

ТЕОРИЯ ЛЭМБОВСКОГО СДВИГА В ИОНАХ МЮОННОГО ГЕЛИЯ

А. А. Крутов^a, А. П. Мартыненко^{a,b*}, Г. А. Мартыненко^a, Р. Н. Фаустов^c

^a Самарский государственный университет
443011, Самара, Россия

^b Самарский государственный аэрокосмический университет им. С. П. Королева
443086, Самара, Россия

^c Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук
119333, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 августа 2014 г.

Вычислен лэмбовский сдвиг ($2P_{1/2}-2S_{1/2}$) в ионах мюонного гелия ($(\mu \text{ }^3\text{He})^+$, $(\mu \text{ }^4\text{He})^+$ с учетом вкладов порядка α^3 , α^4 , α^5 и α^6 . Особое внимание уделено поправкам на поляризацию вакуума, структуру и отдачу ядра. Полученные численные значения сдвига 1259.8583 мэВ ($(\mu \text{ }^3\text{He})^+$) и 1379.1107 мэВ ($(\mu \text{ }^4\text{He})^+$) могут рассматриваться как надежная оценка при сравнении с экспериментальными данными коллаборации CREMA.

DOI: 10.7868/S004445101501006X

1. ВВЕДЕНИЕ

Ионы мюонного гелия ($(\mu \text{ }^4\text{He})^+$ и $(\mu \text{ }^3\text{He})^+$ представляют собой двухчастичные связанные состояния отрицательного мюона и ядра (альфа-частицы или гелиона). Время жизни этих атомов определяется временем жизни мюона $\tau_\mu = 2.19703(4) \cdot 10^{-6}$ с. Оно больше времени протекания атомных процессов, поэтому мюон успевает совершить ряд переходов по орбитам, которые сопровождаются γ -излучением. При переходе от электронных атомов к мюонным возрастает масса лептона в $m_\mu/m_e = 206.7682843(52)$ раз [1, 2]). В результате радиус боровских орбит уменьшается, и это приводит к возрастанию роли эффектов электронной поляризации вакуума, структуры и поляризуемости ядра при расчете уровней энергии. Эффекты отдачи, которые определяются отношением масс мюона и ядра, также начинают играть существенную роль. Мюонные атомы представляют собой своеобразную лабораторию по изучению свойств ядер, прежде всего их зарядовых радиусов. В последние годы экспериментальной коллабо-

рацией CREMA (Charge Radius Experiment with Muonic Atoms) достигнут существенный прогресс при изучении энергетической структуры мюонного водорода [3, 4]. Было выполнено измерение частоты перехода $2P_{3/2}^{F=2}-2S_{1/2}^{F=1}$, что позволило получить более точное значение зарядового радиуса протона $r_p = 0.84087(39)$ фм. Измерение частоты перехода $2P_{3/2}^{F=1}-2S_{1/2}^{F=0}$ позволило найти сверхтонкое расщепление $2S$ -уровня, величину радиуса Земаха $r_Z = 1.082(37)$ фм и значение магнитного радиуса протона $r_M = 0.87(6)$ фм. Также проведены аналогичные измерения для мюонного дейтерия. Недавно закончены измерения частоты перехода $(2S-2P)$ в ионе мюонного гелия-4, обнаружен первый переход $(2S-2P)$ в ионе мюонного гелия-3¹⁾. Результаты этих экспериментов находятся на стадии анализа. Важно подчеркнуть, что из экспериментов коллаборации CREMA следует очень важная задача — улучшить на порядок численные значения зарядовых радиусов протона, дейтрона, гелиона и альфа-частицы, которые входят в качестве параметров в различные интервалы тонкой и сверхтонкой структур этих простейших атомов [5–14]. Легкие мюонные атомы важны также для проверки предсказаний Стан-

*E-mail: a.p.martynenko@samsu.ru

¹⁾ Мы благодарны Ф. Коттману за информацию о последних экспериментальных данных CREMA.

дартной модели и теории связанных состояний, для поиска проявлений экзотических взаимодействий элементарных частиц. Так, например, мюонные водородоподобные системы (ионы мюонного гелия, лития, бериллия) могут использоваться для поиска нарушений лоренцевской инвариантности и СРТ-инвариантности [15].

Фундаментальные теоретические исследования тонкой и сверхтонкой структур легких мюонных атомов были выполнены много лет назад в [6] на основе уравнения Дирака и в [8] в рамках трехмерного квазипотенциального подхода в квантовой электродинамике (см. другие ссылки в [5, 6]). В этих работах были получены как основные вклады в спектр энергии, так и ряд наиболее важных поправок, связанных прежде всего с электронной поляризацией вакуума с точностью 0.01 мэВ. Поскольку при теоретическом изучении спектров энергии водородоподобных атомов были получены общие аналитические выражения для поправок различного порядка, их также можно использовать для оценки вкладов в тонкую и сверхтонкую структуры спектра мюонных атомов [5]. В то же время существует ряд поправок, обусловленных прежде всего поляризацией вакуума, которые необходимо вычислять для каждого мюонного атома отдельно. Позднее в работах [7, 9–14, 16, 17] были вычислены вклады более высокого порядка по постоянной тонкой структуры α и отношению масс частиц m_1/m_2 в спектрах энергии мюонного водорода и ионах мюонного гелия. В работе [18] был проведен расчет лэмбовского сдвига в ионе мюонного гелия-4 в рамках трехмерного квазипотенциального метода. Рост экспериментальной активности в последние годы при изучении мюонных атомов [3, 4] вызывает необходимость проверки ранее проведенных расчетов, вычисления новых поправок и сравнения результатов вычислений разными методами для того, чтобы получить надежные предсказания для энергетических интервалов ($2S-2P$) в легких мюонных атомах. Цель настоящей работы состоит в расчете поправок порядка α^5 и α^6 в лэмбовском сдвиге ($2S_{1/2}-2P_{1/2}$) в двух ионах мюонного гелия ($(\mu \text{ } ^4_2\text{He})^+$ и $(\mu \text{ } ^3_2\text{He})^+$, которые определяются релятивистскими эффектами, эффектами поляризации вакуума, структуры ядра и отдачи, и получении полных значений лэмбовского сдвига в этих атомах с точностью 0.001 мэВ. Их можно будет использовать для сравнения с экспериментальными данными CREMA. Особое внимание уделено эффектам структуры ядра, поскольку именно с ними может быть связано решение загадки радиуса протона. Современные численные значения фундамен-

тальных физических констант взяты из работы [1]: масса электрона $m_e = 0.510998928(11) \cdot 10^{-3}$ ГэВ, масса мюона $m_\mu = 0.1056583715(35)$ ГэВ, постоянная тонкой структуры $\alpha^{-1} = 137.035999074(44)$, масса протона $m_p = 0.938272046(21)$ ГэВ, масса гелиона $m_h = 2.808391482(62)$ ГэВ, масса α -частицы $m_\alpha = 3.727379240(82)$ ГэВ, зарядовый радиус α -частицы $r_\alpha = 1.676(8)$ фм, зарядовый радиус гелиона $r_h = 1.966(10)$ фм [7].

2. ЭФФЕКТЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА В ОДНОФОТОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Наш подход к исследованию лэмбовского сдвига ($2P-2S$) в ионах мюонного гелия $(\mu \text{ } ^3_2\text{He})^+$ и $(\mu \text{ } ^4_2\text{He})^+$ основан на квазипотенциальном методе в квантовой электродинамике [14, 19, 20]. Двухчастичное связанное состояние описывается при этом уравнением Шредингера, а основной вклад в оператор взаимодействия частиц определяется гамильтонианом Брейта [21, 22] ($\delta_I = 1$ ($\delta_I = 0$) для ядер полуцелого (целого) спина)

$$H_B = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{Z\alpha}{r} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m_1^3} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m_2^3} + \frac{\pi Z\alpha}{2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{\delta_I}{m_2^2} \right) \delta(\mathbf{r}) - \frac{Z\alpha}{2m_1 m_2 r} \left(\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}}{r^2} \right) + \frac{Z\alpha}{r^3} \left(\frac{1}{4m_1^2} + \frac{1}{2m_1 m_2} \right) (\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) = H_0 + \Delta V^B, \quad (1)$$

где $H_0 = \mathbf{p}^2/2\mu - Z\alpha/r$, m_1 , m_2 — массы мюона и ядра (гелиона или альфа-частицы), $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$.

Волновые функции состояний $2S$ и $2P$ соответственно равны

$$\begin{aligned} \psi_{200}(r) &= \frac{W^{3/2}}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{Wr}{2}\right) \left(1 - \frac{Wr}{2}\right), \\ \psi_{2lm}(r) &= \frac{W^{3/2}}{2\sqrt{6}} \exp\left(-\frac{Wr}{2}\right) W r Y_{lm}(\theta, \phi), \\ W &= \mu Z\alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

Отношение радиуса первой боровской орбиты к комптоновской длине волны электрона равно $m_e/W = 0.34$. Поэтому при вычислении вклада электронной поляризации вакуума (ПВ, VP) нельзя использовать разложение по α . Основной вклад электронной ПВ в лэмбовский сдвиг имеет порядок $\alpha(Z\alpha)^2$ (см. рис. 1а).

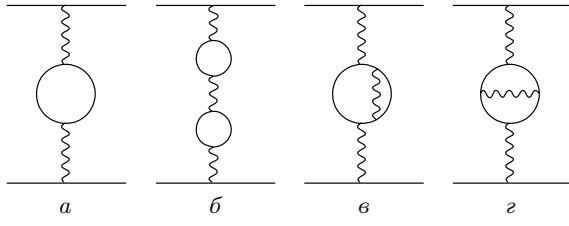


Рис. 1. Эффекты однопетлевой и двухпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии

Учитывая модификацию кулоновского потенциала за счет эффекта поляризации вакуума в координатном представлении [21]

$$V_{VP}^C(r) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty d\xi \rho(\xi) \left(-\frac{Z\alpha}{r} \exp(-2m_e \xi r) \right), \quad (3)$$

$$\rho(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}(2\xi^2 + 1)}{\xi^4},$$

можно представить вклад однопетлевой электронной ПВ в сдвиг $2S$ - и $2P$ -уровней энергии и в лэмбовский сдвиг ($2P-2S$) в виде (здесь и далее верхнее значение соответствует $(\mu \text{ } ^3\text{He})^+$, а нижнее — $(\mu \text{ } ^4\text{He})^+$, $k_1 = 2m_e/W$)

$$\Delta E_{VP}(2S) = -\frac{\mu(Z\alpha)^2\alpha}{6\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times$$

$$\times \int_0^\infty x dx \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \exp\left\{-x \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{12(1 - k_1^2)^{5/2}} \left[\sqrt{1 - k_1^2} (-168k_1^6 + 272k_1^4 - 49k_1^2 + \right.$$

$$\left. + 6\pi(k_1^2 - 1)^2(14k_1^2 + 3)k_1 - 28) + \right.$$

$$\left. + 3(56k_1^8 - 128k_1^6 + 75k_1^4 + 10k_1^2 - 4) \ln \frac{1 - \sqrt{1 - k_1^2}}{k_1} \right] =$$

$$= \begin{cases} -2041.9990 \text{ мэВ}, \\ -2077.2217 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (4)$$

$$\Delta E_{VP}(2P) = -\frac{\mu(Z\alpha)^2\alpha}{72\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_0^\infty x^3 dx \times$$

$$\times \exp\left\{-x \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right)\right\} = \frac{1}{(1 - k_1^2)^{5/2}} \times$$

$$\times \left[\sqrt{1 - k_1^2} (-120k_1^6 + 184k_1^4 - 23k_1^2 + \right.$$

$$\left. + 6\pi(k_1^2 - 1)^2(10k_1^2 + 3)k_1 - 32) + \right.$$

$$\left. + 3(40k_1^8 - 88k_1^6 + 45k_1^4 + 10k_1^2 - 4) \ln \frac{1 - \sqrt{1 - k_1^2}}{k_1} \right] =$$

$$= \begin{cases} -400.1128 \text{ мэВ}, \\ -411.4486 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\Delta E_{VP}(2P-2S) = \begin{cases} 1641.8862 \text{ мэВ}, \\ 1665.7730 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (6)$$

Уже из этого простого примера понятна аналитическая структура вкладов (4), (5) в спектре энергии, которая имеет достаточно громоздкий вид. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся представлением вкладов в интегральной форме. Вклад мюонной поляризации вакуума (МПВ, MVP) в лэмбовский сдвиг известен в аналитическом виде [5]. Он включен в полную величину сдвига в разд. 5. Эффекты двухпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии показаны на рис. 1б, в, г. Чтобы получить вклад амплитуды, показанной на рис. 1б, в оператор взаимодействия частиц, необходимо использовать следующую замену в фотонном пропагаторе [5, 21]:

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \frac{1}{k^2 + 4m_e^2 \xi^2}. \quad (7)$$

Диаграмма с двумя последовательными петлями дает тогда в координатном представлении следующий вклад в оператор взаимодействия частиц [15]:

$$V_{VP-VP}^C(r) = \frac{\alpha^2}{9\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \left(-\frac{Z\alpha}{r} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} (\xi^2 \exp(-2m_e \xi r) - \eta^2 \exp(-2m_e \eta r)). \quad (8)$$

Усредняя (8) по кулоновским волновым функциям (2), получим вклад в лэмбовский сдвиг порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2$:

$$\Delta E_{VP-VP}(2P-2S) = \begin{cases} 3.7207 \text{ мэВ}, \\ 3.7997 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (9)$$

Поправка более высокого порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4$ определяется амплитудой с двумя последовательными электронными (VP) и мюонной (MVP) петлями. Соответствующий потенциал имеет вид

$$\Delta V_{VP-MVP}(r) = -\frac{4(Z\alpha)\alpha^2}{45\pi^2 m_1^2} \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \left[\pi\delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2 \xi^2}{r} \exp(-2m_e \xi r) \right]. \quad (10)$$

Разделение уровней ($2P-2S$) увеличивается в этом случае на величину

$$\Delta E_{VP-MVP}(2P-2S) = \begin{cases} 0.0022 \text{ мэВ}, \\ 0.0023 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (11)$$

Оператор взаимодействия частиц, соответствующий двухпетлевым амплитудам рассеяния на рис. 1*в,г* с поляризационным оператором второго порядка, имеет вид [14]

$$\Delta V_{2-loop VP}^C = -\frac{2}{3} \frac{Z\alpha}{r} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{f(v) dv}{(1-v^2)} \times \exp\left(-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}\right), \quad (12)$$

где спектральная функция

$$f(v) = v \left\{ (3-v^2)(1+v^2) \left[\text{Li}_2\left(-\frac{1-v}{1+v}\right) + 2 \text{Li}_2\left(\frac{1-v}{1+v}\right) + \frac{3}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} \ln \frac{1+v}{2} - \ln \frac{1+v}{1-v} \ln v \right] + \left[\frac{11}{16}(3-v^2)(1+v^2) + \frac{v^4}{4} \right] \ln \frac{1+v}{1-v} + \left[\frac{3}{2} v(3-v^2) \ln \frac{1-v^2}{4} - 2v(3-v^2) \ln v \right] + \frac{3}{8} v(5-3v^2) \right\}, \quad (13)$$

$\text{Li}_2(z)$ — дилогарифм Эйлера. Потенциал $\Delta V_{2-loop VP}^C(r)$ дает больший вклад по сравнению с (8) как в сверхтонкую структуру, так и в лэмбовский сдвиг ($2P-2S$):

$$\Delta E_{2-loop VP}(2P-2S) = \begin{cases} 7.6863 \text{ мэВ}, \\ 7.7696 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (14)$$

Численная величина поправок (9), (14) и точность расчета полного сдвига показывают, что необходимо рассмотреть трехпетлевые вклады ПВ (см. рис. 2).

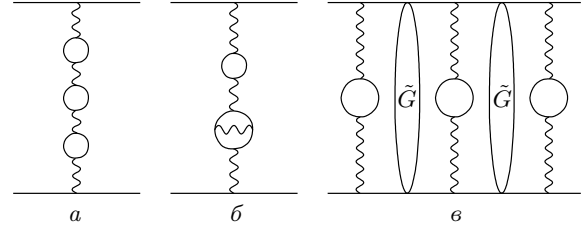


Рис. 2. Эффекты трехпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии (*а,б*) и в третьем порядке теории возмущений (*в*). \tilde{G} — редуцированная кулоновская функция Грина (33)

Часть поправок в потенциал из диаграмм трехпетлевой ПВ в однофотонном взаимодействии может быть получена так же, как соотношения (8), (12) (последовательные петли на рис. 2*а,б*). Соответствующий вклад в потенциал и в расщепление ($2P-2S$) можно представить в виде

$$V_{VP-VP-VP}^C(r) = -\frac{Z\alpha}{r} \frac{\alpha^3}{(3\pi)^3} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) \times \int_1^\infty \rho(\zeta) d\zeta \left[\exp(-2m_e \zeta r) \frac{\zeta^4}{(\xi^2 - \zeta^2)(\eta^2 - \zeta^2)} + \exp(-2m_e \xi r) \frac{\xi^4}{(\zeta^2 - \xi^2)(\eta^2 - \xi^2)} + \exp(-2m_e \eta r) \frac{\eta^4}{(\xi^2 - \eta^2)(\zeta^2 - \eta^2)} \right], \quad (15)$$

$$V_{VP-2-loop VP}^C = -\frac{4\mu\alpha^3(Z\alpha)}{9\pi^3} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \int_1^\infty \frac{f(\eta) d\eta}{\eta} \frac{1}{r(\eta^2 - \xi^2)} \times (\eta^2 \exp(-2m_e \eta r) - \xi^2 \exp(-2m_e \xi r)), \quad (16)$$

$$\Delta E_{VP-VP-VP}(2P-2S) = \begin{cases} 0.0085 \text{ мэВ}, \\ 0.0088 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (17)$$

$$\Delta E_{VP-2-loop VP}(2P-2S) = \begin{cases} 0.0359 \text{ мэВ}, \\ 0.0366 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (18)$$

Существует также ряд диаграмм, в которые входит трехпетлевой поляризационный оператор. Первоначально они были вычислены в сдвиге ($2P-2S$) мюонного водорода в работе [23]. Наибольший вклад в спектр энергии дают диаграммы с поляризацией

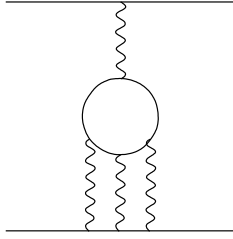


Рис. 3. Поправка Вихмана – Кролла. Волнистой линией на диаграмме обозначен кулоновский фотон

вакуума шестого порядка, содержащие одну электронную петлю (в работе [23] этот вклад обозначен $\Pi^{(p6)}$). Позднее в работе [24] был выполнен новый расчет вклада диаграмм рис. 2 в лэмбовский сдвиг легких мюонных атомов. Мы включили в таблицу (см. ниже) отдельной строкой полный трехпетлевой вклад порядка α^5 в 1γ -взаимодействии из [24]. Кроме того, на рис. 2в схематически представлен трехпетлевой вклад в третьем порядке теории возмущений, вычисление которого рассмотрено в разд. 3.

Еще одна амплитуда с однопетлевой поляризацией вакуума показана на рис. 3. В спектре энергии она дает поправку пятого порядка по α (поправка Вихмана – Кролла (WK)) [25, 26]. Оператор взаимодействия частиц, построенный по этой амплитуде, может быть получен в интегральной форме [5]:

$$\Delta V^{WK}(r) = \frac{\alpha(Z\alpha)^3}{\pi r} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^4} \exp(-2m_e \zeta r) \times \left[-\frac{\pi^2}{12} \sqrt{\zeta^2 - 1} \theta(\zeta - 1) + \int_0^\zeta dx \sqrt{\zeta^2 - x^2} f^{WK}(x) \right]. \quad (19)$$

Точный вид спектральной функции f^{WK} представлен в работах [5, 25, 26]. Численное интегрирование в (19) с волновыми функциями (2) дает следующий вклад в лэмбовский сдвиг:

$$\Delta E^{WK}(2P-2S) = \begin{cases} -0.0197 \text{ мэВ,} \\ -0.0199 \text{ мэВ.} \end{cases} \quad (20)$$

3. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОПРАВКИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА

Эффекты электронной поляризации вакуума имеют не только кулоновский потенциал (3), но так-

же и другие члены гамильтониана Брейта (1). Поправки однопетлевой поляризации вакуума в брейтовском взаимодействии, которые были получены в работах [8, 18], имеют вид

$$\Delta V_{VP}^B(r) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \sum_{i=1}^4 \Delta V_{i,VP}^B(r), \quad (21)$$

$$\Delta V_{1,VP}^B = \frac{Z\alpha}{8} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{\delta_I}{m_2^2} \right) \times \left[4\pi\delta(\mathbf{r}) - \frac{4m_e^2 \xi^2}{r} \exp(-2m_e \xi r) \right], \quad (22)$$

$$\Delta V_{2,VP}^B = -\frac{Z\alpha m_e^2 \xi^2}{m_1 m_2 r} \exp(-2m_e \xi r) (1 - m_e \xi r), \quad (23)$$

$$\Delta V_{3,VP}^B = -\frac{Z\alpha}{2m_1 m_2} p_i \frac{\exp(-2m_e \xi r)}{r} \times \left[\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2} (1 + 2m_e \xi r) \right] p_j, \quad (24)$$

$$\Delta V_{4,VP}^B = \frac{Z\alpha}{r^3} \left(\frac{1}{4m_1^2} + \frac{1}{2m_1 m_2} \right) \times \exp(-2m_e \xi r) (1 + 2m_e \xi r) (\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1). \quad (25)$$

В первом порядке теории возмущений потенциалы $\Delta V_{i,VP}^B(r)$ дают значительные численные вклады порядка $\alpha(Z\alpha)^4$ в лэмбовский сдвиг ($2P-2S$):

$$\Delta E_{1,VP}^B(2P-2S) = \begin{cases} -0.8670 \text{ мэВ,} \\ -0.8931 \text{ мэВ,} \end{cases} \quad (26)$$

$$\Delta E_{2,VP}^B(2P-2S) = \begin{cases} 0.0150 \text{ мэВ,} \\ 0.0116 \text{ мэВ,} \end{cases} \quad (27)$$

$$\Delta E_{3,VP}^B(2P-2S) = \begin{cases} 0.0281 \text{ мэВ,} \\ 0.0219 \text{ мэВ,} \end{cases} \quad (28)$$

$$\Delta E_{4,VP}^B(2P-2S) = \begin{cases} -0.0860 \text{ мэВ,} \\ -0.0876 \text{ мэВ.} \end{cases} \quad (29)$$

Потенциалы $\Delta V_{2,VP}^B$, $\Delta V_{3,VP}^B$, $\Delta V_{4,VP}^B$ учитывают эффекты отдачи по отношению масс частиц m_1/m_2 . В таблице представлена суммарная поправка порядка $\alpha(Z\alpha)^4$, которая определяется соотношениями (26)–(29).

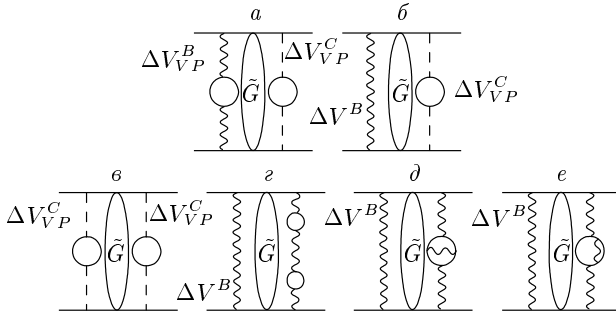


Рис. 4. Эффекты однопетлевой и двухпетлевой поляризации вакуума во втором порядке теории возмущений. Штриховой линией обозначен кулоновский фотон. \tilde{G} — редуцированная кулоновская функция Грина (33). Потенциалы ΔV^B , ΔV_{VP}^C и ΔV_{VP}^B определяются соответственно выражениями (1), (3) и (21)

Поправка следующего порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4$ в спектре энергии возникает как результат двухпетлевой модификации гамильтониана Брейта. Рассмотрим вычисление одного из слагаемых, аналогичных по структуре потенциалу (22) (функция $f(v)$ определена формулой (13)):

$$\Delta V_{2-loop VP}^B(r) = \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{12\pi^2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{\delta_I}{m_2^2} \right) \times \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \left[4\pi\delta(\mathbf{r}) - \frac{4m_e^2}{(1-v^2)r} \times \exp\left(-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}\right) \right]. \quad (30)$$

Соответствующий сдвиг ($2P-2S$) равен

$$\Delta E_{2-loop VP}^B(2P-2S) = \begin{cases} -0.0032 \text{ мэВ,} \\ -0.0033 \text{ мэВ.} \end{cases} \quad (31)$$

Вклад других слагаемых потенциала Брейта с учетом двухпетлевой поляризации вакуума, который приближенно может быть оценен в 10% от (31) с помощью замены $\Delta V_{VP}^C \rightarrow \Delta V_{2-loop VP}^C$, включен в итоговую таблицу.

Во втором порядке теории возмущений (ТВ, РТ) имеем в лэмбовском сдвиге ряд вкладов поляризации вакуума порядков $\alpha^2(Z\alpha)^2$ и $\alpha(Z\alpha)^4$, показанных на диаграммах рис. 4б,в:

$$\Delta E_{SOPT}^{VP} = \langle \psi | \Delta V_{VP}^C \tilde{G} \Delta V_{VP}^C | \psi \rangle + 2 \langle \psi | \Delta V^B \tilde{G} \Delta V_{VP}^C | \psi \rangle. \quad (32)$$

Поправки второго порядка ТВ (SOPT) в спектре энергии водородоподобного атома определяются редуцированной кулоновской функцией Грина \tilde{G} (RCGF), частичное разложение которой имеет вид [27]

$$\tilde{G}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} \tilde{g}_{nl}(r, r') Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}'). \quad (33)$$

Радиальная функция $\tilde{g}_{nl}(r, r')$ представлена в [27] в виде штурмовского разложения по полиномам Лагерра. При вычислении лэмбовского сдвига более удобно использовать для редуцированных кулоновских функций Грина $2S$ - и $2P$ -состояний компактные выражения, полученные в работе [28]:

$$\tilde{G}(2S) = -\frac{Z\alpha\mu^2}{4x_1x_2} \times \exp\left(-\frac{x_1+x_2}{2}\right) \frac{1}{4\pi} g_{2S}(x_1, x_2), \quad (34)$$

$$g_{2S}(x_1, x_2) = 8x_{<} - 4x_{<}^2 + 8x_{>} + 12x_{<}x_{>} - 26x_{<}^2x_{>} + 2x_{<}^3x_{>} - 4x_{>}^2 - 26x_{<}x_{>}^2 + 23x_{<}^2x_{>}^2 - x_{<}^3x_{>}^2 + 2x_{<}x_{>}^3 - x_{<}^2x_{>}^3 + 4e^x(1-x_{<})(x_{>} - 2)x_{>} + 4(x_{<} - 2)x_{<}(x_{>} - 2)x_{>} \times [-2C + \text{Ei}(x_{<}) - \ln(x_{<}) - \ln(x_{>})], \quad (35)$$

$$\tilde{G}(2P) = -\frac{Z\alpha\mu^2}{36x_1^2x_2^2} \times \exp\left(-\frac{x_1+x_2}{2}\right) \frac{3}{4\pi} \frac{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{x_1x_2} g_{2P}(x_1, x_2), \quad (36)$$

$$g_{2P}(x_1, x_2) = 24x_{<}^3 + 36x_{<}^3x_{>} + 36x_{<}^3x_{>}^2 + 24x_{>}^3 + 36x_{<}x_{>}^3 + 36x_{<}^2x_{>}^3 + 49x_{<}^3x_{>}^3 - 3x_{<}^4x_{>}^3 - 12e^x(2+x_{<}+x_{<}^2)x_{>}^3 - 3x_{<}^3x_{>}^4 + 12x_{<}^3x_{>}^3 \times [-2C + \text{Ei}(x_{<}) - \ln(x_{<}) - \ln(x_{>})], \quad (37)$$

где $x_{<} = \min(x_1, x_2)$, $x_{>} = \max(x_1, x_2)$, $C = 0.57721566\dots$ — постоянная Эйлера. В результате вклад двухпетлевой поляризации вакуума от первого слагаемого в правой части (32) может быть первоначально записан в интегральной форме (рис. 4б).

Последующее интегрирование по координатам частиц и спектральным параметрам дает результат:

$$\begin{aligned} \Delta E_{SOPT}^{VP,VP}(2S) &= -\frac{\mu\alpha^2(Z\alpha)^2}{72\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \times \\ &\times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{2}\right) \exp\left\{-x\left(1 - \frac{2m_e\xi}{W}\right)\right\} dx \times \\ &\times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x'}{2}\right) \exp\left\{-x'\left(1 - \frac{2m_e\eta}{W}\right)\right\} dx' g_{2S}(x, x') = \\ &= \begin{cases} -1.8640 \text{ мэВ}, \\ -1.9017 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{SOPT}^{VP,VP}(2P) &= -\frac{\mu\alpha^2(Z\alpha)^2}{7776\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \times \\ &\times \int_0^\infty \exp\left\{-x\left(1 + \frac{2m_e\xi}{W}\right)\right\} dx \times \\ &\times \int_0^\infty \exp\left\{-x'\left(1 + \frac{2m_e\eta}{W}\right)\right\} dx' g_{2P}(x, x') = \\ &= \begin{cases} -0.1867 \text{ мэВ}, \\ -0.1942 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (39) \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части (32) имеет аналогичную структуру (см. рис. 4б). Преобразование различных матричных элементов, входящих в него, можно выполнить с помощью алгебраических соотношений вида

$$\begin{aligned} \langle \psi | \frac{\mathbf{P}^4}{(2\mu)^2} \sum'_m \frac{|\psi_m\rangle\langle\psi_m|}{E_2 - E_m} \Delta V_{VP}^C | \psi \rangle &= \\ &= \langle \psi | \left(E_2 + \frac{Z\alpha}{r}\right) \left(\hat{H}_0 + \frac{Z\alpha}{r}\right) \times \\ &\times \sum'_m \frac{|\psi_m\rangle\langle\psi_m|}{E_2 - E_m} \Delta V_{VP}^C | \psi \rangle = \\ &= \langle \psi | \left(E_2 + \frac{Z\alpha}{r}\right)^2 \tilde{G} \Delta V_{VP}^C | \psi \rangle - \\ &- \langle \psi | \frac{Z\alpha}{r} \Delta V_{VP}^C | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{Z\alpha}{r} | \psi \rangle \langle \psi | \Delta V_{VP}^C | \psi \rangle. \quad (40) \end{aligned}$$

Каждое из трех слагаемых в правой части (40) вычисляется с помощью явных выражений для потенциалов и волновых функций. Так, например, в случае ядра ${}^4_2\text{He}$ их численные значения равны соответственно для $2S$ - и $2P$ -состояний: -2.0398 мэВ, 0.1017 мэВ, -1.0576 мэВ; -0.0600 мэВ, 0.0201 мэВ, -0.0653 мэВ. Приведем интегральные выражения

для поправок во втором порядке ТВ, которые связаны с тремя другими слагаемыми потенциала Брейта (1):

$$\begin{aligned} \Delta E_{SOPT}^{VP,(1)}(2S) &= \frac{\alpha(Z\alpha)^4\mu^3}{48\pi} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{\delta_I}{m_2^2}\right) \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{2}\right) \exp\left\{-x\left(1 + \frac{2m_e\xi}{W}\right)\right\} \times \\ &\times [4x(x-2)(\ln x + C) + x^3 - 13x^2 + 6x + 4] = \\ &= \begin{cases} -1.3611 \text{ мэВ}, \\ -1.4028 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{SOPT}^{VP,(2)}(2P) &= -\frac{\alpha(Z\alpha)^4\mu^3}{648\pi} \left(\frac{1}{4m_1^2} + \frac{1}{2m_1m_2}\right) \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} \exp(-x) \times \\ &\times \int_0^\infty dx' \exp\left\{-x'\left(1 + \frac{2m_e\xi}{W}\right)\right\} g_{2P}(x, x') = \\ &= \begin{cases} -0.0935 \text{ мэВ}, \\ -0.0958 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{SOPT}^{VP,(3)}(2P) &= -\frac{\alpha(Z\alpha)^4\mu^3}{2592\pi m_1 m_2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \int_0^\infty dx \exp\left\{-x\left(1 + \frac{2m_e\xi}{W}\right)\right\} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{dx'}{x'} g_{2P}(x, x') \exp\left(-\frac{x'}{2}\right) \left(\frac{2}{x'} - \frac{1}{4} - \frac{d^2}{dx'^2}\right) x' \times \\ &\times \exp\left(-\frac{x'}{2}\right) = \begin{cases} -0.0084 \text{ мэВ}, \\ -0.0066 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{SOPT}^{VP,(3)}(2S) &= -\frac{\alpha(Z\alpha)^4\mu^3}{24\pi m_1 m_2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_0^\infty dx \times \\ &\times \exp\left\{-x\left(1 + \frac{2m_e\xi}{W}\right)\right\} \left(1 - \frac{x}{2}\right) \times \\ &\times \int_0^\infty dx' g_{2S}(x, x') \exp\left(-\frac{x'}{2}\right) \left(\frac{2}{x'} - \frac{1}{4} - \frac{d^2}{dx'^2}\right) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{x'}{2}\right) \left(1 - \frac{x'}{2}\right) = \begin{cases} -0.1064 \text{ мэВ}, \\ -0.0829 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (44) \end{aligned}$$

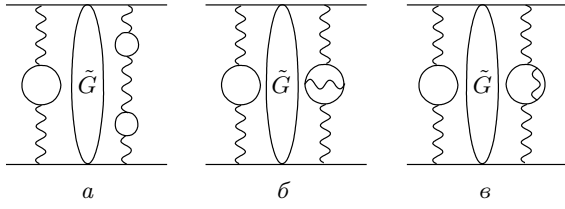


Рис. 5. Поправки трехпетлевой поляризации вакуума во втором порядке ТВ. \tilde{G} — редуцированная кулоновская функция Грина

Опуская дальнейшие детали расчета остальных матричных элементов в формуле (40), представим суммарный численный вклад в сдвиг ($2P-2S$) от второго слагаемого в (32), полученный для всех членов потенциала Брейта (1):

$$\Delta E_{SOPT}^{B,VP}(2P-2S) = \begin{cases} 1.4192 \text{ мэВ}, \\ 1.4682 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (45)$$

Вклады трехпетлевой поляризации вакуума в спектр энергии во втором порядке ТВ показаны на рис. 5. Необходимые для их вычисления потенциалы выписаны в явном виде в формулах (3), (8) и (12). Учитывая точность проводимых расчетов, представим ниже сдвиги только для $2S$ -уровня (вклады для $2P$ -состояния отличаются только видом волновых функций и функции Грина):

$$\begin{aligned} \Delta E_{SOPT}^{VP-VP,VP}(2S) &= -\frac{\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{108\pi^3} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_1^\infty \rho(\zeta) d\zeta \int_0^\infty dx \left(1 - \frac{x}{2}\right) \times \\ &\times \int_0^\infty dx' \left(1 - \frac{x'}{2}\right) \exp\left\{-x' \left(1 + \frac{2m_e\zeta}{W}\right)\right\} \times \\ &\times \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left[\xi^2 \exp\left\{-x \left(1 + \frac{2m_e\xi}{W}\right)\right\} - \right. \\ &\left. - \eta^2 \exp\left\{-x \left(1 + \frac{2m_e\eta}{W}\right)\right\} \right] g_{2S}(x, x') = \\ &= \begin{cases} -0.0104 \text{ мэВ}, \\ -0.0107 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{SOPT}^{2-loop VP,VP}(2S) &= -\frac{\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{18\pi^3} \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_0^\infty dx \left(1 - \frac{x}{2}\right) \times \\ &\times \exp\left\{-x \left(1 + \frac{2m_e}{\sqrt{1-v^2}W}\right)\right\} \int_0^\infty dx' \left(1 - \frac{x'}{2}\right) \times \\ &\times \exp\left\{-x' \left(1 + \frac{2m_e\xi}{W}\right)\right\} g_{2S}(x, x') = \\ &= \begin{cases} -0.0168 \text{ мэВ}, \\ -0.0171 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (47) \end{aligned}$$

При вычислении этих и других поправок во втором порядке ТВ мы имеем два характерных интеграла по координате частицы, которые могут быть получены в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty g_{2S}(x, y) \left(1 - \frac{x}{2}\right) \exp(-a_1 x) dx = \\ &= \frac{1}{a_1^5} \left[2a_1^3(y(4\gamma(y-2) + (y-13)y + 6) + 4) - \right. \\ &\quad - 4a_1^2(y(4\gamma(y-2) + (y-15)y + 10) + 4) - \\ &\quad - 4(2(a_1-2)a_1 + 3)a_1(y-2)y(\text{Ei}(-y(a_1-1))) - \\ &\quad - \ln \frac{(a_1-1)y}{a_1}) + a_1(y(12\gamma(y-2) + y(3y-53) + 46) + 12) + \\ &\quad + 12(y-2)y + 4a_1 \exp\{-y(a_1-1)\} \times \\ &\quad \left. \times (a_1(a_1(y-2) - y + 4) + 3(y-1)) \right], \quad (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty g_{2P}(x, y) \exp(-a_1 x) x dx = \\ &= \frac{1}{(a_1-1)a_1^6} \left\{ -72 \left[a_1^2(y(y(y+4\gamma-9)-12)-12)-8 \right) + \right. \\ &\quad + 4(a_1-1)a_1y^3 \left(-\text{Ei}(y-a_1y) + \ln \frac{(a_1-1)y}{a_1} \right) + \\ &\quad + a_1(y(12-y(y(y+4\gamma-13)-12)) + 8) - 5y^3 \right] - \\ &\quad - 72a_1 \exp\{-y(1-a_1)\} \left[a_1^4y^3 + 4(a_1^3-1)y^2 + \right. \\ &\quad \left. + 4(a_1-1)(2a_1+1)y + 8(a_1-1) \right] \left. \right\}. \quad (49) \end{aligned}$$

Вклад трехпетлевой поляризации вакуума в третьем порядке ТВ (ТОРТ) показан на рис. 2в. В аналитическом виде он определяется суммой двух слагаемых [29]:

$$\Delta E = \langle \psi_2 | \Delta V^C \tilde{G} \Delta V^C \tilde{G} \Delta V^C | \psi_2 \rangle - \langle \psi_2 | \Delta V^C | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \Delta V^C \tilde{G} \tilde{G} \Delta V^C | \psi_2 \rangle. \quad (50)$$

Выпишем в явном виде возникающие матричные элементы для $2S$ -состояния:

$$\begin{aligned} \Delta E_{ТОРТ,1}(2S) &= -\frac{\mu Z^2 \alpha^5}{864\pi^3} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\zeta) d\zeta \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{2}\right) \exp\left\{-x \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right)\right\} dx \times \\ &\times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x''}{2}\right) \exp\left\{-x'' \left(1 + \frac{2m_e \zeta}{W}\right)\right\} dx'' \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{dx'}{x'} \exp\left\{-x'' \left(1 + \frac{2m_e \zeta}{W}\right)\right\} g(x, x') g(x', x'') = \\ &= \begin{cases} -0.0044 \text{ мЭВ}, \\ -0.0045 \text{ мЭВ}, \end{cases} \quad (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{ТОРТ,2}(2S) &= \frac{\alpha^2}{288\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \times \\ &\times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{2}\right) \exp\left\{-x \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right)\right\} dx \times \\ &\times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x''}{2}\right) \exp\left\{-x'' \left(1 + \frac{2m_e \eta}{W}\right)\right\} dx'' \times \\ &\times \int_0^\infty dx' g(x, x') g(x', x'') \begin{cases} 2041.9990 \text{ мЭВ} \\ 2077.2217 \text{ мЭВ} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0.0037 \text{ мЭВ}, \\ 0.0038 \text{ мЭВ}. \end{cases} \quad (52) \end{aligned}$$

Состояние $2P$ также дает вклад в сдвиг ($2P-2S$), уменьшая его величину на 0.0004 мЭВ (см. полный результат в таблице).

Существуют вклады во втором порядке ТВ (см. рис. 4г, д, е), которые имеют такую же общую структуру, что и (38), (39). Они могут быть получены в результате замены $\Delta V_{VP}^C \rightarrow \Delta V^B$ и $\Delta V_{VP}^C \rightarrow \Delta V_{VP,VP}^C$ в основных амплитудах, показанных на рис. 4в. Если взять из потенциала Брейта слагаемое

$$\Delta H_{B,1} = \frac{\pi Z \alpha}{2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{\delta_I}{m_2^2} \right) \delta(\mathbf{r}),$$

то в случае $2S$ -состояний получим следующие вклады с потенциалами (8) и (12) порядка $\alpha^2 (Z\alpha)^4$:

$$\begin{aligned} \Delta E_{SOPT}^{VP-VP, \Delta H_{B,1}}(2S) &= \frac{\mu^3 (Z\alpha)^4 \alpha^2}{144\pi^2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{\delta_I}{m_2^2} \right) \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx \times \\ &\times [4x(x-2)(\ln x + C) + x^3 - 13x^2 + 6x + 4] \times \\ &\times \left[\xi^2 \exp\left\{-x \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right)\right\} - \eta^2 \times \right. \\ &\left. \times \exp\left\{-x \left(1 + \frac{2m_e \eta}{W}\right)\right\} \right] = \\ &= \begin{cases} 0.0050 \text{ мЭВ}, \\ 0.0051 \text{ мЭВ}, \end{cases} \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{SOPT}^{2-loop VP, \Delta H_{B,1}}(2S) &= \frac{\mu^3 (Z\alpha)^4 \alpha^2}{24\pi^2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{\delta_I}{m_2^2} \right) \times \\ &\times \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx \times \\ &\times [4x(x-2)(\ln x + C) + x^3 - 13x^2 + 6x + 4] \times \\ &\times \exp\left\{-x \left(1 + \frac{2m_e}{W\sqrt{1-v^2}}\right)\right\} = \\ &= \begin{cases} 0.0056 \text{ мЭВ}, \\ 0.0058 \text{ мЭВ}. \end{cases} \quad (54) \end{aligned}$$

Численно близкий вклад дает другое слагаемое $\Delta H_{B,2} = -\mathbf{p}^4 (1/m_1^3 + 1/m_2^3)$ по формуле, аналогичной (40), с заменой $\Delta V_{VP}^C \rightarrow \Delta V_{VP,VP}^C$. В нем имеется несколько матричных элементов, которые вычисляются так же, как и в случае однопетлевой ПВ. Приведем здесь лишь основные численные поправки:

$$\begin{aligned} \Delta E_{SOPT,1}^{VP-VP, \Delta H_{B,2}}(2S) &= -\frac{\mu^4 (Z\alpha)^4 \alpha^2}{72\pi^2} \left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right) \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \times \\ &\times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{2}\right) x dx \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{8}\right)^2 \int_0^\infty \left(1 - \frac{x'}{2}\right) dx' g(x, x') \times \\ &\times \left[\xi^2 \exp\left\{-x' \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right)\right\} - \eta^2 \times \right. \\ &\left. \times \exp\left\{-x' \left(1 + \frac{2m_e \eta}{W}\right)\right\} \right] = \\ &= \begin{cases} -0.0029 \text{ мЭВ}, \\ -0.0031 \text{ мЭВ}, \end{cases} \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{SOPT,2}^{2-loop VP,\Delta H_{B,2}}(2S) &= -\frac{\mu^4(Z\alpha)^4\alpha^2}{12\pi^2} \left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right) \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \times \\ &\times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{2}\right) x dx \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{8}\right)^2 \int_0^\infty \left(1 - \frac{x'}{2}\right) dx' g(x, x') \times \\ &\times \exp \left\{ -x' \left(1 + \frac{2m_e}{W\sqrt{1-v^2}}\right) \right\} = \\ &= \begin{cases} -0.0045 \text{ мэВ,} \\ -0.0047 \text{ мэВ,} \end{cases} \quad (56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{SOPT,3}^{VP-VP,\Delta H_{B,2}}(2S) &= -\frac{\mu^4(Z\alpha)^4\alpha^2}{18\pi^2} \left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right) \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \times \\ &\times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx \left[\xi^2 \exp \left\{ -x \left(1 + \frac{2m_e\xi}{W}\right) \right\} - \eta^2 \times \right. \\ &\times \left. \exp \left\{ -x \left(1 + \frac{2m_e\eta}{W}\right) \right\} \right] = \\ &= \begin{cases} -0.0072 \text{ мэВ,} \\ -0.0075 \text{ мэВ,} \end{cases} \quad (57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{SOPT,4}^{2-loop VP,\Delta H_{B,2}}(2S) &= -\frac{\mu^4(Z\alpha)^4\alpha^2}{3\pi^2} \times \\ &\times \left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right) \int_1^\infty \frac{f(v) dv}{1-v^2} \times \\ &\times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx \exp \left\{ -x \left(1 + \frac{2m_e}{W\sqrt{1-v^2}}\right) \right\} = \\ &= \begin{cases} -0.0083 \text{ мэВ,} \\ -0.0086 \text{ мэВ.} \end{cases} \quad (58) \end{aligned}$$

В результате суммарная величина сдвига, которая определяется формулами (53)–(58), равна (учтен также вклад $2P$ -состояния и других членов потенциала Брейта)

$$\Delta E_{SOPT}^{VP,VP;\Delta V^B}(2P-2S) = \begin{cases} 0.0120 \text{ мэВ,} \\ 0.0127 \text{ мэВ.} \end{cases} \quad (59)$$

Имеется еще один вклад двухпетлевой поляризации вакуума, который представлен амплитудой на рис. 4а. Для расчета вклада этой амплитуды в

спектр энергии необходимо использовать выражения (3) и (21). Основной вклад дает потенциал (22) для $2S$ -состояния. Полное значение поправки порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4$ равно

$$\Delta E_{SOPT}^{VP,\Delta V_{VP}^B}(2P-2S) = \begin{cases} -0.0066 \text{ мэВ,} \\ -0.0069 \text{ мэВ.} \end{cases} \quad (60)$$

4. ЭФФЕКТЫ СТРУКТУРЫ ЯДРА И ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА

Как уже отмечалось выше, в мюонных атомах волновая функция мюона сильно перекрывается с областью распределения заряда ядра. В лидирующем порядке α^4 влияние структуры ядра на положение уровней энергии в ионах мюонного гелия может быть выражено в терминах зарядового радиуса ядра r_N [11, 30] (рис. 6а):

$$\begin{aligned} \Delta E_{str}(2P-2S) &= -\frac{\mu^3(Z\alpha)^4}{12} \langle r_N^2 \rangle = \\ &= \begin{cases} -396.2669 \text{ мэВ,} \\ -295.8478 \text{ мэВ.} \end{cases} \quad (61) \end{aligned}$$

Поправка следующего порядка $(Z\alpha)^5$ определяется однопетлевыми обменными диаграммами (рис. 7). Вводя зарядовый формфактор $F(k^2)$ α -частицы, можно выразить ее в интегральной форме:

$$\Delta E_{str}^{2\gamma}(nS) = -\frac{\mu^3(Z\alpha)^5}{\pi n^3} \delta_{l0} \int_0^\infty \frac{dk}{k} V(k), \quad (62)$$

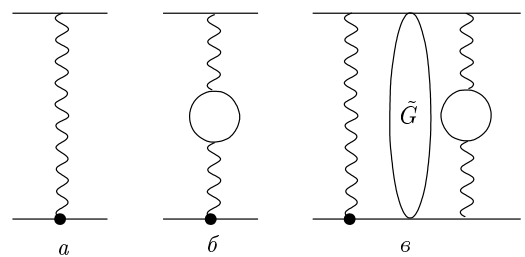


Рис. 6. Основные поправки на структуру ядра и поляризацию вакуума в лэмбовском сдвиге. Жирными точками на диаграммах обозначен вершинный оператор ядра

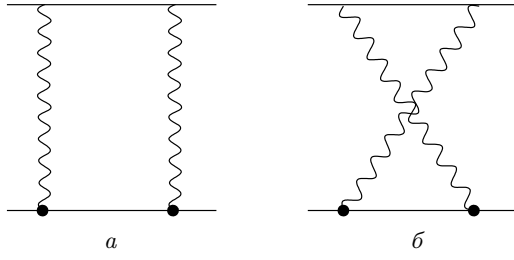


Рис. 7. Поправки на структуру ядра порядка $(Z\alpha)^5$. Жирные точки на диаграммах обозначают вершинный оператор ядра

$$\begin{aligned}
 V(k) = & \frac{2(F^2 - 1)}{m_1 m_2} + \frac{8m_1[-F(0) + 4m_2^2 F'(0)]}{m_2(m_1 + m_2)k} + \\
 & + \frac{k^2}{2m_1^3 m_2^3} [2(F^2 - 1)(m_1^2 + m_2^2) - F^2 m_1^2] + \\
 & + \frac{\sqrt{k^2 + 4m_1^2}}{2m_1^3 m_2(m_1^2 - m_2^2)k} \left\{ k^2 [2(F^2 - 1)m_2^2 - F^2 m_1^2] + \right. \\
 & + 8m_1^4 F^2 + \frac{16m_1^4 m_2^2 (F^2 - 1)}{k^2} \left. \right\} - \frac{\sqrt{k^2 + 4m_2^2} m_1}{2m_2^3 (m_1^2 - m_2^2)k} \times \\
 & \times \left\{ k^2 [2(F^2 - 1) - F^2] + 8m_2^2 F^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{16m_2^4 (F^2 - 1)}{k^2} \right\}. \quad (63)
 \end{aligned}$$

Аналогичное выражение для $(\mu \text{ } ^3_2\text{He})^+$, в которое входит два формфактора гелиона, выписано явно в [19]. Чтобы выполнить численное интегрирование в формуле (62), мы используем гауссову параметризацию для зарядового формфактора ядра:

$$F(k^2) = \exp\left(-\frac{1}{6}k^2 r_\alpha^2\right). \quad (64)$$

Численные значения вкладов в лэмбовский сдвиг $(2P-2S)$ равны

$$\Delta E_{G, str}^{2\gamma}(2P-2S) = \begin{cases} 10.28 \pm 0.10 \text{ мэВ}, \\ 6.61 \pm 0.07 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (65)$$

Результат (65) включен в таблицу отдельной строкой. В случае дипольной параметризации для зарядового формфактора α -частицы получаем значение вклада 7.1958 мэВ. Мы видим, что данный результат сильно зависит от модели формфакторов, хотя гауссова модель представляется более реалистичной в случае ядер гелия. Существенное возрастание величины поправок (61) и (65) в ионах мюонного гелия по сравнению с мюонным водородом обусловлено

двумя факторами. Во-первых, возрастает значение зарядового радиуса ядра, так что $\mu^2 \langle r_N^2 \rangle = 0.762$, $\mu^2 \langle r_h^2 \rangle = 0.905$. Во-вторых, заряд ядра гелия $Z = 2$, что приводит к появлению дополнительного фактора 2^5 при вычислении двухфотонных обменных диаграмм (62).

Амплитуды взаимодействия частиц, содержащие эффекты как структуры ядра, так и поляризации вакуума (см. рис. 6), также должны быть рассмотрены при получении полной величины лэмбовского сдвига. Оператор взаимодействия частиц, соответствующий диаграмме рис. 6б имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{str}^{VP}(r) = & \frac{2}{3}\pi Z\alpha \langle r_\alpha^2 \rangle \frac{\alpha}{3\pi} \times \\
 & \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \left[\delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2 \xi^2}{\pi r} \exp(-2m_e \xi r) \right]. \quad (66)
 \end{aligned}$$

Вклад (66) в сдвиги $2S$ - и $2P$ -уровней энергии и в лэмбовский сдвиг определяется следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{str}^{VP}(2S) = & \frac{\alpha(Z\alpha)^4 \langle r_N^2 \rangle \mu^3}{36\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\
 & \times \left[1 - \frac{4m_e^2 \xi^2}{W^2} \int_0^\infty x dx \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \times \right. \\
 & \left. \times \exp\left\{-x \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right)\right\} \right] = \begin{cases} 1.2493 \text{ мэВ}, \\ 0.9365 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (67)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{str}^{VP}(2P) = & -\frac{\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3 \langle r_N^2 \rangle}{108\pi} \frac{m_e^2}{W^2} \int_1^\infty \xi^2 \rho(\xi) d\xi \times \\
 & \times \int_0^\infty x^3 \exp\left\{-x \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right)\right\} dx = \\
 & = \begin{cases} -0.0300 \text{ мэВ}, \\ -0.0225 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (68)
 \end{aligned}$$

$$\Delta E_{str}^{VP}(2P-2S) = \begin{cases} -1.2793 \pm 0.0130 \text{ мэВ}, \\ -0.9590 \pm 0.0092 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (69)$$

Вклад в спектр энергии такого же порядка $\alpha(Z\alpha)^4$ дает амплитуда во втором порядке теории возмущений, показанная на рис. 6в:

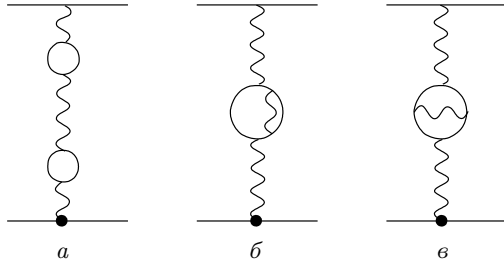


Рис. 8. Эффекты структуры ядра и двухпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии. Жирными точками на диаграммах обозначен вершинный оператор ядра

$$\Delta E_{str,SOPT}^{VP}(2P-2S) = -\frac{\alpha(Z\alpha)^4\mu^3\langle r_N^2 \rangle}{36\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times$$

$$\times \int_0^\infty dx \exp\left\{-x\left(1 + \frac{2m_e\xi}{W}\right)\right\} \left(1 - \frac{x}{2}\right) \times$$

$$\times [4x(x-2)(\ln x + C) + x^3 - 13x^2 + 6x + 4] =$$

$$= \begin{cases} -2.0083 \text{ мэВ,} \\ -1.5063 \text{ мэВ.} \end{cases} \quad (70)$$

Поправки двухпетлевой поляризации вакуума с учетом структуры ядра представлены на рис. 8. Соответствующие этим амплитудам операторы взаимодействия частиц могут быть построены с помощью выражений (7), (8), (12), (66) в интегральной форме:

$$\Delta V_{str}^{VP-VP}(r) = \frac{2}{3}Z\alpha\langle r_N^2 \rangle \left(\frac{\alpha}{3\pi}\right)^2 \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times$$

$$\times \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \left[\pi\delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2}{r(\xi^2 - \eta^2)} \times \right.$$

$$\left. \times (\xi^4 \exp(-2m_e\xi r) - \eta^4 \exp(-2m_e\eta r)) \right], \quad (71)$$

$$\Delta V_{str}^{2-loop VP}(r) = \frac{4}{9}Z\alpha\langle r_N^2 \rangle \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \times$$

$$\times \left[\pi\delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2}{r(1-v^2)} \exp\left(-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}\right) \right]. \quad (72)$$

Сумма поправок (71) и (72) в лэмбовском сдвиге (2P-2S) равна

$$\Delta E_{str}^{VP,VP}(2P-2S) = \begin{cases} -0.0102 \text{ мэВ,} \\ -0.0076 \text{ мэВ.} \end{cases} \quad (73)$$

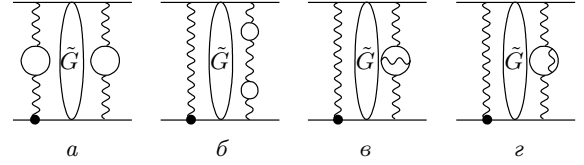


Рис. 9. Эффекты структуры ядра и двухпетлевой поляризации вакуума во втором порядке теории возмущений. Жирными точками на диаграммах обозначен вершинный оператор ядра. \tilde{G} — редуцированная кулоновская функция Грина

Во втором порядке ТВ также имеется ряд вкладов с эффектами двухпетлевой поляризации вакуума и структурой ядра порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4$, показанных на рис. 9. Рассмотрим, например, вычисление вклада на рис. 9а. Его удобно разбить на две части в соответствии со структурой потенциала (66):

$$\Delta E_{str,SOPT}^{VP,VP(1)}(2S) = \frac{\alpha^2(Z\alpha)^4\mu^3r_N^2}{108\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times$$

$$\times \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx \times$$

$$\times \exp\left\{-x\left(1 + \frac{2m_e\eta}{W}\right)\right\} \times$$

$$\times [4x(x-2)(\ln x + C) + x^3 - 13x^2 + 6x + 4], \quad (74)$$

$$\Delta E_{str,SOPT}^{VP,VP(2)}(2S) = -\frac{\alpha^2(Z\alpha)^4\mu^3r_N^2m_e^2}{54\pi^2W^2} \times$$

$$\times \int_1^\infty \xi^2 \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx \times$$

$$\times \exp\left\{-x\left(1 + \frac{2m_e\xi}{W}\right)\right\} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x'}{2}\right) dx' \times$$

$$\times \exp\left\{-x'\left(1 + \frac{2m_e\eta}{W}\right)\right\} g_{2S}(x, x'). \quad (75)$$

Каждое из выражений (74) и (75) является расходящимся, но их сумма конечна и дает следующий вклад в лэмбовский сдвиг:

$$\Delta E_{str,SOPT}^{VP,VP}(2P-2S) = \begin{cases} -0.0086 \text{ мэВ,} \\ -0.0065 \text{ мэВ.} \end{cases} \quad (76)$$

Аналогично вычисляются и другие поправки на рис. 9 б, в, з, и их сумма представлена в таблице.

В шестом порядке по α существует также поправка на структуру ядра с эффектом поляризации ваку-

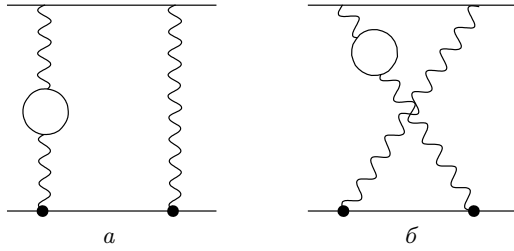


Рис. 10. Эффекты структуры ядра и поляризации вакуума в двухфотонных обменных диаграммах. Жирными точками на диаграммах обозначен вершинный оператор ядра

ума, которая определяется двухфотонными обменными диаграммами, представленными на рис. 10. Соответствующий оператор взаимодействия частиц отличается от (63) заменой (7). Мы получили интегральное аналитическое выражение для поправки и численное значение сдвига в виде

$$\Delta E_{str,VP}^{2\gamma}(nS) = -\frac{2\mu^3\alpha(Z\alpha)^5}{\pi^2 n^3} \int_0^\infty kV(k) dk \times \int_0^1 \frac{v^2(1-v^2/3) dv}{k^2(1-v^2) + 4m_e^2}, \quad (77)$$

$$\Delta E_{str,VP}^{2\gamma}(2P-2S) = \begin{cases} 0.2214 \pm 0.0022 \text{ мэВ}, \\ 0.1270 \pm 0.0013 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (78)$$

5. ПОПРАВКИ НА ОТДАЧУ, СОБСТВЕННУЮ ЭНЕРГИЮ МЮОНА И ПОЛЯРИЗАЦИЮ ВАКУУМА

Исследование поправок различного порядка в лэмбовском сдвиге ($2P-2S$) электронного водорода проводилось в течение многих лет. Современный анализ достижений при решении этой задачи был представлен в обзоре [5]. Подавляющая часть результатов была получена в аналитическом виде, поэтому их можно использовать для оценки вкладов в других атомах, включая ионы мюонного гелия. В данном разделе мы проанализируем различные вклады вплоть до шестого порядка по α в спектрах энергии $(\mu \text{ } ^3_2\text{He})^+$ и $(\mu \text{ } ^4_2\text{He})^+$ и получим их численные значения в лэмбовском сдвиге ($2P-2S$).

Поправки на отдачу порядка $(Z\alpha)^4$ в лэмбовском сдвиге возникают при вычислении матричных эле-

ментов потенциала Брейта с волновыми функциями (2) [5, 22, 31]:

$$\Delta E_{rec}(2P-2S) = \begin{cases} \frac{\mu^3(Z\alpha)^4}{48m_2^2}, & \delta_I = 1 \\ \frac{\mu^3(Z\alpha)^4}{12m_2^2}, & \delta_I = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0.1265 \text{ мэВ}, \\ 0.2952 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (79)$$

Поправка на отдачу пятого порядка по $Z\alpha$ также связана с двухфотонными обменными амплитудами, в которых ядро рассматривается как точечная частица [5, 31]:

$$\Delta E_{rec}^{(Z\alpha)^5} = \frac{\mu^3(Z\alpha)^5}{m_1 m_2 \pi n^3} \times \left[\frac{2}{3} \delta_{l0} \ln \frac{1}{Z\alpha} - \frac{8}{3} \ln k_0(n, l) - \frac{1}{9} \delta_{l0} - \frac{7}{3} a_n - \frac{2}{m_2^2 - m_1^2} \delta_{l0} \left(m_2^2 \ln \frac{m_1}{\mu} - m_1^2 \ln \frac{m_2}{\mu} \right) \right], \quad (80)$$

где $\ln k_0(n, l)$ — логарифм Бете, который имеет следующие значения для $2S$ -, $2P$ -состояний:

$$\ln k_0(2S) = 2.811769893120563, \quad (81)$$

$$\ln k_0(2P) = -0.030016708630213, \quad (82)$$

$$a_n = -2 \left[\ln \frac{2}{n} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{2n} \right] \delta_{l0} + \frac{1 - \delta_{l0}}{l(l+1)(2l+1)}. \quad (83)$$

Выражение (80) дает следующие численные результаты для двух ионов гелия:

$$\Delta E_{rec}^{(Z\alpha)^5}(2P-2S) = \begin{cases} -0.5581 \text{ мэВ}, \\ -0.4330 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (84)$$

Поправка на отдачу шестого порядка по $Z\alpha$ была вычислена аналитически в [32]:

$$\Delta E_{rec}^{(Z\alpha)^6}(2P-2S) = \frac{(Z\alpha)^6 m_1^2}{8m_2} \left(\frac{23}{6} - 4 \ln 2 \right) = \begin{cases} 0.0051 \text{ мэВ}, \\ 0.0038 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (85)$$

Энергетические вклады, полученные из амплитуд с радиационными поправками в мюонную линию, из

дираковского и паулиевского формфакторов мюона и мюонной поляризации вакуума также имеют компактное аналитическое представление [5, 32]:

$$\begin{aligned} \Delta E_{MVP,MSE}(2S) &= \frac{\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3}{8\pi m_1^2} \times \\ &\times \left[\frac{4}{3} \ln \frac{m_1}{\mu(Z\alpha)^2} - \frac{4}{3} \ln k_0(2S) + \frac{38}{45} + \right. \\ &+ \frac{\alpha}{\pi} \left(-\frac{9}{4} \zeta(3) + \frac{3}{2} \pi^2 \ln 2 - \frac{10}{27} \pi^2 - \frac{2179}{648} \right) + \\ &\left. + 4\pi Z\alpha \left(\frac{427}{384} - \frac{\ln 2}{2} \right) \right] = \begin{cases} 10.6633 \text{ мэВ,} \\ 10.9392 \text{ мэВ,} \end{cases} \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{MVP,MSE}(2P) &= \frac{\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3}{8\pi m_1^2} \times \\ &\times \left[-\frac{4}{3} \ln k_0(2P) - \frac{m_1}{6\mu} - \frac{\alpha}{3\pi} \frac{m_1}{\mu} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{3}{4} \zeta(3) - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + \frac{\pi^2}{12} + \frac{197}{144} \right) \right] = \\ &= \begin{cases} -0.1653 \text{ мэВ,} \\ -0.1678 \text{ мэВ.} \end{cases} \end{aligned} \quad (87)$$

Радиационные поправки с отдачей порядков $\alpha(Z\alpha)^5$ и $(Z^2\alpha)(Z\alpha)^4$ из табл. 9 [5] имеют следующий вид для $2S$ -, $2P$ -состояний:

$$\begin{aligned} \Delta E_{rad-rec}(2S) &= -1.324 \frac{\alpha(Z\alpha)^5 m_1^2}{8m_2} + \left(\frac{2\pi^2}{9} - \frac{70}{27} \right) \times \\ &\times \frac{\alpha(Z\alpha)^5 m_1^2}{8\pi^2 m_2} + \left[\frac{1}{3} \ln \frac{\Lambda(Z\alpha)^{-2}}{\mu} + \frac{11}{72} - \frac{1}{24} - \right. \\ &- \frac{7\pi}{32} \frac{\Lambda^2}{4m_2^2} + \frac{2}{3} \left(\frac{\Lambda^2}{4m_2^2} \right)^2 - \frac{1}{3} \ln k_0(2S) \left. \right] \times \\ &\times \frac{4(Z^2\alpha)(Z\alpha)^4 \mu^3}{8\pi m_2^2}, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\Delta E_{rad-rec}(2P) = -\frac{1}{3} \ln k_0(2P) \frac{4(Z^2\alpha)(Z\alpha)^4 \mu^3}{8\pi m_2^2}. \quad (89)$$

В результате (88) и (89) дают следующую численную величину сдвига $(2P-2S)$ (параметр $\Lambda = \sqrt{12/r_N^2}$):

$$\Delta E_{rad-rec}(2P-2S) = \begin{cases} -0.0656 \text{ мэВ,} \\ -0.0377 \text{ мэВ.} \end{cases} \quad (90)$$

Поправки на структуру ядра в спектре энергии порядка $(Z\alpha)^6$ и $\alpha(Z\alpha)^5$ исследовались в работах [11, 20, 33] для произвольного водородоподобного атома и с различными параметризациями для

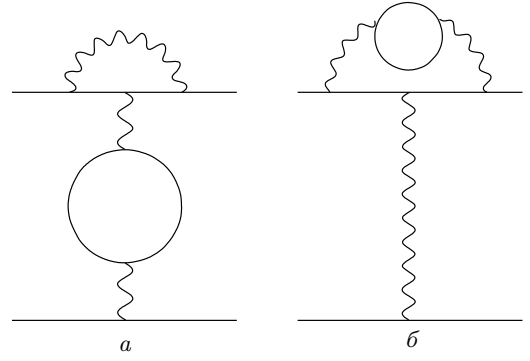


Рис. 11. Радиационные поправки с эффектами поляризации вакуума

формфакторов ядра. На основе полученных в [11] выражений можно дать оценку вкладов в лэмбовский сдвиг для ионов гелия:

$$\begin{aligned} \Delta E_{str}^{(Z\alpha)^6}(2P-2S) &= \frac{(Z\alpha)^6 \mu^3}{12} \times \\ &\times \left\{ r_N^2 \left[\langle \ln(\mu Z\alpha r) \rangle + C - \frac{3}{2} \right] - \frac{1}{2} r_N^2 + \frac{1}{3} \langle r^3 \rangle \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle - \right. \\ &- I_2^{rel} - I_3^{rel} - \mu^2 F_{NR} + \left. \frac{1}{40} \mu^2 \langle r^4 \rangle \right\} = \\ &= \begin{cases} -0.005064 r_h^2 + 0.11445 = -0.3882 \text{ мэВ,} \\ -0.00533 r_\alpha^2 + 0.07846 = -0.3063 \text{ мэВ,} \end{cases} \end{aligned} \quad (91)$$

где величины $I_{2,3}^{rel}, F_{NR}$ выписаны явно в [11],

$$\Delta E_{str}^{\alpha(Z\alpha)^5}(2P-2S) = \begin{cases} 0.0940 \text{ мэВ,} \\ 0.0702 \text{ мэВ.} \end{cases} \quad (92)$$

Амплитуда на рис. 11б дает вклад в спектр энергии, который может быть выражен в терминах наклона дираковского формфактора F_1' и паулиевского формфактора F_2 [5]:

$$\begin{aligned} \Delta E_{rad+VP}(nS) &= \frac{\mu^3}{m_1^2} \frac{(Z\alpha)^4}{n^3} \times \\ &\times \left[4m_1^2 F_1'(0) \delta_{l0} + F_2(0) \frac{C_{jl}}{2l+1} \right], \end{aligned} \quad (93)$$

$$C_{jl} = \delta_{l0} + (1 - \delta_{l0}) \frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{l(l+1)}. \quad (94)$$

Двухпетлевой вклад в формфакторы $F_1'(0)$ и $F_2(0)$ был вычислен в работе [34]:

$$\begin{aligned} m_1^2 F_1'(0) &= \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \times \\ &\times \left[\frac{1}{9} \ln^2 \frac{m_1}{m_e} - \frac{29}{108} \ln \frac{m_1}{m_e} + \frac{1}{9} \zeta(2) + \frac{395}{1296} \right], \end{aligned} \quad (95)$$

$$F_2(0) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \times \left[\frac{1}{3} \ln \frac{m_1}{m_e} - \frac{25}{36} + \frac{\pi^2}{4} \frac{m_e}{m_1} - 4 \frac{m_e^2}{m_1^2} \ln \frac{m_1}{m_e} + 3 \frac{m_e^2}{m_1^2} \right]. \quad (96)$$

Учитывая выражения (93)–(96), получим поправку в лэмбовский сдвиг ($2P-2S$):

$$\Delta E_{rad+VP}(2P-2S) = \begin{cases} -0.0299 \text{ мэВ}, \\ -0.0307 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (97)$$

Для оценки вклада собственной энергии мюона с учетом поляризации вакуума в [8] было получено в логарифмическом приближении следующее соотношение:

$$\Delta E_{MSE}^{VP} = \frac{\alpha}{3\pi m_1^2} \ln \frac{m_1}{\mu(Z\alpha)^2} \left[\langle \psi_n | \Delta \cdot \Delta V_{VP}^C | \psi_n \rangle + 2 \langle \psi_n | \Delta V_{VP}^C \tilde{G} \Delta \left(-\frac{Z\alpha}{r} \right) | \psi_n \rangle \right]. \quad (98)$$

Вычисляя матричные элементы в (98), получим поправку в сдвиг ($2P-2S$):

$$\Delta E_{MSE}^{VP}(2P-2S) = \begin{cases} -0.1008 \text{ мэВ}, \\ -0.1074 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (99)$$

Недавно в работе [40] было выполнено более точное вычисление этого вклада, поэтому мы включили в таблицу численный результат из [40].

Вклад адронной поляризации вакуума (АПВ), который исследовался в работах [35–37] в случае мюонного водорода, также следует принять во внимание с учетом точности расчета. Численные значения вкладов АПВ для ионов мюонного гелия можно получить, используя полученные в [35–37] результаты. Поправка АПВ, а также поправка на поляризуемость ядра из [38, 40] включены в таблицу.

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе мы выполнили новое исследование лэмбовского сдвига в ионах мюонного гелия ($\mu \text{ } ^3\text{He}^+$ и $\mu \text{ } ^4\text{He}^+$). Были вычислены различные вклады в лэмбовский сдвиг порядка α^3 , α^4 , α^5 и α^6 , которые имеют важное значение для достижения высокой точности расчета. В ранее проведенных расчетах лэмбовского сдвига в работах [6, 7] использовался подход, основанный на уравнении Дирака, а выполненные нами вычисления спектра энергии мюонных атомов основаны на трехмерном квазипотенциальном подходе в квантовой электродинамике.

Анализ различных вкладов привел к выделению поправок, которые можно разделить на две группы. В первую группу входят специфические для каждого мюонного атома вклады, связанные с электронной поляризацией вакуума и релятивистскими эффектами, структурой ядра и отдачей в первом, втором и третьем порядках ТВ. В настоящей работе получены новые вклады в оператор взаимодействия частиц, которые определяются перечисленными эффектами, а сами поправки представлены в интегральной форме для $2S$ - и $2P$ -состояний, хотя интегрирование по координатам всегда можно выполнить аналитически, а по дополнительным параметрам — либо аналитически, либо численно. Во вторую группу входят поправки, известные в аналитическом виде для произвольного водородоподобного атома из расчетов, выполненных для атома водорода в первую очередь. Достиженные результаты при описании спектров энергии простейших атомов отражены в обзорной работе [5], и мы использовали эту работу, чтобы на основе общих формул получить численные оценки соответствующих вкладов и затем найти полную величину лэмбовского сдвига в двух ионах гелия.

Отметим ряд важных особенностей в проведенных нами расчетах полной величины сдвига.

1. Поскольку численное значение параметра $m_e/\mu Z\alpha = 0.34$ является достаточно большим для ионов мюонного гелия, эффекты электронной поляризации вакуума вносят основной вклад и определяют наиболее существенные поправки в величине лэмбовского сдвига. Мы рассматриваем однопетлевые, двухпетлевые и трехпетлевые поправки ПВ в спектре энергии.

2. Исследованы комбинированные поправки, которые возникают за счет эффектов поляризации вакуума и релятивистских эффектов. Построена соответствующая модификация брейтовского гамильтониана и получен вклад в лэмбовский сдвиг ($2P-2S$).

3. Эффекты структуры ядра определяются как в терминах зарядового радиуса ядра в том случае, когда можно использовать разложение зарядового формфактора при малых переданных импульсах, так и с помощью самих электромагнитных формфакторов, для которых применяется гауссова параметризация.

4. Несмотря на то что численные значения всех вкладов выписаны с точностью 0.0001 мэВ, необходимо иметь в виду, что некоторые вклады, учитывающие структуру и поляризуемость ядра, получены с большой теоретической ошибкой, поскольку связаны с эффектами сильного взаимодействия.

Таблица. Лэмбовский сдвиг ($2P_{1/2}-2S_{1/2}$) в ионах мюонного гелия ($\mu\ ^3_2\text{He}^+$), ($\mu\ ^4_2\text{He}^+$)

№	Вклад в расщепление	$\Delta E(\mu\ ^3_2\text{He}^+)$, мэВ	$\Delta E(\mu\ ^4_2\text{He}^+)$, мэВ	Формула, ссылка
1	Вклад ПВ порядка $\alpha(Z\alpha)^2$ в 1γ -взаимодействии	1641.8862	1665.7730	(6), [5, 7]
2	Вклад двухпетлевой ПВ порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2$ в 1γ -взаимодействии	11.4070	11.5693	(9), (14), [5, 7]
3	Вклад ПВ и МПВ в 1γ -взаимодействии	0.0022	0.0023	(11)
4	Вклад трехпетлевой ПВ в 1γ -взаимодействии	0.0444	0.0454	(17), (18), [23, 24]
5	Поправка Вихмана – Кролла	-0.0197	-0.0199	(20), [7, 24]
6	Дополнительный вклад рассеяния света на свете	0.0064	0.0064	[7, 24]
7	Релятивистские поправки с учетом ПВ порядка $\alpha(Z\alpha)^4$ в первом порядке ТВ	-0.9099	-0.9472	(26)–(29) [12, 18]
8	Релятивистские поправки с учетом двухпетлевой ПВ порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4$ в первом порядке ТВ	-0.0036	-0.0037	(31)
9	Вклад двухпетлевой ПВ порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2$ во втором порядке ТВ	1.6773	1.7075	(38), (39)
10	Релятивистские поправки с учетом однопетлевой ПВ порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	1.4192	1.4682	(45), [12, 18]
11	Вклад трехпетлевой ПВ порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$ во втором порядке ТВ	0.0242	0.0246	(46), (47)
12	Вклад трехпетлевой ПВ порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$ в третьем порядке ТВ	0.0003	0.0003	(54), (55)
13	Релятивистские поправки с учетом двухпетлевой ПВ порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4$ во втором порядке ТВ	0.0054	0.0058	(59), (60)
14	Вклад структуры ядра порядка $(Z\alpha)^4$	-396.27 ± 4.04	-295.85 ± 2.83	(61), [5]
15	Вклад структуры ядра порядка $(Z\alpha)^5$ из 2γ -амплитуд	10.28 ± 0.10	6.61 ± 0.07	(65), [7]
16	Вклад структуры ядра с учетом ПВ в 1γ -взаимодействии порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	-1.2793 ± 0.0130	-0.9590 ± 0.0092	(69)
17	Вклад структуры ядра и ПВ во втором порядке ТВ порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	-2.0083 ± 0.0205	-1.5063 ± 0.0144	(70)
18	Вклад структуры ядра и двухпетлевой ПВ в 1γ -взаимодействии порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4$	-0.0102	-0.0076	(73)

Таблица. (продолжение)

№	Вклад в расщепление	$\Delta E(\mu \text{ }^3\text{He})^+$, мэВ	$\Delta E(\mu \text{ }^4\text{He})^+$, мэВ	Формула, ссылка
19	Вклад структуры ядра и двухпетлевой ПВ во втором порядке ТВ порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4$	-0.0242	-0.0182	Рис. 9
20	Вклад структуры ядра порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ из 2γ -амплитуд с учетом ПВ	0.2214 ± 0.0022	0.1270 ± 0.0013	(78)
21	Поправка на отдачу порядка $(Z\alpha)^4$	0.1265	0.2952	(79), [22, 31]
22	Поправка на отдачу порядка $(Z\alpha)^5$	-0.5581	-0.4330	(84), [5, 31]
23	Поправка на отдачу порядка $(Z\alpha)^6$	0.0051	0.0038	(85), [5]
24	Вклад собственной энергии мюона и мюонной ПВ	-10.8286	-11.1070	(86), (87) [5]
25	Радиационные поправки с отдачей порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ и $(Z^2\alpha)(Z\alpha)^4$	-0.0656	-0.0377	(90), [5]
26	Поправки на структуру ядра порядка $(Z\alpha)^6$, $\alpha(Z\alpha)^5$	-0.2942	-0.2361	(91), (92) [5, 11, 33]
27	Вклад мюонных формфакторов $F_1'(0)$, $F_2(0)$	-0.0299	-0.0307	(97), [5, 34]
28	Вклад собственной энергии мюона и ПВ	-0.0627	-0.0646	(99), [8, 40]
29	Вклад адронной ПВ	0.2170	0.2229	[35–37]
30	Вклад поляризуемости ядра	4.9 ± 1.0	2.47 ± 0.15	[6, 38, 39]
31	Суммарный вклад	1259.8583	1379.1107	

В итоговую таблицу вошел вклад поляризуемости α -частицы 2.47 ± 0.15 мэВ, полученный недавно в работе [39]. Еще большая теоретическая ошибка связана с поправкой на структуру ядра порядка $(Z\alpha)^4$: -295.85 ± 2.83 мэВ. Таким образом, точное измерение лэмбовского сдвига позволит найти и более точные значения зарядового радиуса α -частицы и гелиона.

Численные значения полученных поправок представлены в таблице, в ней указаны ссылки на ряд работ, в которых также были рассмотрены данные вклады (другие ссылки можно найти в обзорных работах [5–7]). В работах [7] расчеты проводились в рамках релятивистской теории Дирака и также был получен полный вклад в лэмбовский сдвиг в ионах мюонного гелия. Полные численные значения лэмбовского смещения ($2P-2S$) в ионах $(\mu \text{ }^3\text{He})^+$ и $(\mu \text{ }^4\text{He})^+$, приведенные в таблице: 1259.8583 мэВ для $(\mu \text{ }^3\text{He})^+$ и 1379.1107 мэВ для $(\mu \text{ }^4\text{He})^+$, согласуются

с точностью до десятых долей миллиэлектронвольт с результатами из [7]. Значения фундаментальных физических констант, включая зарядовые радиусы ядер гелия, используемые в нашей работе и в [7], совпадают. Полезно провести более детальное сравнение основных вкладов из таблицы и работ [7].

Рассмотрим для определенности сравнение результатов для иона $(\mu \text{ }^4\text{He})^+$, поскольку мы имеем в этом случае скорректированные результаты, полученные от Э. Бори. При вычислении эффектов поляризации вакуума в [7] учитываются релятивистские поправки. В первой и второй строках табл. 5 в последней из работ [7] приведены значения 1666.305 мэВ и 11.573 мэВ ($(\mu \text{ }^4\text{He})^+$). Чтобы сравнить эти величины с полученными нами результатами, необходимо учесть вклады из таблицы в 7 (8) и 10 (12) строках (поправки поляризации вакуума с учетом релятивистских эффектов). В сумме мы получаем 1666.2940 мэВ и 11.5714 мэВ

$((\mu \frac{4}{2}\text{He})^+)$. Отличие этих величин от 1666.305 мэВ и 11.573 мэВ может быть обусловлено эффектами отдачи, которые учтены в нашем результате. Этот результат совпадает также со значением вклада однопетлевой ПВ из [17]. Аналогичная ситуация имеет место и с результатами для $(\mu \frac{3}{2}\text{He})^+$. Полный двухпетлевой вклад ПВ из [17] равен 13.2769 мэВ $((\mu \frac{4}{2}\text{He})^+)$ и 13.0843 мэВ $((\mu \frac{3}{2}\text{He})^+)$, что с точностью до 0.002 мэВ согласуется с полученными нами результатами (строки 2, 8, 9, 13 таблицы) 13.2789 мэВ $((\mu \frac{4}{2}\text{He})^+)$ и 13.0861 мэВ $((\mu \frac{3}{2}\text{He})^+)$ (ряд двухпетлевых поправок к потенциалу Брейта был оценен приближенно). Наконец трехпетлевой вклад поляризации вакуума в [17] равен 0.074 мэВ $((\mu \frac{4}{2}\text{He})^+)$ и 0.073 мэВ $((\mu \frac{3}{2}\text{He})^+)$, что отличается от нашего полного вклада (строки 4, 11, 12 таблицы) 0.0703 мэВ $((\mu \frac{4}{2}\text{He})^+)$ и 0.0689 мэВ $((\mu \frac{3}{2}\text{He})^+)$ на тысячные доли миллиэлектронвольт. Отметим еще раз, что мы использовали частично результат из [17] для трехпетлевого вклада в 1γ -взаимодействии. Расчет релятивистских поправок с учетом электронной поляризации вакуума был выполнен в [12]. В первом и втором порядках ТВ наши результаты для релятивистских поправок с учетом ПВ совпадают со значениями $\delta E^{(1)}$ и $\delta E^{(2)}$ из табл. 1 [12] (см. (41)–(45)).

Эффекты рассеяния света на свете определяются тремя амплитудами, которые подробно исследованы в работе [24]. Поправка Вихмана–Кролла входит в таблицу отдельной строкой 5 (мы исправили численную ошибку, допущенную при ее вычислении в работе [18]). Для двух других вкладов мы используем результаты из [24] для иона мюонного гелия, которые входят в строку 6 таблицы.

Полезно также сравнить полную величину поправки на структуру ядра, поскольку в работах [7] выделен полный коэффициент в слагаемом, пропорциональном r_α^2 . Результат [7] равен $-298.706 + 6.591 + 0.055 + 0.0148 = -292.045$ мэВ, а соответствующая сумма поправок, полученная нами, имеет вид $-295.848 + 6.605 - 0.960 - 1.506 - 0.236 = -291.941$ мэВ. В этом случае имеется небольшое различие 0.1 мэВ. Заметим, что мы используем такие же значения зарядового радиуса ядра гелия и гауссову параметризацию формфакторов, что и в [7]. При появлении более точных значений зарядовых радиусов ядер гелия все поправки на структуру ядра без труда пересчитываются по приведенным в тексте общим формулам.

Вклад двухпетлевых поправок в мюонные формфакторы $F'_1(0)$ и $F_2(0)$ (электронные петли) представлен в строке 27 таблицы. Другая часть двухпетлевых вкладов с мюонными петлями, а также

мюонной поляризацией вакуума определяется формулами (86), (87) в отличие от последней из работ [7], в которой используются суммарные выражения для формфакторов $F'_1(0)$ и $F_2(0)$. Сумма поправок $-11.1070 - 0.0307 = -11.1377$ мэВ (строки 24 и 27) очень близка к результату $-11.1057 - 0.0347 = -11.1404$ мэВ из [7].

В строке 28 таблицы представлен вклад собственной энергии мюона с учетом эффектов поляризации вакуума, который определяется в логарифмическом приближении формулой (98) [8]. Первоначальная оценка этого вклада была получена по этой формуле. Недавно в работе [40] было выполнено новое более точное вычисление этого вклада, и именно оно представлено в таблице.

Подчеркнем в заключение, что в данной работе мы представили подробное вычисление различных вкладов в лэмбовский сдвиг в ионах мюонного гелия и получили полные численные значения сдвигов, которые можно использовать для сравнения с экспериментальными данными. При этом мы учитывали результаты расчетов многих авторов различных сложных эффектов, которые также представлены в суммарной таблице. Имеющееся отличие наших полных вкладов от результатов [7] (для мюонного гелия $(\mu \frac{4}{2}\text{He})^+$ оно составляет 0.1 мэВ) может быть обусловлено эффектами отдачи, которые всегда присутствуют в поправках различного порядка по α и систематически учитываются в нашем вычислении, а также учетом поправок более высокого порядка в данной работе. Теоретические неопределенности, связанные со значениями фундаментальных физических констант малы, поэтому в таблице они не указаны. Главные теоретические погрешности, связанные с эффектами структуры и поляризуемости ядер гелия, явно выписаны в таблице. Величина погрешности в (61) такова, что измерение лэмбовского смещения ($2P-2S$) в ионах мюонного гелия с точностью 0.1 мэВ позволит извлечь на порядок более точное значение зарядовых радиусов гелиона и α -частицы — с точностью 0.001 фм.

Авторы благодарны Ф. Коттману и Э. Бори за ценную информацию о результатах экспериментов коллаборации CREMA, критические замечания и полезные обсуждения различных вопросов, связанных с расчетом уровней энергии мюонных атомов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-02-00173) и Министерства образования и науки РФ в рамках Программы повышения конкурентоспособности 2013–2020.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. J. Mohr, B. N. Taylor, and D. B. Newell, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1533 (2012).
2. С. Г. Каршенбойм, УФН **183**, 935 (2013); S. G. Karshenboim, *Ann. Phys. (Berlin)* **525**, 472 (2013).
3. R. Pohl, A. Antognini, F. Nez et al., *Nature* **466**, 213 (2010); A. Antognini, F. Biraben, J. M. R. Cardoso et al., *Can. J. Phys.* **89**, 47 (2011); A. Antognini et al., *Science* **339**, 417 (2013); R. Pohl, R. Gilman, G. A. Miller, and K. Pachucki, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **63**, 175 (2013).
4. T. Nebel, F. D. Amaro, A. Antognini et al., *Hyperfine Int.* **212**, 195 (2012); A. Antognini, F. Kottmann, F. Biraben et al., *Ann. Phys.* **331**, 127 (2013).
5. M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, *Phys. Rep.* **342**, 62 (2001); *Theory of Light Hydrogenic Bound States*, Springer Tracts Mod. Phys., V. 222, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2007).
6. E. Borie, *Z. Phys. A* **275**, 347 (1975); E. Borie and G. A. Rinker, *Phys. Rev. A* **18**, 324 (1978); *Rev. Mod. Phys.* **54**, 67 (1982).
7. E. Borie, *Phys. Rev. A* **72**, 052511 (2005); *Phys. Rev. A* **71**, 032508 (2005); *Ann. Phys. (N. Y.)* **327**, 733 (2012).
8. K. Pachucki, *Phys. Rev. A* **54**, 1994 (1996); *Phys. Rev. A* **60**, 3593 (1999); *Phys. Rev. Lett.* **106**, 193007 (2011); A. Veitia and K. Pachucki, *Phys. Rev. A* **69**, 042501 (2004).
9. I. B. Khriplovich and A. I. Milstein, *ЖЭТФ* **125**, 205 (2004) [*JETP* **98**, 181 (2004)]; A. И. Мильштейн, С. С. Петросян, И. Б. Хриплович, *ЖЭТФ* **109**, 1146 (1996) [A. I. Milstein, I. B. Khriplovich, and S. S. Petrosyan, *JETP* **82**, 616 (1996)].
10. C. E. Carlson, V. Nazaryan, and K. Griffioen, *Phys. Rev. A* **83**, 042509 (2011); C. E. Carlson, V. Nazaryan, and K. Griffioen, *Phys. Rev. A* **78**, 022517 (2008); C. E. Carlson and M. Vanderhaeghen, *Phys. Rev. A* **84**, 020102(R) (2011); C. E. Carlson, M. Gorchtein, and M. Vanderhaeghen, *Phys. Rev. A* **89**, 022504 (2014).
11. J. L. Friar, *Ann. Phys.* **122**, 151 (1979); J. L. Friar, J. Martorell, and D. W. L. Sprung, *Phys. Rev. A* **56**, 4579 (1997); J. L. Friar and G. L. Payne, *Phys. Lett. B* **618**, 68 (2005); J. L. Friar, *Phys. Rev. C* **88**, 034003 (2013).
12. U. D. Jentschura, *Ann. Phys.* **326**, 500 (2011); *Phys. Rev. A* **84**, 012505 (2011); *Eur. Phys. J. D* **61**, 7 (2011).
13. P. Indelicato, *Phys. Rev. A* **87**, 022501 (2013).
14. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ЖЭТФ* **115**, 1221 (1999); **125**, 48 (2004); R. N. Faustov and A. P. Martynenko, *Phys. Rev. A* **67**, 052506 (2003); *Phys. Atom. Nucl.* **67**, 457 (2004); А. П. Мартыненко, *ЖЭТФ* **133**, 794 (2008); **128**, 1169 (2005).
15. G. W. F. Drake and L. L. Byer, *Phys. Rev. A* **32**, 713 (1985); A. H. Gomes, V. A. Kostelecky, and A. J. Vargas, arXiv:1407:7748 [hep-ph].
16. D. Nevado and A. Pineda, *Phys. Rev. C* **77**, 035202 (2008); A. Pineda, *Phys. Rev. C* **67**, 025201 (2003); *Phys. Rev. C* **71**, 065205 (2005).
17. E. Yu. Korzinin, V. G. Ivanov, and S. G. Karshenboim, *Phys. Rev. D* **88**, 125019 (2013); S. G. Karshenboim, V. G. Ivanov, E. Yu. Korzinin, and V. A. Shelyuto, *Phys. Rev. A* **81**, 060501 (2010); С. Г. Каршенбойм, Е. Ю. Корзинин, В. Г. Иванов, *Письма ЖЭТФ* **88**, 737 (2008).
18. A. P. Martynenko, *Phys. Rev. A* **76**, 012505 (2007).
19. A. P. Martynenko, *Phys. Rev. A* **71**, 022506 (2005); *Phys. Atom. Nucl.* **69**, 1309 (2006); **71**, 125 (2008); A. A. Krutov and A. P. Martynenko, *Phys. Rev. A* **84**, 052514 (2011); А. П. Мартыненко, Е. Н. Элекина, *ЯФ* **73**, 2130 (2010); А. Р. Мартыненко, А. А. Крутов, and R. N. Shamsutdinov, *Phys. Atom. Nucl.* **77**, 786 (2014).
20. R. N. Faustov, A. P. Martynenko, G. A. Martynenko, and V. V. Sorokin, *Phys. Lett. B* **733**, 354 (2014); *Phys. Rev. A* **90**, 012520 (2014).
21. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Физматлит, Москва (2006).
22. K. Pachucki and S. G. Karshenboim, *J. Phys. B* **28**, L221 (1995).
23. T. Kinoshita and M. Nio, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 3240 (1999); *Phys. Rev. D* **60**, 053008 (1999).
24. С. Г. Каршенбойм, В. Г. Иванов, Е. Ю. Корзинин, В. А. Шелюто, *Письма ЖЭТФ* **92**, 9 (2010).
25. E. H. Wichmann and N. M. Kroll, *Phys. Rev.* **101**, 843 (1956).
26. P. J. Mohr, G. Plunien, and G. Soff, *Phys. Rep.* **293**, 228 (1998).
27. С. А. Запрягаев, Н. Л. Манаков, В. Г. Пальчиков, *Теория многозарядных ионов с одним и двумя электронами*, Энергоатомиздат, Москва (1985).
28. H. F. Nameka, *J. Chem. Phys.* **47**, 2728 (1967).

29. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматлит, Москва (2008).
30. I. Sick, Phys. Lett. B **116**, 212 (1982); D. C. Morton, Q. Wu, and G. W. F. Drake, Phys. Rev. C **73**, 034502 (2006).
31. J. R. Sapirstein and D. R. Yennie, in *Quantum Electrodynamics*, ed. by T. Kinoshita, World Sci., Singapore (1990), p. 560.
32. M. I. Eides and H. Grotch, Phys. Rev. A **55**, 3351 (1995); Phys. Rev. A **56**, R2507 (1997).
33. G. P. Lepage, D. R. Yennie, and G. W. Erickson, Phys. Rev. Lett. **47**, 1640 (1981).
34. R. Barbieri, M. Caffo, and E. Remiddi, Nuovo Cim. Lett. **7**, 60 (1973).
35. E. Borie, Z. Phys. A **302**, 187 (1981).
36. J. L. Friar, J. Martorell, and D. W. L. Sprung, Phys. Rev. A **59**, 4061 (1999).
37. R. N. Faustov and A. P. Martynenko, EPJ Direct C **6**, 1 (1999); А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, ЯФ **64**, 1358 (2001).
38. J. Bernabeu and C. Jarlskog, Nucl. Phys. B **75**, 59 (1974); G. A. Rinker, Phys. Rev. A **14**, 18 (1976).
39. C. Ji, N. N. Dinur, S. Bacca, and N. Barnea, Phys. Rev. Lett. **111**, 143402 (2013).
40. U. D. Jentschura and B. J. Wundt, Europ. Phys. J. D **65**, 357 (2011).