

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ В АНГАРМОНИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ ДЕФЕКТОМ

*И. В. Герасимчук**

*Институт магнетизма Национальной академии наук Украины и МОН Украины
03142, Киев, Украина*

*Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»
03056, Киев, Украина*

Поступила в редакцию 17 марта 2015 г.

В рамках квазиклассического подхода проведено полное исследование солитонных состояний, локализованных у плоского дефекта (дефектного слоя), обладающего нелинейными свойствами, при разных знаках нелинейности среды и разном характере взаимодействия элементарных возбуждений среды с дефектом. Дана квантовая интерпретация этих нелинейных локализованных мод как связанного состояния большого числа элементарных возбуждений. Определены области существования и исследованы свойства таких состояний в зависимости от характера взаимодействия элементарных возбуждений между собой и с дефектом. Аналитически проведено полное исследование устойчивости всех найденных локализованных состояний относительно малых возмущений амплитуды и фазы, и найдена частота малых колебаний локализованного на дефекте состояния.

DOI: 10.7868/S0044451015100053

1. ВВЕДЕНИЕ

Локализованные вблизи дефекта (примеси) состояния были всесторонне рассмотрены в работах И. М. Лифшица (см. обзоры [1, 2]). В последнее время изучение такого типа состояний связано с нелинейными свойствами среды или дефекта. При этом задача о локализации возбуждений на одиночном дефекте является первым этапом по изучению пространственной локализации в периодических (модулированных) системах с дефектами, прежде всего в слоистых структурах различного типа (см., например, [3–20]). Это могут быть магнитные многослойные системы, использование которых вызывает интерес в связи с магнитооптическими свойствами многослойного материала, а также явления гигантского магнитосопротивления в них; слоистые кристаллы с многоатомной элементарной ячейкой; искусственно приготовленные методом многослойного напыления слоистые полупроводники, которые широко используются в сверхрешеточных электронных устройствах. В нелинейной оптике слоистые

среды используются в волоконных системах, оптических линиях задержки и т. д. (см., например, [3, 5–7, 9, 10, 14, 15]).

В нелинейной оптике обычно рассматривается нелинейная среда, содержащая узкие слои, отличающиеся от самой среды своими свойствами. Для волн стационарного профиля проблема эквивалентна исследованию нелинейных возбуждений в одномерной системе с точечными дефектами (нелинейных локальных колебаний). Для одного изолированного линейного дефекта такая задача подробно исследовалась в работах [21–23] для разных знаков нелинейности среды и разного характера взаимодействия элементарных возбуждений с дефектом. Системы с нелинейными дефектами в линейной среде рассматривались, например, в работах [6, 23].

В настоящей работе в рамках нелинейного уравнения Шредингера с произвольным знаком нелинейности среды исследованы возбуждения, локализованные вблизи плоского нелинейного дефектного слоя, как для случая взаимного притяжения между элементарными возбуждениями и дефектным слоем, так и для случая их взаимного отталкивания.

Для лучшего понимания физической природы рассмотренных нелинейных локализованных состо-

*E-mail: igor.gera@gmail.com

яний проведено их квазиклассическое квантование и получена связь полной энергии системы с числом связанных в ней элементарных возбуждений.

Проведено исследование устойчивости всех полученных в такой системе решений относительно малых возмущений амплитуды и фазы согласно схеме, предложенной Вахитовым и Колоколовым [24], и показано, что наличие притягивающего дефекта является фактором, стабилизирующим локализованное (солитонное) состояние. При этом локализованное на дефекте (дефектном слое) состояние существует и устойчиво как в случае взаимного притяжения между элементарными возбуждениями среды, так и в случае их взаимного отталкивания. В первом случае (взаимное притяжение) в спектре малых возмущений солитонного состояния существует мода колебаний его центра тяжести относительно дефекта. Во втором случае (взаимное отталкивание) такой внутренней моды нет, а существует лишь сплошной спектр возбуждений.

В случае отталкивающего дефекта (в притягивающей среде) солитонное состояние неустойчиво: дефект деформирует локализованное состояние и отталкивает его от себя.

Таким образом, проведено полное исследование устойчивости локализованного на нелинейном дефекте состояния для всех возможных случаев взаимодействия возбуждений среды между собой и с дефектом.

Полученные результаты могут найти приложение в нелинейной оптике, в теории ангармонических кристаллов, в теории магнитоупорядоченных сред, динамике сверхтекучего жидкого гелия и т. д.

2. РЕШЕНИЯ ДЛЯ СОЛИТОННЫХ СОСТОЯНИЙ, ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВБЛИЗИ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФЕКТНОГО СЛОЯ, И ИХ СВОЙСТВА

В теории кристаллической решетки локальным дефектом считается дефект с размерами порядка межатомных. При исследовании солитонных состояний, эффективный размер которых в зависимости от частоты солитона может меняться в широких пределах, локальным или точечным дефектом будем считать возмущение характеристик нелинейной среды, сосредоточенное на расстояниях, много меньших ширины солитона. При наличии такого дефекта с нелинейными свойствами нелинейное уравнение

Шредингера (НУШ) для полевой переменной $u(z, t)$ принимает вид

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\sigma |u|^2 u = -\lambda \delta(z) |u|^2 u, \quad (1)$$

где параметр $\sigma = \pm 1$ характеризует взаимодействие элементарных возбуждений в среде ($\sigma = +1$ соответствует их взаимному притяжению, $\sigma = -1$ — отталкиванию), а λ — характеристика величины дефекта (его «мощность»): при $\lambda > 0$ элементарные возбуждения эффективно притягиваются к дефекту, а при $\lambda < 0$ — отталкиваются от него.

В среде без дефектов ($\lambda = 0$) в линейном пределе ($\sigma = 0$) закон дисперсии линейных волн $u(z, t) \sim \exp\{i(kz - \omega t)\}$ имеет вид $\omega = k^2$, а спектр линейных возбуждений занимает полуось $\omega \geq 0$.

Отметим, что в линейной среде при наличии дефекта также существуют локализованные на дефекте колебания. Для линейного дефекта с «мощностью» λ (когда правая часть уравнения (1) равна $-\lambda \delta(z) u$) такие локализованные состояния возможны только в случае притягивающего дефекта ($\lambda > 0$) [23]. Их частота равна $\omega_l = -\lambda^2/4$ и лежит под нижней границей сплошного спектра. При $\lambda < 0$ такие локальные колебания отсутствуют.

Для нелинейного дефекта, рассматриваемого в настоящей работе, в случае линейной среды, когда в левой части уравнения (1) $\sigma = 0$, решение для стационарного локализованного состояния имеет следующий вид:

$$u = u_0 \exp\{-\varepsilon |z| - i\omega t\}, \quad (2)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{-\omega}, \quad u_0 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \sqrt{\varepsilon}.$$

Таким образом, для этой системы мы имеем такую же зависимость частоты локализованного состояния ω от амплитуды поля в месте расположения дефекта, что и для частоты ангармонического осциллятора от амплитуды его колебаний:

$$\omega = -\frac{\lambda^2}{4} u_0^4. \quad (3)$$

Если ввести полное число элементарных возбуждений в системе

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dz \quad (4)$$

и полную энергию системы

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 - \frac{\lambda}{2} \delta(z) |u|^4 \right\} dz, \quad (5)$$

то оказывается, что для этой модели указанные характеристики системы не зависят от частоты:

$$N = \frac{2}{\lambda}, \quad W = 0. \quad (6)$$

Однако такое свойство не является универсальным. При учете нелинейности среды вблизи дефекта, когда в левой части (1) присутствует слагаемое $2\sigma|u|^2u$, и при учете лишь линейных свойств дефекта получаем следующие зависимости [23]:

$$N = 2\sigma \left(\varepsilon - \frac{\lambda}{2} \right), \quad W = -\frac{\sigma}{3} \left(2\varepsilon^3 - \frac{\lambda^3}{4} \right). \quad (7)$$

Для нашей системы уравнение движения (1) является эйлеровым уравнением для лагранжиана с плотностью

$$L = \frac{i}{2} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) - \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 + \sigma |u|^4 + \frac{\lambda}{2} \delta(z) |u|^4. \quad (8)$$

Будем искать стационарные решения НУШ (1) в виде

$$u(z, t) = u(z) \exp(-i\omega t), \quad (9)$$

где $u(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$. Тогда уравнение (1) для функции $u(z)$ принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \omega u + 2\sigma u^3 = -\lambda \delta(z) u^3. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) сводится к решению соответствующего однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \omega u + 2\sigma u^3 = 0 \quad (11)$$

в областях $z > 0$ и $z < 0$ с граничными условиями в точке $z = 0$:

$$u|_{+0} = u|_{-0}, \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{+0} - \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{-0} = -\lambda u^3|_0. \quad (13)$$

В случае $\sigma = +1$ решение, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$u(z) = \frac{\varepsilon}{\text{ch}[\varepsilon(|z| - z_0)]}, \quad (14)$$

где параметр $\varepsilon \equiv \sqrt{-\omega}$ характеризует частоту возбуждения, амплитуду решения и область его локализации, а параметры ε и z_0 связаны соотношением, следующим из второго граничного условия (13):

$$\text{sh}(2\varepsilon z_0) = -\lambda \varepsilon. \quad (15)$$

Из соотношения (15) видно, что $\text{sign } z_0 = -\text{sign } \lambda$; при любом знаке λ интервал допустимых частот неограничен снизу, а максимально возможная частота решения равна нулю и совпадает с нижней границей спектра линейных волн.

Для случая $\sigma = -1$ решение, удовлетворяющее граничным условиям, представимо в виде

$$u(z) = \frac{\varepsilon}{\text{sh}[\varepsilon(|z| - z_0)]}. \quad (16)$$

Величина z_0 может принимать теперь только отрицательные значения, поскольку локализованное состояние в случае $\sigma = -1$ реализуется только в случае притягивающего характера дефекта ($\lambda > 0$). Связь между параметрами ε и z_0 определяется тем же соотношением (15), что и для случая $\sigma = +1$. Из этого соотношения следует, что при положительных λ имеем $z_0 < 0$.

Как и в предыдущем случае ($\sigma = +1$), интервал допустимых частот неограничен снизу, а максимальному (нулевому) значению соответствует граница спектра линейных волн.

Таким образом, нелинейные локализованные состояния существуют при различных соотношениях между параметрами σ и λ (рис. 1). Такие же локализованные состояния имеют место и в системе, изученной в работе [23].

Рассмотрим структуру решений в этих трех случаях подробнее (см. рис. 1).

а) При $\sigma = +1$, $\lambda > 0$ максимум амплитуды колебания находится в точке расположения примеси (поскольку $z_0 < 0$), и решение имеет вид, приведенный на рис. 1а. В данном случае элементарные возбуждения притягиваются как между собой, так и к дефекту.

Вблизи границы спектра линейных волн, когда $\omega \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$), из соотношения (15) следует, что $z_0 \approx -\lambda/2$, а амплитуда локализованного состояния зависит от частоты следующим образом:

$$u(z=0)|_{\omega \rightarrow 0} \approx \sqrt{-\omega}. \quad (17)$$

При $\omega = 0$ нелинейная локализованная мода превращается в обычные колебания линейной теории.

б) При $\sigma = +1$, $\lambda < 0$ элементарные возбуждения притягиваются между собой, но отталкиваются от дефекта, и максимум амплитуды колебания не совпадает с местом расположения дефекта. Локализованное состояние представляет собой связанное состояние двух солитонов, симметрично расположенных по обе стороны дефекта с центрами в точках $\pm z_0$ (рис. 1б).

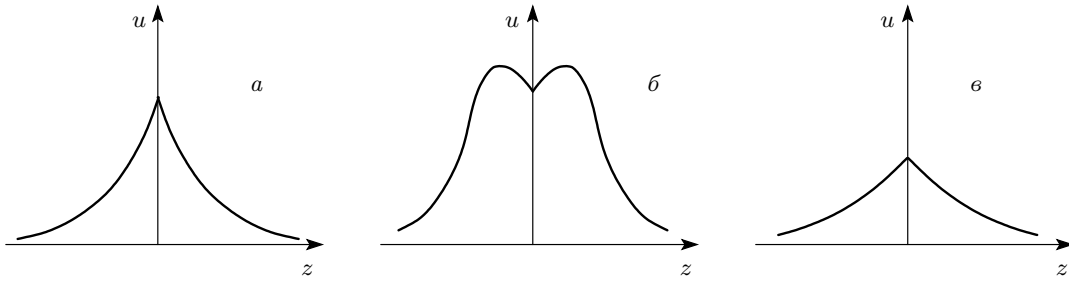


Рис. 1. Распределение поля в нелинейном локализованном состоянии в случаях: а — $\sigma = +1, \lambda > 0$; б — $\sigma = +1, \lambda < 0$; в — $\sigma = -1, \lambda > 0$

В пределе максимально возможной частоты решения ($\omega \rightarrow 0$) расстояние между связанными солитонами стремится к постоянной величине: $2z_0 \approx \approx -\lambda = |\lambda|$, а амплитуда колебаний дефекта стремится к нулю согласно (17). Амплитуда солитонов также стремится к нулю:

$$A|_{\omega=0} = u(z = \pm z_0)|_{\omega=0} = \varepsilon|_{\omega=0} = 0, \quad (18)$$

и этот предел является малоамплитудным.

в) В случае $\sigma = -1, \lambda > 0$ (возбуждения отталкиваются друг от друга, но притягиваются к дефекту) профиль локализованного возбуждения имеет примерно такой же вид, что и при $\sigma = +1, \lambda > 0$ (случай а), — максимум амплитуды колебания находится в точке расположения дефекта (рис. 1в), и такой же частотный интервал существования локальной моды: $-\infty < \omega < 0$.

В линейном пределе ($\omega \rightarrow 0$), как и в случае а), параметр $z_0 \approx -\lambda/2$, но амплитуда колебания примеси стремится теперь к конечной величине (ср. с (17)):

$$u(z = 0)|_{\omega \rightarrow 0} \approx 2/\lambda, \quad (19)$$

а само решение для локализованного состояния (16) трансформируется в функцию со степенными асимптотиками на бесконечности, т. е. в алгебраический солитон вида

$$u(z) = \frac{1}{|z| + \lambda/2}. \quad (20)$$

В работе [23] указано, что обычно возможность существования степенных солитонов на границе сплошного спектра линейных волн связана с учетом конкурирующих нелинейностей в эволюционных уравнениях или с наличием многочастичных взаимодействий разного типа [25]. Например, к возникновению алгебраических солитонов на границе

спектра линейных волн приводит учет парного отталкивания квазичастиц и их трехчастичного притяжения, т. е. учет слагаемых типа $u|u|^4$ в уравнении (1) с $\sigma = -1$. Ранее было показано, что такие солитоны являются неустойчивыми [26].

В рассматриваемом нами случае с дефектом ситуация во многом сходная: имеются два типа взаимодействий — парное межчастичное взаимодействие, описываемое слагаемым $2\sigma|u|^2u$, и одночастичное взаимодействие элементарных возбуждений с неоднородностью, эффективная интенсивность которого, однако, зависит от величины поля: $\lambda_{eff} = \lambda|u|^2$ (заметим, что в [23] интенсивность одночастичного взаимодействия определяется константой λ). Степенные солитоны в нашем случае существуют при парном отталкивании квазичастиц ($\sigma = -1$) и их притяжении к дефекту ($\lambda > 0$).

Как видно из анализа трех возможных локализованных состояний, в отличие от системы, исследованной в работе [23], все локализованные состояния в рассматриваемой нами системе существуют в одном частотном интервале: $-\infty < \omega < 0$.

3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Проведем квазиклассическое квантование рассмотренных локализованных состояний.

Уравнение (1) описывает динамику консервативной системы и поэтому обладает очевидным интегралом движения — полной энергией системы

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} dz \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 - \sigma|u|^4 - \frac{\lambda}{2} \delta(z)|u|^4 \right\}, \quad (21)$$

а также имеет дополнительный интеграл движе-

ния (4) — полное число элементарных возбуждений (квантов поля), локализованных в системе [21].

До сих пор мы характеризовали локализованное решение его частотой ω (параметром ε), но для понимания квантовомеханической природы солитонного состояния удобно перейти от частоты как его динамической характеристики к числу связанных в этом локализованном состоянии возбуждений N .

Рассмотрим вначале случай $\sigma = +1$. Выразим интегралы движения N и W через частоту ω (или связанный с ней параметр ε). Подставляя явный вид решения (14) в выражение (4) и учитывая при этом зависимость $z_0(\varepsilon)$ из (15), получаем соотношение, определяющее полное число возбуждений N :

$$N = 2\varepsilon (1 + \text{th}(\varepsilon z_0)) = 2\varepsilon + \frac{2}{\lambda} (1 - \sqrt{1 + (\lambda\varepsilon)^2}). \quad (22)$$

Из полученного соотношения следует, что при значениях $\lambda > 0$ (притягивающем характере дефекта) полное число возбуждений в системе имеет ограничение сверху:

$$0 \leq N < 2/\lambda, \quad \lambda > 0. \quad (23)$$

При этом при $\varepsilon \rightarrow +\infty$ полное число возбуждений N стремится к своему максимальному (критическому) значению $N^* = 2/\lambda$ согласно

$$N \Big|_{\substack{\lambda > 0 \\ \varepsilon \rightarrow +\infty}} \approx \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2\varepsilon}, \quad (24a)$$

а при $\varepsilon \rightarrow 0$ параметр N стремится к нулю как

$$N \Big|_{\substack{\lambda > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \approx 2\varepsilon - \lambda\varepsilon^2. \quad (24b)$$

Заметим, что критическое значение $N^* = 2/\lambda$ соответствует полному числу возбуждений в системе с нелинейным дефектом в линейной среде (см. (6)).

При значениях $\lambda < 0$ величина N может принимать любые положительные значения:

$$N \geq 0, \quad \lambda < 0. \quad (25)$$

При этом при $\varepsilon \rightarrow +\infty$ полное число возбуждений $N \rightarrow \infty$ согласно

$$N \Big|_{\substack{\lambda < 0 \\ \varepsilon \rightarrow +\infty}} \approx 4\varepsilon, \quad (26a)$$

а при $\varepsilon \rightarrow 0$ параметр $N \rightarrow 0$ как

$$N \Big|_{\substack{\lambda < 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \approx 2\varepsilon + |\lambda|\varepsilon^2. \quad (26b)$$

Из соотношения (22) легко получить обратную зависимость $\varepsilon = \varepsilon(N)$:

$$\varepsilon = \frac{N}{4} \frac{4 - \lambda N}{2 - \lambda N} \quad (27)$$

и, соответственно, зависимость $\omega = \omega(N)$:

$$\omega = - \left(\frac{N}{4}\right)^2 \left(\frac{4 - \lambda N}{2 - \lambda N}\right)^2 = - \left(\frac{N}{4}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{2 - \lambda N}\right)^2. \quad (28)$$

Аналогично, используя явный вид решения (14) в выражении (21) и учитывая соотношение (15), можно получить в явном виде зависимость полной энергии системы W от параметра ε : $W = W(\varepsilon)$. Далее, исключив из выражения для $W = W(\varepsilon)$ и зависимости $N = N(\varepsilon)$ (22) параметр ε с помощью формулы (27), легко найти связь полной энергии локализованного состояния с полным числом связанных в нем элементарных возбуждений:

$$W(N) = \frac{N^3}{6} - \frac{\lambda N^4}{32} - \frac{N^3}{32} \frac{(4 - \lambda N)^2}{2 - \lambda N}. \quad (29)$$

Еще раз отметим, что полное число возбуждений N в случае $\lambda > 0$ не может превышать максимального значения $N^* = 2/\lambda$ (23).

Обратимся теперь к случаю $\sigma = -1$. Подставляя решение (16) в формулу (4) для N и используя зависимость $z_0(\varepsilon)$ из соотношения (15), получаем следующую зависимость $N = N(\varepsilon)$ (отличную от выражения (22) для случая $\sigma = +1$):

$$N = -2\varepsilon (1 + \text{cth}(\varepsilon z_0)) = -2\varepsilon + \frac{2}{\lambda} (1 + \sqrt{1 + (\lambda\varepsilon)^2}). \quad (30)$$

Из этого соотношения следует, что полное число возбуждений в системе N лежит в следующем диапазоне (в случае $\sigma = -1$ параметр λ может быть только положительным):

$$2/\lambda < N \leq 4/\lambda. \quad (31)$$

При этом, при $\varepsilon \rightarrow +\infty$ число возбуждений N стремится к своему критическому значению $N^* = 2/\lambda$ согласно

$$N \Big|_{\substack{\lambda > 0 \\ \varepsilon \rightarrow +\infty}} \approx \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2\varepsilon}, \quad (32a)$$

а при $\varepsilon \rightarrow 0$ параметр N стремится к максимальному значению $N_{max} = 4/\lambda$ как

$$N \Big|_{\substack{\lambda > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \approx \frac{4}{\lambda} - 2\varepsilon + \lambda\varepsilon^2. \quad (32b)$$

Из выражения (30) легко найти обратную зависимость $\varepsilon = \varepsilon(N)$ (ср. (27)):

$$\varepsilon = - \frac{N}{4} \frac{4 - \lambda N}{2 - \lambda N}. \quad (33)$$

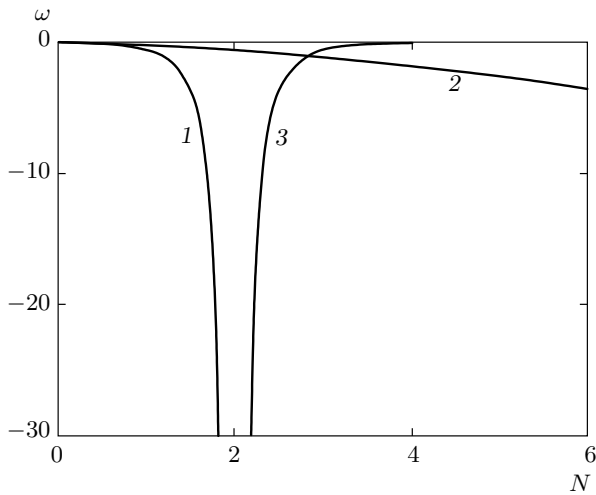


Рис. 2. Зависимости $\omega = \omega(N)$ для трех возможных типов нелинейных локализованных состояний: $a - \sigma = +1, \lambda = +1$ (кривая 1); $b - \sigma = +1, \lambda = -1$ (кривая 2); $c - \sigma = -1, \lambda = +1$ (кривая 3)

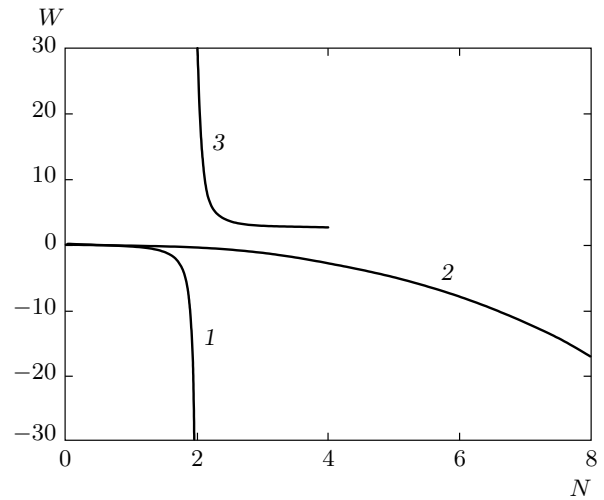


Рис. 3. Зависимости $W = W(N)$ для трех возможных типов нелинейных локализованных состояний: $a - \sigma = +1, \lambda = +1$ (кривая 1); $b - \sigma = +1, \lambda = -1$ (кривая 2); $c - \sigma = -1, \lambda = +1$ (кривая 3)

При этом зависимость $\omega = \omega(N)$ в случае $\sigma = -1$ имеет такой же аналитический вид (28), что и в случае $\sigma = +1$.

Такой же, как и для случая $\sigma = +1$, оказывается и зависимость (29) полной энергии локализованного состояния от количества связанных в нем элементарных возбуждений $W = W(N)$.

При $\sigma = +1$ из положительности интеграла движения N в (22) и соотношений (23) и (25) следует, что при любых значениях λ возможны любые положительные значения ε . При этом граничное условие (15) не накладывает никаких дополнительных ограничений на область существования решения, которая определяется, таким образом, простым соотношением:

$$\varepsilon \geq 0. \tag{34}$$

При $\sigma = -1$ (когда решение существует только при $\lambda > 0$) из положительности величины N в (30) и соотношения (31), а также из граничного условия (15) следует, что и в этом случае область существования решения также определяется соотношением (34).

Значение $\varepsilon = 0$ ($\omega = 0$) соответствует нижней границе спектра линейных волн.

На рис. 2 представлены зависимости $\omega = \omega(N)$ для всех трех возможных локализованных состояний для значений $\lambda = \pm 1$ ($N^* = 2$). (Учтены области допустимых значений N (23), (25), (31).)

На рис. 3 представлены зависимости $W = W(N)$ для всех возможных локализованных состояний ($\lambda = \pm 1, N^* = 2$).

Если продифференцировать зависимость (29) по N и воспользоваться соотношениями (22) и (30) для $N(\varepsilon)$, то легко убедиться в выполнении обычного для одночастотных солитонов соотношения

$$\frac{\partial W}{\partial N} = \omega, \tag{35}$$

которое имеет место в консервативных нелинейных системах, обладающих интегралом движения N (см., например, [25]). Таким образом, частота нелинейного локального колебания играет роль химического потенциала для связанных в нем элементарных возбуждений [25].

4. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Исследуем устойчивость найденных решений относительно малых возмущений амплитуды и фазы согласно схеме, предложенной Вахитовым и Колоколовым [24].

Представляя решение уравнения (1) в виде

$$u(z, t) = \tilde{u}(z, t) + \theta(z, t) = u(z) \exp(-i\omega t) + v(z, t) \exp(-i\omega t), \tag{36}$$

где $\tilde{u}(z, t)$ — решение уравнения (1) для стационарного солитона (9) и $|\theta(z, t)| \ll |\tilde{u}(z, t)|$, линеаризуем (1) по малым добавкам $v(z, t)$. В результате для комплексной функции $v(z, t)$ получим уравнение

$$i \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} - \varepsilon^2 v(z, t) + 4\sigma u^2(z)v(z, t) + 2\sigma u^2(z)v^*(z, t) = -2\lambda\delta(z)u^2(z)v(z, t) - \lambda\delta(z)u^2(z)v^*(z, t), \quad (37)$$

где «*» означает комплексное сопряжение.

Представляя решение уравнения (37) в виде

$$v(z, t) = \{A(z) + iB(z)\} \exp(\Omega t), \quad (38)$$

получаем для функций A и B систему двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\hat{L}_0 B = \Omega A, \quad (39)$$

$$\hat{L}_1 A = -\Omega B, \quad (40)$$

где операторы \hat{L}_0 и \hat{L}_1 определяются выражениями

$$\hat{L}_0 = -\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - 2\sigma u^2(z) - \lambda\delta(z)u^2(z), \quad (41)$$

$$\hat{L}_1 = -\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - 6\sigma u^2(z) - 3\lambda\delta(z)u^2(z), \quad (42)$$

а функция $u(z)$, с учетом введенных обозначений, должна удовлетворять уравнению

$$\hat{L}_0 u(z) = 0. \quad (43)$$

Исключив из системы уравнений (39), (40) функцию B , приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$\hat{L}_0 \hat{L}_1 A = -\Omega^2 A. \quad (44)$$

Отметим, что, хотя сам оператор $\hat{L}_0 \hat{L}_1$ не является эрмитовым, вещественность его собственных значений Ω^2 легко доказать, если свести исходную задачу на собственные значения (39), (40) к эквивалентной задаче на собственные значения для эрмитового оператора:

$$\hat{L}^- \hat{L}_1 \hat{L}^+ W = -\Omega^2 W, \quad (45)$$

где

$$\hat{L}^\pm = \pm \frac{d}{dz} + \frac{1}{u} \frac{du}{dz}, \quad W = \hat{L}^- B, \quad \hat{L}_0 = \hat{L}^+ \hat{L}^-.$$

Из вещественности величины Ω^2 следует, что если среди собственных значений Ω^2 есть положительные (на классе собственных функций, ортогональных u), то наше локализованное солитонное решение

неустойчиво и малые возмущения экспоненциально нарастают.

В силу того, что функция u нигде в нуль не обращается, на подпространстве функций, ортогональных u , существует положительно определенный оператор \hat{L}_0^{-1} , обратный оператору \hat{L}_0 . Вследствие этого к уравнению (44) можно применить вариационный принцип, согласно которому наименьшее собственное значение $-\Omega_0^2$ равно

$$-\Omega_0^2 = \min \left[\frac{\langle \varphi | \hat{L}_1 | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \hat{L}_0^{-1} | \varphi \rangle} \right], \quad \langle u | \varphi \rangle = 0. \quad (46)$$

Тогда задача об устойчивости сводится к исследованию условного минимума функционала $F = \langle \varphi | \hat{L}_1 | \varphi \rangle$. Если он не отрицателен, то решение устойчиво.

С помощью метода неопределенных множителей Лагранжа можно получить уравнение для функции ψ , минимизирующей функционал F при условии $\langle u | \psi \rangle = 0$:

$$\hat{L}_1 \psi = \chi \psi + \alpha u. \quad (47)$$

Минимум F определяется наименьшим значением χ , при котором уравнение (47) имеет решение. Из (47), с учетом условия $\langle u | \psi \rangle = 0$, следует (см. [24]) уравнение для χ :

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{\chi_n - \chi} = \alpha f(\chi) = 0, \quad (48)$$

где $C_n = \langle u | \psi_n \rangle$ и ψ_n, χ_n — соответственно собственные функции и собственные значения оператора \hat{L}_1 .

Проведем вначале анализ устойчивости решений для случая мягкой нелинейности $\sigma = +1$.

В отсутствие дефекта исследование устойчивости решения (14) полностью соответствует схеме, изложенной в работе [24]. При этом оператор \hat{L}_1 определяется выражением

$$\hat{L}_1^{(0)} = -\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - \frac{6\varepsilon^2}{\text{ch}^2(\varepsilon z)}. \quad (49)$$

Собственная функция основного состояния этого оператора и соответствующее собственное значение имеют вид

$$\psi_1^{(0)} = \frac{\sqrt{3\varepsilon}/2}{\text{ch}^2(\varepsilon z)}, \quad \chi_1^{(0)} = -3\varepsilon^2, \quad (50)$$

а собственная функция и собственное значение следующего состояния равны соответственно

$$\psi_2^{(0)} = \sqrt{\frac{3\varepsilon}{2}} \frac{\text{sh}(\varepsilon z)}{\text{ch}^2(\varepsilon z)}, \quad \chi_2^{(0)} = 0. \quad (51)$$

В отсутствие примеси, как хорошо известно, солитонное решение НУШ устойчиво. Наличие дефекта усложняет задачу исследования устойчивости решений, так как в этом случае операторы \hat{L}_0 и \hat{L}_1 имеют более сложный вид, чем в случае $\lambda = 0$. Убедемся, однако, что для значений $\varepsilon|z_0| \ll 1$ оператор \hat{L}_1 будет иметь вид $\hat{L}_1 = \hat{L}_1^{(0)} + \hat{\eta}$, где $\hat{\eta}$ — возмущение, линейное по малым добавкам, пропорциональным малому параметру $|\lambda|\varepsilon/2$. При этом возможно учесть изменение собственных функций и собственных значений оператора $\hat{L}_1^{(0)}$ по теории возмущений.

При выполнении неравенства $\varepsilon|z_0| \ll 1$ из граничного условия (15) следует, что

$$\varepsilon|z_0| \approx \frac{|\lambda|\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon \ll \frac{2}{|\lambda|}. \quad (52)$$

При этом из формулы (22) имеем соотношение между параметрами N и λ , определяющее область на плоскости (N, λ) , в которой допускается решение поставленной задачи по теории возмущений:

$$N \ll \frac{1}{|\lambda|}. \quad (53)$$

Раскладывая решение (14) по степеням малого параметра $\varepsilon|z_0|$ и учитывая в разложении зависимость (52), с точностью до членов первого порядка по $|\lambda|\varepsilon/2$ получаем

$$u(z) = \frac{\varepsilon}{\text{ch}(\varepsilon z)} \left\{ 1 - \frac{\lambda\varepsilon}{2} \text{th}(\varepsilon|z|) \right\}. \quad (54)$$

Подставляя полученное выражение для $u(z)$ в формулу (42) для оператора \hat{L}_1 и учитывая слагаемые, содержащие степени $|\lambda|\varepsilon/2$ не выше первой, находим выражение для оператора \hat{L}_1 :

$$\hat{L}_1 = -\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - \frac{6\varepsilon^2}{\text{ch}^2(\varepsilon z)} + \frac{\lambda\varepsilon}{2} \times \left\{ \frac{12\varepsilon^2 \text{sh}(\varepsilon|z|)}{\text{ch}^3(\varepsilon z)} - \frac{6\varepsilon\delta(z)}{\text{ch}^2(\varepsilon z)} \right\} \equiv \hat{L}_1^{(0)} + \hat{\eta}, \quad (55)$$

где оператор

$$\hat{\eta} = \frac{\lambda\varepsilon}{2} \left\{ \frac{12\varepsilon^2 \text{sh}(\varepsilon|z|)}{\text{ch}^3(\varepsilon z)} - \frac{6\varepsilon\delta(z)}{\text{ch}^2(\varepsilon z)} \right\} \sim \frac{|\lambda|\varepsilon}{2} \quad (56)$$

— возмущение оператора $\hat{L}_1^{(0)}$.

По теории возмущений получаем добавки к собственным значениям оператора $\hat{L}_1^{(0)}$:

$$\chi_n^{(1)} = \eta_{nn} = \langle \psi_n^{(0)} | \hat{\eta} | \psi_n^{(0)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi_n^{(0)*} \hat{\eta} \psi_n^{(0)}. \quad (57)$$

При этом собственные функции оператора \hat{L}_1 принимают вид $\psi_n = \psi_n^{(0)} + \zeta(z)$, где $\zeta(z) \sim \sim |\lambda|/(2\varepsilon)$ — поправка той же четности, что и функция $\psi_n^{(0)}$.

Воспользовавшись выражением для возмущающего оператора $\hat{\eta}$ (56) и собственными функциями нулевого приближения для двух нижних уровней (50) и (51), находим поправки к собственным значениям $\chi_1^{(1)}$ и $\chi_2^{(1)}$.

Поправка к собственному значению, соответствующему основному состоянию оператора $\hat{L}_1^{(0)}$, имеет вид

$$\chi_1^{(1)} = \frac{\lambda\varepsilon}{2} \frac{3\varepsilon}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{\text{ch}^2(\varepsilon z)} \times \left\{ \frac{12\varepsilon^2 \text{sh}(\varepsilon|z|)}{\text{ch}^3(\varepsilon z)} - \frac{6\varepsilon\delta(z)}{\text{ch}^2(\varepsilon z)} \right\} \frac{1}{\text{ch}^2(\varepsilon z)} = -\frac{3\lambda\varepsilon^3}{4}, \quad (58)$$

а поправка к собственному значению $\chi_2^{(0)}$ следующего уровня равна

$$\chi_2^{(1)} = \frac{\lambda\varepsilon}{2} \frac{3\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\text{sh}(\varepsilon z)}{\text{ch}^2(\varepsilon z)} \times \left\{ \frac{12\varepsilon^2 \text{sh}(\varepsilon|z|)}{\text{ch}^3(\varepsilon z)} - \frac{6\varepsilon\delta(z)}{\text{ch}^2(\varepsilon z)} \right\} \frac{\text{sh}(\varepsilon z)}{\text{ch}^2(\varepsilon z)} = \frac{3\lambda\varepsilon^3}{2}. \quad (59)$$

Таким образом, учитывая выражения для $\chi_1^{(0)}$ и $\chi_2^{(0)}$, находим приближенные (с точностью до $|\lambda|\varepsilon/2$) собственные значения двух нижних собственных состояний оператора \hat{L}_1 :

$$\chi_1 = -3\varepsilon^2 - \frac{3\lambda\varepsilon^3}{4}, \quad \chi_2 = \frac{3\lambda\varepsilon^3}{2}. \quad (60)$$

Видно, что $\chi_1^{(0)} < \chi_1 < 0$ и $\chi_2 < 0$ при $\lambda < 0$; $\chi_1 < \chi_1^{(0)} < 0$ и $\chi_2 > 0$ при $\lambda > 0$. Из-за разного знака собственного значения χ_2 при $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$ эти два случая должны рассматриваться отдельно.

1. Случай $\sigma = +1$, $\lambda < 0$. При $\alpha = 0$ (см. (47)) ψ является одной из собственных функций оператора \hat{L}_1 , а χ совпадает с одним из его собственных значений. Поскольку собственная функция ψ_1 не ортогональна u (см. [24]), а $\langle u | \psi_2 \rangle = 0$, наименьшее собственное значение $-\Omega_0^2$ определяется значением χ_2 . Итак, условный минимум функционала F отрицателен и равен $\chi_2 = 3\lambda\varepsilon^3/2 < 0$, а значит Ω — вещественно.

Таким образом, для отрицательных λ существуют экспоненциально растущие возмущения, и солитонное решение неустойчиво. Неустойчивость проявляется в экспоненциальном возрастании пространственно-антисимметричной добавки (симметричная

функция ψ_1 соответствует основному собственному значению χ_1). Динамику солитона в этом случае можно представить следующим образом: происходит «перекачка» квазичастиц из одного полупространства (по одну сторону от дефекта) в другое. При больших временах мы не можем решить задачу, но очевидно, что произойдет полная «перекачка» частиц в одно из полупространств и образуется солитон, который, «оттолкнувшись» от дефекта, уйдет на бесконечность.

Решение, учитывающее малые добавки к форме солитона в случае $\lambda < 0$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u(z, t) &= \tilde{u}(z, t) + v(z, t) \exp(-i\omega t) \approx \\
 &\approx \left[\frac{\varepsilon}{\text{ch}(\varepsilon z)} - \frac{\lambda \varepsilon}{2} \frac{\text{sh}(\varepsilon |z|)}{\text{ch}^2(\varepsilon z)} \right] \exp(-i\omega t) + \\
 &+ \xi \sqrt{\frac{3\varepsilon}{2}} \frac{\text{sh}(\varepsilon z)}{\text{ch}^2(\varepsilon z)} \exp(\Omega t) \exp(-i\omega t) \approx \\
 &\approx \frac{\varepsilon}{\text{ch} \left\{ \varepsilon \left[z + \text{sign}(z) \frac{\lambda}{2} - \frac{\xi}{\varepsilon} \sqrt{\frac{3}{2\varepsilon}} \exp(\Omega t) \right] \right\}} \times \\
 &\times \exp(-i\omega t), \quad (61)
 \end{aligned}$$

где $\xi \ll 1$. (Здесь для малой добавки $v(z, t)$ (см. (38)) использовано основное приближение в (39), (40): $A \approx \xi \psi_2^{(0)}$, $B \approx 0$ с $\psi_2^{(0)}$ из (51).)

Таким образом, в этом приближении амплитуда решения не меняется, но происходит синхронный сдвиг в одну сторону центров двух солитонов, расположенных по разные стороны дефекта и связанных с ним:

$$z_0^\pm \approx \text{sign}(z) \frac{\lambda}{2} + \frac{\xi}{\varepsilon} \sqrt{\frac{3}{2\varepsilon}} \exp(\Omega t). \quad (62)$$

Для нахождения инкремента нарастания этой сдвиговой неустойчивости Ω воспользуемся формулой (44), взяв ее в обкладку с антисимметричной функцией ψ_2 , соответствующей второму уровню оператора \hat{L}_1 . В основном порядке по малому параметру $|\lambda|\varepsilon/2$ выражение (46) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Omega^2 &\approx - \frac{\langle \psi_2^{(0)} | \hat{\eta} | \psi_2^{(0)} \rangle}{\langle \psi_2^{(0)} | \hat{L}_0^{(0)-1} | \psi_2^{(0)} \rangle} = \\
 &= - \frac{\chi_2}{\langle \psi_2^{(0)} | \hat{L}_0^{(0)-1} | \psi_2^{(0)} \rangle}, \quad (63)
 \end{aligned}$$

где $\chi_2 = 3\lambda\varepsilon^3/2$, оператор $\hat{L}_0^{(0)}$ определяется выражением (41) при $\lambda = 0$, а функция $\psi_2^{(0)}$ — формулой (51). Легко проверить прямой подстановкой, что

$$\hat{L}_0^{(0)} \left[\frac{z}{\text{ch}(\varepsilon z)} \right] = \frac{2\varepsilon \text{sh}(\varepsilon z)}{\text{ch}^2(\varepsilon z)}, \quad (64)$$

и, следовательно,

$$\hat{L}_0^{(0)-1} \psi_2^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2\varepsilon}} \frac{z}{\text{ch}(\varepsilon z)}. \quad (65)$$

Таким образом, знаменатель в формуле (63) равен

$$\langle \psi_2^{(0)} | \hat{L}_0^{(0)-1} | \psi_2^{(0)} \rangle = \frac{3}{4\varepsilon^2}, \quad (66)$$

а инкремент нарастания неустойчивости равен

$$\Omega \approx \varepsilon^2 \sqrt{2|\lambda|\varepsilon}. \quad (67)$$

2. Случай $\sigma = +1$, $\lambda > 0$. Поскольку в этом случае $\chi_2 > 0$, при $\alpha = 0$ условный минимум функционала F положителен и для анализа устойчивости необходимо проверить случай $\alpha \neq 0$.

При ненулевом множителе Лагранжа α условный минимум функционала F определяется наименьшим корнем (χ_{min}) уравнения (48) $f(\chi) = 0$. Можно показать [24], что в этом случае, так же как и для $\lambda = 0$, знак χ_{min} определяется знаком величины $f(\chi = 0)$: при $f(0) \leq 0$ имеем $\chi_{min} \geq 0$, а при $f(0) > 0$ величина χ_{min} отрицательна.

При $\chi = 0$ формула (48) легко может быть переписана в виде $f(0) = \langle u | \hat{L}_1^{-1} | u \rangle$. Для вычисления этой величины достаточно продифференцировать уравнение (43) по ε^2 и, воспользовавшись видом операторов \hat{L}_0 и \hat{L}_1 (41), (42), убедиться в выполнении соотношения

$$\hat{L}_1 \left[\frac{\partial u(z)}{\partial \varepsilon^2} \right] + u(z) = 0. \quad (68)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \langle u | \hat{L}_1^{-1} | u \rangle = - \left\langle u \left| \frac{\partial u}{\partial \varepsilon^2} \right. \right\rangle = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon^2} \langle u | u \rangle = \\
 &= - \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial \varepsilon^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial \omega}, \quad (69)
 \end{aligned}$$

где N — число квазичастиц, определяемое формулой (22).

Итак, знак условного минимума функционала F при $\alpha \neq 0$ определяется знаком производной $\partial\omega/\partial N$ (т.е. знаком величины $\partial^2 E/\partial N^2$): при $\partial\omega/\partial N \leq 0$ величина $\chi_{min} \geq 0$ и условный минимум функционала F положителен, и, как следует из (46), $\Omega^2 < 0$.

В случае $\sigma = +1$ и $\lambda > 0$ из зависимости $\omega = \omega(N)$ (28) следует, что $\partial\omega/\partial N < 0$. Это означает отсутствие экспоненциально растущих возмущений (Ω — чисто мнимая величина) и устойчивость решения в линейном по возмущению приближении. Таким образом, антисимметричные добавки к решению $\tilde{u}(z, t)$ описывают малые колебания солитона относительно примеси.

Решение (36) при положительных λ и $\sigma = +1$ может быть приведено к виду, аналогичному (61), но с осцилляциями центра солитона:

$$u(z, t) \approx \frac{\varepsilon}{\operatorname{ch} \left\{ \varepsilon \left[z + \operatorname{sign}(z) \frac{\lambda}{2} - \frac{\xi}{\varepsilon} \sqrt{\frac{3}{2\varepsilon}} \cos(\nu t) \right] \right\}} \times \exp(-i\omega t), \quad (70)$$

где $\xi \ll 1$ — малая (произвольная) амплитуда колебаний центра солитона относительно места локализации примеси, а $\nu \equiv i\Omega$ — частота этих колебаний.

Для нахождения частоты ν воспользуемся формулой (63), где теперь $\chi_2 = 3\lambda\varepsilon^3/2 > 0$ (см. (60)). Таким образом, частота осцилляций центра солитона равна

$$\nu \approx \varepsilon^2 \sqrt{2\lambda\varepsilon}. \quad (71)$$

Перейдем к анализу устойчивости решения (16), описывающего локализованное на примеси нелинейное возбуждение в случае $\sigma = -1$ и $\lambda > 0$ (случай 3).

Следуя изложенной выше схеме, покажем, что при $\sigma = -1$ и $\lambda > 0$ оператор \hat{L}_1 является положительно определенным. Рассмотрим вначале оператор \hat{L}_0 , который имеет в этом случае следующий вид (см. (41)):

$$\hat{L}_0 = -\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 + 2u^2(z) - \lambda\delta(z)u^2(z), \quad (72)$$

где $u(z)$ определяется выражением (16).

Решение $u(z)$ является собственной функцией основного состояния оператора \hat{L}_0 с нулевым собственным значением (см. (43)). Оператор \hat{L}_0 , таким образом, является неотрицательным.

«Потенциальная энергия», соответствующая оператору \hat{L}_0 , имеет вид

$$U_0(z) = \varepsilon^2 + 2u^2(z) - \lambda\delta(z)u^2(z). \quad (73)$$

Существенно, что, в отличие от случая $\sigma = +1$, $\lambda > 0$, добавка к δ -образному потенциалу теперь положительна. Потенциальная яма (73) содержит единственный дискретный уровень, соответствующий основному состоянию оператора \hat{L}_0 с нулевым собственным значением, а следующий уровень совпадает с нижней границей зоны сплошного спектра.

Оператор \hat{L}_1 имеет в нашем случае следующий вид (см. (42)):

$$\hat{L}_1 = -\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 + 6u^2(z) - 3\lambda\delta(z)u^2(z). \quad (74)$$

Потенциальная энергия, соответствующая оператору \hat{L}_1 , имеет вид

$$U_1 = \varepsilon^2 + 6u^2(z) - 3\lambda\delta(z)u^2(z) = \varepsilon^2 + 3[2u^2(z) - \lambda\delta(z)u^2(z)]. \quad (75)$$

Таким образом, в отличие от случая $\sigma = +1$, $\lambda > 0$, когда имело место неравенство

$$\int U_0(z) dz > \int U_1(z) dz, \quad (76)$$

при $\sigma = -1$ имеем

$$\int U_0(z) dz < \int U_1(z) dz. \quad (77)$$

Следовательно, при переходе от оператора \hat{L}_0 к оператору \hat{L}_1 вся система собственных значений поднимается вверх, что означает отсутствие у оператора \hat{L}_1 отрицательных собственных значений и второго дискретного уровня. Отсюда можно сделать вывод об устойчивости связанного состояния при $\sigma = -1$, $\lambda > 0$ во всей области его существования и отсутствии внутренней колебательной моды (связанной со вторым дискретным уровнем) в этом нелинейном локализованном возбуждении.

Таким образом, мы провели полное исследование устойчивости солитонного состояния, локализованного на дефекте, обладающем нелинейными свойствами, для случая произвольного характера взаимодействия квазичастиц между собой и с дефектом.

5. ВЫВОДЫ

В данной работе в рамках нелинейного уравнения Шредингера с произвольным знаком нелинейности исследованы все возможные стационарные состояния, которые локализованы на нелинейном дефекте (вблизи плоского дефектного слоя), при разных свойствах этого дефекта.

Показано, что результат можно трактовать на языке элементарных возбуждений, взаимодействующих между собой и с дефектом. Установлено, что в нелинейной среде с дефектным слоем, обладающим нелинейными свойствами, локализованные на таком дефекте состояния возможны при любом знаке ангармонизмов (при любом знаке σ) в случае притяжения элементарных возбуждений к дефектному слою ($\lambda > 0$). При взаимном притяжении между возбуждениями ($\sigma = +1$) локализация нелинейного возбуждения вблизи дефектного слоя возможна даже при

отталкивании элементарных возбудений от дефекта ($\lambda < 0$). В случае $\sigma = -1$ (отталкивание между возбудениями) нелинейные локальные возбудения возможны только при $\lambda > 0$.

Проведено квазиклассическое квантование найденных локализованных мод, и получена зависимость полной энергии системы от полного числа элементарных возбудений (квазичастиц).

Впервые проведено исследование устойчивости в такой системе всех полученных решений относительно малых возмущений амплитуды и фазы согласно схеме, предложенной в работе [24]. Исследован нестационарный режим распространения нелинейной волны вдоль нелинейного дефектного слоя в ангармонической среде, сопровождающийся колебанием локализованного вблизи слоя потока относительно оси волновода. Проанализирован также процесс «ухода» локализованной волны от «отталкивающего» плоского дефекта в среде с притяжением.

Показано, что в среде с отталкиванием ($\sigma = -1$) колебания локализованного потока относительно дефектного слоя отсутствуют, хотя его локализация сохраняется.

Полученные результаты могут быть полезными для изучения локализованных состояний в нелинейной среде с двумя нелинейными дефектами и, на основе последней, в периодической системе нелинейных дефектов (плоских дефектных слоев) в нелинейной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. M. Lifshitz, *Nuovo Cimento, Suppl.* **3**, 716 (1956).
2. I. M. Lifshitz and A. M. Kosevich, *Rep. Progr. Phys.* **29**, 217 (1966).
3. Y. Kivshar and G. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic, New York (2003).
4. *Нелинейности в периодических структурах и метаматериалах*, под ред. Ю. С. Кившарь, Н. Н. Розанов, Наука, Москва (2014).
5. I. V. Gerasimchuk and A. S. Kovalev, *Письма в ЖЭТФ* **85**, 594 (2007).
6. I. V. Gerasimchuk and A. S. Kovalev, *J. Phys.: Condens. Matter* **13**, L885 (2001).
7. I. L. Garanovich, S. Longhi, A. A. Sukhorukov, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rep.* **518**, 1 (2012).
8. D. A. Smirnova, I. V. Iorsh, I. V. Shadrivov, and Y. S. Kivshar, *Письма в ЖЭТФ* **99**, 527 (2014).
9. Y. Silberberg and G. I. Stegeman, *Appl. Phys. Lett.* **50**, 801 (1987).
10. D. R. Heatley, E. M. Wright, and G. I. Stegeman, *Appl. Phys. Lett.* **53**, 172 (1988).
11. J. J. Rhyne, D. A. Neumann, and J. A. Gotaas, *Phys. Rev. B* **36**, 2294 (1987).
12. L. Pintschovius, N. Pyka, and W. Reichardt, *Physica B* **174**, 323 (1991).
13. А. А. Степанов, В. А. Пашенко, М. И. Кобец, *ФНТ* **14**, 550 (1988).
14. H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd, and J. S. Aitchison, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3383 (1998).
15. U. Peschel, R. Morandotti, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg, and Y. Silberberg, *Appl. Phys. Lett.* **75**, 1348 (1999).
16. А. А. Степанов, Д. А. Яблонский, *ФНТ* **15**, 215 (1989).
17. D. Hennig, H. Gabriel, G. P. Tsironis, and M. Molina, *Appl. Phys. Lett.* **64**, 2934 (1994).
18. Q. Li, C. T. Chan, K. M. Ho, and C. M. Soukoulis, *Phys. Rev. B* **53**, 15577 (1996).
19. D. L. Mills and S. E. Trullinger, *Phys. Rev. B* **36**, 947 (1987).
20. A. B. Aceves, C. De Angelis, T. Peschel et al., *Phys. Rev. E* **53**, 1172 (1996).
21. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *ФНТ* **1**, 1544 (1975).
22. Yu. S. Kivshar and B. A. Malomed, *J. Phys. A: Math. Gen.* **21**, 1553 (1988).
23. М. М. Богдан, И. В. Герасимчук, А. С. Ковалев, *ФНТ* **23**, 197 (1997).
24. Н. Г. Вахитов, А. А. Колоколов, *Изв. ВУЗов, радиофизика* **16**, 1020 (1973).
25. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1989).
26. М. М. Богдан, А. С. Ковалев, *Письма в ЖЭТФ* **31**, 213 (1980).