперсимметрия не нарушена на всех этапах вычисления квантовых поправок. Регуляризация высшими ковариантными производными также была сформулирована для $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теорий [44, 45]. По крайней мере в абелевом случае использование регуляризации высшими ковариантными производными позволило решить давно стоявшую проблему построения перенормировочного предписания, которое дает NSVZ-схему во всех порядках [17], см. также [27]. Было замечено [17], что необходимо различать РГ-функции, определенные в терминах голой константы связи, и РГ-функции, определенные в терминах перенормированной константы связи. Если суперсимметричная калибровочная теория регуляризована высшими производными, то NSVZ-соотношение оказывается справедливым для РГ-функций, определенных в терминах голой константы связи [14, 15] (см. краткий обзор в работе [27]). Эти РГ-функции являются схемно-независимыми при фиксированной регуляризации (см., например, [17]), т. е. не зависят от произвола в выборе констант перенормировки. Определение РГ-функций в терминах голой константы связи было использовано во многих ранних работах, посвященных β -функции NSVZ [1, 2, 6, 12, 13, 46]. Однако стандартным образом РГ-функции определяются в терминах перенормированной константы связи. Такие РГ-функции являются схемно-зависимыми и удовлетворяют NSVZ-соотношению только в NSVZ-схеме. В случае использования $\overline{\text{DR}}$ -схемы NSVZ-соотношение может быть получено после специально подобранной конечной перенормировки в каждом порядке [20, 21, 25], которая, однако, пока еще не построена во всех порядках. Регуляризация высшими ковариантными производными позволяет построить NSVZ-схему во всех порядках с помощью наложения на константы

перенормировки простых граничных условий [17]¹⁾

$$Z(\alpha, x_0) = 1, \quad Z_3(\alpha, x_0) = 1, \quad (2)$$

где x_0 — произвольное фиксированное значение $\ln \Lambda/\mu$. Они гарантируют, что РГ-функции, определенные в терминах перенормированной константы связи, совпадают с РГ-функциями, определенными в терминах голой константы связи, и удовлетворяют NSVZ-соотношению во всех порядках.

Конечно, основное утверждение, используемое при построении NSVZ-схемы, заключается в том, что РГ-функции, определенные в терминах голой константы связи, удовлетворяют NSVZ-соотношению во всех порядках, если высшие производные используются для регуляризации. Оно основано на наблюдении, что в этом случае интегралы, определяющие β -функцию, являются интегралами от полных производных [47] и даже от двойных полных производных [48] в импульсном пространстве. В абелевом случае этот факт был доказан точно во всех порядках двумя различными методами [14, 15], которые дают один и тот же результат. Для произвольной неабелевой $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной калибровочной теории с киральными суперполями материи факторизация подынтегральных выражений в полные производные была явно продемонстрирована в двухпетлевом приближении [49, 50]. Впоследствии было проверено, что соответствующие интегралы также являются интегралами от двойных полных производных [51–53]. Такая структура интегралов позволяет вычислить один из импульсных интегралов аналитически и получить точную β -функцию NSVZ. В этой работе мы хотели бы проверить результаты работы [15], в которой NSVZ-соотношение получено для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД с N_f ароматами с помощью метода, основанного на уравнениях Швингера–Дайсона. (Уравнения Швингера–Дайсона широко используются в квантовой теории поля, см., например, [54–56]. Возможность их использования для получения NSVZ-соотношения впервые обсуждалась в работе [57].) Уравнения Швингера–Дайсона позволяют построить равенство, связывающее двухточечные функции Грина калибровочного поля и суперполей материи. Это соотношение позволяет получать интегралы, зада-

ющие β -функцию, определенную в терминах голой константы связи, в каждом порядке, при условии, что в предыдущем порядке известны интегралы, задающие двухточечные функции Грина для киральных суперполей материи. (Интегралы для β -функции при этом оказываются интегралами от двойных полных производных.) В настоящей работе мы проверяем это соотношение в трехпетлевом приближении, а именно, исходя из двухпетлевых интегралов для двухточечных функций Грина суперполей материи получаем трехпетлевую β -функцию в виде интегралов от двойных полных производных в импульсном пространстве. Затем мы сравниваем результат с известными выражениями для сумм трехпетлевых суперграфов.

Настоящая работа организована следующим образом. В разд. 2 мы напоминаем основные сведения о $\mathcal{N} = 1$ СКЭД с N_f ароматами, регуляризованной высшими производными, и соотношении между двухточечными функциями Грина в этой теории. В трехпетлевом приближении это тождество проверяется в разд. 3 с помощью явного вычисления суперграфов.

2. $\mathcal{N} = 1$ СКЭД С N_f АРОМАТАМИ, РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, И СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ЕЕ ДВУХТОЧЕЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ГРИНА

Следуя работе [15], здесь мы рассматриваем $\mathcal{N} = 1$ СКЭД с N_f ароматами, которая (в безмассовом пределе) описывается в терминах суперполей следующим действием [58, 59]:

$$S = \frac{1}{4e_0^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W^a W_a + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int d^4x d^4\theta \left(\phi_\alpha^* e^{2V} \phi_\alpha + \tilde{\phi}_\alpha^* e^{-2V} \tilde{\phi}_\alpha \right), \quad (3)$$

где V — вещественное калибровочное суперполе, ϕ_α и $\tilde{\phi}_\alpha$ — киральные суперполя материи. Индекс α нумерует ароматы и пробегает значения от 1 до числа ароматов N_f ; e_0 обозначает голую константу связи. Также мы будем использовать обозначение $\alpha_0 \equiv e_0^2/4\pi$. В рассматриваемом абелевом случае суперсимметричная напряженность калибровочного поля определяется формулой

$$W_a = \frac{1}{4} \bar{D}^2 D_a V, \quad (4)$$

¹⁾ Заметим, что в трехпетлевом приближении NSVZ-схема, полученная с использованием регуляризации высшими производными, отличается от NSVZ-схемы, построенной в работе [20], поскольку выражения для аномальной размерности являются разными. Конечно, эти две NSVZ-схемы могут быть связаны конечной перенормировкой, которая включает конечную перенормировку киральных суперполей материи.

где \bar{D}_a и D_a — соответственно левая и правая суперсимметричные ковариантные производные.

При вычислении квантовых поправок используем метод фонового поля [60–62]. В абелевом случае, который здесь рассматривается, калибровочное суперполе представляется как сумма квантового поля V и фонового суперполя \mathbf{V} :

$$V \rightarrow V_T = V + \mathbf{V}. \quad (5)$$

Кроме того, удобно модифицировать действие для киральных суперполей материи, вводя вспомогательный параметр g в соответствии со следующим предписанием:

$$e^{2V} \rightarrow 1 + g(e^{2V} - 1), \quad e^{-2V} \rightarrow 1 + g(e^{-2V} - 1), \quad (6)$$

где V — квантовое суперполе. Экспоненты с фоновым полем остаются при этом неизменными. Это означает, что в каждой диаграмме степень g равна числу вершин, содержащих по крайней мере одну линию квантового калибровочного суперполя. Введение параметра g не нарушает фоновую калибровочную симметрию, однако нарушает квантовую калибровочную симметрию.

Для того чтобы регуляризовать теорию, мы добавляем к ее действию слагаемое с высшими производными и вставляем в производящий функционал детерминанты Паули–Вилларса для сокращения остаточных однопетлевых расходимостей [63, 64]. Окончательное выражение для производящего функционала имеет следующий вид [15]:

$$\begin{aligned} Z = e^{iW} &= \int DV D\phi D\tilde{\phi} \prod_{I=1}^n \det(V, \mathbf{V}, M_I)^{c_I N_f} \times \\ &\times \exp(iS_{reg} + iS_{gf} + iS_{source}) = \\ &= \int D\mu \exp(iS_{total} + iS_{gf} + iS_{source}). \end{aligned} \quad (7)$$

Массы полей Паули–Вилларса пропорциональны параметру Λ в слагаемом с высшими производными, $M_I = a_I \Lambda$, причем a_I не зависят от e_0 . Коэффициенты $c_I = (-1)^{P_I + 1}$ должны удовлетворять условиям

$$\sum_{I=1}^n c_I = 1, \quad \sum_{I=1}^n c_I M_I^2 = 0, \quad (8)$$

где $(-1)^{P_I}$ можно рассматривать как грассманову четность соответствующих полей Паули–Вилларса. Принимая во внимание, что $c_I = \pm 1$, поля Паули–Вилларса можно рассматривать аналогично

обычным полям. Ниже обычные поля будут соответствовать $I = 0$, а $M_{I=0} = 0$. В формуле (7) действие и слагаемое, фиксирующее калибровку, имеют вид

$$\begin{aligned} S_{total} &= \frac{1}{4e_0^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W^a R(\partial^2/\Lambda^2) W_a + \\ &+ \frac{1}{4e_0^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta \mathbf{W}^a \mathbf{W}_a + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{I=0}^n \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int d^4x d^4\theta \times \\ &\times \left[\phi_\alpha^* e^{2\mathbf{V}} (1 + g(e^{2V} - 1)) \phi_\alpha + \right. \\ &+ \left. \tilde{\phi}_\alpha^* e^{-2\mathbf{V}} (1 + g(e^{-2V} - 1)) \tilde{\phi}_\alpha \right]_I + \\ &+ \sum_{I=0}^n \sum_{\alpha=1}^{N_f} \left(\frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta M \phi_\alpha \tilde{\phi}_\alpha + \text{c.c.} \right)_I, \\ S_{gf} &= -\frac{1}{64e^2} \int d^4x d^4\theta \left(VR(\partial^2/\Lambda^2) D^2 \bar{D}^2 V + \right. \\ &+ \left. VR(\partial^2/\Lambda^2) \bar{D}^2 D^2 V \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где для напряженности фонового поля мы используем обозначение $\mathbf{W}_a = \bar{D}^2 D_a \mathbf{V}/4$, а e — перенормированная константа связи. Функция R является суммой 1, соответствующей классическому действию, и слагаемого с высшими производными. Например, можно выбрать $R = 1 + \partial^{2n}/\Lambda^{2n}$. Из формулы (9) видим, что пропагатор калибровочного суперполя (в евклидовом пространстве после поворота Вика) пропорционален

$$\frac{e_0^2}{R_k k^2} + \frac{e_0^2 - e^2}{16R_k k^4} (\bar{D}^2 D^2 + D^2 \bar{D}^2). \quad (10)$$

Слагаемое с источниками строится стандартным образом, но в него также удобно включить источники для полей Паули–Вилларса. Эффективное действие определяется как

$$\Gamma[V, \mathbf{V}, \phi_{\alpha I}, \tilde{\phi}_{\alpha I}] = W - S_{source}, \quad (11)$$

где источники должны быть выражены через поля. Слагаемые в эффективном действии, соответствующие двухточечным функциям Грина фонового калибровочного суперполя и киральных суперполей материи (включая поля Паули–Вилларса), могут быть представлены как²⁾

²⁾ Это выражение записано в пространстве Минковского.

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)} - S_{gf} = & -\frac{1}{16\pi} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta \mathbf{V}(\theta, -p) \times \\ & \times \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}(\theta, p) d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/p) + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{I=0}^n \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta \left(\phi_{\alpha I}^*(\theta, -p) \phi_{\alpha I}(\theta, p) + \right. \\ & \left. + \tilde{\phi}_{\alpha I}^*(\theta, -p) \tilde{\phi}_{\alpha I}(\theta, p) \right) G_I(\alpha_0, \Lambda/p) - \\ & - \left(\sum_{I=1}^n \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi_{\alpha I}(\theta, -p) \times \right. \\ & \left. \times \frac{D^2}{16p^2} \tilde{\phi}_{\alpha I}(\theta, p) M_I J_I(\alpha_0, \Lambda/p) + \text{с.с.} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Явно выписывая функции, входящие в это выражение, в древесном приближении, можно представить их в виде

$$\begin{aligned} d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/p) &= \alpha_0^{-1} + O(1), \\ G_I(\alpha_0, \Lambda/p) &= 1 + O(\alpha_0), \\ J_I(\alpha_0, \Lambda/p) &= 1 + O(\alpha_0). \end{aligned} \quad (13)$$

β -функция, определенная в терминах голой константы связи, может быть легко найдена, если известна функция $d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/p)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/p) - \alpha_0^{-1} \right) \Big|_{p=0} = \\ = -\frac{d\alpha_0^{-1}(\alpha, \Lambda/\mu)}{d \ln \Lambda} = \frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где α — перенормированная константа связи, μ — масштаб перенормировки, а производные по $\ln \Lambda$ должны вычисляться при фиксированном значении перенормированной константы связи α . Из этой формулы мы видим, что рассматриваемая β -функция полностью определяется производной $d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/p) - \alpha_0^{-1}$ по $\ln \Lambda$ в пределе нулевого внешнего импульса, $p \rightarrow 0$. Эта производная может быть найдена исходя из двухточечной функции Грина фонового калибровочного суперполя после замены

$$\mathbf{V}(x, \theta) \rightarrow \theta^4 I(x) \approx \theta^4, \quad (15)$$

где регулятор $I(x)$ приблизительно равен 1 при конечных x^μ и стремится к 0 на большом масштабе $R \rightarrow \infty$. Вводя регуляризованный объем пространства-времени

$$\mathcal{V}_4 \equiv \int d^4 x I^2 \sim R^4 \rightarrow \infty, \quad (16)$$

можно легко получить [15], что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \mathcal{V}_4 \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/p) - \alpha_0^{-1} \right) \Big|_{p=0} = \\ = \frac{1}{2\pi} \mathcal{V}_4 \frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \frac{d(\Delta\Gamma_{\mathbf{V}}^{(2)})}{d \ln \Lambda} \Big|_{\mathbf{V}(x, \theta)=\theta^4}, \end{aligned} \quad (17)$$

где использовано обозначение

$$\Delta\Gamma \equiv \Gamma - \frac{1}{4e_0^2} \text{Re} \int d^4 x d^2 \theta \mathbf{W}^a \mathbf{W}_a. \quad (18)$$

(Символы (2) сверху и \mathbf{V} снизу выделяют часть $\Delta\Gamma$, квадратичную по фоновому калибровочному суперполю.) Производная по $\ln \Lambda$ должна вычисляться при фиксированном значении перенормированной константы связи α . Ниже для простоты мы не выписываем регулятор $I(x)$ во всех последующих формулах.

Как мы уже упомянули выше, интегралы, дающие β -функцию, определенную в терминах голой константы связи, являются интегралами от двойных полных производных в импульсном пространстве (в этих интегралах внешний импульс равен нулю). В работе [15] было показано, что этот факт является следствием такого тождества, связывающего различные двухточечные функции Грина теории³⁾:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \ln g} \left(\frac{1}{2} \int d^8 x d^8 y (\theta^4)_x (\theta^4)_y \frac{\delta^2 \Delta\Gamma}{\delta \mathbf{V}_x \delta \mathbf{V}_y} \right) = \\ = \frac{i}{4} C(R)_{ij} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{Tr} (\theta^4)_x \left[y_\mu^*, \left[y_\mu^*, \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta (\phi_j)_x \delta (\phi^{*i})_y} \right)^{-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + M^{ik} \left(\frac{D^2}{8\partial^2} \right)_x \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta (\phi_k)_x \delta (\phi_j)_y} \right)^{-1} + M_{jk}^* \left(\frac{\bar{D}^2}{8\partial^2} \right)_x \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta (\phi^{*k})_x \delta (\phi^{*i})_y} \right)^{-1} \right] \right]_{y=x} - \text{сингулярности} = \\ = - \text{сингулярности}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$(y_\mu)^* \equiv x_\mu - i\bar{\theta}^{\dot{a}} (\gamma_\mu)_{\dot{a}}^b \theta_b, \quad (20)$$

и

$$\begin{aligned} [y_\mu^*, A_{xy}] &\equiv (y_\mu^*)_x A_{xy} - A_{xy} (y_\mu^*)_y, \\ \text{Tr} A &\equiv \int d^8 x A_{xx}, \quad \int d^8 x \equiv \int d^4 x d^4 \theta. \end{aligned} \quad (21)$$

В импульсном пространстве коммутаторы с y_μ^* дают производные по петлевому импульсу. Поэтому из

³⁾ Производные эффективного действия, которые написаны в этой формуле, совпадают с соответствующими производными функции Рауса γ , которая была использована в работе [15].

формулы (19) мы немедленно получаем утверждение, что интегралы для β -функции, определенной в терминах голой константы связи, являются интегралами от двойных полных производных. В формуле (19) мы также используем обозначения

$$\phi_i \equiv (\phi_{\alpha I}, \tilde{\phi}_{\alpha I}), \quad \phi^{*i} \equiv (\phi_{\alpha I}^*, \tilde{\phi}_{\alpha I}^*), \quad (22)$$

$$i = 1, \dots, 2(n+1)N_f.$$

Поля ϕ_i включают как обычные поля, так и поля Паули–Вилларса (которые имеют грассманову четность $(-1)^{P_I}$). В этих обозначениях

$$C(R)_i^j = \delta_{\alpha\beta} \delta_{IJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

а массовая матрица имеет вид

$$M^{ij} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{IJ} \begin{pmatrix} 0 & M_I \\ (-1)^{P_I} M_I & 0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где 2×2 -матрица соответствует полям ϕ и $\tilde{\phi}$. Двухточечные функции Грина киральных суперполей материи могут быть легко найдены из формулы (12):

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi_i)_x \delta(\phi^{*j})_y} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{IJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times G_I \frac{\bar{D}_x^2 D_x^2}{16} \delta_{xy}^8, \quad (25)$$

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi_i)_x \delta(\phi_j)_y} = -\frac{1}{4} \delta_{\alpha\beta} \delta_{IJ} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{P_I} M_I \\ M_I & 0 \end{pmatrix} J_I \bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8.$$

Соответствующие обратные функции построены, например, в работе [15]:

$$\left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi_i)_x \delta(\phi^{*j})_y} \right)^{-1} = -(-1)^{P_I} \delta_{\alpha\beta} \delta_{IJ} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{G_I \bar{D}_x^2 D_x^2}{4(\partial^2 G_I^2 + M_I^2 J_I^2)} \delta_{xy}^8, \quad (26)$$

$$\left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi_i)_x \delta(\phi_j)_y} \right)^{-1} = -\delta_{\alpha\beta} \delta_{IJ} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & M_I \\ (-1)^{P_I} M_I & 0 \end{pmatrix} \frac{J_I \bar{D}_x^2}{\partial^2 G_I^2 + M_I^2 J_I^2} \delta_{xy}^8.$$

Термин «сингулярности» в формуле (19) обозначает сумму сингулярных вкладов, которые возникают благодаря тождеству

$$\left[x^\mu, \frac{\partial_\mu}{\partial^4} \right] = \left[-i \frac{\partial}{\partial p_\mu}, -\frac{i p_\mu}{p^4} \right] = -2\pi^2 \delta^4(p_E) =$$

$$= -2\pi^2 i \delta^4(p) = -2\pi^2 i \delta^4(\partial). \quad (27)$$

В соответствии с работами [14, 15] сумма этих сингулярных вкладов дает NSVZ-соотношение для РГ-функций, определенных в терминах голой константы связи, во всех порядках теории возмущений (в случае использования рассматриваемой версии регуляризации высшими производными).

3. ТРЕХПЕТЛЕВАЯ ПРОВЕРКА СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ДВУХТОЧЕЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ГРИНА

3.1. Двойные полные производные в трехпетлевом приближении

Для того чтобы проверить формулу (19), необходимо вычислить двухточечную функцию Грина фонового калибровочного суперполя, предполагая, что $g \neq 1$. В трехпетлевом приближении эта функция Грина определяется суммой диаграмм, представленных на рис. 1, к которым необходимо прикрепить две внешние линии фонового калибровочного суперполя⁴). В качестве примера на рис. 2 приведены двухпетлевые диаграммы, которые соответствуют двухпетлевой диаграмме (1) на рис. 1. Каждая вершина, содержащая линию квантового калибровочного суперполя, дает множитель g , а каждая замкнутая петля суперполей материи дает множитель N_f . Полные множители для всех диаграмм также записаны на рис. 1. Также на этом рисунке под каждым графом приведены соответствующие диаграммы, дающие вклад в двухточечные функции Грина киральных суперполей материи. Эти диаграммы получаются разрезанием линий материи в рассматриваемом графе.

Для случая $N_f = 1$, $g = 1$ все диаграммы, определяющие трехпетлевую β -функцию, были вычислены в работе [47]. Используя результаты работы [47], можно получить выражения для всех диаграмм на рис. 1. Как мы обсуждали выше, удобно заменить фоновое калибровочное суперполе, соответствующее внешним линиям, на θ^4 . Ниже мы собираем вклады всех диаграмм в производную выражения (17) по $\ln g$ в евклидовом пространстве (после поворота Вика). Заметим, что все слагаемые, пропорциональные e_0^6 , которые несущественны в рассмат-

⁴) Однопетлевой граф не включен, поскольку однопетлевое приближение в этом подходе должно рассматриваться отдельно.

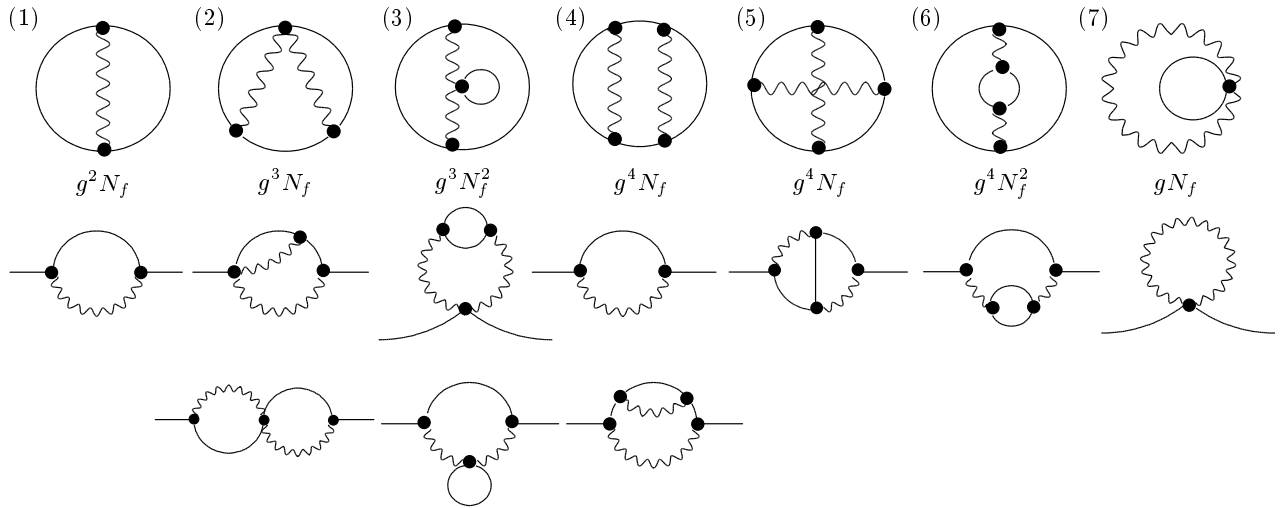


Рис. 1. Двух- и трехпетлевые графы. Диаграммы, которые дают вклад в β -функцию, могут быть получены из них прикреплением двух внешних линий калибровочного суперполя. Ниже мы приводим множители, отвечающие каждой из этих диаграмм, и соответствующие диаграммы, дающие вклад в двухточечные функции Грина суперполей материи

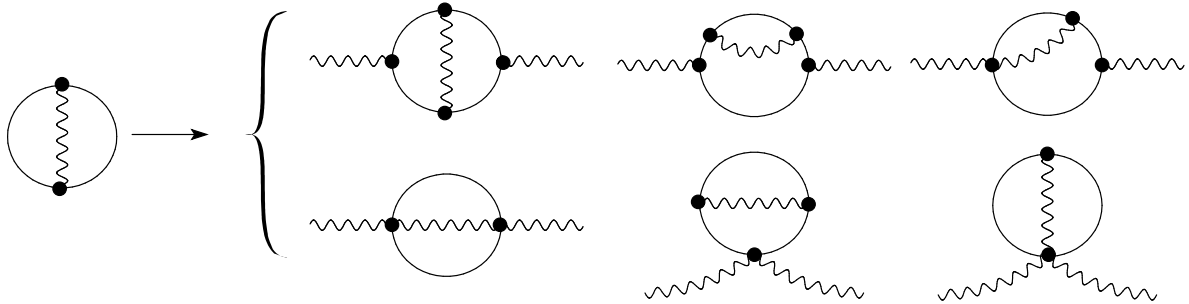


Рис. 2. Диаграммы, задающие двухточечную функцию Грина фонового калибровочного суперполя в двухпетлевом приближении. Они соответствуют диаграмме (1) на рис. 1

риваемом приближении, отброшены. Результат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln g} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{диаграмма (1)} &= \\ &= 4\mathcal{V}_4 g^2 N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 R_k} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \left(\frac{e_0^2}{(q^2 + M_I^2) ((q+k)^2 + M_I^2)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(e_0^2 - e^2)}{k^2 (q^2 + M_I^2)} \right), \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln g} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{диаграмма (2)} &= -24\mathcal{V}_4 g^3 N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \times \\ &\times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \times \\ &\times \frac{1}{(q^2 + M_I^2) ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2)}, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln g} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{диаграмма (3)} &= \\ &= -24\mathcal{V}_4 g^3 N_f^2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{k^4 R_k^2} \times \\ &\times \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} + \frac{\partial}{\partial l^\mu} \frac{\partial}{\partial l_\mu} \right) \sum_{I,J=0}^n (-1)^{P_I + P_J} \times \\ &\times \frac{1}{(l^2 + M_I^2) (q^2 + M_J^2) ((q+k)^2 + M_J^2)}, \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln g} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{диаграмма (4)} &= 16\mathcal{V}_4 g^4 N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \times \\ &\times \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{q^2 - M_I^2}{(q^2 + M_I^2)^2 ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2)}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln g} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{диаграмма (5)} &= 8\mathcal{V}_4 g^4 N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \times \\ &\times \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{(k+l+2q)^2 + 2M_I^2}{(q^2 + M_I^2) ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2) ((q+k+l)^2 + M_I^2)}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln g} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{диаграмма (6)} &= -16\mathcal{V}_4 g^4 N_f^2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{k^4 R_k^2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \times \\ &\times \sum_{I,J=0}^n (-1)^{P_I+P_J} \frac{k^2 - (k+q)^2 - q^2 - (l+k)^2 - l^2 - 2M_I^2 - 2M_J^2}{(q^2 + M_I^2) ((q+k)^2 + M_I^2) (l^2 + M_J^2) ((l+k)^2 + M_J^2)}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln g} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{диаграмма (7)} &= \\ &= 4\mathcal{V}_4 g N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(e_0^2 - e^2)}{k^4 R_k} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{1}{(q^2 + M_I^2)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Мы видим, что каждый граф дается интегралом от двойных полных производных, как утверждалось в работе [48].

3.2. Слагаемые, пропорциональные e_0^2 , в формуле (19)

Из приведенных выше формул мы видим, что выражения для всех графов на рис. 1 являются интегралами от двойных полных производных. Формула (19) позволяет строить эти интегралы от двойных полных производных без вычисления трехпетлевых диаграмм. Для того чтобы использовать эту формулу, необходимо вычислить двухточечные функции Грина киральных суперполей материи в предыдущем (двухпетлевом) приближении. Вначале рассмотрим первую (двухпетлевую) диаграмму на рис. 1. Разрезая линию суперполя материи, получаем соответствующую (однопетлевую) диаграмму для двухточечных функций Грина суперполей материи, которая также представлена на рис. 1. Вычис-

ля эту диаграмму, получаем ее вклады в функции G_I и J_I (в евклидовом пространстве после поворота Вика, как функции евклидова импульса q_μ):

$$\begin{aligned} \Delta G_I^{(1)} &= -g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2}{k^2 R_k} \left(\frac{e_0^2}{((q+k)^2 + M_I^2)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(e_0^2 - e^2) ((q+k)^2 + q^2)}{k^2 ((q+k)^2 + M_I^2)} \right), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\Delta J_I^{(1)} = g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4(e_0^2 - e^2)q^2}{k^4 R_k ((q+k)^2 + M_I^2)}. \quad (36)$$

Разность $e_0^2 - e^2$, очевидно, пропорциональна e_0^4 . Следовательно, вклады, пропорциональные $e_0^2 - e^2$, существенны только в следующем порядке. Это означает, что в однопетлевом приближении

$$\begin{aligned} G_I(\alpha_0, \Lambda/q) &= 1 - \\ &- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2 g^2}{k^2 R_k ((q+k)^2 + M_I^2)} + O(e_0^4), \end{aligned} \quad (37)$$

$$J_I(\alpha_0, \Lambda/q) = 1 + O(e_0^4).$$

Теперь построим обратные функции Грина, входящие в (19), используя формулы (26). В импульсном представлении они пропорциональны

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta(\phi_i)_x\delta(\phi^*j)_y}\right)^{-1} &\propto \frac{G_I}{4(q^2G_I^2 + M_I^2J_I^2)} = \\ &= \frac{1}{4(q^2 + M_I^2)} \left(1 + \frac{q^2 - M_I^2}{q^2 + M_I^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{2e_0^2g^2}{k^2R_k((q+k)^2 + M_I^2)} + O(e_0^4)\right), \\ \left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta(\phi_i)_x\delta(\phi_j)_y}\right)^{-1} &\propto \frac{M_IJ_I}{q^2G_I^2 + M_I^2J_I^2} = \\ &= \frac{M_I}{q^2 + M_I^2} \left(1 + \frac{q^2}{q^2 + M_I^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{4e_0^2g^2}{k^2R_k((q+k)^2 + M_I^2)} + O(e_0^4)\right). \end{aligned} \tag{38}$$

Эти функции необходимы для вычисления выражения⁵⁾

$$\begin{aligned} &\frac{i}{4}C(R)_i^j \int d^4\theta_x(\theta^4)_x \left(\left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta(\phi_j)_x\delta(\phi^*i)_y}\right)^{-1} + \right. \\ &+ M^{ik} \left(\frac{D^2}{8\partial^2}\right)_x \left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta(\phi_k)_x\delta(\phi_j)_y}\right)^{-1} + M_{jk}^* \left(\frac{\bar{D}^2}{8\partial^2}\right)_x \times \\ &\left. \times \left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta(\phi^*k)_x\delta(\phi^*i)_y}\right)^{-1} \right) \Big|_{\theta_y=\theta_x} = 2N_f \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \times \\ &\quad \times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{q^2 + M_I^2} + \frac{M_I^2}{q^2(q^2 + M_I^2)} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{q^2 - M_I^2}{(q^2 + M_I^2)^2} + \frac{2M_I^2}{(q^2 + M_I^2)^2}\right) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{2e_0^2g^2}{k^2R_k((q+k)^2 + M_I^2)} + O(e_0^4) \right) \exp(iq_\mu(x^\mu - y^\mu)) = \\ &= 4N_f \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + M_I^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \\ &\quad \times \frac{e_0^2g^2}{k^2R_k((q+k)^2 + M_I^2)} \exp(iq_\mu(x^\mu - y^\mu)) + \\ &\quad + O(e_0^4), \end{aligned} \tag{39}$$

где x^μ и y^μ — евклидовы координаты. При выводе последнего равенства мы приняли во внимание, что одно из слагаемых пропорционально величине

$$\sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} = 1 - \sum_{I=1}^n c_I = 0. \tag{40}$$

Далее, необходимо вычислить коммутаторы с y_μ^* . Принимая во внимание, что для θ след коммутатора всегда равен нулю, можем заменить коммутато-

ры с y_μ^* на коммутаторы с x_μ . Эти коммутаторы в импульсном представлении дают оператор

$$[x_\mu, [x^\mu, \dots]]_M = -[x_\mu, [x^\mu, \dots]]_E \rightarrow \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu}, \tag{41}$$

который действует на экспоненту. Затем интегрируем по частям и вычисляем оставшуюся часть следа, полагая $y = x$ и интегрируя по d^4x . Это дает

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \ln g} \left(\frac{1}{2} \int d^8x d^8y (\theta^4)_x (\theta^4)_y \frac{\delta^2 \Delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x \delta \mathbf{V}_y} \right) = \\ &= 4\mathcal{V}_4 N_f \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left(\frac{1}{q^2 + M_I^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e_0^2g^2}{k^2R_k((q+k)^2 + M_I^2)} \right) + \\ &\quad + O(e_0^4). \end{aligned} \tag{42}$$

(Конечно, предполагается присутствие регулятора $I^2(x)$, так что интегрирование по d^4x дает $\mathcal{V}_4 \rightarrow \infty$.) Выражение в правой части формулы (42) совпадает с результатом явных двухпетлевых вычислений, который дается первым слагаемым в формуле (28). Таким образом, формула (19) проверена в двухпетлевом приближении.

Подынтегральное выражение в формуле (42) содержит сингулярности благодаря тождеству

$$\frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{1}{q^2} = -4\pi^2 \delta^4(q). \tag{43}$$

Если мы определяем интегралы стандартным образом, то должны окружить сингулярности малыми сферами и принять во внимание соответствующие поверхностные интегралы. Как следствие, интеграл в формуле (42) соответствует следу коммутатора минус сингулярности. Это можно проиллюстрировать следующим простым примером. Если $f(q^2)$ — несингулярная функция, которая быстро убывает на бесконечности, то равный нулю след коммутатора соответствует, например, объекту

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \left(\frac{q^\mu}{q^4} f(q^2) \right) \equiv \\ &\equiv \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{q^\mu}{q^4} f(q^2) + \frac{q^\mu}{q^4} \frac{\partial f(q^2)}{\partial q^\mu} \right) = \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left(2\pi^2 \delta^4(q) f(q^2) + \frac{q^\mu}{q^4} \frac{\partial f(q^2)}{\partial q^\mu} \right) = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} f(0) + \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \left(\frac{q^\mu}{q^4} f(q^2) \right), \end{aligned} \tag{44}$$

где последний интеграл определяется стандартным образом.

⁵⁾ Интеграл по $d^4\theta$ происходит из Tr в формуле (19).

Проинтегрируем равенство (42) по $\ln g$ от $g = 0$ до $g = 1$. При $g = 1$ теория совпадает с $\mathcal{N} = 1$ СКЭД с N_f ароматами. Случай $g = 0$ соответствует теории без квантового калибровочного суперполя. Следовательно, в этом случае в двухточечную функцию Грина фонового калибровочного суперполя дают вклад только однопетлевые диаграммы. Поэтому, используя формулу (17), мы получаем, что

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} - \frac{\beta_{1-loop}(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = 4\pi N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \times$$

$$\times \frac{e_0^2}{k^2 R_k} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left(\frac{1}{q^2(q+k)^2} - \right.$$

$$\left. - \sum_{I=1}^n c_I \frac{1}{(q^2 + M_I^2)((q+k)^2 + M_I^2)} \right) + O(e_0^4). \quad (45)$$

Интеграл в (45) отличен от нуля благодаря сингулярностям подынтегрального выражения. Окружая сингулярные точки $q^\mu = 0$ и $q^\mu = -k^\mu$ маленькими сферами и вычисляя интегралы от полных производных, принимая во внимание все поверхностные интегралы, легко находим, что

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \frac{\beta_{1-loop}(\alpha_0)}{\alpha_0^2} + \frac{2}{\pi} N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e_0^2}{k^4 R_k} +$$

$$+ O(e_0^4) = \frac{\beta_{1-loop}(\alpha_0)}{\alpha_0^2} + \frac{\alpha_0 N_f}{\pi^2} + O(\alpha_0^2). \quad (46)$$

Подставляя выражение для однопетлевой β -функции рассматриваемой теории, получаем хорошо известный результат (см., например, [38, 65]) для двухпетлевой β -функции:

$$\beta(\alpha_0) = \frac{N_f \alpha_0^2}{\pi} \left(1 + \frac{\alpha_0}{\pi} + O(\alpha_0^2) \right). \quad (47)$$

3.3. Слагаемые, пропорциональные e_0^4 , в формуле (19)

Проверка формулы (19) в следующем порядке проводится аналогично. Однако в трехпетлевом приближении возникают некоторые тонкие моменты, которые отсутствуют в предыдущем порядке. Поэтому последовательно обсудим применение формулы (19) к нахождению выражений для трехпетлевых диаграмм, представленных на рис. 1.

1. Начнем с графа (1) на рис. 1. Соответствующие вклады в функции G_I и J_I даются формулами (35) и (36). Слагаемые, которые существенны в рассматриваемом приближении, пропорциональны $e_0^2 - e^2$:

$$\Delta G_I^{(1)} \leftarrow g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2(e_0^2 - e^2)((q+k)^2 + q^2)}{k^4 R_k ((q+k)^2 + M_I^2)}, \quad (48)$$

$$\Delta J_I^{(1)} \leftarrow g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4(e_0^2 - e^2)q^2}{k^4 R_k ((q+k)^2 + M_I^2)}.$$

Повторяя вычисление аналогично сделанному в разд. 3.2, получаем, что

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \ln g} \left(\frac{1}{2} \int d^8 x d^8 y (\theta^4)_x (\theta^4)_y \frac{\delta^2 \Delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x \delta \mathbf{V}_y} \right) \leftarrow$$

$$\leftarrow -4\mathcal{V}_4 g^2 N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e_0^2 - e^2}{k^4 R_k^2} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{(k+q)^2 + q^2 + 2M_I^2}{(q^2 + M_I^2)((q+k)^2 + M_I^2)}. \quad (49)$$

Этот вклад совпадает со вторым слагаемым в формуле (28) после некоторых простых преобразований. (Первое слагаемое было получено выше в разд. 3.2.)

2. Диаграммы, соответствующие второму графу на рис. 1, дают следующие вклады в функции G_I и J_I :

$$\Delta G_I^{(2)} = g^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{((q+k)^2 + M_I^2)((q+l)^2 + M_I^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{((q+k)^2 + M_I^2)((q+k+l)^2 + M_I^2)} \right),$$

$$\Delta J_I^{(2)} = 0. \quad (50)$$

Повторяя предыдущие вычисления, в этом случае получаем вклад (29).

3. Диаграмма (3) на рис. 1 содержит две замкнутые петли суперполей материи. При построении соответствующих диаграмм, которые дают вклады в двухточечные функции суперполей материи, необходимо принять во внимание возможность разреза каждой из этих петель. Диаграммы, получаемые в результате этой процедуры, приведены в третьем столбце рис. 1. Они дают

$$\Delta G_I^{(3)} = g^3 N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{k^4 R_k^2} \times$$

$$\times \left(\frac{2}{(q+k)^2 + M_I^2} \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{l^2 + M_J^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{(l^2 + M_J^2)((l+k)^2 + M_J^2)} \right),$$

$$\Delta J_I^{(3)} = 0. \quad (51)$$

Использование формулы (19) для диаграмм с более чем одной петлей суперполей материи должно проводиться очень аккуратно. Аккуратный анализ вычислений, сделанных в работе [15], показывает, что в этом случае необходимо добавлять слагаемые со вставками двойных полных производных в каждую замкнутую петлю материи. Для рассматриваемого графа это означает, что

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \ln g} \left(\frac{1}{2} \int d^8 x d^8 y (\theta^4)_x (\theta^4)_y \frac{\delta^2 \Delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x \delta \mathbf{V}_y} \right) \leftarrow \\ & \leftarrow -8 \mathcal{V}_4 N_f^2 \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \times \\ & \times \left\{ \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left(\frac{1}{q^2 + M_I^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4 g^3}{k^4 R_k^2} \times \right. \right. \\ & \times \left[\frac{2}{(q+k)^2 + M_I^2} \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{l^2 + M_J^2} + \right. \\ & \left. \left. + \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{(l^2 + M_J^2) ((l+k)^2 + M_J^2)} \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{q^2 + M_I^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4 g^3}{k^4 R_k^2} \frac{\partial}{\partial l^\mu} \frac{\partial}{\partial l_\mu} \times \\ & \times \left[\frac{2}{(q+k)^2 + M_I^2} \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{l^2 + M_J^2} + \right. \\ & \left. + \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{(l^2 + M_J^2) ((l+k)^2 + M_J^2)} \right] \left. \right\}. \quad (52) \end{aligned}$$

Это выражение представляет собой сумму четырех слагаемых. Первые два слагаемых (содержащие производные по q^μ) получаются в точности так же, как в предыдущем разделе. Два последних слагаемых (с производными по l^μ) получаются при вставке двойных полных производных в замкнутую петлю, которая соответствует импульсу l^μ .

Переименуем теперь индексы суммирования и переменные интегрирования во втором и четвертом слагаемых, проводя замены $I \leftrightarrow J$ и $q \leftrightarrow l$. Тогда мы получим выражение (30), которое было найдено с помощью явного суммирования трехпетлевых диаграмм с двумя внешними линиями фонового калибровочного суперполя.

4. Разрезая линию материи в диаграмме (4) на рис. 1, мы можем получить диаграмму, которая не является 1PI. Вклады в функции G_I и J_I , очевидно, дают только 1PI-диаграммы, поскольку эти функции строятся из эффективного действия. Для того чтобы построить все требуемые в рассматриваемом случае 1PI-диаграммы, необходимо также включить 1PI-диаграммы, которые получаются по-

сле двух разрезов линии материи. Эта процедура дает однопетлевую диаграмму, приведенную на рис. 1 в четвертом столбце. Следовательно, при вычислении соответствующего вклада мы должны принять во внимание и однопетлевую, и двухпетлевую диаграммы, приведенные в этом столбце. Они соответствуют

$$\begin{aligned} \Delta G_I^{(4)} = & -g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2}{k^2 R_k ((q+k)^2 + M_I^2)} - \\ & - g^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \times \\ & \times \frac{4e_0^4 ((q+k)^2 - M_I^2)}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2)^2 ((q+k+l)^2 + M_I^2)}, \\ & \Delta J_I^{(4)} = 0. \quad (53) \end{aligned}$$

Затем мы вычисляем те же функции, что и в формуле (38), но сохраняем слагаемые, пропорциональные $g^4 e_0^4$, в которые, очевидно, дают вклад оба члена в формуле (53):

$$\begin{aligned} \frac{G_I}{4(q^2 G_I^2 + M_I^2 J_I^2)} \leftarrow & \frac{q^2 (q^2 - 3M_I^2)}{(q^2 + M_I^2)^3} \times \\ & \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \times \\ & \times \frac{g^4 e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2)} + \\ & + \frac{q^2 - M_I^2}{(q^2 + M_I^2)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \times \\ & \times \frac{g^4 e_0^4 ((q+k)^2 - M_I^2)}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2)^2 ((q+k+l)^2 + M_I^2)}, \quad (54) \\ \frac{M_I J_I}{q^2 G_I^2 + M_I^2 J_I^2} \leftarrow & \frac{q^2 (3q^2 - M_I^2) M_I}{(q^2 + M_I^2)^3} \times \\ & \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \times \\ & \times \frac{4g^4 e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2)} + \\ & + \frac{q^2 M_I}{(q^2 + M_I^2)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \times \\ & \times \frac{8g^4 e_0^4 ((q+k)^2 - M_I^2)}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2)^2 ((q+k+l)^2 + M_I^2)}. \end{aligned}$$

Используя эти выражения, действуем так же, как и в предыдущем разделе, и находим вклад

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \ln g} \left(\frac{1}{2} \int d^8 x d^8 y (\theta^4)_x (\theta^4)_y \frac{\delta^2 \Delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x \delta \mathbf{V}_y} \right) \leftarrow 8 \mathcal{V}_4 N_f \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \times \\ \times \left(\frac{q^2 - M_I^2}{(q^2 + M_I^2)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4 g^4}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2)} + \frac{1}{q^2 + M_I^2} \times \right. \\ \left. \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4 g^4 ((q+k)^2 - M_I^2)}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2)^2 ((q+k+l)^2 + M_I^2)} \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Проводя замену $q^\mu \rightarrow q^\mu - k^\mu$ в последнем интеграле, получаем формулу (31).

5. Пятый граф на рис. 1 анализируется полностью аналогично двухпетлевому случаю. Единствен-

ная соответствующая диаграмма, дающая вклад в двухточечные функции Грина суперполей материи, приводит к вкладам

$$\begin{aligned} \Delta G_I^{(5)} &= -g^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4 ((2q+k+l)^2 + M_I^2)}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2) ((q+k+l)^2 + M_I^2)}, \\ \Delta J_I^{(5)} &= -g^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4 q^2}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2) ((q+k+l)^2 + M_I^2)}. \end{aligned} \quad (56)$$

Повторяя преобразования, сделанные в предыдущем разделе, получаем формулу (32).

6. Диаграмма (6) также содержит две петли материи. Соответствующие вклады в двухточечные

функции Грина суперполей материи даются единственной диаграммой, приведенной в шестом столбце рис. 1. Эта диаграмма дает следующие вклады в функции G_I и J_I :

$$\begin{aligned} \Delta G_I^{(6)} &= g^4 N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{k^4 R_k^2 ((q+k)^2 + M_I^2)} \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \left(\frac{k^2 - (k+q)^2 - q^2}{(l^2 + M_J^2) ((k+l)^2 + M_J^2)} - \frac{2}{l^2 + M_J^2} \right), \\ \Delta J_I^{(6)} &= -g^4 N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{8e_0^4 q^2}{k^4 R_k^2 ((q+k)^2 + M_I^2)} \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{(l^2 + M_J^2) ((k+l)^2 + M_J^2)}. \end{aligned} \quad (57)$$

С их помощью мы можем построить вклад в β -функцию, определенную в терминах голой константы связи, в соответствии с приведенным выше предписанием. Важно, что мы должны также доба-

вить слагаемое, в котором двойные полные производные вставлены в замкнутую петлю. Результат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \ln g} \left(\frac{1}{2} \int d^8 x d^8 y (\theta^4)_x (\theta^4)_y \frac{\delta^2 \Delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x \delta \mathbf{V}_y} \right) \leftarrow -8 \mathcal{V}_4 g^4 N_f^2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{k^4 R_k^2} \times \\ \times \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} + \frac{\partial}{\partial l^\mu} \frac{\partial}{\partial l_\mu} \right) \sum_{I,J=0}^n (-1)^{P_I + P_J} \frac{k^2 - (k+q)^2 - q^2 - (l+k)^2 - l^2 - 2M_I^2 - 2M_J^2}{(l^2 + M_I^2) ((l+k)^2 + M_I^2) (q^2 + M_J^2) ((q+k)^2 + M_J^2)}. \end{aligned} \quad (58)$$

(Последнее слагаемое с производными по l^μ соответствует вставке двойных полных производных в замкнутую петлю суперполей материи.) Легко видеть, что (после надлежащей замены переменных) это выражение совпадает с (33).

7. Последний (двухпетлевой) граф (7) на рис. 1 также дает вклад, пропорциональный $e_0^2 - e^2 \sim e_0^4$.

Вклады в соответствующие функции G_I и J_I имеют вид

$$\Delta G_I^{(7)} = -g \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2(e_0^2 - e^2)}{k^4 R_k}, \quad \Delta J_I^{(7)} = 0. \quad (59)$$

Беря эти выражения в качестве исходной точки, обычным образом получаем вклад (34):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \ln g} \left(\frac{1}{2} \int d^8 x d^8 y (\theta^4)_x (\theta^4)_y \frac{\delta^2 \Delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x \delta \mathbf{V}_y} \right) \leftarrow \\ & \leftarrow 4 \mathcal{V}_{4g} N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e_0^2 - e^2}{k^4 R_k^2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \times \\ & \quad \times \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{1}{q^2 + M_I^2}. \quad (60) \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили правильные выражения для всех графов, приведенных на рис. 1, без явного вычисления трехпетлевых диаграмм с внешними линиями фонового калибровочного суперполя. Это подтверждает правильность формулы (19) в рассматриваемом приближении.

Для того чтобы завершить вычисление, введем NSVZ-соотношение между трехпетлевой β -функцией и двухпетлевой аномальной размерностью суперполей материи, определенной в терминах голой константы. Беря сумму формул (28)–(34) и совершая интегрирование по $\ln g$ от $g = 0$ до $g = 1$, после несложных преобразований получим, что

$$\begin{aligned} & \frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} - \frac{\beta_{1-loop}(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = 4\pi N_f \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{d}{d \ln \Lambda} \times \\ & \quad \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e_0^2}{k^2 R_k} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{1}{q^2 + M_I^2} \times \\ & \quad \times \frac{1}{(q+k)^2 + M_I^2} \left\{ 1 + \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^2}{l^2 R_l} \times \right. \\ & \quad \times \left(-\frac{4}{(q+l)^2 + M_I^2} + \frac{2(q^2 - M_I^2)}{(q^2 + M_I^2)((q+l)^2 + M_I^2)} + \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(k+l+2q)^2 + 2M_I^2}{((q+l)^2 + M_I^2)((q+k+l)^2 + M_I^2)} \right) - \right. \\ & \quad \left. - N_f \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2}{k^2 R_k} \frac{1}{l^2 + M_J^2} \times \right. \\ & \quad \left. \times \frac{1}{(l+k)^2 + M_J^2} \right\} + O(\epsilon_0^6). \quad (61) \end{aligned}$$

Затем вычисляем интегралы от двойных полных производных, принимая во внимание, что они отличны от нуля только в безмассовом случае, который соответствует $I = 0$. Результат дается следующими хорошо определенными интегралами:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} - \frac{\beta_{1-loop}(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \frac{N_f}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2}{k^4 R_k} + \right. \\ & \quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \left(-\frac{2}{k^2(k+l)^2} + \frac{1}{k^2 l^2} \right) - \\ & \quad - N_f \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \times \\ & \quad \left. \times \frac{4e_0^4}{k^4 R_k^2 (l^2 + M_J^2) ((l+k)^2 + M_J^2)} \right\} + O(\epsilon_0^6). \quad (62) \end{aligned}$$

При этом важно, что производная по $\ln \Lambda$ (которая устраняет инфракрасные расходимости) должна вычисляться при фиксированном значении перенормированной константы связи α .

С другой стороны, беря сумму всех вкладов в функцию $G_{I=0} \equiv G$ и полагая $g = 1$, получаем

$$\begin{aligned} & G(\alpha_0, \Lambda/q) = 1 - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2}{k^2 R_k (k+q)^2} + \\ & \quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \left(\frac{1}{(q+k)^2 (q+l)^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(q+k)^2 (q+k+l)^2} - \frac{(2q+k+l)^2}{(q+k)^2 (q+l)^2 (q+k+l)^2} \right) + \\ & \quad + N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{k^2 R_k^2 (q+k)^2} \times \\ & \quad \times \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{(l^2 + M_J^2) ((k+l)^2 + M_J^2)} - \\ & \quad - q^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^4}{k^4 R_k (q+k)^2} \left(\frac{1}{e_0^2} - \frac{1}{e^2} + 2N_f \frac{1}{R_k} \times \right. \\ & \quad \left. \times \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 + M_J^2) ((k+l)^2 + M_J^2)} \right) + \\ & \quad + O(\epsilon_0^6). \quad (63) \end{aligned}$$

За исключением последнего слагаемого, пропорционального q^2 , все интегралы здесь не содержат инфракрасные расходимости. Последнее слагаемое равно нулю на массовой поверхности и конечно в ультрафиолетовой области (в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$), поскольку выражение в скобках конечно. Это слагаемое с очевидностью не дает вклада в двухпетлевую аномальную размерность, поскольку оно исчезает после дифференцирования по $\ln \Lambda$. Поэтому его можно отбросить (как это было сделано, например, в работе [17]). Аномальная размерность, определенная в терминах голой константы связи, дается следующей формулой [66]:

$$\begin{aligned}
\gamma(\alpha_0) &= -\frac{d \ln Z(\alpha, \Lambda/\mu)}{d \ln \Lambda} = \frac{d \ln G(\alpha_0, \Lambda/q)}{d \ln \Lambda} \Big|_{q=0} = \\
&= \frac{d}{d \ln \Lambda} \left\{ -\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2}{k^4 R_k} + \right. \\
&+ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \left(\frac{1}{k^2(k+l)^2} - \frac{1}{2k^2 l^2} \right) + \\
&+ N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{k^4 R_k^2} \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \times \\
&\left. \times \frac{1}{(l^2 + M_J^2)((k+l)^2 + M_J^2)} + O(e_0^6) \right\}. \quad (64)
\end{aligned}$$

Это выражение хорошо определено, поскольку благодаря дифференцированию по $\ln \Lambda$ (которое должно быть выполнено до интегрирований) инфракрасные расходимости отсутствуют. Сравнивая формулы (62) и (64), получаем соотношение

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} - \frac{\beta_{1-loop}(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = -\frac{N_f}{\pi} \gamma(\alpha_0), \quad (65)$$

которое дает формулу (1) с аргументом α_0 после подстановки хорошо известного выражения для однопетлевой β -функции рассматриваемой теории.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

NSVZ-соотношение в суперсимметричных теориях получается из-за того, что β -функция, определенная в терминах голой константы связи, задается интегралами от (двойных) полных производных. В абелевом случае это утверждение было доказано в работах [14, 15] точно во всех порядках. Доказательство, проведенное в работе [15], основано на специальном тождестве, связывающем двухточечную функцию Грина калибровочного суперполя и двухточечные функции Грина киральных суперполей материи. Это соотношение позволяет строить интегралы, определяющие β -функцию, если только известны двухточечные функции Грина для суперполей материи. В этой работе тождество, связывающее функции Грина, проверяется на трехпетлевом уровне с помощью явного вычисления диаграмм Фейнмана. Беря в качестве исходной точки выражения для функций Грина киральных суперполей материи в двухпетлевом приближении, мы строим трехпетлевые интегралы для β -функции, определенной в терминах голой константы связи. Сравнивая результат с суммой соответствующих суперграфов, видим совпадение. Это вычисление подтверждает результаты, полученные в работе [15] точно во всех порядках, которые, в частности, позволяют вывести

β -функцию NSVZ (для РГ-функций, определенных в терминах голой константы связи) в случае использования регуляризации высшими производными.

Работа К. В. Степаньянца выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00695). К. В. Степаньянец очень признателен А. Л. Катаеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **229**, 381 (1983).
2. V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Phys. Lett. B **166**, 329 (1986); А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман, ЯФ **43**, 459 (1986).
3. M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, in M. A. Shifman, *ITEP Lectures on Particle Physics and Field Theory*, Vol. 2, p. 485 [hep-th/9902018].
4. D. R. T. Jones, Phys. Lett. B **123**, 45 (1983).
5. M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, Nucl. Phys. B **277**, 456 (1986); А. И. Вайнштейн, М. А. Шифман, ЖЭТФ **91**, 723 (1986).
6. N. Arkani-Hamed and H. Murayama, JHEP **0006**, 030 (2000).
7. E. Kraus, C. Rupp, and K. Sibold, Nucl. Phys. B **661**, 83 (2003).
8. J. Hisano and M. A. Shifman, Phys. Rev. D **56**, 5475 (1997).
9. I. Jack and D. R. T. Jones, Phys. Lett. B **415**, 383 (1997).
10. L. V. Avdeev, D. I. Kazakov, and I. N. Kondrashuk, Nucl. Phys. B **510**, 289 (1998).
11. J. Chen, X. Cui, M. Shifman, and A. Vainshtein, arXiv:1404.4689 [hep-th].
12. А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, М. А. Шифман, Письма ЖЭТФ **42**, 182 (1985).
13. M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Phys. Lett. B **166**, 334 (1986).
14. K. V. Stepanyantz, Nucl. Phys. B **852**, 71 (2011).
15. K. V. Stepanyantz, JHEP **1408**, 096 (2014).
16. А. А. Владимиров, ТМФ **25**, 335 (1975).
17. А. Л. Катаев and К. В. Степаньянец, Nucl. Phys. B **875**, 459 (2013).

18. W. Siegel, Phys. Lett. B **84**, 193 (1979).
19. L. V. Avdeev and O. V. Tarasov, Phys. Lett. B **112**, 356 (1982).
20. I. Jack, D. R. T. Jones, and C. G. North, Phys. Lett. B **386**, 138 (1996).
21. I. Jack, D. R. T. Jones, and C. G. North, Nucl. Phys. B **486**, 479 (1997).
22. R. V. Harlander, D. R. T. Jones, P. Kant, L. Mihaila, and M. Steinhauser, JHEP **0612**, 024 (2006).
23. I. Jack, D. R. T. Jones, P. Kant, and L. Mihaila, JHEP **0709**, 058 (2007).
24. L. Mihaila, Adv. High Energy Phys. **2013**, 607807 (2013).
25. I. Jack, D. R. T. Jones, and A. Pickering, Phys. Lett. B **435**, 61 (1998).
26. A. L. Kataev and K. V. Stepanyantz, Phys. Lett. B **730**, 184 (2014).
27. А. Л. Катаев, К. В. Степаньянц, ТМФ **181**, 475 (2014) [A. L. Kataev and K. V. Stepanyantz, Theor. Math. Phys. **181**, 1531 (2014)].
28. G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972).
29. C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, Nuovo Cim. B **12**, 20 (1972).
30. J. F. Ashmore, Lett. Nuovo Cim. **4**, 289 (1972).
31. G. M. Cicuta and E. Montaldi, Lett. Nuovo Cim. **4**, 329 (1972).
32. R. Delbourgo and V. B. Prasad, J. Phys. G **1**, 377 (1975).
33. W. Siegel, Phys. Lett. B **94**, 37 (1980).
34. L. V. Avdeev, G. A. Chochia, and A. A. Vladimirov, Phys. Lett. B **105**, 272 (1981).
35. L. V. Avdeev, Phys. Lett. B **117**, 317 (1982).
36. L. V. Avdeev and A. A. Vladimirov, Nucl. Phys. B **219**, 262 (1983).
37. V. N. Velizhanin, Nucl. Phys. B **818**, 95 (2009).
38. А. И. Вайнштейн, М. А. Шифман, ЯФ **44**, 498 (1986).
39. J. Mas, M. Perez-Victoria, and C. Seijas, JHEP **0203**, 049 (2002).
40. A. A. Slavnov, Nucl. Phys. B **31**, 301 (1971).
41. А. А. Славнов, ТМФ **13**, 174 (1972).
42. В. К. Кривошеков, ТМФ **36**, 291 (1978).
43. P. C. West, Nucl. Phys. B **268**, 113 (1986).
44. V. K. Krivoshchekov, Phys. Lett. B **149**, 128 (1984).
45. I. L. Buchbinder and K. V. Stepanyantz, Nucl. Phys. B **883**, 20 (2014).
46. А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, М. А. Шифман, ЯФ **43**, 1596 (1986).
47. А. А. Солошенко, К. В. Степаньянц, ТМФ **140**, 430 (2004).
48. A. V. Smilga and A. Vainshtein, Nucl. Phys. B **704**, 445 (2005).
49. A. B. Pimenov, E. S. Shevtsova, and K. V. Stepanyantz, Phys. Lett. B **686**, 293 (2010).
50. K. V. Stepanyantz, Phys. Part. Nucl. Lett. **8**, 321 (2011).
51. K. V. Stepanyantz, arXiv:1108.1491 [hep-th].
52. K. V. Stepanyantz, J. Phys. Conf. Ser. **343**, 012115 (2012).
53. K. V. Stepanyantz, J. Phys. Conf. Ser. **368**, 012052 (2012).
54. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1984).
55. A. Bashir, L. Chang, I. C. Cloet, B. El-Bennich, Y. X. Liu, C. D. Roberts, and P. C. Tandy, Commun. Theor. Phys. **58**, 79 (2012).
56. D. J. Broadhurst, R. Delbourgo, and D. Kreimer, Phys. Lett. B **366**, 421 (1996).
57. К. В. Степаньянц, ТМФ **142**, 37 (2005).
58. П. Уэст, *Введение в суперсимметрию и супергравитацию*, Мир, Москва (1989).
59. I. L. Buchbinder and S. M. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity: Or a Walk through Superspace*, ИОР, Bristol, UK (1998).
60. Б. С. ДеВитт, *Динамическая теория групп и полей*, Наука, Москва (1987).
61. L. F. Abbott, Nucl. Phys. B **185**, 189 (1981).
62. L. F. Abbott, Acta Phys. Polon. B **13**, 33 (1982).
63. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, Москва (1978).
64. А. А. Славнов, ТМФ **33**, 210 (1977).
65. D. R. T. Jones, Phys. Lett. B **72**, 199 (1977).
66. А. А. Солошенко, К. В. Степаньянц, ТМФ **134**, 430 (2003).