ЖЭТФ, 2015, том 148, вып. 3 (9), стр. 630–636

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В НАКЛОННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

М. А. Гашков [a], ***Н. М. Зубарев*** [a,b *], ***Е. А. Кочурин*** [a **]

[a] *Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук 620016, Екатеринбург, Россия*

[b] *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук 119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 13 мая 2015 г.

Исследована нелинейная динамика свободной поверхности идеальной диэлектрической жидкости, помещенной во внешнее наклонное электрическое поле. В рамках гамильтонова формализма получена система нелинейных интегродифференциальных уравнений, описывающая динамику нелинейных волн в малоугловом приближении. Показано, что для жидкости с высокой диэлектрической проницаемостью уравнения допускают решение в виде плоских волн произвольной формы, распространяющихся без искажений в направлении горизонтальной составляющей внешнего поля.

DOI: 10.7868/S0044451015090199

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно [1], что достаточно сильное внешнее электрическое поле, направленное по нормали к невозмущенной границе непроводящей жидкости, приводит к развитию неустойчивости поверхности. Задача об эволюции границы жидкости в вертикальном поле достаточно хорошо изучена — см. работы [2–6] для идеальной диэлектрической жидкости без свободного поверхностного заряда, работы [7–11] для диэлектрической жидкости со свободным поверхностным зарядом (в частности, жидкого гелия и водорода с заряженной ионами или электронами поверхностью). Следует упомянуть также случай идеально проводящей жидкости [12–14], рассмотрение которого аналогично рассмотрению жидкого диэлектрика с формально бесконечной диэлектрической проницаемостью [15].

Направленное по касательной к границе непроводящей жидкости электрическое поле, в отличие от нормального поля, оказывает на нее стабилизирующее воздействие [16]. Возможность подавления тангенциальным полем неустойчивостей Рэлея – Тейлора и Кельвина – Гельмгольца рассматривалась в работах соответственно [17, 18] и [19]. Распространению нелинейных волн в присутствии горизонтального поля посвящены, к примеру, работы [20–24].

Внешнее поле, направленное под углом к поверхности, может как стабилизировать, так и дестабилизировать границу жидкости. Характер влияния наклонного поля зависит от угла наклона и величины диэлектрической проницаемости жидкости. Интерес к исследованию динамики поверхности жидкости в наклонном электрическом или магнитном поле обусловливается возможностью управления ее поведением [25–29].

При исследовании поведения жидкостей со свободной поверхностью естественно осуществить редукцию уравнений движения среды к уравнениям более низкой размерности для движения непосредственно ее границы. В случае общего положения получаемые уравнения оказываются нелокальными (они содержат интегродифференциальные операторы), что значительно затрудняет их анализ. Как правило, при анализе нелинейной динамики диэлектрических жидкостей в электрическом поле либо магнитных жидкостей в магнитном поле (эти задачи эквивалентны с математической точки зрения) используются приближения мелкой воды [3, 30, 31] или спектральной узости волнового пакета [2, 7, 4, 28].

*E-mail: nick@iep.uran.ru
**E-mail: kochurin@iep.uran.ru

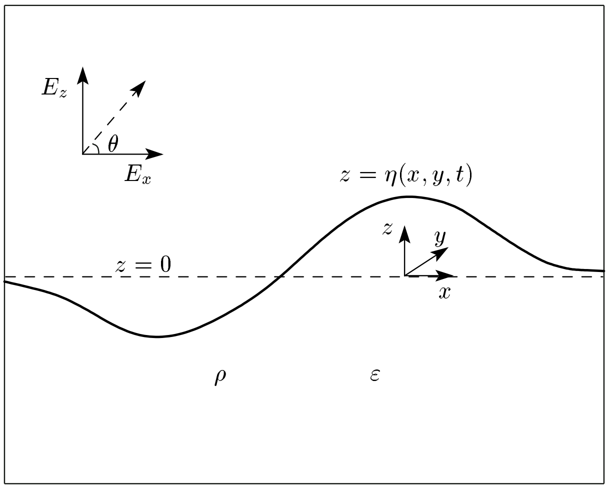
Оба подхода позволяют свести исходную задачу к рассмотрению сравнительно простых (локальных) уравнений в частных производных.

В настоящей работе мы продемонстрируем, что нелинейная динамика свободной поверхности непроводящей жидкости в наклонном электрическом поле может быть описана аналитически вне рамок этих приближений в ситуации, когда электростатические силы доминируют над капиллярными и гравитационными. Для волн малой, но конечной амплитуды будут получены интегродифференциальные уравнения, описывающие распространение волн в направлении горизонтальной составляющей поля. Эти уравнения могут быть решены аналитически в частном случае жидкости со значительной диэлектрической проницаемостью. Согласно найденным решениям, нелинейные волны произвольной геометрии способны распространяться без искажений, что в целом аналогично волнам в горизонтальном поле [22, 23].

Работа построена следующим образом. В разд. 2 проведен анализ дисперсионного соотношения для линейных волн на границе жидкости. Сформулированы условия, при которых электростатические силы будут играть доминирующую роль в эволюции волн. В следующем разд. 3 выписаны уравнения движения идеальной диэлектрической жидкости в наклонном электрическом поле. В разд. 4 в рамках гамильтонова формализма получены слабонелинейные уравнения движения границы жидкости. Разделы 5 и 6 содержат вывод и анализ уравнений, описывающих распространение нелинейных волн в одном выделенном направлении; показано, что волны конечной амплитуды могут распространяться без изменения формы. В заключительном разд. 7 обсуждаются условия реализации подобного режима распространения волн.

2. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим динамику идеальной непроводящей жидкости со свободной поверхностью во внешнем наклонном электрическом поле. В невозмущенном состоянии поверхность жидкости представляет собой плоскость $z = 0$ (оси x и y прямоугольной системы координат лежат в этой плоскости, а ось z направлена по нормали к ней). Внешнее электрическое поле над жидкостью имеет две компоненты: E_x вдоль оси x (горизонтальная компонента) и E_z вдоль оси z (вертикальная) — см. рисунок. Угол наклона вектора напряженности поля к невозмущенной



Схематически показана геометрия задачи

границе есть $\theta = \mathrm{arctg}(E_z/E_x)$. Не теряя общности, можно считать, что $E_x \geq 0$, $E_z \geq 0$ и, соответственно, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

Положим, что форма поверхности задается уравнением $z = \eta(x, y, t)$. Дисперсионное соотношение для линейных волн на границе,

$$\eta \sim \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t),$$

можно представить в виде [25]

$$\omega^2 = g|\mathbf{k}| + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)^2}{\rho(\varepsilon+1)}\left(E_x^2 k_x^2 - \varepsilon^{-1} E_z^2 \mathbf{k}^2\right) + \frac{\sigma}{\rho}|\mathbf{k}|^3, \quad (1)$$

где ω — частота, k_x и k_y — проекции волнового вектора $\mathbf{k}$ на оси x и y, ε_0 — электрическая постоянная, ε — диэлектрическая проницаемость жидкости, ρ — ее плотность, σ — коэффициент поверхностного натяжения. Оно является комбинацией законов дисперсии для случаев вертикального и горизонтального электрических полей [1, 16], влияние которых в линейном приближении является взаимно независимым.

Из дисперсионного соотношения (1) видно, что поведение волн значительно зависит от направления вектора $\mathbf{k}$. Такая анизотропия возникает из-за наклона вектора напряженности поля в направлении оси x. Электростатические силы, обусловленные наличием тангенциальной компоненты поля, оказывают стабилизирующее воздействие на свободную поверхность жидкости. Однако, в отличие от капиллярных и гравитационных сил, электростатические силы стабилизируют поверхность только в направлении оси x и не влияют на ее динамику в поперечном направлении. Эволюция плоских волн, распространяющихся вдоль оси y, полностью определяется вертикальной компонентой поля E_z. Как отмечалось в разд. 1, поведение поверхности жидкости в вертикальном поле хорошо изучено. Поэтому в настоящей работе мы рассмотрим плоские волны, распространяющиеся вдоль оси x (применительно к закону дисперсии (1) это означает $k_y = 0$), т. е. ситуацию, когда и вертикальная, и горизонтальная компоненты поля играют существенную роль. Условия, при которых подобное приближение оправдано, будут сформулированы в разд. 7 работы.

Поверхность жидкости устойчива по отношению к малым возмущениям вдоль оси x (т. е. $\omega^2 \geq 0$ для любых k_x) и, следовательно, по ней будут распространяться волны при

$$\varepsilon E_x^2 + E_c^2 \geq E_z^2, \quad E_c^2 \equiv \frac{2\varepsilon(\varepsilon+1)\sqrt{\rho g \sigma}}{\varepsilon_0(\varepsilon-1)^2}. \qquad (2)$$

Исследуем предельный случай, когда электростатические силы играют доминирующую роль в распространении волн (в частности, скорость волн намного превышает скорость гравитационно-капиллярных волн). Он реализуется, если значение горизонтальной компоненты электрического поля достаточно велико:

$$\varepsilon E_x^2 - E_z^2 = E_x^2(\varepsilon - \operatorname{tg}^2\theta) \gg E_c^2. \qquad (3)$$

Тогда появляется диапазон волновых чисел, в котором влиянием капиллярных и гравитационных сил можно пренебречь. Он задается неравенством

$$gV_0^{-2} \ll k_x \ll \rho V_0^2/\sigma, \qquad (4)$$

где мы ввели постоянную

$$V_0 = E_x(\varepsilon-1)\sqrt{\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - \operatorname{tg}^2\theta)}{\rho\varepsilon(\varepsilon+1)}},$$

имеющую смысл скорости распространения волн вдоль оси x. Видно, что скорость V_0 уменьшается при увеличении угла наклона поля θ.

Необходимым условием реализации (3) является, очевидно, следующее:

$$\varepsilon > \operatorname{tg}^2\theta. \qquad (5)$$

Оно естественным образом выполняется для любой жидкости при $0 \leq \theta < 45^\circ$, а также для жидкостей с достаточно большим значением проницаемости ε при любых углах θ, кроме прямого. Отметим, что неравенство (5) либо (3) автоматически обеспечивает выполнение условия устойчивости (2).

При справедливости (3) дисперсионное соотношение для волн, имеющих только x-компоненту волнового вектора ($k_y = 0$), примет простой вид:

$$\omega^2 \approx V_0^2 k_x^2, \qquad (6)$$

соответствующий линейному одномерному волновому уравнению. Согласно (6) малые возмущения поверхности будут бездисперсионно распространяться в направлении либо против направления оси x.

3. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Выпишем уравнения движения для случая плоской симметрии задачи (нет зависимости от y). Будем считать жидкость невязкой и несжимаемой, а ее течение — безвихревым (потенциальным). Потенциалы скорости жидкости (Φ) и электрического поля внутри (φ_1) и вне (φ_2) жидкости удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad \nabla^2\varphi_{1,2} = 0.$$

Для потенциалов поля должны выполняться граничные условия

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon\partial_n\varphi_1 = \partial_n\varphi_2, \quad z = \eta(x,t), \qquad (7)$$

где ∂_n — производная в направлении нормали к поверхности $z = \eta$. Они соответствуют требованиям непрерывности тангенциальной компоненты вектора напряженности электрического поля и нормальной компоненты вектора электрической индукции на поверхности раздела (считаем, что свободные поверхностные заряды на границе отсутствуют). На удалении от границы движение жидкости затухает, а электрическое поле становится однородным:

$$\Phi \to 0, \quad \varphi_1 \to -E_x x - \varepsilon^{-1}E_z z, \quad z \to -\infty,$$

$$\varphi_2 \to -E_x x - E_z z, \quad z \to +\infty.$$

Введем вспомогательную функцию $\psi(x,t) = \Phi|_{z=\eta}$. Уравнения движения границы (нестационарное уравнение Бернулли и кинематическое граничное условие) представимы в гамильтоновой форме [32], причем функции η и ψ являются канонически-сопряженными величинами:

$$\psi_t = -\frac{\delta H}{\delta\eta}, \quad \eta_t = \frac{\delta H}{\delta\psi}. \qquad (8)$$

Гамильтониан системы H имеет вид [2]

$$H = -\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}\int\limits_{z\le\eta}\left[(\nabla\varphi_1)^2 - E_x^2 - \varepsilon^{-2}E_z^2\right]d^2r -$$

$$-\frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{z\ge\eta}\left[(\nabla\varphi_2)^2 - E_x^2 - E_z^2\right]d^2r + \frac{\rho}{2}\int\limits_{z\le\eta}(\nabla\Phi)^2\,d^2r.$$

В совокупности приведенные соотношения представляют собой замкнутую систему уравнений, описывающих движение диэлектрической жидкости со свободной поверхностью под действием электростатических сил, обусловленных наличием внешнего наклонного электрического поля.

Введем возмущения потенциалов поля:

$$\tilde\varphi_1 = \varphi_1 + E_x x + \varepsilon^{-1}E_z z, \quad \tilde\varphi_2 = \varphi_2 + E_x x + E_z z.$$

Для них справедливо соотношение: $\tilde\varphi_{1,2} \to 0$ при $z \to \mp\infty$. Применяя первую теорему Грина и используя граничные условия (7), гамильтониан можно представить в виде интеграла по свободной поверхности:

$$H = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)E_z}{2}\int\limits_S \eta\,\partial_n\tilde\varphi_1\,dS -$$

$$-\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)E_x}{2}\int\limits_S \frac{\tilde\varphi_1\eta_x}{\sqrt{1+\eta_x^2}}\,dS + \frac{\rho}{2}\int\limits_S \psi\,\partial_n\Phi\,dS, \quad (9)$$

где dS — дифференциал поверхности.

4. МАЛОУГЛОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим динамику жидкости в приближении малости углов наклона поверхности:

$$|\eta_x| \sim \alpha \ll 1,$$

где α — малый параметр. Для удобства перейдем к безразмерным обозначениям:

$$\Phi \to \frac{\Phi E_x}{k_0}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\rho}}, \quad \psi \to \frac{\psi E_x}{k_0}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\rho}}, \quad \tilde\varphi_{1,2} \to \frac{\tilde\varphi_{1,2}E_x}{k_0},$$

$$\eta \to \frac{\eta}{k_0}, \quad t \to \frac{t}{E_x k_0}\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}}, \quad \mathbf{r} \to \frac{\mathbf{r}}{k_0},$$

где k_0 — характерное волновое число, лежащее в интервале (4).

Для построения уравнений движения поверхности необходимо выразить гамильтониан системы через канонические переменные η и ψ и, следовательно, разложить по ним входящие в (9) величины $\tilde\varphi_1$, $\partial_n\tilde\varphi_1$ и $\partial_n\Phi$. Воспользуемся тем, что для гармонических функций, затухающих при $z \to \mp\infty$ (потенциалы Φ, $\tilde\varphi_1$ и, соответственно, $\tilde\varphi_2$, а также их всевозможные производные), справедливы равенства

$$\partial_z\phi_{1,2}\big|_{z=0} = \mp\partial_x\hat H\,\phi_{1,2}\big|_{z=0},$$

$$\phi_{1,2}\big|_{z=\eta} = \phi_{1,2}\big|_{z=0} + \eta\,\partial_z\phi_{1,2}\big|_{z=0} + \ldots,$$

где $\hat H$ — преобразование Гильберта, определяемое как

$$\hat H\phi(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{P.V.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x')}{x-x'}\,dx'$$

и обладающее следующими свойствами:

$$\hat H^2 = -1, \quad 2\hat H\phi\hat H\phi = (\hat H\phi)^2 - \phi^2.$$

Используя эти соотношения в сочетании с граничными условиями (7), после несложных, но довольно громоздких преобразований получим для безразмерного гамильтониана системы с точностью до кубических слагаемых в подынтегральном выражении:

$$H = \frac{1}{2}\int\psi_x\hat H\psi\,dx + \frac{(\varepsilon-\mathrm{tg}^2\,\theta)(\varepsilon-1)^2}{2\varepsilon^2(\varepsilon+1)}\int\eta_x\hat H\eta\,dx -$$

$$-\int\eta\hat H\psi_x\hat H\psi_x\,dx - \frac{2\,\mathrm{tg}\,\theta(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon(\varepsilon+1)^2}\int\eta\eta_x\hat H\eta_x\,dx -$$

$$-\frac{(\varepsilon+\mathrm{tg}^2\,\theta)(\varepsilon-1)^3}{\varepsilon^2(\varepsilon+1)^2}\int\eta\hat H\eta_x\hat H\eta_x\,dx.$$

Вычисляя вариационные производные, находим из (8) искомые уравнения движения:

$$\psi_t - v_0^2\hat H\eta_x = \hat H\psi_x\hat H\psi_x + \frac{(\varepsilon+\mathrm{tg}^2\,\theta)(\varepsilon-1)^3}{\varepsilon^2(\varepsilon+1)^2}\times$$

$$\times\left[\hat H\eta_x\hat H\eta_x + \hat H(\eta\hat H\eta_x)_x + (\eta\eta_x)_x\right] +$$

$$+\frac{2\,\mathrm{tg}\,\theta(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon(\varepsilon+1)^2}\left[\hat H(\eta\eta_x)_x - \eta\hat H\eta_{xx}\right] + O(\alpha^3), \quad (10)$$

$$\eta_t + \hat H\psi_x = -\hat H(\eta\hat H\psi_x)_x - (\eta\psi_x)_x + O(\alpha^3), \quad (11)$$

где v_0 — безразмерная скорость распространения волн, определяемая выражением

$$v_0 = \frac{(\varepsilon-1)\sqrt{\varepsilon-\mathrm{tg}^2\,\theta}}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon+1}}.$$

Для анализа системы нелинейных уравнений (10) и (11) удобно ввести новые функции:

$$f = \frac{\eta + v_0^{-1}\hat H\psi}{2}, \quad g = \frac{\eta - v_0^{-1}\hat H\psi}{2}.$$

Смысл этого преобразования становится понятным, если переписать с их использованием линеаризованные уравнения (10) и (11). Находим, что

$$f_t + v_0 f_x = 0, \quad g_t - v_0 g_x = 0. \tag{12}$$

Как видно, уравнение для f описывает бездисперсионное распространение линейной волны в положительном направлении оси x со скоростью v_0, а уравнение для g — в отрицательном направлении. Таким образом, функции f и g соответствуют волнам, распространяющимся в противоположных направлениях.

5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

В рамках линейного приближения (12) условие $g = 0$ соответствует волнам, распространяющимся по направлению оси x, а условие $f = 0$ — против направления оси x. При рассмотрении нелинейных волн, когда f и g будут взаимодействовать, для волн, бегущих в положительном направлении, следует ожидать, что $g = O(f^2)$, а в отрицательном направлении — что $f = O(g^2)$.

Проанализируем эволюцию волн в рамках квадратично нелинейных интегродифференциальных уравнений (10) и (11). Для определенности рассмотрим волну, распространяющуюся по направлению оси x. Удобно ввести вспомогательные переменные $\xi = x - v_0 t$ и $\tau = \alpha t$, что соответствует рассмотрению медленной эволюции волны (τ — медленное время) в движущейся вместе с волной системе отсчета (ξ — соответствующая пространственная переменная).

Будем искать функции f и g в виде

$$f = \alpha F(\xi, \tau), \quad g = \alpha^2 G(\xi, \tau). \tag{13}$$

После подстановки (13) в уравнения (10) и (11) в основном порядке разложения по α получим

$$F_\tau = v_0(\gamma - 1)\left[\hat{H}(FF_\xi)_\xi - (F\hat{H}F_\xi)_\xi - F_\xi \hat{H} F_\xi\right] - \\ - \beta\left[(FF_\xi)_\xi + \hat{H}F\hat{H}F_{\xi\xi}\right], \tag{14}$$

$$2G_\xi = (\gamma + 1)\left[\hat{H}(FF_\xi)_\xi + (F\hat{H}F_\xi)_\xi\right] - \\ - (\gamma - 1)F_\xi \hat{H} F_\xi - v_0^{-1}\beta\left[(FF_\xi)_\xi + \hat{H}F\hat{H}F_{\xi\xi}\right], \tag{15}$$

где мы обозначили

$$\gamma = \frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon + \operatorname{tg}^2\theta)}{(\varepsilon+1)(\varepsilon - \operatorname{tg}^2\theta)}, \quad \beta = \frac{2(\varepsilon-1)\operatorname{tg}\theta}{(\varepsilon+1)\sqrt{\varepsilon(\varepsilon - \operatorname{tg}^2\theta)}}.$$

Оператор Гильберта в этих уравнениях действует по переменной ξ. Отметим, что в правой части ключевого уравнения (14) имеются две группы нелинейных слагаемых. Первая группа обращается в нуль при $\theta = 45°$, а вторая — при $\theta = 0$.

Важной особенностью полученной системы является то, что уравнение (14) оказывается автономным (в него не входит функция G), а уравнение (15) — линейным относительно G (его решение легко получить интегрированием по ξ).

6. СЛУЧАЙ ЗНАЧИТЕЛЬНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ЖИДКОСТИ

Построение решения нелинейного интегродифференциального уравнения (14) в общем случае затруднительно. Однако, как несложно заметить, это уравнение радикально упрощается в случае малости коэффициентов $v_0(\gamma - 1)$ и β. Правая (нелинейная) часть (14) тогда обращается в нуль. Подобная ситуация возникает при выполнении условия

$$\varepsilon \gg \max(\operatorname{tg}^2\theta, 1). \tag{16}$$

Действительно, тогда $\gamma \approx 1$, $v_0 \approx 1$, $\beta \approx 0$, и уравнения (14), (15) примут следующий компактный вид

$$F_\tau = 0, \quad G_\xi = \hat{H}(FF_\xi)_\xi - (F\hat{H}F_\xi)_\xi. \tag{17}$$

С физической точки зрения условие (16) соответствует рассмотрению непроводящей жидкости с высокой диэлектрической проницаемостью. Так, к примеру, при $\varepsilon = 10$ и $\theta = 30°$ (тогда $\operatorname{tg}^2\theta \approx 0.3$) для коэффициентов в уравнении (14) имеем

$$v_0(\gamma - 1) \approx -0.1, \quad \beta \approx 0.1,$$

т. е. их можно считать малыми. Отметим, что для таких жидкостей, как вода ($\varepsilon \approx 81$), нитробензол ($\varepsilon \approx 36$), этиловый спирт ($\varepsilon \approx 26$), условие (16) выполняется практически при любых углах θ (исключение составляет некоторая окрестность прямого угла $\theta = 90°$).

Решение системы (17) записывается в виде

$$F = F(\xi), \quad G = G(\xi) = \hat{H}FF_\xi - F\hat{H}F_\xi,$$

т. е. F — произвольная функция ξ, не зависящая от времени τ. Функция G, как видно, целиком определяется функцией F и, следовательно, также зависит лишь от переменной ξ.

В терминах исходных функций η и ψ получим

$$\eta = \eta(x - v_0 t) = \alpha F + \alpha^2 G + O(\alpha^3),$$
$$\psi = \psi(x - v_0 t) = -\alpha v_0 \hat{H} F + \alpha^2 v_0 \hat{H} G + O(\alpha^3),$$

т. е. возмущение поверхности представляет собой стационарную волну произвольной формы, бегущую в положительном направлении оси x. Примечательно, что ее скорость не зависит от амплитуды волны и совпадает со скоростью линейных волн v_0. Подобное поведение в целом аналогично поведению нелинейных волн на поверхности жидкости в горизонтальном электрическом поле [22, 23]. Понятно, что полученный результат легко может быть обобщен на случай волн, бегущих в отрицательном направлении.

То обстоятельство, что распространение волн в направлении либо против направления оси x происходит без искажений (т. е. как в рамках линеаризованных уравнений (12)), не означает, что нелинейность не оказывает влияния на эволюцию системы. Нелинейность будет определять взаимодействие встречных нелинейных волн (для горизонтального поля — см. недавнюю работу [33]).

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В работе мы ограничились рассмотрением плоских волн, бегущих вдоль направления наклона внешнего электрического поля (т. е. вдоль оси x). Обсудим, при каких условиях это ограничение является обоснованным.

Для распространяющихся в перпендикулярном направлении (вдоль оси y) волн, как уже указывалось в разд. 2, горизонтальная составляющая поля E_x не оказывает влияния на поведение жидкости. Эволюция поверхности целиком определяется вертикальной составляющей поля E_z. Как можно увидеть из (1), при достаточно больших значениях E_z появляется область волновых чисел, для которых $\omega^2 < 0$, что соответствует апериодической неустойчивости границы жидкости. Подобная ситуация реализуется при $E_z > E_c$. Для сравнения, вдоль оси x условие развития неустойчивости является более сильным: $E_z^2 > \varepsilon E_x^2 + E_c^2$. Как следствие, доминирующую роль в развитии неустойчивости будут играть обладающие большими инкрементами гармоники в направлении y. При

$$E_z \le E_c \tag{18}$$

для любых k_x и k_y будет $\omega^2 \ge 0$, т. е. неустойчивости не возникает.

Понятно, что при $E_z > E_c$ появление неустойчивых гармоник в направлении y нарушает применимость рассмотрения, основанного на исследовании распространяющихся вдоль оси x плоских волн. Это означает, что рассмотрение задачи в плоско-симметричной постановке будет обоснованным только при выполнении условия (18). Проанализируем, как оно сочетается с другими использованными нами условиями (3) и (16).

В первую очередь отметим, что если (16) справедливо, то условие (3) перепишется в более простом виде: $\varepsilon E_x^2 \gg E_c^2$. Объединяя его с условием (18), приходим к следующему двойному неравенству:

$$\operatorname{tg}^2\theta \le (E_c/E_x)^2 \ll \varepsilon. \tag{19}$$

Из (16), в частности, следует, что $\operatorname{tg}^2\theta \ll \varepsilon$, так что реализация условия (19) вполне возможна. При этом двумерное дисперсионное соотношение (1) примет одномерный вид (6) для волновых чисел k_x из диапазона (4) и $k_y = O(k_x)$.

Итак, можно заключить, что основной результат нашей работы — выявленная возможность распространения нелинейных волн вдоль направления наклона внешнего поля без искажений — реализуется при выполнении условия (4) для характерных волновых чисел, условия (16) для проницаемости среды и условия (19) для напряженности приложенного поля.

Работа выполнена в рамках темы государственного задания № 0389-2014-0006 при поддержке РФФИ и Правительства Свердловской области (проект № 13-08-96010), а также Президиума УрО РАН (проект № 15-8-2-8). Работа одного из авторов (Е. А. К.) выполнена при поддержке фонда «Династия» и РФФИ (проект № 14-08-31194).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. R. Melcher, Phys. Fluids **4**, 1348 (1961).
2. Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор, ЖЭТФ **71**, 262 (1976).
3. H. Gleeson, P. Hammerton, D. T. Papageorgiou, and J.-M. Vanden-Broeck, Phys. Fluids **19**, 031703 (2007).
4. A. R. F. Elhefnawy, Int. J. Eng. Sci. **40**, 319 (2002).
5. N. M. Zubarev, Phys. Fluids **18**, 028103 (2006).
6. E. A. Kochurin, N. M. Zubarev, and O. V. Zubareva, Phys. Rev. E **88**, 023014 (2013).
7. Л. П. Горьков, Д. М. Черникова, ДАН СССР **228**, 829 (1976).
8. B. С. Эдельман, УФН **130**, 675 (1980).

9. А. А. Левченко, Г. В. Колмаков, Л. П. Межов-Деглин, М. Г. Михайлов, А. Б. Трусов, ФНТ **25**, 333 (1999).

10. Н. М. Зубарев, Письма в ЖЭТФ **71**, 534 (2000).

11. В. Б. Шикин, УФН **181**, 1241 (2011).

12. Я. И. Френкель, ЖЭТФ **6**, 347 (1936).

13. Н. М. Зубарев, ЖЭТФ **114**, 2043 (1998).

14. Н. М. Зубарев, Письма в ЖТФ **25**(22), 79 (1999).

15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).

16. J. R. Melcher and W. J. Schwarz, Jr., Phys. Fluids **11**, 260 (1968).

17. L. L. Barannyk, D. T. Papageorgiou, and P. G. Petropoulos, Math. Comput. Simul. **82** 1008 (2012).

18. В. М. Коровин, ЖТФ **81**(10), 12 (2011).

19. M. F. El-Sayed, Phys. Rev. E **60**, 7588 (1999).

20. D. T. Papageorgiou and J.-M. Vanden-Broeck, J. Fluid Mech. **508**, 71 (2004).

21. O. Ozen, D. T. Papageorgiou, and P. G. Petropoulos, Phys. Fluids **18**, 042102 (2006).

22. N. M. Zubarev, Phys. Lett. A **333**, 284 (2004).

23. Н. М. Зубарев, Письма в ЖЭТФ **89**, 317 (2009).

24. B. Tao and D. L. Guo, Comput. Math. Appl. **67**, 627 (2014).

25. В. Г. Баштовой, ПМТФ № 1, 81 (1978).

26. В. М. Коровин, ЖТФ **84**(11), 1 (2014).

27. Ю. И. Диканский, А. Р. Закинян, Л. С. Мкртчян, ЖТФ **80**(9), 38 (2010).

28. K. Zakaria, Physica A **327**, 221 (2003).

29. A. R. F. Elhefnawy, Physica A **182**, 419 (1992).

30. A. I. Zhakin, Fluid Dyn. **19**, 422 (1984).

31. D. T. Papageorgiou, P. G. Petropoulos, and J.-M. Vanden-Broeck, Phys. Rev. E **72**, 051601 (2005).

32. В. Е. Захаров, ПМТФ № 2, 86 (1968).

33. Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин, Письма в ЖЭТФ **99**, 729 (2014).