

НАСЫЩЕНИЕ НИЗКОПОРОГОВОЙ ДВУХПЛАЗМОННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

А. Ю. Попов, Е. З. Гусаков*

*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 9 февраля 2015 г.

Анализируется насыщение низкопороговой параметрической распадной неустойчивости электронной циклотронной волны необыкновенной поляризации, в результате развития которой в окрестности локального максимума профиля плотности плазмы возбуждаются два верхнегибридных плазмона на частотах, близких к половине частоты волны накачки. В качестве механизма насыщения этой неустойчивости используется каскадный распад дочерних верхнегибридных волн, приводящий к возбуждению вторичных верхнегибридных и нижнегибридных волн, также радиально локализованных в окрестностях соответственно локальных максимума и минимума профиля плотности плазмы.

DOI: 10.7868/S0044451015080246

1. ВВЕДЕНИЕ

Электронный циклотронный (ЭЦ) нагрев плазмы — это эффективный метод локального дополнительного нагрева электронной компоненты, который широко применяется в настоящее время в экспериментах на стеллараторах и в токамаках и планируется для использования в токамаке-реакторе ITER как для нагрева электронов плазмы, так и для контроля и подавления неоклассической тириинг-моды. Эффективность, а значит и привлекательность, этого метода базируется на использовании надежных и эффективных генераторов — гиротронов, которые позволяют возбуждать пучки ЭЦ-волн с мощностью от 100 кВт до 1 МВт в каждом. До последнего времени считалось, что традиционные методы ЭЦ-нагрева плазмы являются вполне рутинными, а распространение и поглощение необыкновенной волны на второй циклотронной гармонике и обыкновенной волны на фундаментальной гармонике предсказуемы в деталях и описываются в рамках линейной теории распространения волн.

Согласно устоявшимся представлениям [1, 2], проявление нелинейных процессов, в частности параметрических распадных неустойчивостей, в

частотном ЭЦ-диапазоне возможно лишь при бернштейновском нагреве [3–7], когда имеет место возбуждение верхнего гибридного (ВГ) резонанса. Однако в последнее время было получено много экспериментальных данных, свидетельствующих о наличии аномальных явлений, которые сопровождают распространение быстрых ЭЦ-волн в неоднородной высокотемпературной плазме и в отсутствие ВГ-резонанса. К ним относятся, во-первых, наблюдение нагрева и генерации быстрых ионов в условиях экспериментов по ЭЦ-нагреву, когда обмен энергией между электронами и ионной компонентой пренебрежимо мал [8, 9], во-вторых, эффект аномального отражения, обнаруженный в экспериментах по ЭЦ-нагреву плазмы на второй гармонике необыкновенной волны с мощностью 200–600 кВт в пучке [10, 11], который может быть интерпретирован как ее отражательная параметрическая неустойчивость.

Для объяснения этих аномальных явлений было предложено несколько теоретических моделей [12–19], развивающих стандартные теоретические представления [1, 2]. Краеугольным элементом этих моделей являлись учет немонотонности профиля плотности плазмы, наблюдаемой во всех перечисленных выше экспериментах, и полоидальной неоднородности магнитного поля в тороидальной ловушке. Причиной формирования немонотонного профи-

*E-mail: a.popov@mail.ioffe.ru

ля плотности плазмы могут служить различные физические механизмы. Среди них: аномальный конвективный вынос плазмы в результате так называемого эффекта аномального выноса электронов (electron-pump-out effect) [8] при мощном ЭЦ-нагреве, особенности удержания плазмы в локализованной турбулентной структуре, такой как филамент, блок, дрейфовый вихрь [9], или в магнитном острове [10, 11]. Ранее было показано, что в этом случае возможно возбуждение двумерно-запертых [13, 14, 16] и даже трехмерно-запертых [15, 17–19] дочерних ионных и/или электронных бернштейнских волн, что приводит к значительному снижению их энергетических потерь из области параметрического взаимодействия и возможности возбуждения низкороговой параметрической неустойчивости ЭЦ-волны.

Кроме того, недавно была показана принципиальная возможность возбуждения рассеянной назад необыкновенной волны в результате вторичного нелинейного процесса [20, 21], который сопровождается первичным параметрическим распадом волны накачки, имеющий другую природу [22–24]. Экспериментальное указание на присутствие такого первичного параметрического процесса может быть найдено в работе [25], где продемонстрировано, что наиболее интенсивное аномальное отражение от магнитного острова имеет место, когда частота ВГ-резонанса в нем слегка превосходит половину частоты волны накачки. В этих условиях возможен параметрический распад необыкновенной ЭЦ-волны на два ВГ-плазмона с близкими частотами, которые заперты в магнитном острове в радиальном направлении.

В настоящей работе исследована нелинейная стадия низкороговой параметрической распадной неустойчивости ЭЦ-волны необыкновенной поляризации, сопровождающейся генерацией двух радиально-запертых ВГ-плазмонов. В качестве механизма насыщения неустойчивости рассматривался так называемый каскадный механизм, состоящий в последовательности распадов радиально локализованных ВГ-плазмонов на радиально локализованные вторичные ВГ-плазмоны и нижнегибридные (НГ) плазмоны. Ключевым элементом предложенного сценария является радиальная локализация вторичных волн (высокочастотной в окрестности локального максимума профиля плотности плазмы, низкочастотной в окрестности минимума профиля плотности плазмы, соседствующего с локальным максимумом), которая приводит к полному подавлению потери ими энергии из области распада в направлении неоднородности и к значительному снижению

порога возбуждения каскадного процесса. Экспериментальные наблюдения [25], говорящие о наличии в спектре аномально рассеянных волн частот, смещенных относительно частоты накачки на величину порядка НГ-частоты и ее гармоник, также свидетельствуют об исключительной важности рассмотренного механизма насыщения параметрической неустойчивости необыкновенной волны.

Здесь мы рассматриваем лишь первую ступень каскадного процесса, хотя в модели однородной плазмы (накачки) учет конечного числа ступеней каскада приводит к колебательному режиму взаимодействия первичных и вторичных дочерних волн. В рассматриваемом экспериментальном случае неоднородной накачки такая редукция оказывается продуктивной, поскольку насыщение экспоненциального роста и выход на стационарный режим в области раскачки неустойчивости возможны уже при учете первого каскада из-за выноса энергии дочерних волн из области локализации накачки, где амплитуда взаимодействующих волн достигает уровня насыщения. Этот уровень определяется условием баланса мощности, отбираемой первичной дочерней волной у волны накачки, и мощности, передаваемой вторичным волнам в результате вторичного распада. Учет следующих каскадов, которых, как свидетельствуют экспериментальные данные [10, 11, 25], может быть три–четыре, оценки уровня насыщения не меняет.

Итак, в работе численно решаются уравнения, описывающие вторичную неустойчивость первичной ВГ-волны и, как результат, насыщение двухплазмонной неустойчивости необыкновенной волны накачки. Получены асимптотические аналитические выражения, которые адекватно описывают закон нарастания первичных и вторичных дочерних волн до момента насыщения, и оценки уровня насыщения числа дочерних плазмонов. Численно определена мощность, которую волна накачки теряет в результате развития неустойчивости, и получена зависимость этой величины от мощности волны накачки.

2. ПЕРВИЧНЫЙ НИЗКОПОРОГОВЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РАСПАД НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим наиболее простую, но адекватную эксперименту по ЭЦ-нагреву плазмы в тороидальной ловушке модель двухплазмонного распада. Будем считать, что пучок необыкновенных волн с вектором поляризации, направленным преимущественно

но в полоидальном направлении y , распространяется перпендикулярно магнитному полю $\mathbf{H} \parallel \mathbf{e}_z$ в экваториальной плоскости в направлении градиента плотности плазмы (вдоль оси x):

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y \left[\frac{E_0(y, z)}{2} \sqrt{\frac{\omega_0}{ck_0(x)}} \times \exp \left(i \int^x k_0(x') dx' - i\omega_0 t \right) + \text{c.c.} \right], \quad (1)$$

где

$$E_0(y, z) = \sqrt{\frac{8\pi}{c} \frac{P_0}{\pi w^2}} \exp \left(-\frac{y^2 + z^2}{2w^2} \right) \quad (2)$$

— амплитуда поля в пучке, P_0 — мощность пучка, w — радиус пучка,

$$k_0(x) = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega_0, x)^2 - g(\omega_0, x)^2}{\varepsilon(\omega_0, x)}} \quad (3)$$

— радиальная компонента волнового вектора,

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2}, \quad g(\omega) = \frac{|\omega_{ce}|}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \quad (4)$$

— поперечные к магнитному полю компоненты тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы на частоте ω_0 , ω_{pe} и ω_{ce} — соответственно плазменная и циклотронная частоты электронов. Приведем также явный вид продольной компоненты тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы,

$$\eta(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad (5)$$

который потребуется в дальнейшем.

Рассмотрим распад волны накачки (1) на две дочерние потенциальные ВГ-волны, распространяющиеся перпендикулярно магнитному полю и описывающиеся потенциалами

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{C_1}{2} \exp(iq_y y - i\omega_1 t) \varphi_1(x) + \text{c.c.}, \\ \phi_2 &= \frac{C_2}{2} \exp(iq_y y + i\omega_2 t) \varphi_2(x) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$, $C_{1,2} = \text{const}$ и

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= \frac{1}{\sqrt{|D_{jq}(q_{jx}^+(x))|}} \exp \left(i \int^x q_{jx}^+ d\xi \right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{|D_{jq}(q_{jx}^-(x))|}} \exp \left(i \int^x q_{jx}^- d\xi \right), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

В выражении (7) радиальные компоненты волнового вектора q_x ВГ-волны являются решением локального дисперсионного уравнения [26]

$$D_{UH}(\omega_j) = l_{Tj}^2 (q_x^2 + q_y^2)^2 + \varepsilon(\omega_j) (q_x^2 + q_y^2) - \frac{\omega_j^2}{c^2} [\varepsilon(\omega_j)^2 - g(\omega_j)^2] + \eta(\omega_j) q_z^2 = 0, \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

где

$$l_{Tj}^2 = -\frac{3}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_j^2 - \omega_{ce}^2} \frac{v_{te}^2}{\omega_j^2 - 4\omega_{ce}^2},$$

v_{te} — тепловая скорость электронов. При $q_z = 0$ радиальные компоненты волнового вектора ВГ-волны имеют вид

$$\begin{aligned} q_{jx}^\pm(x) &= \frac{1}{l_{Tj}} \times \\ &\times \sqrt{-\frac{\varepsilon(x)}{2} \mp \sqrt{\frac{\varepsilon(x)^2}{4} + \frac{\omega_j^2}{4c^2} [\varepsilon(x)^2 - g(x)^2]} l_{Tj}^2 - q_y^2 l_{Tj}^2} \gg \\ &\gg q_y \end{aligned} \quad (9)$$

и вдали от ВГ-резонанса описывают «теплую» (+) и «холодную» (−) ветви дисперсионной кривой ВГ-волны. Предэкспоненциальные множители $|D_{jq}(q_{jx}^+(x))|^{-1/2}$ и $|D_{jq}(q_{jx}^-(x))|^{-1/2}$ в выражении для потенциала (7), где

$$\begin{aligned} D_j &\equiv D_{UH}(\omega_j), \quad D_{jq}(q_{jx}^\pm(x)) = \left. \frac{\partial D_{UH}}{\partial q_x} \right|_{\substack{\omega=\omega_j \\ q_x=q_{jx}^\pm(x)}} = \\ &= 2q_{jx}^\pm(x) \{ 2l_{Tj}^2 [q_{jx}^\pm(x)^2 + q_y^2] + \varepsilon(x) \}, \end{aligned} \quad (10)$$

обеспечивают сохранение потока энергии электростатических ВГ-волн в направлении неоднородности.

Как было показано в работах [22–24], в окрестности локального максимума профиля ВГ-частоты $\omega_{UH}(x) = \sqrt{\omega_{ce}^2(x) + \omega_{pe}^2(x)}$ и магнитной поверхности, на которой ВГ-частота $\omega_{UH} = (\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2)^{1/2}$ примерно равна половине частоты волны накачки, $\omega_0/2$, обе дочерние ВГ-волны (7) могут быть радиально локализованы, причем их частоты $\omega_1 = \omega_1(m, n)$, $\omega_2(m, n) = \omega_0 - \omega_1(m, n)$ и полоидальные волновые числа $q_y = q_y(m, n)$ удовлетворяют условиям кван-

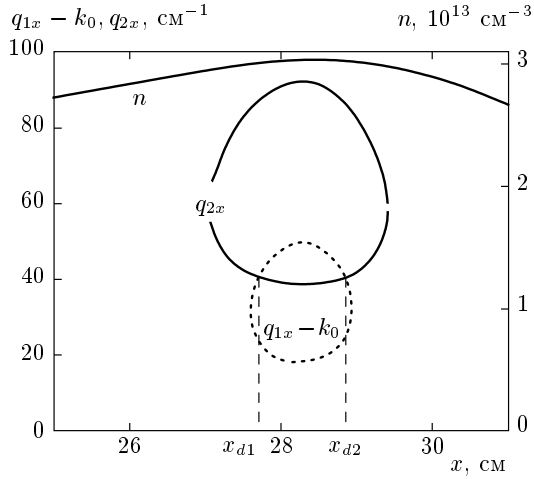


Рис. 1. Дисперсионные кривые первой дочерней ВГ-волны, смещенные вниз на величину радиального волнового вектора необыкновенной волны, $q_{1x} - k_0$ (штриховая линия) и второй дочерней ВГ-волны (сплошная линия). В точках $x_{d1,2}$ пересечения сплошной и штриховой линий выполнены распадные резонансные условия $k_0(x_{d1,2}) - q_{1x}(x_{d1,2}) + q_{2x}(x_{d1,2}) = 0$. Условия эксперимента: $T_e = 500$ эВ, $\omega_0/2\pi = 140$ ГГц, $R_0 = 175$ см — большой радиус токамака, $2\omega_{ce}(x_{ECR}) = \omega_0$, $x_{ECR} = -28$ см — радиус, на котором выполняются условия ЭЦ-резонанса, $q_y(m, n) = 0.02$ см⁻¹, $q_z = 0$, $\omega_1(m, n)/2\pi = 70.18$ ГГц, $[\omega_0 - \omega_1(m, n)]/2\pi = 69.82$ ГГц, $m = 14$, $n = 33$. Приведен также профиль плотности (сплошная линия n) [27, 28]

тования Бора–Зоммерфельда

$$\int_{x_{1l}^*}^{x_{1r}^*} q_{1x}^+(\omega_1, q_y, \xi) d\xi + \int_{x_{1r}^*}^{x_{1l}^*} q_{1x}^-(\omega_1, q_y, \xi) d\xi = 2\pi \left(m + \frac{1}{2} \right),$$

$$\int_{x_{2l}^*}^{x_{2r}^*} q_{2x}^+(\omega_0 - \omega_1, q_y, \xi) d\xi + \int_{x_{2r}^*}^{x_{2l}^*} q_{2x}^-(\omega_0 - \omega_1, q_y, \xi) d\xi = 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Две пары координат, (x_{1l}^*, x_{1r}^*) и (x_{2l}^*, x_{2r}^*) , в резонансных условиях (11) являются решениями уравнений $D_{1q}(x_{1l,r}^*) = 0$ и $D_{2q}(x_{2l,r}^*) = 0$ и отвечают точкам поворота ВГ-волн в радиальном направлении. На рис. 1 для типичных условий экспериментов на токамаке Текстор изображены радиаль-

ный профиль плотности плазмы, измеренный в эксперименте [27, 28], и дисперсионные кривые $q_{1x}^\pm = q_{1x}^\pm(m, \omega_1, q_y, x)$ и $q_{2x}^\pm = q_{2x}^\pm(n, \omega_0 - \omega_1, q_y, x)$ двух ВГ-плазмонов с полоидальным $q_y(m, n) = 0.02$ см⁻¹ и тороидальным $q_z = 0$ волновыми числами и частотами $\omega_1(m, n)/2\pi = 70.18$ ГГц, $[\omega_0 - \omega_1(m, n)]/2\pi = 69.82$ ГГц, что соответствует радиальным модам $m = 14$ и $n = 33$.

Итак, решения (6) вместе с выражениями (7), которые для собственных мод имеют вид

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{\sqrt{L_j^+(x)}} \exp \left(i \int_{x_{ji}^*}^x q_{jx}^+ d\xi - i \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{\sqrt{L_j^-(x)}} \exp \left(i \int_{x_{ji}^*}^x q_{jx}^- d\xi + i \frac{\pi}{4} \right), \quad (12)$$

$$L_j^\pm(x) = |D_{jq}(q_{jx}^\pm(x))| \int_{x_{ji}^*}^{x_{jr}^*} d\xi \left(\frac{1}{|D_{jq}(q_{jx}^+(\xi))|} + \frac{1}{|D_{jq}(q_{jx}^-(\xi))|} \right), \quad j = 1, 2,$$

описывают невзаимодействующие ВГ-волны, которые локализованы в окрестности максимума x_{max} профиля плотности и поверхности ВГ-резонанса в радиальном направлении и распространяются в противоположных направлениях вдоль оси y с $q_z = 0$. Нормировка потенциалов (12) выбрана таким образом, чтобы

$$\int |\varphi_j(x)|^2 dx = 1.$$

В случае нелинейного взаимодействия ВГ-волн (6) в присутствии волны накачки (1) их амплитуды перестают быть постоянными, $C_{1,2} \rightarrow C_{1,2}(y, z)$. Используя нормировку амплитуд дочерних ВГ-волн и волны накачки на число плазмонов и фотонов согласно выражениям

$$a_0 = \sqrt{\frac{1}{8\pi\omega_0}} E_0, \quad a_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{16\pi} \langle D_{1,2\omega} \rangle} C_{1,2}, \quad (13)$$

где $D_{1,2\omega} = \partial D_{UH} / \partial \omega_{1,2}$, получим систему уравнений, описывающих $a_{1,2}$, в виде

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + u_{1y} \frac{\partial a_1}{\partial y} - i\Lambda_{1z} \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} = \nu_0 a_0(y, z) a_2,$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} - u_{2y} \frac{\partial a_2}{\partial y} + i\Lambda_{2z} \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} = \nu_0^* a_0^*(y, z) a_1,$$

где

$$u_{1y} = \left\langle \frac{\partial D_1}{\partial q_y} \right\rangle \frac{1}{\langle D_{1\omega} \rangle}, \quad u_{2y} = \left\langle \frac{\partial D_2}{\partial q_y} \right\rangle \frac{1}{\langle D_{2\omega} \rangle} \quad (15)$$

— усредненные по области радиальной локализации плазмонов групповые скорости, описывающие их конвективные потери в полоидальном направлении,

$$\Lambda_{1z} = \left\langle \frac{\partial^2 D_1}{2\partial q_z^2} \right\rangle \frac{1}{\langle D_{1\omega} \rangle}, \quad (16)$$

$$\Lambda_{2z} = \left\langle \frac{\partial^2 D_2}{2\partial q_z^2} \right\rangle \frac{1}{\langle D_{2\omega} \rangle}$$

— усредненные коэффициенты, описывающие «дифракционные» потери энергии соответствующих плазмонов в направлении z . Процедура усреднения, представляющая собой вычисление матричного элемента, определена следующим образом:

$$\langle f(q_{jx}) \rangle = \int_{x_{ji}^*}^{x_{jr}^*} dx \varphi_j^*(x) f \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_j(x) =$$

$$= \int_{x_{ji}^*}^{x_{jr}^*} dx \left(\frac{f(q_{jx})|_{q_{jx}^+(x)}}{|L_j^+(x)|} + \frac{f(q_{jx})|_{q_{jx}^-(x)}}{|L_j^-(x)|} \right). \quad (17)$$

Кроме того, в уравнениях (14) введены обозначения

$$\nu_0 = \frac{3\sqrt{2}\pi}{4H(x_{max})} \frac{|\omega_{ce}(x_{max})|^2 \omega_0^2}{[\omega_0^2 - \omega_{ce}^2(x_{max})] \omega_{pe}^2(x_{max})} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{ck_0(x_{max})}{\omega_0}} \frac{\sqrt{8\pi\omega_0}}{\sqrt{\langle D_{1\omega} \rangle \langle D_{2\omega} \rangle}} \times$$

$$\times \left[\frac{l_{r1} q_{1x}^+(x_{d1}) q_{2x}^-(x_{d1}) \exp \left(i\Psi(x_{d1}) - i\frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{|L_1^+(x_{d1})| |L_2^-(x_{d1})|}} + \right.$$

$$\left. + \frac{l_{r2} q_{1x}^+(x_{d2}) q_{2x}^-(x_{d2}) \exp \left(i\Psi(x_{d2}) + i\frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{|L_1^+(x_{d2})| |L_2^-(x_{d2})|}} \right] \quad (18)$$

— нелинейный матричный элемент, где

$$\Psi(x_{d1,2}) = \int_{x_{2i}^*}^{x_{d1,2}} q_{2x}^- dx + \int_{(x_{d1}+x_{d2})/2}^{x_{d1,2}} k_0 dx -$$

$$- \int_{x_{1i}^*}^{x_{d1,2}} q_{1x}^+ dx,$$

$x_{d1,2}$ — координаты двух точек, в которых выполнены распадные резонансные условия $k_0(x_{d1,2}) - q_{1x}^+(x_{d1,2}) + q_{2x}^-(x_{d1,2}) = 0$,

$$l_{r1,2} = \left| \frac{\partial}{\partial x} [k_0(x) - q_{1x}^+(x) + q_{2x}^-(x)] \right|_{x=x_{d1,2}}^{-1/2}$$

— размер соответствующего резонансного слоя, в котором возможен параметрический распад волны накачки. В силу близости параметров в двух точках распада:

$$l_{r1} \approx l_{r2},$$

$$q_{1x}^+(x_{d1}) \approx q_{1x}^+(x_{d2}), \quad q_{2x}^-(x_{d1}) \approx q_{2x}^-(x_{d2}),$$

$$|L_1^+(x_{d1})| \approx |L_1^+(x_{d2})|, \quad |L_2^-(x_{d1})| \approx |L_2^-(x_{d2})|,$$

выражение (18) может быть упрощено и приведено к виду

$$\nu_0 = \frac{3\pi |\omega_{ce}(x_{max})|^2 \omega_0^2}{[\omega_0^2 - \omega_{ce}^2(x_{max})] \omega_{pe}^2(x_{max})} \sqrt{\frac{ck_0(x_{max})}{\omega_0}} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\omega_0}}{H} \frac{q_{1x}^+(x_{d1}) q_{2x}^-(x_{d1})}{\sqrt{\langle D_{1\omega} \rangle \langle D_{2\omega} \rangle}} \times$$

$$\times 2l_{r1} \exp \left[i\Psi \left(\frac{x_{d1} + x_{d2}}{2} \right) - i\frac{\pi}{4} \right] \times$$

$$\times \cos \left[\Psi(x_{d1}) - \Psi \left(\frac{x_{d1} + x_{d2}}{2} \right) - \frac{\pi}{4} \right] \times$$

$$\times (|L_1^+(x_{d1})| |L_2^-(x_{d1})|)^{-1/2}. \quad (19)$$

Отметим, что дисперсионные кривые на рис. 1 соответствуют случаю ($\omega_1/2\pi = 70.18$ ГГц, $\omega_2/2\pi = 69.82$ ГГц, $q_y = 0.02$ см⁻¹), при котором обеспечиваются как существование собственных мод с максимально близкими частотами и минимальными конвективными потерями энергии в полоидальном направлении в силу малости полоидальной компоненты волнового вектора $u_{1,2} w / \Lambda_{1,2z} \ll 1$, так и максимальные значения инкремента [24]. Далее сфокусируем наше внимание именно на этом случае.

Итак, система уравнений (14) описывает нелинейную связь между необыкновенной волной накачки и двумя запертыми в радиальном направлении плазмонами при наличии потерь дочерних волн из области взаимодействия, которые описываются пространственными производными в левой части уравнений. При достаточном усилении дочерних плазмонов из-за нелинейного взаимодействия, описываемого правыми частями уравнений (14), даже слабая обратная связь, обеспечивающая возвращение назад части энергии этих дочерних колебаний, теряемой в результате конвекции или дифракции из области распада, является причиной возбуждения абсолютной неустойчивости волны накачки и ведет к экспоненциальному росту во времени амплитуды распадных волн. В случае конвективного выноса энергии дочерних волн из области локализации одномерно неоднородного пучка накачки в противоположных

направлениях такая абсолютная неустойчивость была впервые обнаружена Кроллом [29] при анализе вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна в фокусе лазера и затем детально изучена, в частности, Горбуновым [30]. В этих работах было показано, что при определенном размере пучка накачки потери энергии дочерних волн не компенсируют их нарастания в области сильного поля и параметрическая неустойчивость может начать носить абсолютный характер, когда нарастающие волны как бы пленяются в области сильного поля накачки.

Детальный анализ этого явления в случае учета реальной двумерной геометрии пучка накачки и более медленных потерь энергии, которые можно описать в рамках дифракционного уравнения (см. дифракционные члены в (14)), был проведен ранее [24]. В частности, было показано, что если конвективные потери энергии обоих плазмонов в поперечном направлении значительно меньше потерь их энергии в тороидальном направлении (как в рассматриваемом нами случае), то инкремент параметрической двухплазменной неустойчивости необыкновенной волны может быть представлен в виде

$$2\gamma = 2\sqrt{|\nu_0|^2 |a_0(0, 0)|^2 - \left(\frac{\pi(2\zeta+1)}{2w}\right)^4 \Lambda_z^2}, \quad (20)$$

где ζ — номер тороидальной моды. Для возбуждаемых ВГ-плазмонов, один из которых соответствует радиальной моде $m = 14$ и фундаментальной тороидальной моде, а другой — радиальной моде $n = 33$ и также фундаментальной тороидальной моде, инкремент равен $2\gamma \approx 4 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ при мощности накачки $P_0 = 600 \text{ кВт}$. При такой величине инкремента неустойчивости тепловые флуктуации на ВГ-частоте испытывают значительный рост до уровня насыщения, который определяется вторичными нелинейными эффектами.

3. КАСКАДНЫЙ РАСПАД ДОЧЕРНИХ ВЕРХНЕГИБРИДНЫХ ВОЛН

Рассмотрим насыщение двухплазменной параметрической неустойчивости необыкновенной волны каскадным распадом дочерних ВГ-волн на вторичные ВГ- и НГ-волны. Аналогичный каскадный механизм был предложен ранее для описания насыщения роста параметрической неустойчивости НГ-турбулентности в теории однородной плазмы [31, 32]. Надо отметить, что в этих работах в расчет принималось бесконечно большое число ступеней каскадного процесса, что позволяло описать перекачку энер-

гии из длинноволновой области в коротковолновую и диссипацию возбуждаемых в результате параметрического распада шумов при их индуцированном рассеянии на ионах. Учет конечного числа ступеней каскада в случае однородной плазмы, как это будет проиллюстрировано ниже, приводит не к стационарному, а к колебательному режиму взаимодействия дочерних волн.

Однако в анализируемой нами экспериментальной ситуации волна накачки существенно неоднородна в направлении внешнего магнитного поля: ширина волнового пучка составляет $\sqrt{\pi}w \approx 2 \text{ см}$, в то время как тороидальный обход для условий токамака Текстор по резонансной магнитной поверхности $q(x_{max}) = 2$ до той же точки в пространстве равен $2\pi q(x_{max})R_0 \approx 25 \text{ м}$. В этом случае, в двумерно-неоднородной плазме токамака при наличии области электронного циклотронного резонанса для ВГ-волн практически исключено возвращение назад в область параметрического взаимодействия даже части вынесенной из нее энергии, что могло бы привести к возбуждению колебательного режима взаимодействия первичных и вторичных дочерних волн. Уровень насыщения определяется условием баланса мощности, которая отбирается первичной дочерней волной у волны накачки, и мощности, которая передается вторичным волнам в результате вторичного распада.

Механизм насыщения неустойчивости, рассмотренный в настоящей работе, имеет дополнительные преимущества перед конкурирующими механизмами, поскольку порог его возбуждения может быть значительно снижен при раскочке радиально-запертых вторичных дочерних волн. Локализация вторичных ВГ-волн возможна из-за локального максимума профиля плотности плазмы в магнитном острове, в то время как к локализации НГ-волн приводит присутствие локального минимума профиля плотности плазмы вблизи острова. Этот механизм проиллюстрирован на рис. 2, где изображены дисперсионные кривые, соответствующие первичным ВГ-плазмонам, вторичным ВГ-плазмонам и НГ-плазмону в присутствии немонотонного профиля плотности [27, 28] для тех же параметров, что и на рис. 1. Отметим, что распасться может только тот первичный плазмон, дисперсионная кривая которого перекрывается в пространстве с дисперсионной кривой вторичной НГ-волны, которая, в свою очередь, радиально локализована минимумом профиля плотности. На рис. 2 этому условию соответствует первичный плазмон с частотой $\omega_2/2\pi = 69.82 \text{ ГГц}$, область радиальной локализации которого больше,

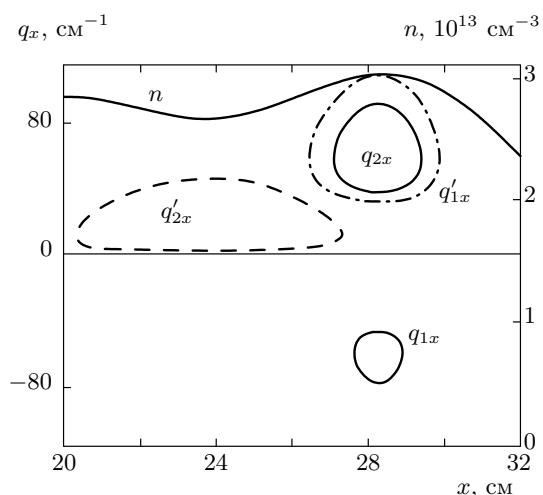


Рис. 2. Дисперсионные кривые первичных ВГ-волн (сплошные линии), q_{1x} и q_{2x} , распространяющихся в противоположных направлениях. Первичная ВГ-волна, дисперсионная кривая которой перекрывается с дисперсионной кривой НГ-волны (штриховая линия) может распасться на вторичную НГ-волну и вторичную ВГ-волну, дисперсионная кривая которой изображена штрихпунктирной линией. Параметры разряда те же, что на рис. 1. Приведен также профиль плотности (сплошная линия n) [27, 28]

чем область локализации второго плазмона, имеющего частоту $\omega_1/2\pi = 70.18$ ГГц.

Итак, в результате распада первичной дочерней волны ($\omega_2/2\pi = 69.82$ ГГц), возбуждается радиально локализованная вторичная НГ-волна ($\omega'_2/2\pi = 0.598$ ГГц), и радиально локализованная вторичная ВГ-волна ($\omega'_1/2\pi = 69.22$ ГГц). Последняя может в дальнейшем распасться на радиально локализованную НГ-волну ($\omega''_2/2\pi \leq 0.598$ ГГц) и радиально локализованную ВГ-волну ($\omega''_1/2\pi = (\omega'_1 - \omega''_2)/2\pi$).

Описанный каскад распадов возможен при сравнительно небольшой амплитуде ВГ-волн до тех пор, пока «глубина» максимума позволяет смещенной вниз по частоте возбуждаемой вторичной ВГ-волне быть радиально локализованной. На рис. 3, где изображена координатная зависимость модуля радиального волнового числа дочерних ВГ-волн, возбуждаемых в результате каскадного распада, дисперсионная кривая такой последней радиально локализованной ВГ-волны дается пунктиром. Отметим, что «глубина» эффективной потенциальной ямы для НГ-волн в случае профиля плотности плазмы, наблюдавшегося на токамаке Текстор [27, 28], невелика — частотный диапазон радиально-запертых плаз-

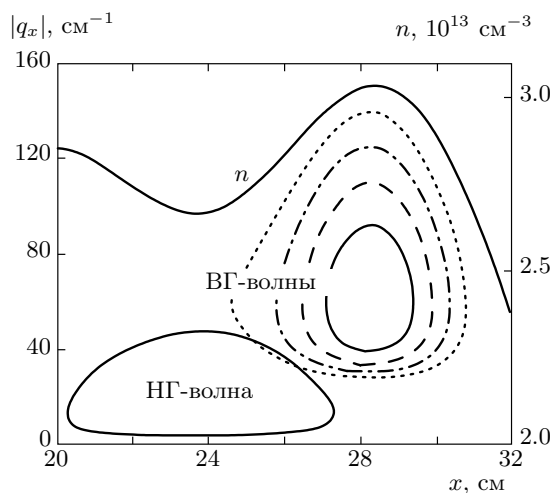


Рис. 3. Зависимости модуля радиальных компонент волновых чисел ВГ-волн и НГ-волны ($\omega'_2/2\pi = 0.598$ ГГц) от координаты. Пунктиром дана дисперсионная кривая «последней» ВГ-волны с частотой $(\omega_1 - 3\omega'_2)/2\pi = 68.026$ ГГц, которая может быть заперта локальным максимумом. Параметры разряда те же, что на рис. 1. Приведен также профиль плотности (сплошная линия n) [27, 28]

монов порядка $\Delta\omega'_2/2\pi \approx 0.03$ ГГц $\ll \omega'_2/2\pi$. По этой причине, с экспериментальной точки зрения, ВГ-волны, возбуждаемые в результате каскадного процесса, можно продолжать считать эквидистантными по частоте. Так что каждый следующий каскад, скажем для определенности k -й, приводит к возбуждению НГ-волны на одной и той же частоте $\omega'_2/2\pi = \omega_2^{(k)}/2\pi = 0.598$ ГГц. В итоге все ВГ-волны эквидистантны по частоте, причем возбуждаемая в результате k -го каскада волна имеет частоту $\omega_1^{(k)}/2\pi$, смещенную относительно первичной частоты $\omega_2/2\pi$ на величину $k\omega'_2/2\pi$.

Как будет показано ниже, насыщение экспоненциального роста амплитуды дочерних плазмонов и выход на квазистационарный режим в области раскачки неустойчивости имеет место уже при первом каскаде. Учет следующих каскадов, а их при реальных экспериментальных параметрах может быть три-четыре [10, 11, 25], этого вывода и уровня насыщения не меняет.

Далее мы проанализируем вторичную параметрическую неустойчивость одной из первичных дочерних волн, приводящую к возбуждению вторичных дочерних ВГ (индекс «1») и НГ (индекс «2») волн

$$\begin{aligned} \phi'_1(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} C'_1(y, z) \varphi'_1(x) \times \\ &\quad \times \exp(iq_y y - iq_z z + i\omega'_1 t) + \text{c.c.}, \\ \phi'_2(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} C'_2(y, z) \varphi'_2(x) \exp(iq_z z + i\omega'_2 t) + \text{c.c.}, \\ \omega'_2 &= \omega_2 - \omega'_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Потенциалы $\varphi'_1(x)$ и $\varphi'_2(x)$ даются выражением (7), где волновой вектор ВГ-волны $q'_{1x} = q'_{1x}(\omega'_1, q_y(m, n), q'_z, x)$ является решением локального дисперсионного уравнения (8), а волновой вектор НГ-волны $q'_{2x} = q'_{2x}(\omega'_2, q'_z, x)$ — решением локального дисперсионного уравнения [26] для НГ-волн,

$$D_{LH}(\omega'_2) = l'^2_{T2}(\omega'_2) q'^4_{1x} + \varepsilon(\omega'_2) q'^2_{1x} + \eta(\omega'_2) q'^2_{2z}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} l'^2_{T2}(\omega'_2) &= -\frac{3}{2} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^4} \frac{v_{te}^2}{4} + \frac{\omega_{pi}^2 v_{ti}^2}{\omega'^4_{2z}} \right), \\ \varepsilon(\omega'_2) &= 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega'^2_{2z}}, \quad \eta(\omega'_2) \approx -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega'^2_{2z}}, \end{aligned}$$

ω_{pi} и v_{ti} — соответственно плазменная частота и тепловая скорость ионов.

В окрестности локального максимума и минимума плотности плазмы ВГ- и НГ-волны могут быть локализованы в радиальном направлении. Их собственные частоты $\omega'_1 = \omega'_1(p, s)$, $\omega'_2(p, s) = \omega_2 - \omega'_1(p, s)$ и волновые векторы $q'_z = q'_z(p, s)$, как и в случае первичного параметрического распада необыкновенной волны, обеспечивают одновременное выполнение условий квантования Бора–Зоммерфельда для радиальных волновых чисел обеих вторичных дочерних волн:

$$\begin{aligned} \int_{x'_{1l}}^{x'_{1r}} q'^+_{1x}(\omega'_1, q'_z, \xi) d\xi + \int_{x'_{1r}}^{x'_{1l}} q'^-_{1x}(\omega'_1, q'_z, \xi) d\xi &= \\ = 2\pi \left(p + \frac{1}{2} \right), \\ \int_{x'_{2l}}^{x'_{2r}} q'^+_{2x}(\omega_2 - \omega'_1, q'_z, \xi) d\xi + \\ + \int_{x'_{2r}}^{x'_{2l}} q'^-_{2x}(\omega_2 - \omega'_1, q'_z, \xi) d\xi &= 2\pi \left(s + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где две пары координат, (x'_{1l}, x'_{1r}) и (x'_{2l}, x'_{2r}) , являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} D'_{1q}(\omega'_1, x'_{1l,r}) &= \left. \frac{\partial D_{UH}(x'_{1l,r})}{\partial q_x} \right|_{\substack{\omega = \omega'_1, \\ q_x = q'_{1x}(x)}} = 0, \\ D'_{2q}(\omega'_2, x'_{2l,r}) &= \left. \frac{\partial D_{LH}(x'_{2l,r})}{\partial q_x} \right|_{\substack{\omega = \omega'_2, \\ q_x = q'_{2x}(x)}} = 0 \end{aligned}$$

и отвечают точкам поворота вторичных ВГ- и НГ-волн в радиальном направлении. Потенциалы $\varphi'_1(x)$ и $\varphi'_2(x)$ этих радиально-запертых плазмонов даются выражением, аналогичным выражению (12):

$$\begin{aligned} \varphi'_j(x) &= \frac{1}{\sqrt{|L'^{\pm}_j(x)|}} \times \\ &\quad \times \exp \left(i \left[\int_{x'_{j\bar{l}}}^x q'_{jx} d\xi - \frac{\pi}{4} \right] \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{|L'^{\pm}_j(x)|}} \exp \left(i \left[\int_{x'_{j\bar{r}}}^x q'_{jx} d\xi + \frac{\pi}{4} \right] \right), \quad (24) \\ L'_j(x) &= D'_{jq}(q'_{jx}(x)) \int_{x'_{j\bar{l}}}^{x'_{j\bar{r}}} d\xi \left(\frac{1}{|D'_{jq}(q'_{jx}(\xi))|} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|D'_{jq}(q'_{jx}(\xi))|} \right), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Используя нормировку медленно меняющихся амплитуд $C'_{1,2}$ вторичных ВГ- и НГ-волн на число плазмонов,

$$a'_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{16\pi}} \langle D'_{1,2\omega} \rangle C'_{1,2}, \quad (25)$$

где $D'_{1\omega} = \partial D_{UH} / \partial \omega'_1$, $D'_{2\omega} = \partial D_{LH} / \partial \omega'_2$, получим для них систему восьми уравнений, первые четыре из которых имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial t} + u_{1y} \frac{\partial a_1}{\partial y} - i\Lambda_{1z} \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} &= \nu_0 a_0(y, z) a_2, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} - u_{2y} \frac{\partial a_2}{\partial y} + i\Lambda_{2z} \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} &= \\ &= \nu_0^* a_0^*(y, z) a_1 - \nu_1^* a'_1 a'_2, \\ \frac{\partial a'_1}{\partial t} - u'_{1y} \frac{\partial a'_1}{\partial y} + i\Lambda'_{1y} \frac{\partial^2 a'_1}{\partial y^2} + u'_{1z} \frac{\partial a'_1}{\partial z} &= \nu_1 a_0 a'_2, \\ \frac{\partial a'_2}{\partial t} + i\Lambda'_{2y} \frac{\partial^2 a'_2}{\partial y^2} - u'_{2z} \frac{\partial a'_2}{\partial z} &= \nu_1 a_2 a'_1, \end{aligned} \quad (26)$$

а вторые четыре комплексно-сопряжены уравнениям (26). В системе уравнений (26) введены новые обозначения:

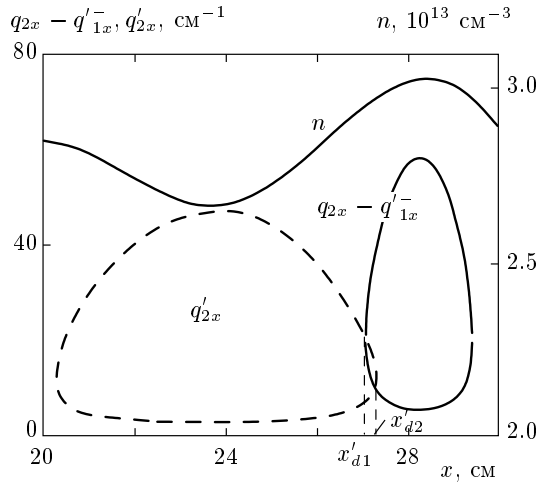


Рис. 4. Дисперсионные кривые вторичной НГ-волны $q'_{2x} = q'_{2x}(x)$ (штриховая линия) и первичной ВГ-волны $q_{2x} = q_{2x}(x)$, смещенной на величину волнового вектора вторичной $q'_{1x} = q'_{1x}(x)$, т.е. $q_{2x} - q'_{1x}$ (сплошная кривая). В точках $x'_{d1,2}$, где кривые пересекаются, выполнены условия трехволнового резонанса. Приведен также профиль плотности (сплошная линия n) [27, 28]

$$\nu_1 = \frac{2\sqrt{2}\pi c}{H\sqrt{\langle D_{1\omega} \rangle \langle D'_{1\omega} \rangle \langle D'_{2\omega} \rangle}} \frac{\omega_2 \omega'_1}{\omega_{pe} |\omega_{ce}|} \exp\left(i\frac{3\pi}{4}\right) \times$$

$$\times \left[\frac{q_{2x}^- q'_{1x} (q'_{2x})^2 l'_{r1} \exp\left(i\Psi^s(x) - i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{|L_2^-(x)| |L_1^-(x)| |L_2^+(x)|}} \right]_{x=x'_{d1}} +$$

$$+ \left[\frac{q_{2x}^- q'_{1x} (q'_{2x})^2 l'_{r2} \exp\left(i\Psi^s(x) + i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{|L_2^-(x)| |L_1^-(x)| |L_2^-(x)|}} \right]_{x=x'_{d2}} \quad (27)$$

— нелинейный матричный элемент, где H — магнитное поле,

$$\Psi^s(x'_{d1}) = \int_{x'_{2i}^*}^{x'_{d1}} q'_{2x} dx - \int_{x'_{2i}^*}^{x'_{d1}} q_{2x} dx + \int_{x'_{1i}^*}^{x'_{d1}} q'_{1x} dx,$$

$$\Psi^s(x'_{d2}) = \int_{x'_{2i}^*}^{x'_{d2}} q'_{2x} dx - \int_{x'_{2i}^*}^{x'_{d2}} q_{2x} dx + \int_{x'_{1i}^*}^{x'_{d2}} q'_{1x} dx,$$

$x'_{d1,2}$ — как уже упоминалось выше (см. также рис. 4), координаты двух точек, в которых выполнены распадные резонансные условия

$$q'_{2x}(x'_{d1,2}) - q_{2x}(x'_{d1,2}) + q'_{1x}(x'_{d1,2}) = 0,$$

величина

$$l'_{r1,2} = \left| \frac{\partial(q'_{2x}(x) - q_{2x}(x) + q'_{1x}(x))}{\partial x} \right|_{x=x'_{d1,2}}^{-1/2}$$

— размер резонансного слоя, где параметрический распад дочерней волны возможен,

$$u'_{1y} = \left\langle \frac{\partial D_{UH}(\omega'_1)}{\partial q_y} \right\rangle \frac{1}{\langle D'_{1\omega} \rangle},$$

$$\Lambda'_{1y} = \left\langle \frac{\partial^2 D_{UH}(\omega'_1)}{2\partial q_y^2} \right\rangle \frac{1}{\langle D'_{1\omega} \rangle}, \quad (28)$$

$$\Lambda'_{2y} = \left\langle \frac{\partial^2 D_{LH}(\omega'_2)}{2\partial q_y^2} \right\rangle \frac{1}{\langle D'_{2\omega} \rangle}$$

— усредненные по области радиальной локализации плазмонов групповая скорость, описывающая конвективные потери вторичной ВГ-волны в поперечном направлении, и коэффициенты, описывающие «дифракционные» потери соответствующих плазмонов в направлении y ,

$$u'_{1z} = \left\langle \frac{\partial D_{UH}(\omega'_1)}{\partial q_z} \right\rangle \frac{1}{\langle D'_{1\omega} \rangle},$$

$$u'_{2z} = \left\langle \frac{\partial D_{LH}(\omega'_2)}{\partial q_z} \right\rangle \frac{1}{\langle D'_{2\omega} \rangle} \quad (29)$$

— усредненные по области локализации плазмонов в радиальном направлении их групповые скорости, описывающие конвективные потери в тороидальном направлении, процедура усреднения определена в (17), а величины $a_{1,2}$ в (26) определяются выражением (13).

Первое и второе из уравнений (26) описывают эволюцию амплитуд первичных плазмонов. Первые члены в правой части этих уравнений описывают нелинейную связь необыкновенной волны и первичных ВГ-волн. Второй член в правой части второго уравнения, так же как и первые члены в правой части третьего и четвертого уравнений, описывающих эволюцию амплитуды вторичных плазмонов, отвечают за нелинейную связь первичной ВГ-волны и вторичных ВГ- и НГ-волн.

В следующем разделе мы численно проанализируем систему уравнений, описывающую низкопороговую двухплазменную неустойчивость необыкновенной волны и ее насыщение через вторичную параметрическую неустойчивость одного из дочерних ВГ-плазмонов.

**4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ,
ОПИСЫВАЮЩИХ НАСЫЩЕНИЕ
ДВУХПЛАЗМОННОЙ
НЕУСТОЙЧИВОСТИ
НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛНЫ**

При решении системы восьми уравнений в частных производных, первые четыре из которых — уравнения (26), а вторые четыре — уравнения, полученные из (26) комплексным сопряжением, воспользуемся стандартным пакетом Mathematica®. Будем пренебрегать потерями энергии дочерних волн в направлении y по сравнению с доминирующими потерями вдоль магнитного поля (z). Наложим «периодические» граничные условия на границах «бокса» z_B и $-z_B$ в виде

$$a_{1,2}(-z_B) = a_{1,2}(z_B), \quad a_{1,2}^*(-z_B) = a_{1,2}^*(z_B),$$

$$a'_{1,2}(-z_B) = a'_{1,2}(z_B), \quad a'^*_{1,2}(-z_B) = a'^*_{1,2}(z_B),$$

позволяющие улучшить устойчивость численной схемы. Формально это условие отражает свойство периодичности координат на магнитной поверхности. Уравнения (26) с такими граничными условиями могут описывать многократную циркуляцию ВГ-плазмонов вдоль оси магнитного острова. Следует отметить, однако, что область применимости уравнений (26) вдоль силовой линии магнитного поля ограничена, поскольку они были получены в предположении о запертости ВГ-плазмонов в радиальном направлении, которое может нарушаться из-за полоидальной неоднородности магнитного поля в токамаке. Более того, при распространении вдоль магнитного острова плазмоны будут пересекать слой электронного циклотронного резонанса и испытывать сильное поглощение, которое не учитывается нашими уравнениями. В силу сказанного физический смысл будет иметь лишь промежуточная асимптотика решений уравнений (26) на временах, много меньших времени циркуляции ВГ-плазмонов вдоль силовой линии магнитного поля.

Будем считать, что начальные условия, с которых раскачивается неустойчивость двухплазмонного распада, определяются тепловыми флуктуациями плазмы:

$$\sqrt{\langle |a_j|^2(\mathbf{r}) \rangle} = \sqrt{\frac{T_e}{\omega_j^{m,n}} \frac{1}{\pi w^2}},$$

$$\sqrt{\langle |a'_j|^2(\mathbf{r}) \rangle} = \sqrt{\frac{T_e}{\omega'_j{}^{p,s}} \frac{1}{\pi w^2}}. \tag{30}$$

Начальное распределение первичных и вторичных дочерних плазмонов будем считать однородным, а все коэффициенты, входящие в систему уравнений, константами. Вначале рассмотрим случай однородной накачки, $a_0 = \text{const}$. В этом случае с учетом однородного начального распределения взаимодействующих волн система (26) сводится к виду

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} = \nu_0 a_0 a_2,$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} = \nu_0^* a_0^* a_1 - \nu_1^* a'_1 a'_2,$$

$$\frac{\partial a'_1}{\partial t} = \nu_1 a_2 a'_2^*,$$

$$\frac{\partial a'_2}{\partial t} = \nu_1 a_2 a'_1^*. \tag{31}$$

Важные характеристики решения для случая начальной задачи (31) могут быть найдены и аналитически. В силу того, что поле накачки a_0 считается заданным, не сохраняется полная плотность энергии взаимодействующих плазмонов,

$$\frac{\partial}{\partial t} [\omega_1 |a_1|^2 + \omega_2 |a_2|^2 + \omega'_1 |a'_1|^2 + \omega'_2 |a'_2|^2] =$$

$$= \omega_0 (\nu_0 a_0 a_1^* a_2 + \nu_0^* a_0^* a_1 a_2^*). \tag{32}$$

При этом имеются следующие интегралы движения системы (31):

$$I_1 = |a'_1|^2 - |a'_2|^2,$$

$$I_2 = |a_1|^2 - |a_2|^2 - (|a'_1|^2 + |a'_2|^2)/2, \tag{33}$$

$$I_3 = \omega_2 (|a_1|^2 - |a_2|^2) - (\omega'_1 |a'_1|^2 + \omega'_2 |a'_2|^2).$$

Повысим порядок первого и второго уравнений из системы (31), проинтегрировав их по времени, что в итоге приводит к уравнениям

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial t^2} = |\nu_0|^2 |a_0|^2 a_1 - \nu_0 \nu_1^* a_0 a'_1 a'_2,$$

$$\frac{\partial^2 a_2}{\partial t^2} = [|\nu_0|^2 |a_0|^2 - |\nu_1|^2 (|a'_1|^2 + |a'_2|^2)] a_2. \tag{34}$$

Аналогично, для амплитуд вторичных дочерних плазмонов можно получить следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 a'_1}{\partial t^2} = [|\nu_1|^2 |a_2|^2 - |\nu_1|^2 |a'_2|^2] a'_1 + \nu_1 \nu_0^* a_0^* a_1 a'_2^*,$$

$$\frac{\partial^2 a'_2}{\partial t^2} = [|\nu_1|^2 |a_2|^2 - |\nu_1|^2 |a'_1|^2] a'_2 + \nu_1 \nu_0^* a_0^* a_1 a'_1^*. \tag{35}$$

В частном случае отсутствия внешнего источника, $a_0 = 0$, энергия в системе (31) сохраняется,

$$\frac{\partial}{\partial t} [\omega_1 |a_1|^2 + \omega_2 |a_2|^2 + \omega'_1 |a'_1|^2 + \omega'_2 |a'_2|^2] = 0,$$

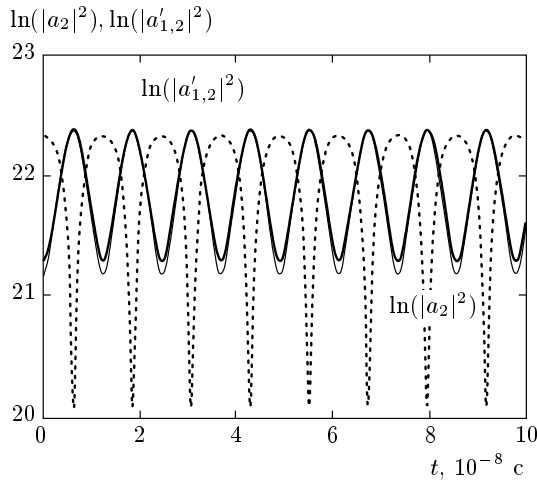


Рис. 5. Эволюция числа первичных (штрихи) и вторичных дочерних (сплошные линии) плазмонов в случае отсутствия накачки, $a_0 = 0$. Полная энергия в системе (31) в этом случае сохраняется. Решения могут быть интерпретированы как многокомпонентные кноидальные волны

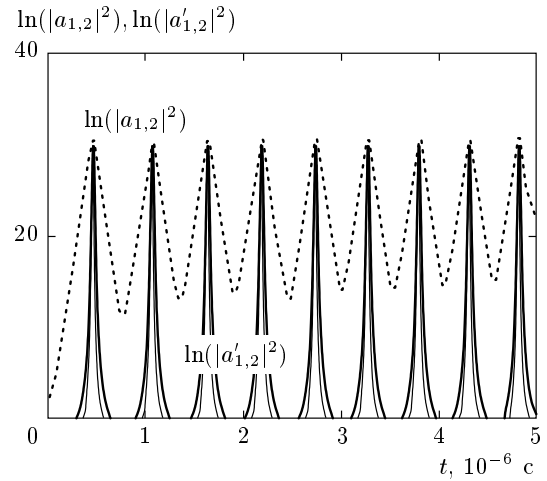


Рис. 6. Эволюция числа первичных (штрихи) и вторичных (сплошные линии) плазмонов в случае однородной накачки, $a_0 = \text{const} \neq 0$. Полная энергия в системе (31) в этом случае не сохраняется

и решение уравнений (34) и (35) можно выразить через функции Якоби и интерпретировать как многокомпонентные кноидальные волны (рис. 5). К сожалению, в случае $a_0 \neq 0$ решение уравнений (34) и (35) не может быть найдено аналитически. Численное решение исходной системы (31), результаты которого приведены на рис. 6, свидетельствует об осцилляторном режиме взаимодействия первичных и вторичных волн в присутствии однородной накачки.

Далее мы рассмотрим случай неоднородной накачки, лучше отвечающий экспериментальной ситуации. Выберем радиус пучка накачки $w = 1$ см, что соответствует условиям экспериментов на токамаке Текстор. В результате расчета для мощности $P_0 = 600$ кВт получены временные зависимости величин $\ln \langle |a_{1,2}(t)|^2 \rangle$ и $\ln \langle |a'_{1,2}(t)|^2 \rangle$, где

$$\langle \dots \rangle = \int_{-z_B}^{z_B} \frac{dz}{\sqrt{\pi w^2}} \dots \exp\left(-\frac{z^2}{w^2}\right)$$

— усреднение найденных амплитуд в пределах пучка накачки, которые приведены на рис. 7. Видно, что на первом этапе имеет место экспоненциальный рост количества первичных плазмонов. На рис. 8 в более крупном масштабе приведено сравнение полученного аналитически коэффициента усиления γt для первичной неустойчивости, где γ — инкремент (20) для фундаментальной моды $\zeta = 0$, и численно.

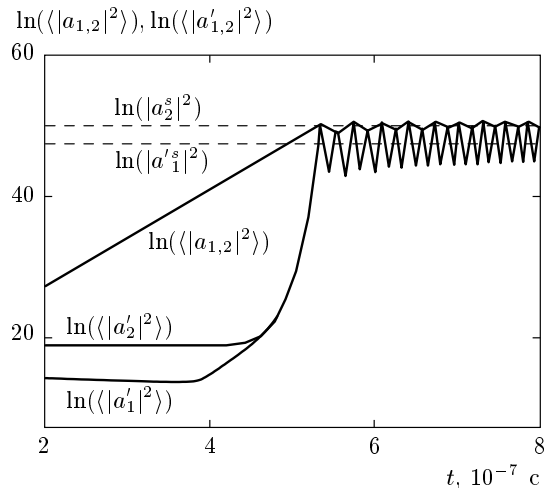


Рис. 7. Эволюция числа первичных и вторичных дочерних плазмонов. Горизонтальными штриховыми линиями изображены уровни насыщения для первичных плазмонов (41) (верхняя линия) и вторичных плазмонов (42) (нижняя линия)

Таким образом, показано, что закон роста числа первичных плазмонов от момента возбуждения двухплазменной неустойчивости необыкновенной волны до момента насыщения с хорошей точностью описывается аналитической формулой. Когда количество первичных плазмонов становится настолько большим, что оказывается превзойденным порог вторичной неустойчивости, начинается рост числа вторичных плазмонов, который в условиях

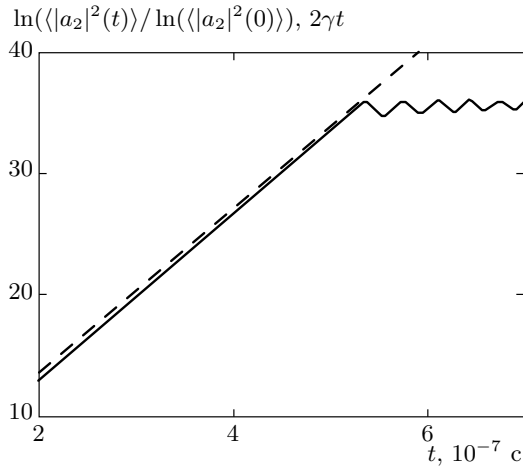


Рис. 8. Коэффициент усиления первичных волн: сплошные линии (сливаются) — численное решение $\ln(\langle |a_2|^2(t) \rangle / \langle |a_2|^2(0) \rangle)$; штриховая линия — аналитическое выражение для $2\gamma t$

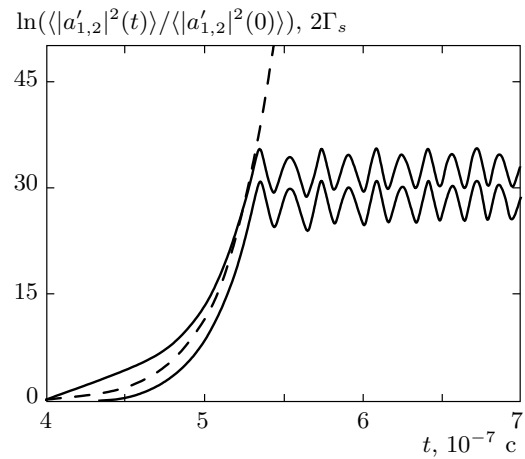


Рис. 9. Коэффициент усиления вторичных волн: сплошные линии — численное решение $\ln(\langle |a'_{1,2}|^2(t) \rangle / \langle |a'_{1,2}|^2(0) \rangle)$ (верхняя для вторичной НГ-волны, нижняя — для вторичной ВГ-волны); штриховая линия — асимптотическое выражение (36)

резко растущей амплитуды накачки оказывается сильнее, чем экспоненциальный. При значительном превышении порога вторичной неустойчивости коэффициент усиления можно оценить следующим образом:

$$\ln \left(\frac{\langle |a'_1(t)|^2 \rangle}{\langle |a'_1(0)|^2 \rangle} \right) \equiv 2\Gamma_s(t) = 2 \int_{-\infty}^t \gamma_s(t') dt' \approx 2 \frac{|\nu_1|}{|\gamma|} \sqrt{\langle |a_2(t)|^2 \rangle}. \quad (36)$$

На рис. 9 приведено сравнение аналитической оценки величины $2\Gamma_s(t)$ с данными, полученными в результате численного моделирования. Видно, что закон роста числа вторичных плазмонов на этапе от возбуждения неустойчивости до насыщения описан асимптотической формулой (36) в целом верно. Количество вторичных плазмонов растет от начала возбуждения неустойчивости до насыщения до уровня

$$\langle |a'_{1,2}|^2 \rangle \approx a'_{1,2}(0)^2 \exp \left(2 \int_{t_{th}}^{t_s} |\nu_1| \sqrt{\langle |a_2(t)|^2 \rangle} dt \right). \quad (37)$$

Основной вклад в интеграл в выражении (37) вносит верхний предел, в окрестности которого функция растет экспоненциально $\sqrt{\langle |a_2(t)|^2 \rangle} \propto \exp(|\nu_0| a_0 t)$, что позволяет приближенно вычислить

$$\int_{t_{th}}^{t_s} \sqrt{\langle |a_2(t)|^2 \rangle} dt \approx \frac{1}{|\nu_0| a_0} \sqrt{\langle |a_2(t_s)|^2 \rangle} = \frac{1}{|\nu_0| a_0} a_2^s, \quad (38)$$

где амплитуда с индексом «s» соответствует уровню насыщения. Соответственно, выражение (37) с учетом (38) имеет вид

$$\langle |a'_{1,2}|^2 \rangle \approx a'_{1,2}(0)^2 \exp \left(2 \frac{|\nu_1|}{|\nu_0|} \frac{a_2^s}{a_0} \right). \quad (39)$$

Для первичной волны уровень насыщения определим из условия баланса мощности получаемой первичной ВГ-волной и вторичной ВГ-волной:

$$2\gamma w_2^s S_2 = 2\gamma_s w_1^s S_1', \quad (40)$$

где $2\gamma = 2|\nu_0| a_0$ — инкремент первичной неустойчивости, $2\gamma_s = 2|\nu_1| a_2^s$ — инкремент вторичной неустойчивости, $w_2^s = \omega_2 |a_2^s|^2$ и $w_1^s = \omega_1 |a_1^s|^2$ — энергии соответственно первичного и вторичного плазмонов в насыщении, $S_1' = \pi w^2$ и $S_2 = \pi w^2$ — площади магнитной поверхности, на которых локализованы эти плазмоны. В итоге получим оценки для уровня насыщения первичного и вторичного плазмонов:

$$|a_2^s|^2 = \left[\frac{|\nu_0|}{|\nu_1|} a_0 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|\nu_0|}{|\nu_1|} \frac{a_0}{a'_1(0)} \sqrt{\frac{S_2}{S_1'}} \right) \right]^2, \quad (41)$$

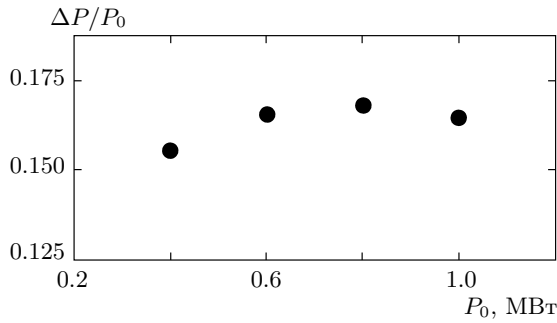


Рис. 10. Зависимость $\Delta P/P_0$ (ΔP — мощность, которую волна накачки теряет в результате развития неустойчивости (43)) от мощности волны накачки P_0 для условий разряда таких же, как на рис. 1

$$|a_1^{\prime s}|^2 = |a_0|^2 \frac{|\nu_0|^2}{|\nu_1|^2} \frac{S_2}{S_1'} \times \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|\nu_0|}{|\nu_1|} \frac{a_0}{a_1'(0)} \sqrt{\frac{S_2}{S_1'}} \right). \quad (42)$$

Оценки уровней насыщения (41) и (42) изображены на рис. 7. Видно, что эти оценки с хорошей точностью совпадают с результатом моделирования. Надо отметить, что в режиме насыщения имеют место слабые (в сравнении с однородным случаем) квазипериодические осцилляции уровня насыщения как первичных, так и вторичных плазмонов.

Далее определим численно мощность, которую волна накачки теряет в результате развития неустойчивости. Она равна

$$\Delta P = \sqrt{\pi} w \frac{\partial}{\partial t} \int_{-z_B}^{z_B} dz \int_{t-\Delta\tau/2}^{t+\Delta\tau/2} \frac{d\tau}{\Delta\tau} [\omega_1 |a_1(z, \tau)|^2 + \omega_2 |a_2(z, \tau)|^2 + \omega_1' |a_1'(z, \tau)|^2 + \omega_2' |a_2'(z, \tau)|^2], \quad (43)$$

где интегрирование по «быстрому» времени проводится в интервале $\Delta\tau$, позволяющем сгладить малые колебания уровня насыщения. На рис. 10 приведена зависимость относительных потерь мощности волной накачки от самой мощности для типичных условий разряда на токамаке Текстор (см. подпись к рис. 1). Видно, что для мощности пучка порядка 600–750 кВт можно ожидать, что около 15–16% вводимой мощности будет рассеиваться или поглощаться аномально.

Предложенная модель насыщения низкороговой двухплазменной неустойчивости необыкновенной волны может быть полезна при объяснении сложного дискретного спектра аномально рассеянной необыкновенной волны как следствия

взаимодействия первичных ВГ-волн и вторичных ВГ-волн, частота которых смещена относительно частоты первичных на величину гармоник вторичной НГ-волны.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен механизм насыщения низкорогового параметрического распада ЭЦ-волны необыкновенной поляризации. В работе получена и численно решена система уравнений, описывающих вторичную неустойчивость первичной ВГ-волны, которая, в свою очередь, влияет на эффективность первичного параметрического распада волны накачки. В отличие от модели однородной плазмы [31, 32], в рамках которой учет конечного числа ступеней каскада приводит не к стационарному, а к колебательному режиму взаимодействия волн, в рассмотренном случае неоднородной накачки насыщение экспоненциального роста первичной параметрической неустойчивости необыкновенной волны накачки и выход на стационарный режим в области ее раскачки имеет место уже при учете этого первого вторичного распада одной из дочерних волн (первой ступени каскада). Учет следующих каскадов, а их при реальных экспериментальных параметрах может быть три–четыре [10, 11, 25], не меняет этого вывода и уровня насыщения.

Получены асимптотические аналитические выражения, которые адекватно описывают закон нарастания первичных и вторичных дочерних волн до момента насыщения, и оценки для уровня насыщения числа дочерних плазмонов. В результате численно определена мощность, которую волна накачки теряет в результате развития неустойчивости и получена зависимость этой величины от мощности волны накачки. Для мощности пучка 600–750 кВт можно ожидать, что около 15–16% вводимой мощности будет рассеиваться или поглощаться аномально.

Один из соавторов (А. Ю. П.) благодарит за поддержку РФФИ (грант № 13-02-00683).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Porkolab and B. I. Cohen, Nucl. Fusion **28**, 239 (1988).
2. A. G. Litvak, A. M. Sergeev, E. V. Suvorov et al., Phys. Fluids B **5**, 4347 (1993).

3. E. Z. Gusakov and A. V. Surkov, *Plasma Phys. Control. Fusion* **49**, 631 (2007).
4. F. S. McDermott, G. Bekefi, K. E. Hackett et al., *Phys. Fluids* **25**, 1488 (1982).
5. D. G. Bulyginsky, V. V. Dyachenko, M. A. Irzak et al., *Plasma Phys. Rep.* **2**, 138 (1986).
6. H. P. Laqua, V. Erckmann, H. J. Hartfuß et al., *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3467 (1997).
7. V. Shevchenko, G. Cunningham, A. Gurchenko et al., *Fusion Sci. and Technol.* **52**, 202 (2007).
8. D. Rapisarda, B. Zurro, V. Tribaldos et al., *Plasma Phys. Control. Fusion* **49**, 309 (2007).
9. A. N. Karpushov, B. P. Duval, T. P. Goodman et al., in *Proceedings of the 33rd EPS Conference on Plasma Physics*, Rome, Italy, 19–23 June (2006), **30I** P-1.152.
10. J. W. Oosterbeek, A. Burger, E. Westerhof et al., *Rev. Sci. Instrum.* **79**, 093503 (2008).
11. E. Westerhof, S. Nielsen, J. W. Oosterbeek et al., *Phys. Rev. Lett.* **103**, 125001 (2009).
12. Е. З. Гусаков, А. Ю. Попов, *Письма в ЖЭТФ* **91**, 724 (2010).
13. E. Z. Gusakov and A. Yu. Popov, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 115003 (2010).
14. E. Z. Gusakov and A. Yu. Popov, *Nucl. Fusion* **51**, 073028 (2011).
15. Е. З. Гусаков, А. Ю. Попов, *Письма в ЖЭТФ* **94**, 301 (2011).
16. А. Ю. Попов, Е. З. Гусаков, А. Н. Савельев, *Письма в ЖЭТФ* **96**, 178 (2012).
17. E. Gusakov and A. Popov, *Europhys. Lett.* **99**, 15001 (2012).
18. E. Z. Gusakov, A. Yu. Popov, and A. N. Saveliev, *Eur. Phys. J. Web of Conf.* **32**, 01002 (2012).
19. E. Z. Gusakov, A. Yu. Popov, and A. N. Saveliev, *Plasma Phys. Control. Fusion* **56**, 015010 (2014).
20. E. Gusakov, A. Popov, A. Saveliev, and E. Sysoeva, in *Proceedings of Strong Microwaves and Terahertz Waves: Sources and Applications*, N.-Novgorod, Russia, July 24–30 (2014), p. 47.
21. A. Yu. Popov, E. Z. Gusakov, A. N. Saveliev, and E. V. Sysoeva, in *Proceedings of 25th IAEA Fusion Energy Conference (FEC 2014)*, Saint-Petersburg, Russia, 13–18 October (2014), p. .
22. E. Z. Gusakov and A. Yu. Popov, *Eur. Phys. J. Web of Conf.* **32**, 01007 (2012).
23. А. Ю. Попов, Е. З. Гусаков, *ЖЭТФ* **147**, 165 (2015).
24. A. Yu. Popov and E. Z. Gusakov, *Plasma Phys. Control. Fusion* **57**, 025022 (2015).
25. S. K. Nielsen, M. Salewski, E. Westerhof et al., *Plasma Phys. Control. Fusion* **55**, 115003 (2013).
26. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин и др., *Электродинамика плазмы*, Наука, Москва (1974).
27. M. Yu. Kantor, *Plasma Phys. Control. Fusion* **51**, 055002 (2009).
28. M. Yu. Kantor, G. Bertschinger, P. Bohm et al., in *Proceedings of the 36th EPS and Plasma. Phys. Sofia*, Bulgaria, June 29–July 3 (2009), **ECA 33D**, P1.184.
29. N. M. Kroll, *J. Appl. Phys.* **36**, 34 (1965).
30. Л. М. Горбунов, *ЖЭТФ* **67**, 1386 (1975).
31. В. Ф. Ковалев, В. В. Пустовалов, А. Б. Романов и др., *Препринт ФИАН № 177* (1975).
32. В. Ф. Ковалев, В. В. Пустовалов, А. Б. Романов и др., *Письма в ЖТФ*, 1009 (1975).