

РАДИАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ ИОНОВ ЛАЗЕРНЫМ ИМПУЛЬСОМ В ПЛАЗМЕННОМ КАНАЛЕ

В. Ф. Ковалев^{a,c}, В. Ю. Быченков^{b,c}*

^a *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук
125047, Москва, Россия*

^b *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

^c *Центр фундаментальных и прикладных исследований, ВНИИА, Росатом
127055, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 октября 2014 г.

Построено приближенное аналитическое решение задачи Коши для системы кинетических уравнений электрон-ионной плазмы, описывающих ускорение ионов и бесстолкновительный нагрев электронов под действием радиальной поперечной силы лазерного пучка, распространяющегося в прозрачной плазме газовой или иной малоплотной мишени. В условиях, когда дебаевский радиус электронов r_{De} оказывается существенно меньше, чем характерный масштаб локализации L лазерного пучка по радиусу, $\varepsilon = r_{De}/L \ll 1$, это решение находится в результате группового преобразования, задаваемого оператором приближенных ренормгрупповых симметрий по малым параметрам ε и $\mu = \sqrt{Zm/M}$, начальных функций распределений частиц. Для осесимметричной геометрии лазерного пучка получены временные и пространственные зависимости функций распределения частиц и найдены их интегральные характеристики, такие как плотность, средняя скорость, температура и энергетический спектр. Аналитически описаны формирование цилиндрического каспа плотности и локализованный нагрев электронов на границе лазерного канала.

DOI: 10.7868/S0044451015070019

1. ВВЕДЕНИЕ

Со времени публикации работы Гуревича, Парийской и Пятаевского [1] по разлету плазмы в вакуум задача ускорения ионов рассматривалась в самых различных постановках, включая как различную геометрию (плоскую, цилиндрическую и сферическую), так и отличающиеся физические модели описания плазмы, гидродинамические и кинетические. В основе электростатического ускорения ионов в плазме под действием лазерного излучения лежит эффект ускорения ионов полем разделения зарядов, когда электроны плазмы в результате ускорения или нагрева лазером «отрываются» от ионов. Это разделение зарядов может быть практически полным, когда электроны удалены из плазмы лазерным полем и ионы ускоряются собственным кулоновским полем

(кулоновский взрыв [2–4]), или же быть пренебрежимо малым (квазинейтральный [5, 6] или близкий к квазинейтральному [7] режим разлета). Кроме того, возможен и промежуточный вариант между такими предельными случаями (см., например, [8, 9]), что обуславливает многовариантность динамики плазмы под действием лазерного излучения.

Длительность лазерного импульса, действующего на плазму и создающего ускоряющее электрическое поле, является существенным фактором, задающим динамику частиц плазмы. При коротком импульсе, когда его длительность τ_L мала по сравнению с характерным временем ускорения ионов, для разлета плазмы типичным является адиабатический режим, характеризуемый охлаждением электронов, тепловая энергия которых, приобретенная от лазерного излучения, переходит в энергию ускоренных ионов (например, [3, 6]). В противоположном случае, когда длительность лазерного импульса значительно превосходит время ускорения ионов, обыч-

*E-mail: vfkvfkv@gmail.com

но рассматривается режим изотермического разлета с заданной тепловой энергией электронов [7–9]. Такие «классические» режимы характерны для разлета плотных (твердотельных) мишеней, тогда как в малоплотной плазме динамика ускорения ионов претерпевает существенные изменения, поскольку в значительной степени обусловлена силовым (пондеромоторным) воздействием лазерного импульса на электроны плазмы. Характерным примером служит радиальное ускорение частиц из лазерного канала (традиционно изучаемой разреженной газовой плазмы [10, 11] или плазмы малоплотных мишеней нового поколения, таких как аэрогели, пористый наноглерод и т. п.), рассмотрению которого посвящена настоящая работа.

Аналитическое описание ускорения частиц лазерным импульсом из плазменного канала, формирующегося в результате самофокусировки, представляет собой непростую задачу даже для приближенных подходов. Соответственно, изучение пространственно-временного распределения лазерно-ускоренных частиц проводится большей частью с использованием кинетического численного моделирования, как правило, методом «частица в ячейке» (PIC) [12–14]. Определенное упрощение вносит одномерная электростатическая пондеромоторная модель, описывающая динамику разлета плазмы под действием заданного радиального распределения лазерной интенсивности импульсного типа [10, 11] по радиусу плазменного канала. При этом учитывается только медленная динамика электронов плазмы, что отвечает усреднению по их быстрым осцилляциям в лазерном поле. Несмотря на упрощенность такого описания, основные результаты, полученные для электростатической пондеромоторной модели, также базируются на численном PIC-моделировании, что затрудняет предсказание зависимостей пространственно-временных и спектральных характеристик ускоренных частиц от произвольных параметров лазера и плазмы. Проведенное численное моделирование выявило два ярко выраженных эффекта: (1) в результате ускорения ионов пондеромоторной силой формируется цилиндрический касп плотности на границе лазерного канала [11], где (2) происходит сильный локальный нагрев электронов [11]. Основной целью нашей работы является аналитическое описание этих эффектов.

В настоящей работе мы предлагаем аналитическую теорию, использующую приближенные ренормгрупповые симметрии для нахождения решений кинетических уравнений для функций распределений электронов и ионов плазмы в электростатичес-

кой пондеромоторной модели. Нами уже показано, что теоретико-групповой подход является эффективным инструментом для аналитического решения задач лазерно-плазменного ускорения заряженных частиц [6, 15, 16]. В рассматриваемой модели радиального пондеромоторного ускорения частиц из лазерного канала помимо самосогласованного электрического поля плазмы в усредненном по быстрым лазерным осцилляциям кинетическом уравнении для электронов учитывается «стороннее» электрическое поле, которое задает действие радиальной пондеромоторной силы лазерного пучка на электроны плазмы. Плазма считается малоплотной, прозрачной для лазерного пучка и обратным действием плазменных полей на лазерный пучок пренебрегается.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 2 формулируются исходные уравнения для теоретического анализа процесса разлета частиц плазмы под действием пондеромоторной силы лазерного пучка. В разд. 3 с помощью теоретико-группового подхода для этих уравнений находятся точная и приближенная группы точечных преобразований, причем большая часть формул, связанных с нахождением группы, вынесена в Приложение. В разд. 4 эти группы используются для построения аналитических решений исходной начальной задачи для кинетических уравнений плазмы. В качестве примера разд. 4 содержит анализ аналитических решений на примере плазмы с начальными максвелловскими функциями распределения частиц по скоростям. Описывается ускорение ионов, сопровождающееся вытеснением плазмы из области локализации пучка с образованием области с резкими пространственными градиентами температуры и плотности плазмы на границе лазерного пучка. В разд. 5 обсуждается простая модель ускорения ионов с использованием кинетического уравнения с заданным полем. Заключительный разд. 6 посвящен обсуждению полученных результатов и подведению итогов работы.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ: ЭЛЕКТРОН-ИОННАЯ ПЛАЗМА

Рассматривается распространение цилиндрически-симметричного лазерного пучка в прозрачной плазме. Неоднородность электрического поля лазера по радиусу приводит к вытеснению электронов плазмы из области действия сильного электрического поля, т. е. к возникновению неоднородности электронной плотности, что, в свою очередь, приводит к перераспределению ионной плотности и уско-

рению ионов до высоких энергий. Динамику этого процесса можно описать с помощью кинетических уравнений для функций распределения частиц плазмы, в которых влияние электрического поля лазера учитывается в кинетическом уравнении для электронов в виде дополнительного электростатического слагаемого, задающего действие усредненной по высокой частоте лазера пондеромоторной силы [17, 18]. Учитывая симметрию лазерного пучка, распространяющегося вдоль оси z , будем рассматривать кинетические уравнения для проинтегрированных по продольной и аксиальной компонентам скоростей функций распределения частиц в цилиндрической системе координат $\{r, \varphi, z\}$ с учетом их зависимости только от времени t , радиальной координаты r и радиальной компоненты скорости частиц $v_r^{e(i)}$ соответствующего сорта. В результате приходим к следующим исходным кинетическим уравнениям для электронной и ионной функций распределения частиц плазмы¹⁾, $g(\tau, x, u)$ и $f(\tau, x, w)$:

$$\begin{aligned} \mu \partial_\tau g + \varepsilon u (\partial_x g + g/x) - (p + q - \varepsilon/x) \partial_u g &= 0, \\ \partial_\tau f + \varepsilon w (\partial_x f + f/x) + (p + \varepsilon \Gamma^2/x) \partial_w f &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь m и M — массы электронов и ионов с зарядами $e^e = -e$ и $e^i = Ze$, где Z — зарядовое число ионов; $\mu = \sqrt{Zm/M} \ll 1$, $\Gamma^2 = T_{i0}/ZT_{e0}$. В уравнениях (1) используются безразмерные переменные: безразмерное время $\tau = \omega_{Li}t$, ω_{Li} — ленгмюровская частота ионов; безразмерная координата $x = r/L$, L — масштаб локализации лазерного пучка по радиусу; безразмерная скорость электронов $u = v_r^e/V_{Te}$, $V_{Te} = \sqrt{T_{e0}/m}$, безразмерная скорость ионов $w = v_r^i/c_s$, $c_s = \sqrt{ZT_{e0}/M}$, безразмерное электрическое поле $p = \varepsilon(eEL/T_{e0})$, $\varepsilon = r_{De}/L \ll 1$ и безразмерные функции распределения $f^e = (n_{e0}/V_{Te})g$, $f^i = (n_{e0}/Zc_s)f$, $n_{e(i)0}$ — невозмущенная плотность электронов (ионов). Величина $q = \alpha \partial_x \gamma$, где $\alpha = \varepsilon(c^2/V_{Te}^2)$, c — скорость света, $\gamma = \sqrt{1 + a^2(\tau, x)}/2$, $a^2(\tau, x) = A(\tau)a_0^2 I_0(x)$ — безразмерная интенсивность лазера, $a_0 = 0.85 \cdot 10^{-9} \lambda \sqrt{I}$, где λ [мкм] — длина волны лазера, I [Вт/см²] — интенсивность лазерного импульса в максимуме, а функция $A(\tau)$ определяет форму лазерного импульса. Функция $I_0(x)$ характеризует распределение интенсивности лазерного излучения по радиусу; например, в работе [11] был проанализирован вариант $I_0(x) = \exp(-x^2)$.

¹⁾ Распределения частиц по скоростям $v_\varphi^{e,i}$ и $v_z^{e,i}$ для определенности полагаем максвелловскими с температурами электронов и ионов соответственно T_e и T_i . При отсутствии разброса по скоростям $v_\varphi^{e,i}$ следует опустить вклады, пропорциональные $\varepsilon \partial_u g$ и $\varepsilon \partial_w f$, в уравнениях (1).

Кинетические уравнения (1) следует использовать совместно с уравнениями для самосогласованного электрического поля p :

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\partial_x p + \frac{p}{x} \right) &= \int dw f - \int du g, \\ \mu \partial_\tau p &= -\mu \int dw w f + \int du u g. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) известны как система уравнения Власова–Максвелла для бесстолкновительной плазмы. Нас интересует решение задачи Коши для кинетических уравнений (1) с начальными условиями

$$g|_{\tau=0} = g_0(x, u), \quad f|_{\tau=0} = f_0(x, w), \quad (3)$$

которые определяются постановкой конкретной физической задачи. В дальнейшем рассмотрении нами будет анализироваться эволюция частиц плазмы, для которых начальные функции распределения частиц полагаются достаточно гладкими функциями (например, максвелловскими) с пространственно-однородной начальной температурой электронов T_{e0} и ионов T_{i0} и начальной плотностью электронов $n_0^e(x) = \int du g_0$ и ионов $n_0^i(x) = \int dw f_0$ с характерным пространственным масштабом L . Ниже рассматривается типичная ситуация, когда L значительно превосходит дебаевский радиус электронов $r_{De} = \sqrt{T_{e0}/4\pi n_{e0}e^2}$, т. е. $r_{De}/L \ll 1$. Заметим, что именно задание конечной исходной температуры частиц отвечает физической постановке задачи, поскольку распространяющемуся мощному лазерному импульсу, как правило, всегда предшествует длинный предимпульс, успевающий нагреть плазму к приходу основного импульса.

3. СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЙ И РЕНОРМГРУППОВАЯ СИММЕТРИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

При исследовании уравнений вида (1) стандартным является метод характеристик (см., например, [1]). Уравнения характеристик для (1) содержат электрическое поле, которое выражается через интегралы от функций распределения по скоростям с помощью уравнений (2), что затрудняет аналитическое исследование этих уравнений и заставляет прибегать к численным методам. В настоящей работе для построения решений задачи Коши (1)–(3) используется подход, основанный на использовании допускаемых уравнениями (1), (2) групп точечных симметрий (точных и приближенных) и построения с их помощью инвариантных решений. Для построения приближенного решения задачи Коши (1)–(3)

используется возможность продолжения этого решения, записанного в малой окрестности $\tau \rightarrow 0$ в виде ряда теории возмущений по степеням переменной τ , на область существенно больших значений времени $\tau \neq 0$ с помощью специальной, ренормгрупповой, симметрии. Для такого продолжения используются конечные преобразования группы, которые связывают начальные функции распределения (3) со значениями этих функций в моменты времени $\tau \neq 0$. Искомая ренормгрупповая симметрия находится как подгруппа допускаемой системой (1), (2) группы приближенных точечных преобразований Ли. Подробности ее вычисления даны в Приложении.

Как следует из формулы (70) (см. ниже), группа точных точечных преобразований уравнений (1), (2), (59) задается тремя операторами, соответствующими преобразованиям переноса по времени и растяжениям. Эта группа не обладает достаточным произволом в выборе координат ее операторов, который нужен для продолжения решения по теории возмущений с нулевыми начальными значениями средних скоростей частиц на область конечных τ , $\tau \neq 0$. Требуемый произвол реализуется при использовании операторов приближенных симметрий с координатами (72). При построении решений начальной задачи (1)–(3) требуется знание не всех операторов допускаемой группы, а только такой их линейной комбинации, которая оставляет инвариантным решение задачи по теории возмущений по степеням τ , иными словами, ренормгрупповых симметрий [19]. Следовательно, мы должны конкретизировать вид начальных функций распределения f_0 и g_0 . Пусть в начальный момент частицы имеют максвелловские распределения по скоростям:

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{n_0^e(x)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), \\ f_0 &= \frac{n_0^i(x)}{\sqrt{2\pi}\Gamma} \exp\left(-\frac{w^2}{2\Gamma^2}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

с начальными плотностями $n_0^e(x)$ и $n_0^i(x)$ и нулевыми значениями средних скоростей. Таким начальным функциям распределения соответствует следующее начальное распределение электрического поля, подчиняющегося первому из уравнений (2):

$$\varepsilon \left(\partial_x p^0(x) + \frac{p^0(x)}{x} \right) = n_0^i(x) - n_0^e(x). \quad (5)$$

Пертурбативное разложение решений задачи Коши в ряд по степеням τ дает слагаемые, пропорциональные $O(\tau)$, для электронной и ионной функций

распределения, и пропорциональные $O(\tau^2)$, — для электрического поля. Условия инвариантности для этих решений уточняют координаты (72) генератора группы (60), а именно, конкретизируют вид функции ζ и связывают начальные значения электронной и ионной плотностей с пространственной структурой электрического поля лазера при $\tau = 0$, т. е. с величиной $q^0(x) = q^0(0, x)$:

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= -\varepsilon \left(\frac{\partial_x n_0^e}{n_0^e} + \Gamma^2 \frac{\partial_x n_0^i}{n_0^i} \right), \\ p^0 &= -q^0 - \varepsilon \frac{\partial_x n_0^e}{n_0^e}. \end{aligned} \quad (6)$$

При заданном начальном распределении ионной плотности n_0^i уравнение (5) и второе из уравнений (6) образуют систему уравнений для нахождения n_0^e . Если интенсивность излучения лазера не мала, $q^0 \gg \varepsilon \partial_x n_0^e / n_0^e$, то для n_0^e можно записать приближенное выражение,

$$n_0^e(x) \approx n_0^i + \varepsilon (\partial_x q^0 + q^0/x). \quad (7)$$

В следующем разделе найденные в Приложении группы симметрий используются для нахождения решений задачи (1)–(3).

4. КОНЕЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРУППЫ И ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

4.1. Точная симметрия

Рассмотрим вначале следствия, которые возникают из использования группы точечной точной симметрии, задаваемой генераторами (70). Остановимся на двух характерных примерах.

1. Первый отвечает инвариантному решению уравнений (1), (2) и (59), которое возникает на комбинации операторов переноса X_0 и операторов растяжения X_2 из (70):

$$\begin{aligned} R_1 &= \tau_0 \partial_\tau + x \partial_x + u \partial_u + \\ &+ w \partial_w - g \partial_g + \left(p + 2\varepsilon \frac{\Gamma^2}{x} \right) \partial_p - f \partial_f. \end{aligned} \quad (8)$$

Использование инвариантов оператора (8)

$$\begin{aligned} f x &= \hat{F}, \quad g x = \hat{G}, \quad \frac{p}{x} + \frac{\varepsilon \Gamma^2}{x^2} = \hat{P}, \\ \frac{w}{x} &= \hat{\xi}, \quad \frac{u}{x} = \hat{\eta}, \quad x \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right) = \hat{\lambda} \end{aligned} \quad (9)$$

позволяет представить инвариантное решение в виде

$$f = x^{-1}\hat{F}(\hat{\lambda}, \hat{\xi}), \quad g = x^{-1}\hat{G}(\hat{\lambda}, \hat{\eta}),$$

$$p = x\hat{P}(\hat{\lambda}) - \frac{\varepsilon\Gamma^2}{x}, \quad q = x\hat{R}(\hat{\lambda}) + \frac{\varepsilon(1+\Gamma^2)}{x}. \quad (10)$$

Подстановка (10) в (1), (2) дает систему уравнений (фактор-систему) для функций \hat{F} , \hat{G} и \hat{P} , которую запишем в пренебрежении инерцией электронов, $\mu = 0$,

$$\varepsilon\hat{\eta}\hat{\lambda}\partial_{\hat{\lambda}}\hat{G} - (\hat{P} + \hat{R} + \varepsilon\hat{\eta}^2)\partial_{\hat{\eta}}\hat{G} = 0,$$

$$(\varepsilon\hat{\xi}\hat{\lambda} - 1/\tau_0)\partial_{\hat{\lambda}}\hat{F} + (\hat{P} - \varepsilon\hat{\xi}^2)\partial_{\hat{\xi}}\hat{F} = 0,$$

$$\varepsilon(\hat{\lambda}\partial_{\hat{\lambda}}\hat{P} - 2\hat{P}) = \int d\hat{\xi}\hat{F} - \int d\hat{\eta}\hat{G}, \quad (11)$$

$$\int d\hat{\eta}\hat{\eta}\hat{G} = 0.$$

Решение первого уравнения из набора (11) имеет вид

$$\hat{G} = \hat{H}(\hat{I}), \quad \hat{I} = \hat{\eta}^2\hat{\lambda}^2 + \frac{2}{\varepsilon} \int d\hat{\lambda} \frac{\hat{P} + \hat{R}}{\hat{\lambda}}, \quad (12)$$

где произвольная функция своего аргумента $\hat{H}(\hat{I})$ может быть выбрана исходя из вида функции распределения электронов по скоростям при $\tau = 0$. В частности, для максвелловской функции распределения электронов имеем $\hat{H} = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-\hat{I}/2)$.

Решение второго уравнения из набора (11) также записывается как произвольная функция от первого интеграла $\hat{F} = \hat{K}(\hat{J})$ характеристического уравнения:

$$\hat{\lambda} \left(\varepsilon\hat{\xi} - \frac{1}{\tau_0} \right) d\hat{\xi} + (\varepsilon\hat{\xi}^2 - \hat{P}) d\hat{\lambda} = 0. \quad (13)$$

Подстановка решений \hat{H} и \hat{K} в третье уравнение системы (11) дает уравнение для нахождения функции $\hat{P}(\hat{\lambda})$, в котором функции \hat{R} , \hat{H} и \hat{K} полагаются известными, и могут быть выбраны, исходя из вида функций распределения частиц и распределения интенсивности лазерного поля при $\tau = 0$.

2. В качестве второго примера рассмотрим инвариантное решение уравнений (1), (59), которое возникает на комбинации оператора переноса X_0 и оператора растяжения X_1 из (70),

$$R_2 = (\tau + \tau_0)\partial_{\tau} + \frac{x}{2}\partial_x - \frac{u}{2}\partial_u - \frac{w}{2}\partial_w -$$

$$- \frac{3g}{2}\partial_g - \left(\frac{3p}{2} - \varepsilon\frac{\Gamma^2}{x} \right) \partial_p - \frac{3f}{2}\partial_f. \quad (14)$$

Использование инвариантов оператора (14)

$$fx^3 = \check{F}, \quad gx^3 = \check{G}, \quad x^3p + \varepsilon\Gamma^2x^2 = \check{P},$$

$$xw = \check{\xi}, \quad xu = \check{\eta}, \quad \frac{x}{\sqrt{1 + \tau/\tau_0}} = \check{\lambda} \quad (15)$$

позволяет представить инвариантное решение в виде

$$f = x^{-3}\check{F}(\check{\lambda}, \check{\xi}), \quad g = x^{-3}\check{G}(\check{\lambda}, \check{\eta}),$$

$$p = x^{-3}\check{P}(\check{\lambda}) - \frac{\varepsilon\Gamma^2}{x}, \quad q = x^{-3}\check{R}(\check{\lambda}) + \frac{\varepsilon(1+\Gamma^2)}{x}. \quad (16)$$

Подстановка (16) в (1), (2) дает систему уравнений (фактор-систему) для функций F , G и P , которую запишем в пренебрежении инерцией электронов, $\mu = 0$:

$$-2\varepsilon\check{\eta}\check{G} - (\check{P} + \check{R} - \varepsilon\check{\eta}^2)\partial_{\check{\eta}}\check{G} + \varepsilon\check{\eta}\check{\lambda}\partial_{\check{\lambda}}\check{G} = 0,$$

$$-2\varepsilon\check{\xi}\check{F} + (\check{P} + \varepsilon\check{\xi}^2)\partial_{\check{\xi}}\check{F} + \check{\lambda}\partial_{\check{\lambda}}\check{F} \left(\varepsilon\check{\xi} - \frac{\check{\lambda}^2}{2\tau_0} \right) = 0, \quad (17)$$

$$\varepsilon(\check{\lambda}\partial_{\check{\lambda}}\check{P} - 2\check{P}) = \int d\check{\xi}\check{F} - \int d\check{\eta}\check{G},$$

$$\int d\check{\eta}\check{\eta}\check{G} = 0.$$

Решения первых двух уравнений имеют вид

$$\check{G} = \check{\lambda}^2\check{H}(\check{I}), \quad \check{I} = \frac{\check{\eta}^2}{\check{\lambda}^2} + \frac{2}{\varepsilon} \int d\check{\lambda} \frac{\check{P} + \check{R}}{\check{\lambda}^3},$$

$$\check{F}_{\pm} = \check{\lambda}^2 \exp \left(\pm 2 \int \frac{d\check{\lambda}}{\sqrt{4\varepsilon\tau_0^2\check{J} + \check{\lambda}^2 + 8\varepsilon\tau_0^2 \int d\check{\lambda}\check{P}/\check{\lambda}^3}} \right) \check{K}(\check{J}), \quad (18)$$

$$\check{J} = \frac{\varepsilon\check{\xi}^2}{\check{\lambda}^2} - \frac{\check{\xi}}{\tau_0} - 2 \int d\check{\lambda} \frac{\check{P}}{\check{\lambda}^3}.$$

Выбор знака в показателе экспоненты, определяющей функцию распределения ионов по скоростям, делается исходя из физической постановки задачи. Ниже для определенности будем рассматривать только положительный знак, $F = F_+$. Подстановка решений уравнений для \check{G} и \check{F} в третье уравнение (17) дает уравнение для нахождения функции $\check{P}(\check{\lambda})$. Естественно, что функции \check{R} , \check{H} и \check{K} при этом полагаются известными и могут быть выбраны из вида функций распределения частиц и распределения интенсивности лазерного поля при $\tau = 0$. Так, например, для максвелловской функции распределения электронов по скоростям и «холодных» ионов,

$$\begin{aligned} \check{H} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\check{\eta}^2}{2\check{\lambda}^2} - \frac{\Phi}{2\varepsilon}\right), \\ \Phi &= 2 \int d\check{\lambda} \frac{\check{P} + \check{R}}{\check{\lambda}^3}, \\ \check{K}(\check{J}) &= \frac{1}{\varepsilon|\tau_0|} \delta(\check{J}/\varepsilon), \end{aligned} \quad (19)$$

имеем следующее уравнение для электрического поля $\check{P}(\check{\lambda})$:

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_{\check{\lambda}} \left(\frac{\check{P}}{\check{\lambda}^2} \right) + \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int \frac{d\check{\lambda}}{\check{\lambda}^3} (\check{P} + \check{R})\right) - \\ - \frac{1}{S(\check{\lambda})} \exp\left(2 \int \frac{d\check{\lambda}}{S(\check{\lambda})}\right) = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$S(\check{\lambda}) = \sqrt{\check{\lambda}^2 + 8\varepsilon\tau_0^2 \int d\check{\lambda} \frac{\check{P}}{\check{\lambda}^3}}.$$

На уравнение (20) можно посмотреть и с другой точки зрения, а именно: его можно рассматривать не как уравнение для электрического поля $\check{P}(\check{\lambda})$, а как соотношение, задающее внешнее поле $\check{R}(\check{\lambda})$ в предположении, что электрическое поле в плазме $\check{P}(\check{\lambda})$ нам известно. По сути дела, мы приходим к обратной задаче о нахождении внешнего лазерного поля по известному полю в плазме. Соответствующая формула имеет вид

$$\begin{aligned} \check{R} &= -\check{P} - \varepsilon\check{\lambda}^3 \partial_{\check{\lambda}} \times \\ &\times \ln \left[\frac{1}{S} \exp\left(2 \int \frac{d\check{\lambda}}{S}\right) - \varepsilon \partial_{\check{\lambda}} \left(\frac{\check{P}}{\check{\lambda}^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, что поиск решения обратной задачи, т.е. построение $\check{R}(\check{\lambda})$ по известному $\check{P}(\check{\lambda})$, оказывается

существенно более простым, чем поиск $\check{P}(\check{\lambda})$ по известному $\check{R}(\check{\lambda})$ путем решения интегродифференциального уравнения (20). Этот факт дает основания надеяться, что при разумных (с физической точки зрения) пространственно-временных зависимостях $\check{P}(\check{\lambda})$ и $\check{R}(\check{\lambda})$ формулы (18), (21) позволят корректно описать динамику плазмы по крайней мере для какого-то определенного класса начальных данных.

В заключение данного раздела приведем формулы, задающие глобальные характеристики ионов и электронов плазмы для начальных распределений (19), а именно, их среднюю скорость v_{av}^i и плотность n_{av}^i, n_{av}^e :

$$\begin{aligned} v_{av}^i &= \frac{1}{2\tau_0\varepsilon} \left(1 + \frac{\tau}{\tau_0}\right)^{-1/2} V^i(\check{\lambda}), \\ n_{av}^{i(e)} &= \left(1 + \frac{\tau}{\tau_0}\right)^{-2} N^{i(e)}(\check{\lambda}), \end{aligned} \quad (22)$$

$$V^i = \check{\lambda} + S(\check{\lambda}), \quad N^i = \frac{1}{\check{\lambda}S(\check{\lambda})} \exp\left(2 \int \frac{d\check{\lambda}}{S(\check{\lambda})}\right),$$

$$N^e = N^i - \varepsilon \partial_{\check{\lambda}} (\check{P}/\check{\lambda}^2).$$

Например, выбирая $\check{P}(\check{\lambda}) = \check{\lambda}^6 \exp(-\check{\lambda}^2) P_0$, что соответствует локализованному в начальный момент электрическому полю в плазме, получим следующее выражение для функции S :

$$S(\check{\lambda}) = \sqrt{\check{\lambda}^2 + 4\varepsilon\tau_0^2 P_0 (1 - (1 + \check{\lambda}^2) \exp(-\check{\lambda}^2))}. \quad (23)$$

На рис. 1–3 приведены зависимости от переменной $\check{\lambda}$ величин V^i и $N^{e,i}$, характеризующих пространственные распределения плотности ионов и электронов, а также средней скорости ионов плазмы. В отсутствие плазменного поля, когда $S \equiv \check{\lambda}$, решения (22) отвечают радиальному разлету ионов плазменного цилиндра с постоянными в пространстве плотностями ионов и электронов и линейной по радиусу средней скоростью ионов²⁾. При наличии плазменного поля профиль ионной и электронной плотностей уже не является однородным: наибольшее его искажение происходит в области локализации электри-

²⁾ Решение (22) при $P_0 = 0$ дает монотонное убывание со временем плотности частиц, что с физической точки зрения возможно в условиях, когда это решение описывает плазменный цилиндр лишь в конечной области пространства, граница которого определяется из условия сохранения полного числа частиц. Для обсуждения влияния электрического поля лазерного пучка на ускорение ионов на конечных $\check{\lambda}$ этот факт не является принципиальным.

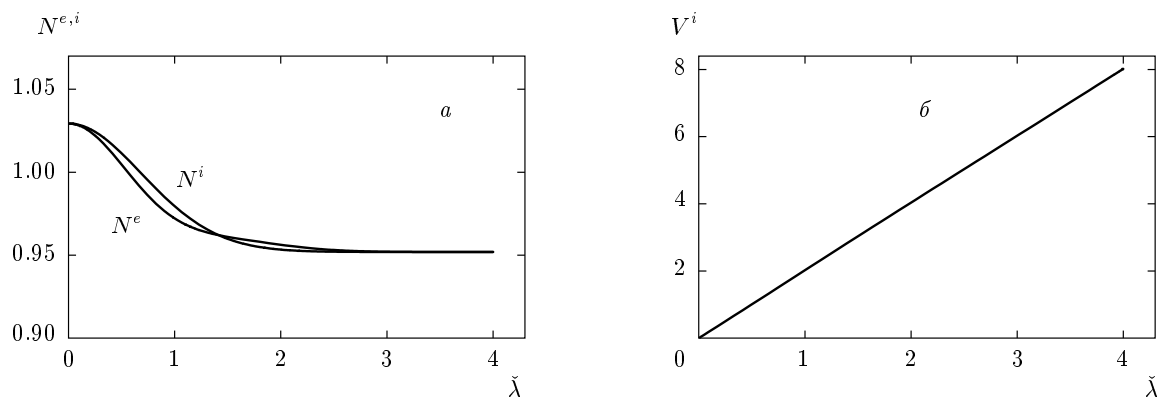


Рис. 1. Пространственные распределения по координате x плотностей электронов и ионов (а), а также средней скорости ионов (б) для $\tau_0 = 2$, $P_0 = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$

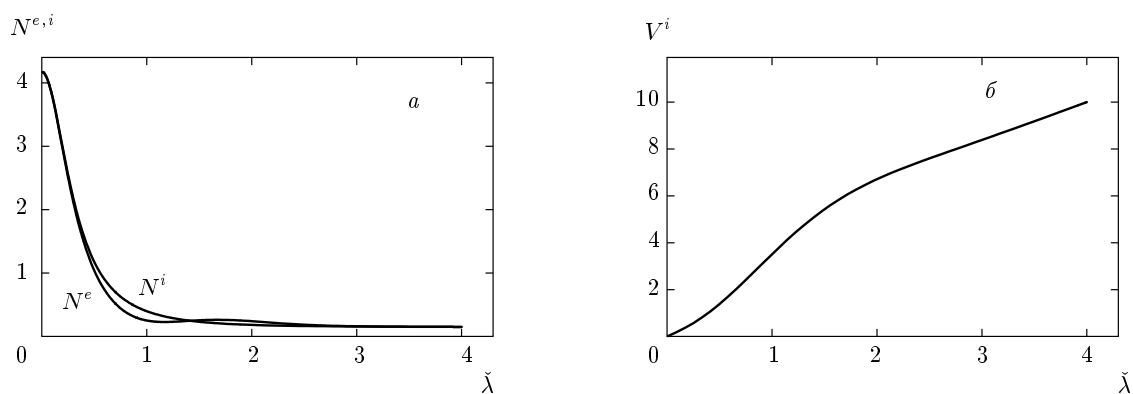


Рис. 2. Пространственные распределения по координате x плотностей электронов и ионов (а), а также средней скорости ионов (б) для $\tau_0 = 5$, $P_0 = 2$, $\varepsilon = 0.1$

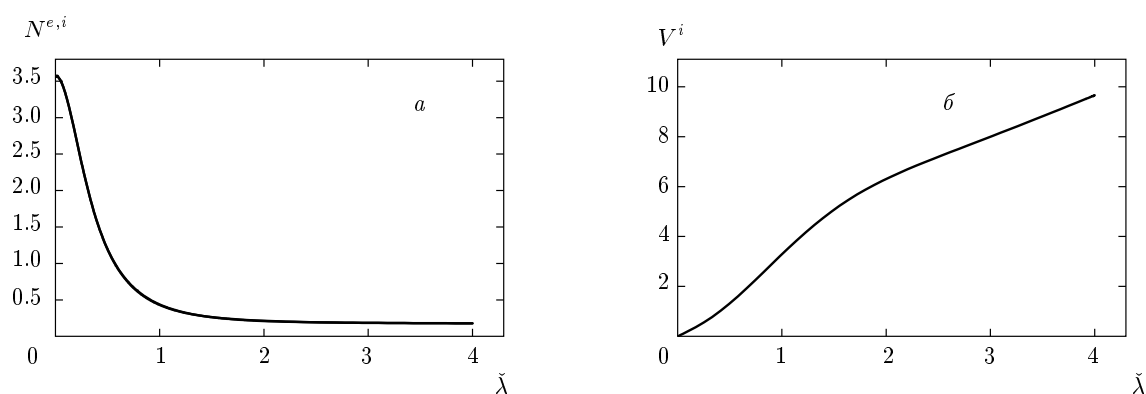


Рис. 3. Пространственные распределения по координате x плотностей электронов и ионов (а), а также средней скорости ионов (б) для $\tau_0 = 20$, $P_0 = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$

ческого поля. При этом также наблюдается дополнительное, обусловленное присутствием электрического поля, ускорение ионов плазмы. Отличие S от $\dot{\lambda}$ характеризуется величиной параметра «интегральной интенсивности» $J = \varepsilon\tau_0^2 P_0$: для малой величины этого параметра, например, $J = 0.04$ для рис. 1, профиль скорости является практически линейным, а возмущения плотности малы. Напротив, для рис. 2 и рис. 3 значения параметра «интегральной интенсивности» составляют соответственно $J = 5$ и $J = 4$, и возмущения профиля скорости ионов, обусловленные электрическим полем, также оказываются заметными. Приведенные в этом разделе точные аналитические решения позволяют оценить влияние на процесс ускорения ионов основных параметров плазмы и пучка, выраженных через τ_0 , P_0 и ε , однако обладают тем недостатком, что не позволяют задать произвольным образом начальное распределение частиц плазмы и пространственное распределение электрического поля пучка. Это оказывается возможным при использовании приближенных симметрий, которые обсуждаются в следующем разделе.

4.2. Приближенная симметрия

Приближенные решения начальной задачи (1)–(3) выражаются стандартным образом в терминах инвариантов группы (60), (71), которые возникают из решений уравнений Ли для генератора группы (60) с координатами (72) после исключения из этих решений группового параметра. Запишем соответствующие инварианты в двух случаях, первый из которых отвечает постоянному, не зависящему от времени τ электрическому полю $q = q(x)$, а второй отвечает лазерному импульсу конечной длительности.

4.2.1. Лазерный импульс большой длительности $q = q(x)$

Пусть лазерный импульс имеет достаточно крутой фронт нарастания, так что ионы плазмы практически не успевают сдвинуться за время роста интенсивности лазера до своего максимального значения. Далее интенсивность можно полагать постоянной, т. е. использовать формулы (71), в которых интенсивность q не зависит от времени. Тогда порождаемые оператором (60) с координатами (71) инварианты группы имеют вид

$$\begin{aligned}
 I_1 &= xf \equiv x' f', & I_2 &= xg \equiv x' g', \\
 I_3 &= (p + q)(\zeta - q)^3 \equiv (p' + q')(\zeta' - q')^3, \\
 I_4 &= \frac{\tau^2}{2(\zeta - q)^2} - Z(y) \equiv -Z(y'), \\
 Z(y) &= \int_{y'}^y \frac{d\xi}{(\zeta(\xi) - q(\xi))^3}, & y &= \frac{x}{\varepsilon}, \\
 I_5 &= (\zeta - q)u + \frac{\mu}{3}(4q - \zeta)(\zeta - q)^2 \sqrt{\frac{Z(y)}{2}} - \\
 &- \frac{\mu}{2} \int_{y'}^y d\xi \left[\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{Z(\xi)}} - \sqrt{2Z(\xi)} \zeta(\zeta - q) \partial_\xi(\zeta - q) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\zeta}{\sqrt{2Z(\xi)}(\zeta - q)} \right] = (\zeta' - q')u', \\
 I_6 &= (\zeta - q)w + \frac{1}{3}(4q - \zeta)(\zeta - q)^2 \sqrt{\frac{Z(y)}{2}} - \\
 &- \frac{1}{2} \int_{y'}^y d\xi \left[\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{Z(\xi)}} - \sqrt{2Z(\xi)} \zeta(\zeta - q) \partial_\xi(\zeta - q) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\zeta}{\sqrt{2Z(\xi)}(\zeta - q)} \right] = (\zeta' - q')w'.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Здесь переменные со штрихом соответствуют значениям величин при $\tau \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
 f' &= f^0(x', w'), & g' &= g^0(x', u'), \\
 p' &= p^0(x'), & q' &= q^0(x').
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Первые три инварианта, I_1 , I_2 и I_3 , по сути дела задают искомое приближенное аналитическое решение начальной задачи,

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{x'}{x} f^0(x', w'), & g &= \frac{x'}{x} g^0(x', u'), \\
 p &= -q + (p' + q')(\zeta' - q')^3 (\zeta - q)^{-3},
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

где переменные со штрихом x' , u' и w' выражаются через τ , x , u и w с помощью инвариантов I_4 , I_5 и I_6 . Для начальных распределений f_0 , g_0 и p^0 , задаваемых формулами (4), (6), решение (26) записывается в виде

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{x' n_0^i(x')}{x \sqrt{2\pi} \Gamma} \exp\left(-\frac{(\zeta' - q')^2 (w - W)^2}{2(\zeta - q)^2 \Gamma^2}\right), \\
 p &= -q - \varepsilon \frac{(\zeta' - q')^3}{(\zeta - q)^3} \frac{\partial_{x'}(n_0^e(x'))}{n_0^e(x')}, \\
 g &= \frac{x' n_0^e(x')}{x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\zeta' - q')^2 (u - U)^2}{2(\zeta - q)^2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Здесь

$$W = -\frac{1}{3}(4q - \zeta)(\zeta - q)\sqrt{\frac{Z(y)}{2}} + \frac{1}{2(\zeta - q)} \times$$

$$\times \int_{y'}^y d\xi \left[\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{Z(\xi)}} - \sqrt{2Z(\xi)}\zeta(\zeta - q)\partial_\xi(\zeta - q) + \right. \quad (28)$$

$$\left. + \frac{\zeta}{\sqrt{2Z(\xi)}(\zeta - q)} \right], \quad U = \mu W.$$

Знание функций распределения частиц (27) позволяет вычислить глобальные характеристики ионов плазмы, их среднюю скорость v_{av}^i и плотность n_{av}^i , а также температуры ионов T^i и электронов T^e ,

$$v_{av}^i = W, \quad n_{av}^i = n_0^i(x') \frac{x'(\zeta' - q')}{x(\zeta - q)}, \quad (29)$$

$$T^{i(e)} = T_0^{i(e)} \frac{(\zeta' - q')^2}{(\zeta - q)^2}.$$

Помимо формул (29), задающих пространственное распределение средней скорости ионов и их плотность, представляют интерес также формулы, определяющие энергетический спектр ускоренных ионов, N_ϵ . Он задается таким образом, что интеграл от N_ϵ по всем допустимым значениям энергий ионов $0 < \epsilon < \infty$ совпадает с полным числом ионов плазмы,

$$N_\epsilon = \pi \int_0^\infty dx x \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \times$$

$$\times [f(x, \sqrt{2\epsilon}) + f(x, -\sqrt{2\epsilon})]. \quad (30)$$

Подстановка в эту формулу решения (27) дает следующее выражение для спектральной плотности энергии ионов:

$$N_\epsilon = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \frac{1}{\Gamma} \int_0^\infty dx x' n_0^i(x') \times$$

$$\times \left[\exp\left(-\frac{(\zeta' - q')^2 (\sqrt{2\epsilon} - W)^2}{2(\zeta - q)^2 \Gamma^2}\right) + \right. \quad (31)$$

$$\left. + \exp\left(-\frac{(\zeta' - q')^2 (\sqrt{2\epsilon} + W)^2}{2(\zeta - q)^2 \Gamma^2}\right) \right].$$

При малой температуре ионов, $\Gamma^2 \ll 1$, для нахождения спектра ионов (31) можно использовать более простые формулы, основанные на асимптотических подходах к вычислению интегралов. В результате интегрирование в (31) заменяется суммированием по вкладам от отдельных «стационарных» точек, определяемых из условия $W(x_k) = \sqrt{2\epsilon}$:

$$N_\epsilon \approx \pi \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \sum_k x'_k n_0^i(x'_k) |\partial_x W|_{x=x_k}^{-1} \times$$

$$\times \left(\frac{\zeta' - q'}{\zeta - q} \right)_{|x=x_k}, \quad (32)$$

$$\partial_x W|_{x=x_k} \neq 0.$$

Выражение для спектральной плотности энергии ионов, согласно (32), имеет особенность в точке $x = x_m$, где $\partial_x W|_{x=x_m} \rightarrow 0$ (таких точек, вообще говоря, может быть несколько), и должно быть заменено на следующее:

$$N_\epsilon^m \approx \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon \Gamma}} \frac{\Gamma(1/4)}{2^{1/4}} \frac{x'_m n_0^i(x'_m)}{\sqrt{|\partial_{xx} W|_{x=x_m}}} \times$$

$$\times \left(\frac{\zeta' - q'}{\zeta - q} \right)_{|x=x_m}^{1/2}, \quad (33)$$

$$\partial_x W|_{x=x_m} = 0, \quad \partial_{xx} W|_{x=x_m} \neq 0.$$

Вне области $0 < \epsilon < \epsilon_m \equiv W(x_m)^2/2$ величина N_ϵ оказывается экспоненциально малой, т. е. ϵ_m фактически задает верхнюю границу спектра. Величина ϵ_m задается парой уравнений,

$$W(\tau, x_m) - \sqrt{2\epsilon_m} = 0, \quad \partial_x W|_{x=x_m} = 0, \quad (34)$$

которые в явном виде имеют вид

$$\left\{ \sqrt{2\epsilon_m} - \tau(\zeta - q) + \frac{1}{2(\zeta - q)} \times \right.$$

$$\times \int_{y'}^y d\xi \sqrt{2Z(\xi)}(\zeta - q) [3(2\zeta - q)\partial_\xi \zeta +$$

$$+ (2q - 5\zeta)\partial_\xi q] \left. \right\}_{|y=y_m} = 0, \quad y_m = \frac{x_m}{\epsilon},$$

$$\left\{ \tau \partial_y(\zeta - q) + \frac{\partial_y(\zeta - q)}{2(\zeta - q)^2} \int_{y'}^y d\xi \sqrt{2Z(\xi)}(\zeta - q) \times \right. \quad (35)$$

$$\times [3(2\zeta - q)\partial_\xi \zeta + (2q - 5\zeta)\partial_\xi q] + \frac{1}{2(\zeta - q)^4} \times$$

$$\times (1 + \tau^2 \partial_y(\zeta - q)) \int_{y'}^y d\xi \frac{\zeta - q}{\sqrt{2Z(\xi)}} [3(2\zeta - q)\partial_\xi \zeta -$$

$$- \frac{\tau}{2(\zeta - q)} + (2q - 5\zeta)\partial_\xi q] \times$$

$$\times [3(2\zeta - q)\partial_y \zeta + (2q - 5\zeta)\partial_y q] \left. \right\}_{|y=y_m} = 0.$$

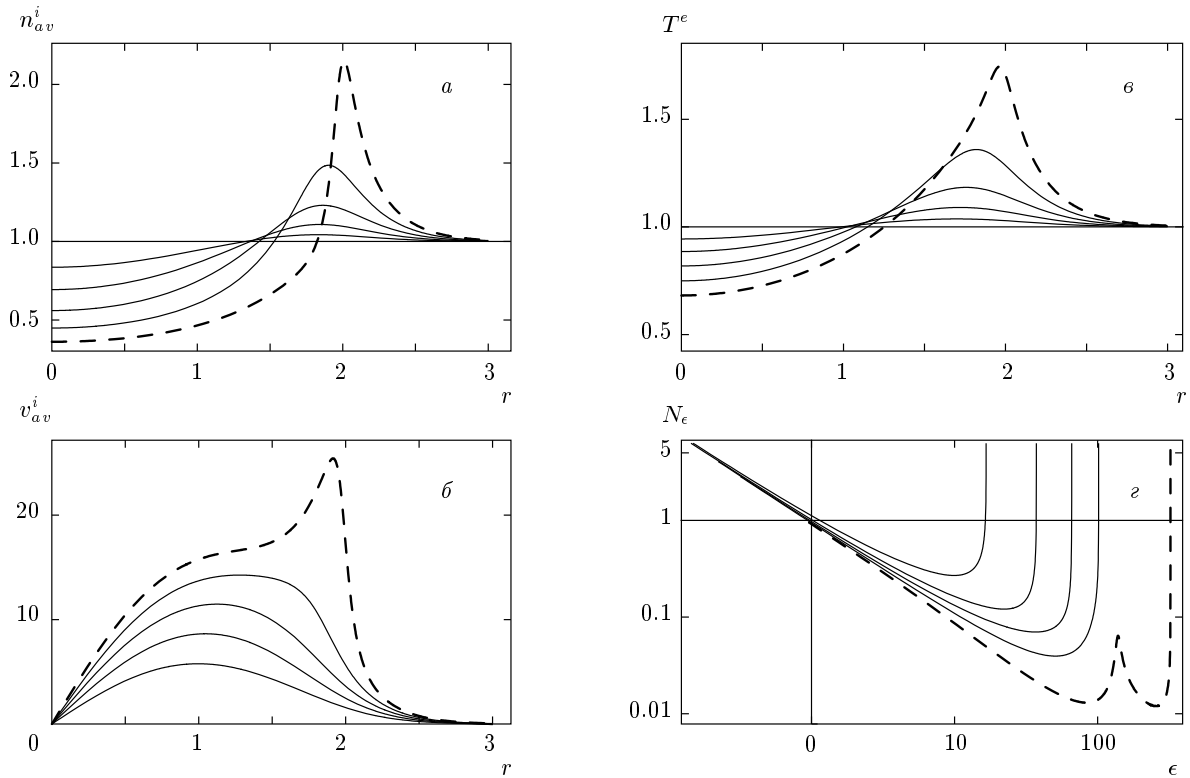


Рис. 4. Пространственные распределения по безразмерной координате r нормированной средней плотности (а), скорости (б) ионов, температуры электронов (в), а также спектр ионов (г) для стационарного лазерного пучка при различных $\tau = 2, 3, 4, 5, 6$ (росту τ соответствует переход между кривыми сверху вниз (при $r \rightarrow 0$) для а, в, снизу вверх — для б, слева направо — для кривых спектрального распределения) и при $Z = 2, A = 4, a_0^2 = 50, \alpha = 1, \varepsilon = 0.01, \mu = \sqrt{1/4000}, n^c/n_0^e = 100$ (n^c — критическая плотность), $n_0^e = 1, n_0^i = 0.5, \Gamma = 0.001$

На рис. 4 приведены кривые пространственных распределений средней скорости ионов и плотности ионов в различные моменты времени при действии стационарного лазерного излучения, когда $A(\tau) = 1$. На этих кривых видно изменение со временем τ пространственных распределений плотности и скорости ионов под действием электрического поля лазерного пучка. Ускорение ионов сопровождается образованием кэса ионной плотности с минимумом в центре лазерного пучка и максимумом на его периферии. Аналогичное поведение характерно и для температуры электронов плазмы: она понижается в центральной области лазерного пучка и растет на его периферии. Штриховые кривые при $\tau = 6$ формально находятся за границей применимости нашей теории, основанной на приближенной симметрии, и поэтому говорят лишь о тенденции в изменении плотности и скорости ионов и температуры электронов, а не об их точных количественных значениях.

Поскольку произведение $(\zeta - q)^{-3}(\zeta' - q')^3$, соглас-

но формулам (29), пропорционально $(x/x')T^e n_{av}^i$, рост плотности плазмы и температуры электронов на внешней границе лазерного пучка может приводить с увеличением τ к отличию электрического поля в плазме в этой пространственной области от поля лазерного пучка. Для параметров плазмы и пучка, соответствующих рис. 4, отличие p от $-q$ при $\tau = 6$ и $r \approx 1.95$ составляет 4%. Более существенное отличие, а именно уменьшение p более чем в два раза (по сравнению с $-q$), наблюдается при $\tau = 7$ и $r \approx 2.155$, хотя такое значение τ и находится за пределами применимости теории.

4.2.2. Лазерный импульс конечной длительности

При исследовании нестационарного лазерного импульса, интенсивность которого медленно изменяется со временем, будем считать, что она представляется в виде произведения двух функций, $q = S(x)\partial_{\tau\tau}U(\tau)$, одна из которых зависит только от

x , а другая — только от τ . Такое представление реализуется для достаточно интенсивных импульсов, когда можно считать, что $a^2 \gg 1$, поэтому можно приближенно полагать $\gamma \approx a(\tau, x)/\sqrt{2}$ (и тем более $q \gg \zeta$). Используя это свойство q , запишем соответствующие инварианты группы для $q = S\partial_{\tau\tau}U$:

$$\begin{aligned} I_1 &= xf \equiv x'f', & I_2 &= xg \equiv x'g', \\ q &= S\partial_{\tau\tau}U, & F(U) &= \partial_{\tau}U, \\ I_3 &= S^3 \left(p + \frac{q}{1+\mu^2} \right) \equiv S'^3 \left(p' + \frac{q'}{1+\mu^2} \right), \\ I_4 &= \frac{U}{S^2} + Z(y) \equiv Z(y'), \\ Z(y) &= \int_{y'}^y \frac{d\xi}{S(\xi)^3}, & y &= \frac{x}{\varepsilon}, \\ I_5 &= Su + \mu \int_{y'}^y d\xi \times \\ &\times \left[-S\partial_U F + \frac{1}{1+\mu^2} S\partial_{\xi} S(F+2U\partial_U F) \right] = S'u', \\ I_6 &= Sw + \int_{y'}^y d\xi \times \\ &\times \left[-S\partial_U F + \frac{1}{1+\mu^2} S\partial_{\xi} S(F+2U\partial_U F) \right] = S'w'. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь, как и выше, переменные со штрихом соответствуют значениям величин при $\tau \rightarrow 0$.

Формулы, задающие среднюю скорость v_{av}^i и плотность n_{av}^i ионов плазмы, а также температуру ионов (электронов) $T^{i(e)}$, имеют вид

$$\begin{aligned} v_{av}^i &= \frac{1}{S} \int_{y'}^y d\xi \times \\ &\times \left[S\partial_U F - \frac{1}{1+\mu^2} S\partial_{\xi} S(F+2U\partial_U F) \right], \\ n_{av}^i &= n_0^i(x') \frac{x'S'}{xS}, & T^{i(e)} &= T_0^{i(e)} \frac{S'^2}{S^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

На рис. 5 приведены кривые пространственного распределения средней скорости и плотности ионов и электронной температуры в различные моменты времени при действии нестационарного лазерного излучения, характеризуемого следующей, выбранной для примера зависимостью от координат и времени функций S и U :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\alpha a_0 x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \\ U(\tau) &= u_1 \left(\frac{\tau}{\tau_L}\right)^4 - u_2 \left(\frac{\tau}{\tau_L}\right)^8, \end{aligned} \quad (38)$$

что соответствует конечной длительности лазерного импульса в плазме. Из вида этих кривых следует, что при сравнительно малой длительности лазерного импульса ионы плазмы успевают ускориться до значительных скоростей, при этом изменение температуры электронов и ионной плотности оказывается несущественным. При больших длительностях лазерных импульсов картина пространственного распределения плотности и скорости ионов и температуры электронов плазмы качественно похожа на аналогичную картину для стационарного лазерного импульса.

5. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С ЗАДАНЫМ ВНЕШНИМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

Полученные в разд. 4 результаты, показывающие пространственно-временную зависимость электрического поля в плазме, свидетельствуют о том, что для обсуждаемых здесь параметров плазмы и лазерного пучка и для характерных времен ускорения ионов электрическое поле в плазме мало отличается от лазерного, за исключением области на периферии пучка, где происходит нагрев электронов и образуются области с резкими градиентами пространственных распределений плотности и электронной температуры. Если не рассматривать эти процессы, а сосредоточиться на исследовании процесса ускорения ионов, то можно попытаться использовать для этого кинетическое уравнение для ионов с заданным электрическим полем. Преимуществом такого подхода является сравнительная простота используемой математической модели и отсутствие формального ограничения для предела применимости полученных результатов по времени τ , которое имело место для приближенных инвариантно-групповых решений, приведенных в предыдущем разделе.

Рассмотрим кинетическое уравнение для ионов в заданном электрическом поле p , причем тепловое движение учитываться не будет, $\Gamma \rightarrow 0$:

$$\partial_{\tau} \tilde{f} + \varepsilon w \partial_x \tilde{f} + p \partial_w \tilde{f} = 0, \quad \tilde{f} = xf. \quad (39)$$

Наиболее просто это уравнение исследуется при не зависящем от времени электрическом поле, $p = p(x)$. В этом случае характеристики уравнения (39) инте-

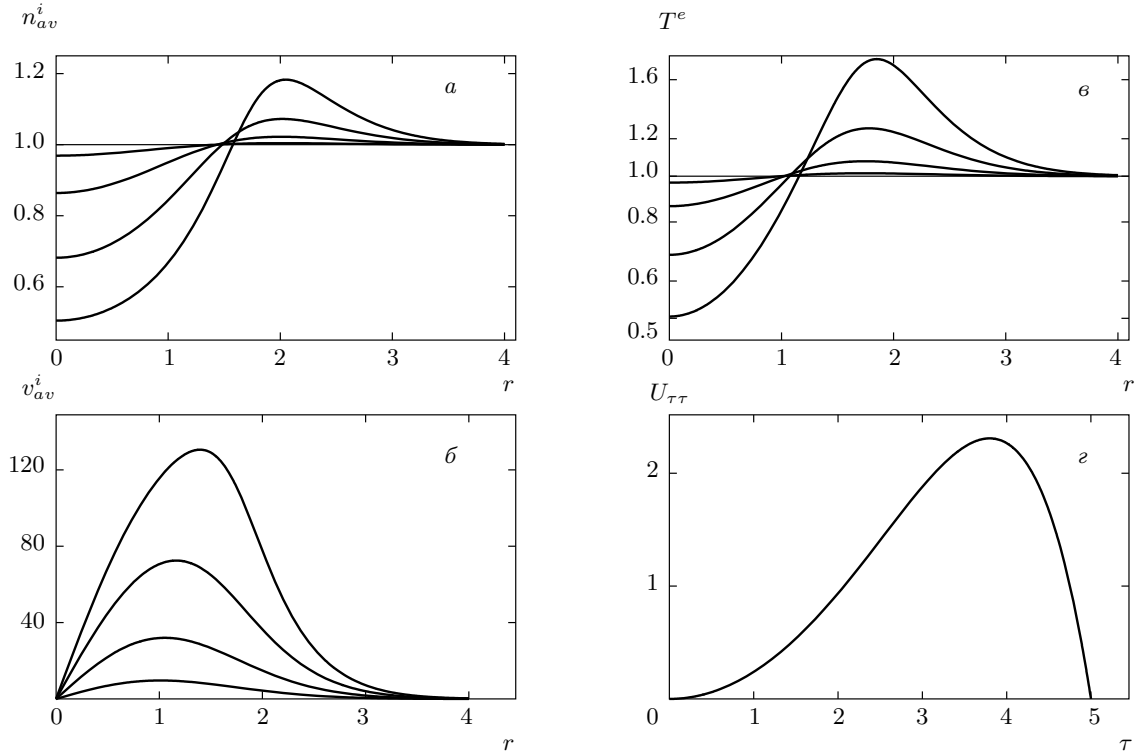


Рис. 5. Пространственные распределения по безразмерной координате r нормированной средней плотности (а) и скорости (б) ионов, а также температуры электронов (в) для нестационарного лазерного пучка при различных $\tau = 2, 3, 4, 5$ (росту τ соответствует переход между кривыми сверху вниз (при $r \rightarrow 0$) для а, в и снизу вверх — для б) при $Z = 2, A = 4, a_0^2 = 50, \alpha = 1, \varepsilon = 0.01, \mu = \sqrt{1/4000}, n^e/n_0^e = 100, n_0^e = 1, n_0^i = 0.5, \Gamma = 0.001, u_1 = 25/2, u_2 = 150/56, \tau_L = 5, z$ — зависимость от времени τ интенсивности лазерного импульса

грируются и его решение $\tilde{f} = F(j_1, j_2)$ записывается через инварианты j_1 и j_2 :

$$j_1 = \frac{\varepsilon w^2}{2} - \Phi, \quad j_2 = \tau - \int \frac{d\Phi}{\Psi(\Phi) \sqrt{2\varepsilon(j_1 + \Phi)}}, \quad (40)$$

где потенциалы Φ и $\Psi(\Phi)$ связаны неявными соотношениями:

$$p(x) = \partial_x \Phi = \Psi(\Phi). \quad (41)$$

Для понимания процесса ускорения ионов наибольший интерес представляют такие пространственные распределения электрического поля p и потенциала Φ , при которых интегралы (40) вычисляются в явном виде. Остановимся на простом примере вычисления инвариантов и записи решения кинетического уравнения (39) для локализованного по радиусу профиля распределения электрического поля

$$p = \rho \operatorname{th} x \operatorname{ch}^{-2} x. \quad (42)$$

Такая зависимость электрического поля от координаты x отвечает линейному возрастанию с увеличе-

нием x электрического поля лазерного пучка в плазменном цилиндре при $x \ll 1$ и его экспоненциальному убыванию при больших радиусах $x \gg 1$. Использование соотношения (42) в (40) приводит к решению кинетического уравнения (39) следующего вида:

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= F(\tilde{x}, \tilde{\nu}), \quad \tilde{\tau} = \tau \sqrt{\varepsilon \rho} \sqrt{\nu^2 + \operatorname{ch}^{-2} x}, \\ \nu^2 &= \frac{\varepsilon w^2}{\rho}, \\ \operatorname{sh} \tilde{x} &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} \tilde{\tau} - \frac{\nu \operatorname{ch} x \operatorname{sh} \tilde{\tau}}{\sqrt{\nu^2 + \operatorname{ch}^{-2} x}}, \\ \tilde{\nu} \operatorname{ch} \tilde{x} &= \nu \operatorname{ch} x \operatorname{ch} \tilde{\tau} - \sqrt{\nu^2 + \operatorname{ch}^{-2} x} \operatorname{sh} x \operatorname{sh} \tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (43)$$

Предел холодных ионов для обсуждавшейся в этой работе максвелловской начальной функции распределения ионов с однородными начальными плотностью и температурой соответствует пределу $\Gamma^2 \rightarrow 0$ в (4), что дает $F|_{\tau=0} = n_0^i \delta(w)$, и решение (43) записывается в виде

$$f = n_0^i \frac{\tilde{x}}{x} \delta \left(\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}} \tilde{\nu} \right). \quad (44)$$

Домножая (44) на 1 и w и интегрируя по w , получим выражения для интегральных характеристик ионов с функцией распределения (44) — их плотности и средней скорости:

$$\begin{aligned} n_{av}^i &= n_0^i \sum_k \frac{\tilde{x}_k}{x} \left\{ |\partial_\nu \tilde{\nu}|_{x=\text{const}}^{-1} \right\}_{|\nu=\nu_k}, \\ \nu_{av}^i &= \frac{n_0^i}{n_{av}^i} \sum_k \frac{\tilde{x}_k}{x} \sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}} \tilde{\nu}_k \left\{ |\partial_\nu \tilde{\nu}|_{x=\text{const}}^{-1} \right\}_{|\nu=\nu_k}. \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь $\tilde{x}_k = \tilde{x}(x, \nu_k)$ и суммирование происходит по всем значениям корней ν_k уравнения $\tilde{\nu} = 0$, которое в переменных x, ν имеет простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + \text{ch}^{-2} x}} - \text{th} x \text{th} \left(\tilde{\tau} \sqrt{\nu^2 + \text{ch}^{-2} x} \right) &= 0, \\ \tilde{\tau} &= \tau \sqrt{\varepsilon \rho}. \end{aligned} \quad (46)$$

Графики кривых $\tilde{\nu} = 0$ на плоскости (x, ν) при различных значениях времени $\tilde{\tau}$ приведены на рис. 6. Из них следует, что при больших временах $\tilde{\tau} > \tilde{\tau}_*$ зависимость $\nu(x)$ не является однозначной во всей области изменения переменной x . Верхняя x_u и нижняя x_l границы области многозначности решения $x_l < x < x_u$ определяются условием обращения в нуль производной обратной функции $\partial_\nu x = 0$, что приводит к следующим двум уравнениям для координат границ:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} \nu - \omega \text{th} x \text{th} \omega &= 0, \quad \omega - \tilde{\tau} \nu \text{th} x \text{th} \omega = 0, \\ \omega &= \tilde{\tau} \sqrt{\nu^2 + \text{ch}^{-2} x}. \end{aligned} \quad (47)$$

Момент $\tilde{\tau}_*$ возникновения многопоточкового режима находится из условий одновременного обращения в нуль производных $\partial_\nu x = \partial_{\nu\nu} x = 0$. Эти условия записываются в виде трех уравнений, объединяющих (47) и уравнение

$$\begin{aligned} \text{ch}^2 \omega_* \text{th} \omega_* + \omega_* \times \\ \times (1 + 2 \text{ch}^2 x_* \nu_*^2 (1 - \omega_* \text{th} \omega_*)) &= 0, \\ \omega_* &= \tilde{\tau}_* \sqrt{\nu_*^2 + \text{ch}^{-2} x_*}. \end{aligned} \quad (48)$$

Численное решение уравнений (47), (48) дает «универсальные» (т. е. справедливые при любых величинах ε и ρ) значения $\tilde{\tau}_* \approx 2.78989$, $x_* \approx 2.01412$, $\nu_* \approx 0.55715$.

Использование (46) в (45) приводит к более простому виду соотношений, определяющих плотность и среднюю скорость ионов:

$$\begin{aligned} n_{av}^i &= n_0^i \sum_k \frac{1}{x} \text{Arsh} \left(\frac{\text{sh} x}{\text{ch} \omega_k} \right) |\partial_\nu \tilde{\nu}|_{\nu=\nu_k}^{-1}, \\ \nu_{av}^i &= \frac{n_0^i}{n_{av}^i} \sum_k \frac{\nu_k}{x} \text{Arsh} \left(\frac{\text{sh} x}{\text{ch} \omega_k} \right) |\partial_\nu \tilde{\nu}|_{\nu=\nu_k}^{-1}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \partial_\nu \tilde{\nu}|_{\nu=0} &= \frac{\text{ch} x}{\sqrt{\text{sh}^2 x + \text{ch}^2 \omega}} \times \\ &\times (\text{ch}^2 \omega - \text{th}^2 x (\text{sh}^2 \omega + \omega \text{th} \omega)). \end{aligned}$$

Подстановка (44) в (30) определяет спектр ускоренных лазерным полем ионов,

$$\begin{aligned} N_\epsilon &= 2\pi \frac{n_0^i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sum_k \text{Arsh} \left(\frac{\text{sh} x}{\text{ch} \omega_k} \right) |\partial_x \tilde{\nu}|_{x=x_k}^{-1}, \\ \tilde{\epsilon} &= \frac{\nu^2}{2}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \partial_x \tilde{\nu}|_{\nu=0} &= \frac{\tilde{\tau}}{\text{ch} x \sqrt{\text{sh}^2 x + \text{ch}^2 \omega}} \times \\ &\times \left(\text{th}^2 x - \text{ch}^2 \omega \frac{\text{th} \omega}{\omega} (1 + \nu^2 - 2 \text{th}^2 x) \right). \end{aligned}$$

Здесь, в отличие от (49), суммирование происходит по всем значениям корней x_k уравнения $\tilde{\nu} = 0$.

Типичные кривые распределений плотности и средней скорости ионов и их энергетические спектры приведены на рис. 7. Видно, что энергия ионов достигает своего максимального значения на правой границе спектра. При $\tilde{\tau} \gtrsim 5$ это максимальное значение стремится к $\tilde{\epsilon} \approx 1/2$ и с дальнейшим ростом $\tilde{\tau}$ практически не изменяется. Переход к многопоточковому режиму сопровождается образованием особенностей в распределении плотности ионов и скачками в распределении их средней скорости. Такого рода особенности неоднократно обсуждались в различных работах, связанных с возникновением многопоточковых движений при изучении динамики невзаимодействующих частиц [20], при анализе динамики бездиссипативного газа в расширяющейся Вселенной [21] и в задачах о кулоновском взрыве плазмы (см., например, [22, 23]).

Решение (43) очевидным образом воспроизводится в рамках используемого здесь группового подхода. Продемонстрируем это утверждение на примере более простого, чем (42), линейного по координате x распределения электрического поля,

$$p^l = \rho x, \quad (51)$$

которое получается из (42) в пределе малых значений $x \ll 1$ и для которого решение (43) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= F(\tilde{x}^l, \tilde{\nu}^l), \quad \tilde{x}^l = x \text{ch} \tilde{\tau} - \nu \text{sh} \tilde{\tau}, \\ \tilde{\nu}^l &= \nu \text{ch} \tilde{\tau} - x \text{sh} \tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (52)$$

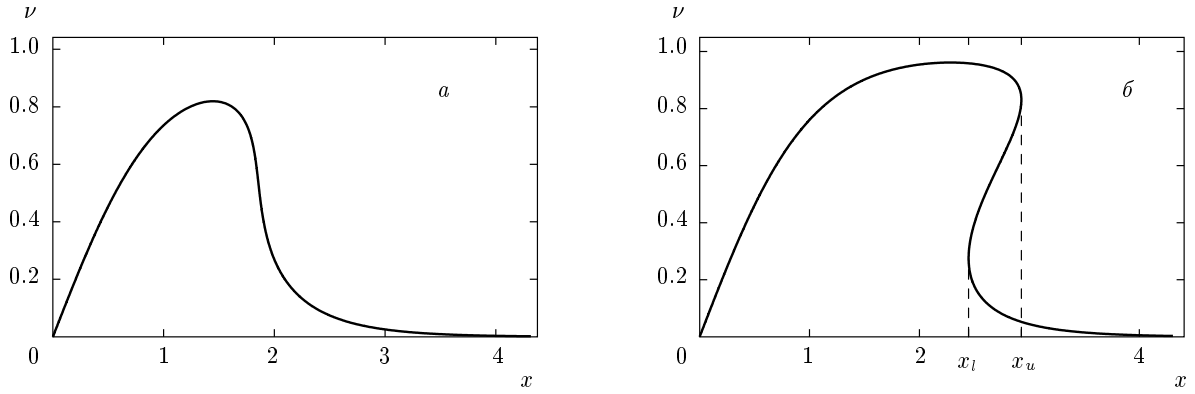


Рис. 6. Кривые на плоскости (x, ν) , описывающие решения уравнения (46) при различных временах $\tilde{\tau} = 2.5$ (а), 4 (б). На кривой рис. б для времени $\tilde{\tau} > \tilde{\tau}_*$ выделены границы области трехпоточкового течения

Действительно, группа симметрии, допускаемая уравнением (39), определяется оператором группы (ср. с (60))

$$X = \xi^1 \partial_\tau + \xi^2 \partial_x + \xi^4 \partial_w + \tilde{\eta}^3 \partial_{\tilde{f}}, \quad (53)$$

координаты которого задаются решением системы определяющих уравнений

$$\begin{aligned} K \tilde{\xi}^2 - \varepsilon \tilde{\xi}^4 &= 0, & K \tilde{\xi}^4 - (\partial_x p) \tilde{\xi}^2 &= 0, \\ \left(K + \frac{\varepsilon w}{x}\right) \tilde{\eta}^3 &= 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Здесь оператор K и координаты $\tilde{\xi}^i$ определены формулами

$$\begin{aligned} K &= \partial_\tau + \varepsilon w \partial_x + p \partial_w - \frac{\varepsilon w}{x} f \partial_f, & \tilde{\xi}^2 &= \xi^2 - \varepsilon w \xi^1, \\ \tilde{\xi}^4 &= \xi^4 - p \xi^1. \end{aligned} \quad (55)$$

Последнее уравнение в (54) совпадает с исходным, что обусловлено линейностью исходного уравнения (39). Будем рассматривать решения уравнений (54) вида $\tilde{\xi}_f^2 = \tilde{\xi}_f^4 = \tilde{\eta}^3 = 0$, что для линейного по координате электрического поля p^l дает следующие выражения для координат оператора (53):

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^2 &= j_3(\tilde{x}^l, \tilde{\nu}^l) \operatorname{ch} \tilde{\tau} - j_4(\tilde{x}^l, \tilde{\nu}^l) \operatorname{sh} \tilde{\tau}, \\ \tilde{\xi}^4 &= -\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}} (j_4(\tilde{x}^l, \tilde{\nu}^l) \operatorname{ch} \tilde{\tau} - j_3(\tilde{x}^l, \tilde{\nu}^l) \operatorname{sh} \tilde{\tau}), \end{aligned} \quad (56)$$

где j_3, j_4 — произвольные функции своих аргументов. Выбор явного вида этих функций проводится исходя из проверки условий инвариантности решения уравнения (39) в пределе $\tau \rightarrow 0$ относительно точечной группы преобразований с оператором (53).

В частности, для максвелловской начальной функции распределения ионов (4) такая проверка дает связь между функциями j_3 и j_4 ,

$$\varepsilon \Gamma^2 j_3(\tilde{x}^l, \tilde{\nu}^l) + \tilde{x}^l \tilde{\nu}^l \rho j_4(\tilde{x}^l, \tilde{\nu}^l) = 0, \quad (57)$$

которая выполняется, например, для

$$j_3 = -\sqrt{\varepsilon \rho} \tilde{\nu}^l, \quad j_4 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} \frac{\varepsilon \Gamma^2}{\tilde{x}^l}.$$

Подставляя последние выражения в (56), выбирая $\xi^1 = 1/\operatorname{ch}^2 \tilde{\tau}$ и переходя к переменным $\tilde{\tau}, \tilde{x}^l, \tilde{\nu}^l, \tilde{f}$, получим из (53) следующий оператор ренормгрупповой симметрии:

$$X = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \tilde{\tau}} \partial_{\tilde{\tau}} - \tilde{\nu}^l \partial_{\tilde{x}^l} - \frac{\Gamma^2 \varepsilon}{\rho \tilde{x}^l} \partial_{\tilde{\nu}^l}. \quad (58)$$

Вычисляя инварианты оператора (58) и переходя в полученных выражениях к пределу $\Gamma^2 \rightarrow 0$, приходим к решению (52) с $F_{|_{\tau=0}} = n_0^i \delta(w)$.

Полученное соответствие стандартного и группового подходов позволяет использовать построенные в этом разделе результаты для оценки границ применимости приближенного аналитического решения, найденного из приближенных симметрий. В частности, сравнение максимального значения энергии ускоряемых ионов на пределе временных ограничений полученного аналитического решения, $\tau \approx 1/\sqrt{\varepsilon \rho}$, коррелирует с оценкой максимальной энергии ионов из формул (49), по крайней мере до таких времен, когда плазменное поле фактически совпадает с лазерным.

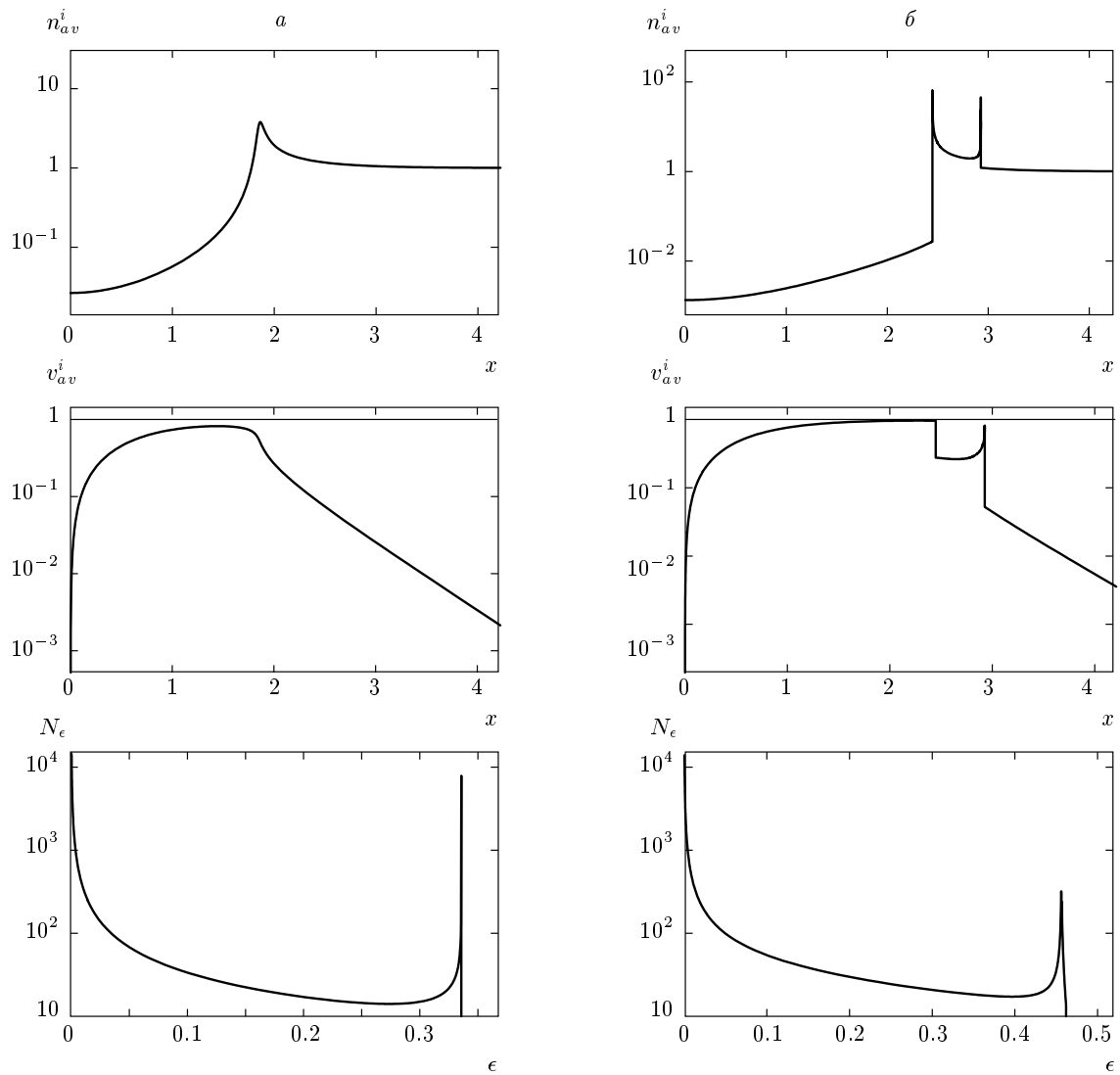


Рис. 7. Пространственные распределения по координате x плотности и средней скорости ионов, а также их энергетические спектры для двух моментов времени: $\tilde{t} = 2.5$ (а), 4 (б)

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Полученные в работе теоретические результаты можно условно разделить на три класса: во-первых, это точные аналитические инвариантно-групповые решения (см. разд. 4.1), во-вторых, это приближенные аналитические инвариантно-групповые решения, полученные с использованием ренормгрупповых симметрий (см. разд. 4.2), и, в-третьих, это решение кинетического уравнения с заданным электрическим полем (см. разд. 5). Решения, принадлежащие к разным классам имеют как достоинства, так и недостатки. Так, например, точные решения

из разд. 4.1 отвечают ненулевой начальной скорости ионов с линейным по радиусу профилем скорости, что, впрочем, не является существенным ограничением и с физической точки зрения может соответствовать предварительному ускорению ионов за счет действия предимпульса. С другой стороны, эти решения являются точными и позволяют сделать вывод о том, что существенного ускорения ионов за счет электрического поля лазера можно ожидать, если параметр $J = \epsilon \tau_0^2 P_0$, названный в разд. 4.1 «интегральной интенсивностью», оказывается не малым. С этим выводом коррелирует результат, полученный в разд. 4.2.2: для рис. 5 оценка этого параметра дает 1.6. Для стационарного пучка, обсуждаемого в

разд. 4.2.1, оценка этого параметра для максимального времени $\tau = 6$, использованного на рис. 4, дает величину порядка единицы. Такой же результат получается и из рассмотрения ускорения ионов заданным электрическим полем (разд. 5): близкое к максимально возможному значение средней скорости ионов отвечает величине $\tilde{\tau}^2 \gtrsim 1$, что как раз и соответствует обсуждаемому условию $\varepsilon \rho \tau^2 \gtrsim 1$. Таким образом, решения из всех трех классов в этом случае показали одинаковый результат.

Результаты разд. 5 были получены без ограничения для величин ε и τ^2 . Из них следует, что при заданном плазменном поле, ускоряющем ионы и совпадающем со стационарным электрическим полем лазерного пучка, максимальная величина энергии ϵ_m ионов не превышает значения $\rho/2\varepsilon$, которое достигается за время τ , близкое к времени возникновения многопоточкового движения τ_* . С другой стороны, из результатов разд. 4.1 следует, что возникновение с ростом τ на внешней границе пучка электрического поля с малым пространственным масштабом, сравнимым с дебаевским радиусом электронов, может существенно исказить динамику ускорения ионов и привести к иным значениям максимальных энергий ускоренных ионов. В таблице указаны максимальные энергии ионов по результатам разд. 4.1 и разд. 5 при одинаковых временах τ . Величина ρ в формулах разд. 5 при этом выбиралась такой, чтобы максимальные значения электрического поля в плазме в формулах разд. 4.1 и 5 совпадали.

Сравнение энергий отсечки ϵ_m для двух вариантов показывает, что их значения близки при $\tau < 6$, а различие проявляется при значениях $\tilde{\tau} > 1.64$ (т. е. при $\tau \geq 6$). Это различие может быть связано с неприменимостью на таких временах результатов на основе приближенной ренормгрупповой симметрии, с нарушением на этих же временах предположения о том, что электрическое поле в плазме совпадает с полем лазерного пучка, а также с различием пространственных структур лазерного поля, анализируемых в разд. 4.1 и 5, и требует дальнейшего исследования.

Численная оценка максимальной энергии ионов для используемых при построении кривых на рис. 4 параметров плазмы и лазерного пучка с $L/\lambda \approx 10$ составляет приблизительно 1 МэВ.

Существенным достижением теоретического рассмотрения на основе приближенных ренормгрупповых симметрий (разд. 4.1) явилась возможность описать не только эволюцию ионов с образованием вблизи оси пучка каспа ионной плотности, но также и неоднородный нагрев электронов вблизи внешней границы пучка и их остывание в приосевой обла-

сти. Обнаруженная тенденция нагрева электронов с образованием резких пространственных градиентов может явиться основой для понимания процессов динамики плазмы после окончания лазерного импульса.

Подведем итог. В данной работе проведен анализ ускорения ионов в неоднородной цилиндрической малоплотной плазме под действием лазерного излучения, распространяющегося вдоль оси цилиндра. Причиной ускорения ионов является пондеромоторный механизм воздействия лазерного пучка на электроны плазмы, вытесняющего электроны из области локализации сильного неоднородного по радиусу электрического поля: рассмотрено гауссово распределение интенсивности лазера по радиусу. Возникающее при этом поле разделения зарядов обуславливает ускорение ионов в радиальном направлении (от центра лазерного пучка). Инструментом исследования пространственно-временной структуры ускоряемых частиц плазмы послужила теория точных и приближенных групп преобразований.

Показано, что разлет плазмы малоплотной мишени в радиальном направлении приводит к формированию области с пониженной плотностью плазмы в центре пучка и возникновению пиков плотности электронов и ионов на его периферии, при этом происходит ускорение частиц плазмы в радиальном направлении. Наряду с этим возникают области с неоднородным распределением температуры электронов и ионов плазмы — температура уменьшается на оси пучка и возрастает на его периферии. Для различных моментов времени построены пространственные распределения для плотности, температуры и средней скорости частиц плазмы. Найдены спектральные распределения энергий ускоренных ионов. Эти результаты проанализированы как для стационарного пучка, так и для лазерного импульса конечной длительности. Полученные данные дают теоретическое объяснение результатов численных экспериментов [10, 11] и могут служить основой для теоретического анализа поведения частиц плазмы на больших временах после выключения лазерного импульса.

Предложенная модель цилиндрического лазерного канала характерна для лазера с длительностью импульса порядка или превосходящей 100 фс, который фокусируется в пятно размером меньше или порядка 10 мкм. При интенсивности лазера 10^{19} – 10^{20} Вт/см² рассмотренное пондеромоторное ускорение обеспечивает радиальное ускорение, например, протонов (если речь идет о водородо-содержащих газах) до энергий в несколько МэВ.

Таблица

τ	1	2	3	4	5	6
ϵ_m из разд. 4.1	4.16	16.64	37.33	65.88	101.72	322.5
ϵ_m из разд. 5	4.17	16.65	37.28	65.48	99.86	138.15

Такие пондеромоторно ускоренные протоны могут вызывать ядерные реакции [24] в окружающем газе или специальном коаксиале с подходящим атомным составом. На этом принципе могли бы быть созданы лазерные источники медицинских изотопов для позитронно-эмиссионной томографии или однофотонной эмиссионной компьютерной томографии, как только окажется возможным добиться высокой (кГц) частоты следования импульсов. Последнее уже демонстрируется в лабораторных условиях для интенсивности $\gtrsim 10^{18}$ Вт/см² [25].

Математические результаты, касающиеся построения групповых и ренормгрупповых симметрий для кинетических уравнений заряженных частиц плазмы с учетом действия пондеромоторной силы и поля разделения заряда, описываемого уравнением Пуассона, получены при поддержке РФФИ (гранты №№ 14-01-00828а, 15-01-04677а), а также гранта НШ-3003.2014.2. Использование этих симметрий для проведения исследования по ускорению ионов из малоплотных мишеней выполнено в рамках исследований при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-12-00194).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление группы Ли точечных преобразований

Для нахождения допускаемой группы точечных преобразований система уравнений (1), (2) должна быть дополнена четырьмя равенствами,

$$\partial_w g = 0, \quad \partial_u f = 0, \quad \partial_u p = 0, \quad \partial_w p = 0, \quad (59)$$

имеющими тривиальный физический смысл, но очевидно нужными при вычислении группы допускаемых преобразований. Группа Ли точечных преобразований, допускаемая системой уравнений (1), (2) и (59) задается инфинитезимальным оператором (генератором) группы

$$X = \xi^1 \partial_\tau + \xi^2 \partial_x + \xi^3 \partial_u + \xi^4 \partial_w + \eta^1 \partial_g + \eta^2 \partial_p + \eta^3 \partial_f. \quad (60)$$

В канонической форме этот оператор принимает вид

$$Y = \kappa^1 \partial_g + \kappa^2 \partial_p + \kappa^3 \partial_f, \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \kappa^1 &= \eta^1 - \xi^1 \partial_\tau g - \xi^2 \partial_x g - \xi^3 \partial_u g, \\ \kappa^2 &= \eta^2 - \xi^1 \partial_\tau p - \xi^2 \partial_x p, \\ \kappa^3 &= \eta^3 - \xi^1 \partial_\tau f - \xi^2 \partial_x f - \xi^4 \partial_w f. \end{aligned}$$

Действуя оператором группы (61) на (1), (2) и (59), приходим к системе определяющих уравнений для координат ξ^i , η^i оператора (60):

$$\begin{aligned} \mu D_\tau \kappa^1 + \varepsilon u (D_x \kappa^1 + \kappa^1/x) - \\ - (p + q - \varepsilon/x) D_u \kappa^1 - \kappa^2 \partial_u g &= 0, \\ D_\tau \kappa^3 + \varepsilon w (D_x \kappa^3 + \kappa^3/x) + \\ + (p + \varepsilon \Gamma^2/x) D_w \kappa^3 - \kappa^2 \partial_w f &= 0, \\ D_w \kappa^1 = 0, \quad D_u \kappa^3 = 0, \quad D_u \kappa^2 = 0, \\ D_w \kappa^2 = 0; \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon (D_x \kappa^2 + \kappa^2/x) - \int dw \kappa^3 + \int du \kappa^1 &= 0, \\ \mu D_\tau \kappa^2 + \mu \int dw w \kappa^3 - \int du u \kappa^1 &= 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Уравнения (62), (63) должны решаться с учетом исходных уравнений (1), (2), (59) и всех их дифференциальных следствий. Здесь D_τ , D_x , D_u и D_w — операторы полного дифференцирования по соответствующей переменной, фигурирующей в качестве нижнего индекса:

$$\begin{aligned} D_\tau &= \partial_\tau + g_\tau \partial_g + f_\tau \partial_f + p_\tau \partial_p + g_{\tau\tau} \partial_{g_\tau} + \\ &+ g_{\tau x} \partial_{g_x} + g_{\tau u} \partial_{g_u} + f_{\tau\tau} \partial_{f_\tau} + f_{\tau x} \partial_{f_x} + \\ &+ f_{\tau w} \partial_{f_w} + p_{\tau\tau} \partial_{p_\tau} + p_{\tau x} \partial_{p_x}, \\ D_x &= \partial_x + g_x \partial_g + f_x \partial_f + p_x \partial_p + g_{\tau x} \partial_{g_\tau} + \\ &+ g_{xx} \partial_{g_x} + g_{xu} \partial_{g_u} + f_{\tau x} \partial_{f_\tau} + f_{xx} \partial_{f_x} + \\ &+ f_{xw} \partial_{f_w} + p_{\tau x} \partial_{p_\tau} + p_{xx} \partial_{p_x}, \\ D_u &= \partial_u + g_u \partial_g + g_{\tau u} \partial_{g_\tau} + g_{xu} \partial_{g_x} + g_{uu} \partial_{g_u}, \\ D_w &= \partial_w + f_w \partial_f + f_{\tau w} \partial_{f_\tau} + f_{xw} \partial_{f_x} + f_{ww} \partial_{f_w}. \end{aligned} \quad (64)$$

Для компактности здесь использованы нижние индексы для обозначения частных производных g , f и p по соответствующим переменным.

Для поиска координат ξ^i , η^i из системы определяющих уравнений мы используем подход, развитый в [26] (см. также [27, Гл. 4]). Применяя этот подход, мы разделяем определяющие уравнения для ξ^i и η^i на локальные определяющие уравнения (62), которые возникают из условия инвариантности для (1), (59), и нелокальные определяющие уравнения (63), которые следуют из инвариантных условий для (2). Решение локальных определяющих уравнений дает так называемую промежуточную симметрию [26].

Опуская подробные вычисления, запишем после некоторого упрощения определяющие уравнения, задающие промежуточную симметрию:

$$\begin{aligned} & \mu \partial_\tau \eta^1 + \varepsilon u \partial_x \eta^1 - \left(p + q - \frac{\varepsilon}{x}\right) \partial_u \eta^1 - \frac{\varepsilon u}{x} g \partial_g \eta^1 + \\ & + \frac{\varepsilon u g}{x} \left(\partial_\tau \xi^1 + \frac{\varepsilon u}{\mu} \partial_x \xi^1 + \frac{\eta^1}{g} + \frac{\xi^3}{u} - \frac{\xi^2}{x}\right) = 0, \\ & \partial_\tau \eta^3 + \varepsilon w \partial_x \eta^3 + \left(p + \frac{\varepsilon \Gamma^2}{x}\right) \partial_w \eta^3 - \frac{\varepsilon w}{x} f \partial_f \eta^3 + \\ & + \frac{\varepsilon u f}{x} \left(\partial_\tau \xi^1 + \varepsilon w \partial_x \xi^1 + \frac{\eta^3}{f} + \frac{\xi^4}{w} - \frac{\xi^2}{x}\right) = 0, \\ & \varepsilon u \left(\partial_\tau \xi^1 + \frac{\varepsilon u}{\mu} \partial_x \xi^1\right) - \mu \partial_\tau \xi^2 - \varepsilon u \partial_x \xi^2 + \varepsilon \xi^3 = 0, \\ & \varepsilon w \left(\partial_\tau \xi^1 + \varepsilon w \partial_x \xi^1\right) - \partial_\tau \xi^2 - \varepsilon w \partial_x \xi^2 + \varepsilon \xi^4 = 0, \\ & \eta^2 + \left(p + q - \frac{\varepsilon}{x}\right) \left(\partial_\tau \xi^1 + \frac{\varepsilon u}{\mu} \partial_x \xi^1 - \partial_u \xi^3\right) + \\ & + \mu \partial_\tau \xi^3 + \varepsilon u \partial_x \xi^3 + \xi^1 \partial_\tau q + \xi^2 \partial_x q + \frac{\varepsilon \xi^2}{x^2} = 0, \\ & \eta^2 + \left(p + \frac{\varepsilon \Gamma^2}{x}\right) \left(\partial_\tau \xi^1 + \varepsilon w \partial_x \xi^1 - \partial_w \xi^4\right) - \\ & - \partial_\tau \xi^4 - \varepsilon w \partial_x \xi^4 - \frac{\varepsilon}{x^2} \Gamma^2 \xi^2 = 0. \end{aligned} \quad (65)$$

Здесь координаты ξ^i и η^i характеризуются следующей зависимостью от переменных:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \xi^1(\tau, x), & \xi^2 &= \xi^2(\tau, x), \\ \xi^3 &= \xi_0^3(\tau, x) + u \xi_1^3(\tau, x), \\ \xi^4 &= \xi_0^4(\tau, x) + w \xi_1^4(\tau, x), \\ \eta^1 &= \eta^1(\tau, x, u, g), & \eta^2 &= \eta^2(\tau, x, p), \\ \eta^3 &= \eta^3(\tau, x, w, f). \end{aligned} \quad (66)$$

Используя линейную зависимость координат ξ^3 и ξ^4 от скоростей соответственно u и w , получим после подстановки в (65) и «расщепления» по степеням u

и w следующие выражения для координат оператора промежуточной симметрии:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \xi_1(\tau), & \xi^2 &= x \left(C_1 + \frac{1}{2} \partial_\tau \xi_1\right) + \xi_2(\tau), \\ C_{1,2} &= \text{const}, \\ \xi^3 &= \frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{x}{2} \partial_{\tau\tau} \xi_1 + \partial_\tau \xi_2\right) + u \left(C_1 - \frac{1}{2} \partial_\tau \xi_1\right), \\ \xi^4 &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{x}{2} \partial_{\tau\tau} \xi_1 + \partial_\tau \xi_2\right) + w \left(C_1 - \frac{1}{2} \partial_\tau \xi_1\right), \\ \eta^2 &= \left(p + \frac{\varepsilon \Gamma^2}{x}\right) \left(C_1 - \frac{3}{2} \partial_\tau \xi_1\right) + \frac{x}{2\varepsilon} \partial_{\tau\tau} \xi_1 + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\tau\tau} \xi_2 + \frac{\varepsilon \Gamma^2}{x^2} \left(x \left(C_1 + \frac{1}{2} \partial_\tau \xi_1\right) + \xi_2\right), \\ \eta^1 &= -g \left(C_1 - C_2 + (1/2) \partial_\tau \xi_1 + \xi_2/x\right), \\ \eta^3 &= -f \left(C_1 - C_2 + \frac{1}{2} \partial_\tau \xi_1 + \frac{\xi_2}{x}\right). \end{aligned} \quad (67)$$

Симметрия (67) реализуется при специальной зависимости от координат $\{\tau, x\}$ лазерного электрического поля q :

$$\begin{aligned} q &= \frac{\varepsilon(1 + \Gamma^2)}{x} + \frac{1}{\xi_1^{3/2}} \exp\left(\int d\tau \frac{C_1}{\xi_1}\right) \times \\ & \times \left[Q(\lambda) - \frac{1 + \mu^2}{\varepsilon} \int d\tau \xi_1 \times \right. \\ & \times \left[\frac{1}{2} \partial_{\tau\tau\tau} \xi_1 \left(\lambda + \int d\tau \frac{\xi_2}{\xi_1^{3/2}} \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \exp\left(-\int d\tau \frac{C_1}{\xi_1}\right)\right) + \frac{\partial_{\tau\tau} \xi_2}{\xi_1^{1/2}} \times \right. \\ & \left. \left. \times \exp\left(-\int d\tau \frac{C_1}{\xi_1}\right)\right] \right], \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{x}{\xi_1^{1/2}} \exp\left(-\int d\tau \frac{C_1}{\xi_1}\right) - \\ & - \int d\tau \frac{\xi_2}{\xi_1^{3/2}} \exp\left(-\int d\tau \frac{C_1}{\xi_1}\right), \end{aligned}$$

где Q — произвольная функция своего аргумента.

Используя промежуточную симметрию (67) в нелокальных определяющих уравнениях (63) и решая их с помощью вариационного дифференцирования (подробнее см. [26] и [27, Гл. 4]), получаем выражения для координат оператора (60) и представление для электрического поля q :

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= B - A\tau, & \xi^2 &= x \left(C_1 - \frac{A}{2} \right), \\
\xi^3 &= u \left(C_1 + \frac{A}{2} \right), & \xi^4 &= w \left(C_1 + \frac{A}{2} \right), \\
\eta^1 &= g \left(\frac{3A}{2} - C_1 \right), & \eta^3 &= f \left(\frac{3A}{2} - C_1 \right), \\
\lambda &= x(B - A\tau)^{C_1/A - 1/2}, \\
\eta^2 &= p \left(C_1 + \frac{3A}{2} \right) + \frac{\varepsilon \Gamma^2}{x} (2C_1 + A), \\
q &= \frac{\varepsilon(1 + \Gamma^2)}{x} + (B - A\tau)^{-C_1/A - 3/2} Q(\lambda).
\end{aligned} \tag{69}$$

Координатам (69) отвечает следующий набор трех операторов группы точечной симметрии уравнений (1), (2), (59), соответствующий преобразованиям переноса по времени и растяжениям:

$$\begin{aligned}
X_0 &= \partial_\tau, & X_1 &= 2\tau\partial_\tau + x\partial_x - u\partial_u - w\partial_w - \\
& & & - 3g\partial_g - \left(3p + 2\frac{\varepsilon\Gamma^2}{x} \right) \partial_p - 3f\partial_f, \\
X_2 &= x\partial_x + u\partial_u + w\partial_w - g\partial_g + \\
& & & + \left(p + 2\frac{\varepsilon\Gamma^2}{x} \right) \partial_p - f\partial_f.
\end{aligned} \tag{70}$$

Примеры инвариантных решений с использованием точных симметрий (70) приведены в разд. 4.1.

Группа (69) является узкой и (как будет ясно в дальнейшем) не обладает достаточным произволом в выборе координат ξ^i , который нужен для продолжения решения по теории возмущений с нулевыми начальными значениями средних скоростей частиц на область конечных $\tau \neq 0$, поэтому можно использовать наличие в (1), (2) малых параметров ε и μ и, как это принято в теории приближенных групп преобразований [28], представить координаты оператора группы в виде степенных рядов по этим параметрам:

$$\xi^i = \sum_{k,l=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu^l \xi^{i(k,l)}, \quad \eta^i = \sum_{k,l=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu^l \eta^{i(k,l)}. \tag{71}$$

Используя линейную зависимость координат ξ^3 и ξ^4 от скоростей соответственно u и w , после подстановки (71) в (65) и удержания только линейных по ε и μ вкладов получим следующие выражения для координат оператора (60):

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= 1 + 2\varepsilon \int d\tau' \int d\tau'' \partial_x(\zeta - q), \\
\xi^2 &= \varepsilon \int d\tau'(\zeta - q), \quad \zeta = \zeta(x), \\
\xi^3 &= \mu(\zeta - q) - \varepsilon\mu \left[2q \int d\tau' \int d\tau'' \partial_x(\zeta - q) + \right. \\
& & \left. + \partial_x \int d\tau' \int d\tau''(\zeta - q) \right] + \varepsilon u \int d\tau' \partial_x(\zeta - q), \\
\xi^4 &= \zeta - q - \varepsilon \left[2q \int d\tau' \int d\tau'' \partial_x(\zeta - q) + \right. \\
& & \left. + \partial_x \int d\tau' \int d\tau''(\zeta - q) \right] + \varepsilon w \int d\tau' \partial_x(\zeta - q), \\
\eta^2 &= \partial_\tau(\zeta - q) - \\
& & - \varepsilon \left[2\partial_\tau \left(q \int d\tau' \int d\tau'' \partial_x(\zeta - q) \right) + \right. \\
& & \left. + \partial_x \int d\tau'(\zeta - q) \right] - 3\varepsilon p \int d\tau' \partial_x(\zeta - q), \\
\eta^1 &= \varepsilon g C_2 - \frac{\varepsilon g}{x} \int d\tau'(\zeta - q), \\
\eta^3 &= \varepsilon f C_2 - \frac{\varepsilon f}{x} \int d\tau'(\zeta - q).
\end{aligned} \tag{72}$$

Используя приближенную промежуточную симметрию (72) в нелокальных определяющих уравнениях (63) и решая их с помощью вариационного дифференцирования, можно убедиться, что эти уравнения удовлетворяются с выбранной точностью, если электрическое поле меняется достаточно медленно, $\partial_\tau q \lesssim O(\varepsilon)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гуревич, Л. В. Парийская, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **49**, 647 (1965) [A. V. Gurevich, L. V. Pariiskaya, and L. P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP **22**, 449 (1966)].
2. K. Nishihara, H. Amitani, M. Murakami et al., Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A **464**, 98 (2001).
3. В. Ф. Ковалев, В. Ю. Быченков, ЖЭТФ **128**, 243 (2005) [V. F. Kovalev and V. Yu. Bychenkov, JETP **101**, 212 (2005)].
4. K. I. Popov, V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus, V. F. Kovalev, and R. D. Sydora, Laser Part. Beams **27**, 321 (2009).
5. Д. С. Дорожкина, В. Е. Семенов, Письма в ЖЭТФ **67**, 543 (1998) [D. S. Dorozhkina and V. E. Semenov, JETP Lett. **67**, 573 (1998)].
6. V. F. Kovalev, V. Yu. Bychenkov, and V. T. Tikhonchuk, JETP **95**, 226 (2002).

7. P. Mora, Phys. Rev. Lett. **90**, 185002 (2003).
8. V. Yu. Bychenkov, V. N. Novikov, D. Batani, V. T. Tikhonchuk, and S. G. Vochkarev, Phys. Plasmas **11**, 3242 (2004).
9. Е. А. Говрас, В. Ю. Быченко, Письма в ЖЭТФ **98**, 78 (2013) [E. A. Govras and V. Yu. Bychenkov, JETP Lett. **98**, 70 (2013)].
10. G. S. Sarkisov, V. Yu. Bychenkov, V. N. Novikov, V. T. Tikhonchuk, A. Maksimchuk, S.-Y. Chen, R. Wagner, G. Mourou, and D. Umstadter, Phys. Rev. E **59**, 7042 (1999).
11. A. Macchi, F. Ceccherini, F. Cornolti, S. Kar, and M. Borghesi, Plasma Phys. Control. Fusion **51**, 024005 (2009).
12. А. В. Кузнецов, Т. Ж. Есиркепов, Ф. Ф. Каменец, С. В. Буланов, Физика плазмы **27**, 225 (2001).
13. A. Pukhov, Z.-M. Sheng, and J. Meyer-ter-Vehn, Phys. Plasmas **6**, 2847 (1999).
14. K. I. Popov, W. Rozmus, V. Yu. Bychenkov, N. Naseri, C. E. Capjack, and A. V. Brantov, Phys. Rev. Lett. **105**, 195002 (2010).
15. В. Ф. Ковалев, В. Ю. Быченко, В. Т. Тихончук, Письма в ЖЭТФ **74**, 12 (2001).
16. V. F. Kovalev and V. Yu. Bychenkov, Phys. Rev. Lett. **90**, 185004 (2003).
17. М. А. Миллер, Изв. вузов, Радиофизика **1**, 110 (1958).
18. А. Г. Литвак, *Вопросы теории плазмы*, под ред. М. А. Леонтовича, Атомиздат, Москва (1980), т. 10, с. 164.
19. В. Ф. Ковалев, Д. В. Ширков, УФН **178**, 849 (2008) [V. F. Kovalev and D. V. Shirkov, Physics Uspekhi **51**, 815 (2008)].
20. В. И. Арнольд, *Теория катастроф*, Наука, Москва (1990).
21. А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, УФН **165**, 723 (1995).
22. A. E. Kaplan, V. Y. Dubetsky, and P. L. Shkolnikov, Phys. Rev. Lett. **91**, 143401 (2003).
23. V. F. Kovalev, K. I. Popov, V. Yu. Bychenkov, and W. Rozmus, Phys. Plasmas **14**, 052103 (2007).
24. В. Ю. Быченко, В. Т. Тихончук, С. В. Толоконников, ЖЭТФ **115**, 2080 (1999).
25. Z.-H. He, B. Hou, J. A. Nees, J. H. Easter, J. Faure, K. Krushelnick, and A. G. R. Thomas, New J. Phys. **15**, 053016 (2013).
26. В. Ф. Ковалев, С. В. Кривенко, В. В. Пустовалов, Дифференциальные уравнения **29**, 1804 (1993); **29**, 1971 (1993).
27. Y. N. Grigoriev, N. H. Ibragimov, V. F. Kovalev, and S. V. Meleshko, Lect. Notes Phys. **806**, 330 (2010).
28. В. А. Байков, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов, Матем. сб. **136**, 435 (1988).