ЖЭТФ, 2015, том 148, вып. 5 (11), стр. 931–936

РЕЗОНАНСНОЕ РОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ ПАРЫ ДВУМЯ ФОТОНАМИ НА ВОЗБУЖДЕННЫЕ УРОВНИ ЛАНДАУ

М. М. Дяченко[*], *А. П. Новак*, *Р. И. Холодов*

Институт прикладной физики Национальной академии наук Украины
40000, Сумы, Украина

Поступила в редакцию 7 мая 2015 г.

Рассмотрено резонансное рождение электрон-позитронной пары двумя поляризованными фотонами на произвольные низкие уровни Ландау. Резонанс имеет место, когда энергия одного из фотонов превышает порог однофононного рождения, а энергия второго кратна расстоянию между уровнями. Найдено сечение процесса с учетом спинов частиц. Сечение будет наибольшим по порядку величины, если магнитные моменты частиц ориентированы вдоль магнитного поля.

DOI: 10.7868/S0044451015110097

1. ВВЕДЕНИЕ

Процессы, сопутствующие столкновениям ионов, продолжают вызывать значительный интерес, благодаря прогрессу в области ускорительной техники. В частности, в настоящее время ведется сооружение нового комплекса FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research) на базе GSI Helmholtz Centre for Heavy Ion Research, Дармштадт, Германия [1].

Эксперименты с тяжелыми ионами предоставляют широкие возможности для проверки квантовой электродинамики в сильных электромагнитных полях. Одним из наиболее интересных процессов является рождение электрон-позитронной пары при столкновении ионов. Впервые данный процесс был рассмотрен Ландау и Лифшицем [2] и впоследствии подвергся детальному изучению как в области высоких энергий, так и для низкоэнергетических столкновений (см., например, работы [3–10] и ссылки в них).

В последнем случае возможно формирование квазимолекулы. При этом магнитное поле, создаваемое движущимися ионами, может достигать и даже превышать критическое квантово-электродинамическое значение $H_c \approx 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс уже при энергиях ионов порядка кулоновского барьера. Тем не менее влиянием магнитного поля обычно пренебрегают, следуя выводам работ [11–13].

Магнитное поле, однако, может оказывать существенное влияние, благодаря взаимодействию с рожденной парой, как показано в работе [14]. Механизм такого взаимодействия подобен явлению вмороженности силовых линий в плазму, хорошо известному в физике плазмы и астрофизике. Как следствие, время жизни магнитного поля значительно увеличивается и может существенно превышать время пролета ядер. Наблюдаемым признаком такого явления будет наличие резонансов в спектре рожденных пар, характерных для процессов в магнитном поле. Интересно отметить, что аномальные пики наблюдались в экспериментах GSI по столкновению тяжелых ионов [15–17], хотя, к сожалению, вопрос о воспроизведении результатов остается открытым.

Представляется возможным исследовать основные черты этого явления в рамках следующей модели. Образование пары может быть описано как фоторождение двумя фотонами при помощи хорошо известного приближения эквивалентных фотонов. Поправки, соответствующие взаимодействию с магнитным полем, можно учесть в рамках картины Фарри, т. е, используя волновые функции электрона в магнитном поле. Отметим, что данная методика в общих чертах подобна методу Бете – Максимона, используемому для описания столкновения ионов с релятивистскими энергиями [18, 19]. Таким образом, в

[*]E-mail: dyachenko.michail@mail.ru

простейшем случае задача сводится к процессу двухфотонного рождения пары в магнитном поле.

Данная задача также имеет и самостоятельный интерес в астрофизике. В частности, в работах [20–22] обсуждается вопрос об эффективности генерации электрон-позитронной плазмы в магнитосферах пульсаров конкурирующими одно- и двухфотонными процессами.

Процесс рождения электрон-позитронной пары двумя фотонами в сильном магнитном поле был впервые изучен в работе [23] в случае лобового столкновения фотонов вдоль магнитного поля. В работе [24] процесс исследован в нерезонансном случае, когда энергии каждого из фотонов недостаточно для рождения пары в однофотонном процессе. В работе [25] вычислена длина свободного пробега фотона высокой энергии, распространяющегося сквозь фотонный газ вдоль силовых линий магнитного поля.

В данной работе рассматривается резонансный процесс рождения электрон-позитронной пары двумя поляризованными фотонами в магнитном поле на возбужденные уровни Ландау с учетом спинов частиц. Проведен анализ резонансных условий процесса. Рассчитано резонансное сечение для произвольных поляризаций частиц в случае, когда электрон и позитрон занимают произвольные низкие уровни Ландау.

Используется релятивистская система единиц ($\hbar = c = 1$).

2. АМПЛИТУДА ВЕРОЯТНОСТИ И КИНЕМАТИКА ПРОЦЕССА

Выражение для амплитуды двухфотонного рождения электрон-позитронной пары в магнитном поле имеет вид

$$S_{fi} = -ie^2 \int d^4x\, d^4x' \left[\bar{\Psi}_e (A_1\gamma) G(x-x') (A_2'\gamma) \Psi_p' + \right. \\ \left. + \bar{\Psi}_e (A_2\gamma) G(x-x') (A_1'\gamma) \Psi_p' \right], \quad (1)$$

где $A_{1,2}$ — потенциалы плоских волн [26], $\Psi_{e,p}$ — решения уравнения Дирака в магнитном поле для электрона и позитрона, а величины со штрихом зависят от x'. Направим ось z вдоль магнитного поля и выберем векторный потенциал в виде $\mathbf{A} = (0, xH, 0)$. Тогда волновые функции электрона описывают состояния с определенными значениями энергии и импульса [27]. Собственные значения энергии равны

$$E_l = \sqrt{\tilde{m}^2 + p_z^2}, \quad \tilde{m} = m\sqrt{1 + 2lh}, \quad (2)$$

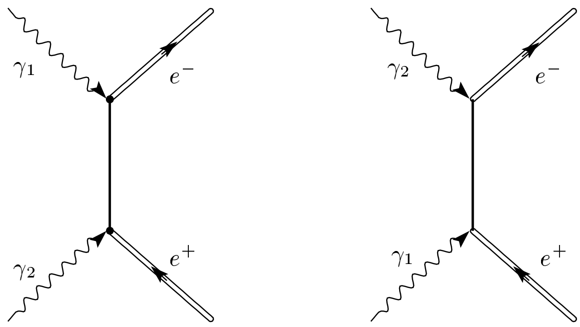

Рис. 1. Диаграммы Фейнмана процесса рождения электрон-позитронной пары двумя фотонами

где m — масса электрона, l — номер уровня Ландау, h — напряженность магнитного поля в единицах критического поля:

$$h = H/H_c. \quad (3)$$

Электронный пропагатор в данном базисе имеет вид [28]

$$G(x - x') = -\frac{m\sqrt{h}}{(2\pi)^3} \int d^3g\, e^{-i\Phi} \sum_n \frac{G_H(x, x')}{g_0^2 - E_n^2}, \quad (4)$$

$$G_H(x, x') = U_n(\rho) U_n(\rho') (\gamma P + m)\tau + \\ + im\sqrt{2nh} U_{n-1}(\rho) U_n(\rho') \gamma^1 \tau - \\ - im\sqrt{2nh} U_n(\rho) U_{n-1}(\rho') \tau \gamma^1 + \\ + U_{n-1}(\rho) U_{n-1}(\rho') (\gamma P + m)\tau^*, \quad (5)$$

где $d^3g = dg_0 dg_y dg_z$, γ — гамма-матрицы Дирака,

$$\Phi = g_0(t - t') - g_y(y - y') - g_z(z - z'), \quad (6)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_2\gamma_1), \quad (7)$$

$$E_n = \sqrt{m^2 + g_z^2 + 2nhm^2}, \quad (8)$$

$$P = (E_n, 0, 0, g_z). \quad (9)$$

Аргумент функций Эрмита $U_n(\rho)$ в (5) имеет вид

$$\rho = m\sqrt{h}x + g_y/m\sqrt{h}.$$

Отметим, что пропагатор (4) был независимо получен также в работе [29].

На рис. 1 изображены диаграммы Фейнмана, которые соответствуют амплитуде (1). В явном виде амплитуда получена в работе [30].

Кинематика процесса определяется законами сохранения энергии и z-компоненты импульса,

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &= E^- + E^+, \\ k_{1z} + k_{2z} &= p_z^- + p_z^+ \end{aligned} \quad (10)$$

(верхние индексы «плюс» и «минус» здесь и ниже соответствуют позитрону и электрону). Как несложно убедиться [30], пороговые частоты и импульсы фотонов удовлетворяют условию

$$\left(\omega_1^{th} + \omega_2^{th}\right)^2 - \left(k_{1z}^{th} + k_{2z}^{th}\right)^2 = \left(\tilde{m}^- + \tilde{m}^+\right)^2. \quad (11)$$

Как видим, условие (11) не может быть выполнено, если оба фотона движутся параллельно полю в одном направлении. В этом случае левая часть уравнения (11) равна нулю, тогда как правая всегда больше $(2m)^2$.

Отметим, что преобразования Лоренца вдоль магнитного поля не меняют само поле. Поэтому выбором системы отсчета без потери общности можно исключить продольный импульс фотонов:

$$k_{1z} + k_{2z} = 0. \quad (12)$$

Кроме того, будем рассматривать процесс в ультраквантовом, или LLL-приближении (low Landau levels), когда выполняются условия

$$hl^{\pm} \ll 1, \quad l^{\pm} \sim 1. \quad (13)$$

Введем отстройку $\delta\omega$ от порога:

$$\delta\omega = \omega - (\tilde{m}^- + \tilde{m}^+), \quad (14)$$

где обозначено $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Будем считать, что отстройка имеет порядок величины расстояния между уровнями Ландау, $\delta\omega \sim mh$. Тогда с учетом условий (13) импульс рожденных частиц равен

$$|p_z^{\pm}| \approx \sqrt{m\delta\omega}. \quad (15)$$

3. УСЛОВИЯ РЕЗОНАНСНОГО ПРОТЕКАНИЯ ПРОЦЕССА

Когда величины g_0 и g_z в пропагаторе (4) удовлетворяют релятивистскому соотношению между энергией и импульсом частицы в магнитном поле, имеет место резонанс. Его условием является равенство нулю знаменателя функции Грина:

$$g_0 = \pm E_n. \quad (16)$$

Величины g_0, g_z, определяются согласно законам сохранения в вершинах диаграммы.

Уравнения (16) задают два резонансных условия. Используем условия (13) и выражение (15) для импульса конечных частиц. Тогда резонансные частоты фотонов в нижайшем приближении равны

$$\begin{aligned} &\omega_1^{res} \approx mh(l^- - n), \\ &\omega_2^{res} \approx 2m + mh(l^+ + n) + \delta\omega, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\omega_1^{res} \approx 2m + mh(l^- + n) + \delta\omega, \\ &\omega_2^{res} \approx mh(l^+ - n), \end{aligned} \quad (18)$$

соответственно для знаков «+» и «−» в уравнении (16). Отметим, что в первом случае промежуточной частицей является электрон, а во втором — позитрон.

Как известно, в резонансе процесс второго порядка по постоянной тонкой структуры может быть изображен как последовательность процессов первого порядка. В данном случае это рождение пары одним фотоном и поглощение фотона в магнитном поле. Из уравнений (17) и (18) следует, что один из фотонов (жесткий) образует пару и должен иметь энергию, превышающую порог однофотонного рождения. Второй фотон (мягкий) поглощается электроном, и его частота должна быть равна энергии перехода между уровнями Ландау (т. е. кратна циклотронной частоте $\omega_H = mh$).

Резонансные условия обменной диаграммы Фейнмана можно получить из выражений (17) и (18) заменой индексов фотонов, $1 \rightleftarrows 2$. В общем случае номер n также будет отличаться, $n \to n'$. Очевидно, что можно указать условия, при которых резонанс возможен одновременно для двух диаграмм. Действительно, приравняв частоты мягких фотонов в прямой и обменной диаграммах, найдем

$$l^- - n = l^+ - n'. \quad (19)$$

Сформулируем условие интерференции резонансов в более удобном виде. Запишем энергию мягкого фотона в резонансе как

$$\omega^{res} = mhN, \quad N = 1, 2, \ldots \quad (20)$$

Тогда одновременный резонанс амплитуд возможен для значений n и n', равных

$$\begin{aligned} &n = l^- - N, \\ &n' = l^+ - N. \end{aligned} \quad (21)$$

Очевидно, интерференция резонансов невозможна, если $l^- < N$ или $l^+ < N$. Действительно, в резонансе мягкий фотон поглощается различными частицами в прямой и обменной диаграммах (электроном и позитроном). Если энергия фотона больше энергии одной из частиц, то для соответствующей амплитуды условие резонанса не выполняется.

В дальнейшем условимся обозначать мягкий фотон индексом «1». Кроме того, ограничимся случаем, когда резонанс имеется только в одной диаграмме. Для определенности положим $N > l^+$.

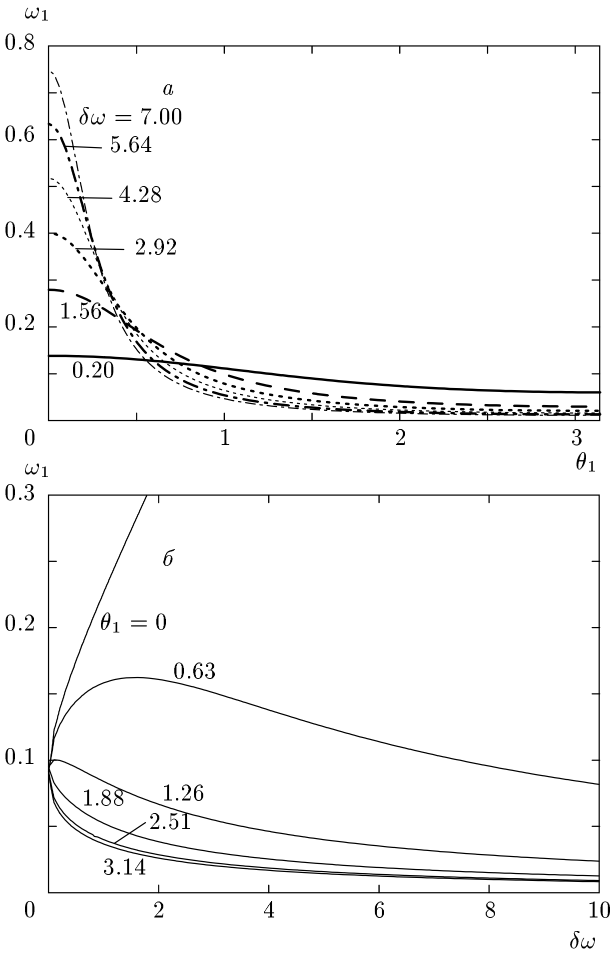

Рис. 2. Точные зависимости резонансной частоты ω_1 мягкого фотона от его полярного угла θ_1 (a) и от отстройки $\delta\omega$ ($б$) для уровней $l^- = 1$, $l^+ = 0$ и магнитного поля $h = 0.1$

В первом неисчезающем приближении по h резонансные частоты не зависят от углов падения фотонов. Расчет следующей поправки по h дает

$$\begin{aligned} &\delta\omega_1^{res} = \pm\cos\theta_1\omega_1^{res}\sqrt{\delta\omega/m}, \\ &\delta\omega_2^{res} = -\delta\omega_1^{res}, \end{aligned} \tag{22}$$

где θ_1 — полярный угол первого фотона, а знак в первой формуле совпадает со знаком p_z^-.

Отметим, что жесткий резонансный фотон должен быть направлен почти перпендикулярно магнитному полю вследствие выбора системы отсчета (12). Используя формулы (17), найдем

$$\cos\theta_2 \approx -\frac{hN}{2}\cos\theta_1. \tag{23}$$

На рис. 2 изображены точные по h зависимости резонансных частот фотонов.

4. РЕЗОНАНСНОЕ СЕЧЕНИЕ ПРОЦЕССА

Вычислим резонансное сечение процесса, используя выражения для резонансных частот (17) и считая условия (13) выполненными.

Как известно, дифференциальное сечение процесса имеет вид

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2}{1-\cos\chi} V\, dN^- dN^+, \tag{24}$$

где $dN^\pm$ — интервалы конечных состояний электрона и позитрона,

$$dN^\pm = \frac{Sd^2p^\pm}{(2\pi)^2}, \tag{25}$$

S и V — площадь и объем нормирования волновых функций электрона и фотона, $d^2p^\pm = dp_y^\pm dp_z^\pm$, χ — угол между направлениями фотонов.

Подставляя в выражение (1) явный вид волновых функций и оставляя лишь первые слагаемые в разложении по малому параметру h, получим

$$\begin{aligned} d\sigma = \frac{2\pi\alpha^2}{hN} \frac{q_1^N q_2^{l^++n}}{|g_0^2 - \varepsilon_n^2|^2} \frac{S\exp(-q_2)}{V(1-\cos\chi)} \frac{l^-!/l^+!}{(N!n!)^2} \times \\ \times |A_{\mu^-\mu^+}|^2\, \delta^3\, d^2p^- d^2p^+, \end{aligned} \tag{26}$$

где α — постоянная тонкой структуры, а индексы $\mu^\pm$ обозначают знаки проекций спинов соответственно электрона и позитрона. Зависящие от спинов множители имеют вид

$$A_{-+} = \exp(i\phi_1)\sqrt{2}\frac{e_{2z}T_1^-}{\sin\theta_1}, \tag{27}$$

$$\begin{aligned} A_{++} = \sqrt{\frac{h}{l^-}}\Bigg[Ne_{1z}e_{2z} - Ne_{2z}T_1^- e^{i\phi_1}\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} + \\ + n\frac{T_1^-T_2^-}{\sin\theta_1\sin\theta_2}\Bigg], \end{aligned} \tag{28}$$

$$A_{--} = \exp\left[i(\phi_2-\phi_1)\right]\sqrt{hl^+}\frac{T_1^-T_2^+}{\sin\theta_1\sin\theta_2}, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} A_{+-} = \exp(-i\phi_2)\sqrt{\frac{h^2l^+}{2l^-}} \times \\ \times \Bigg[n\exp\left[i(\phi_2+\phi_1)\right]e_{2z}T_1^-\frac{\operatorname{ctg}^2\theta_2}{\sin\theta_1} + \\ + N\exp(i\phi_1)T_1^-T_2^+\frac{\operatorname{ctg}\theta_1}{\sin\theta_2} - N\frac{e_{1z}T_2^+}{\sin\theta_2}\Bigg]. \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь обозначено

$$\delta^3 = \delta(\omega_1 + \omega_2 - \varepsilon_- - \varepsilon_+) \times \\ \times \delta(k_{1y}+k_{2y}-p_y^- - p_y^+)\delta(k_{1z}+k_{2z}-p_z^- - p_z^+), \quad (31)$$

$$q_j = \frac{\omega_j^2}{2m^2h}\sin^2\theta_j, \quad j = 1, 2, \quad (32)$$

$$T_j^{\pm} = e_{jx} \pm ie_{jy}, \quad (33)$$

$\mathbf{e}_j = (e_{jx}, e_{jy}, e_{jz})$ — векторы поляризации фотонов, $\phi_{1,2}$ — их азимутальные углы.

В резонансе имеем $g_0^2 = E_n^2$, и знаменатель в выражении (4) обращается в нуль. Чтобы избавиться от расходимости, введем ширину Γ промежуточного состояния согласно правилу Брейта–Вигнера [31]:

$$E_n \to E_n - \frac{i}{2}\Gamma. \quad (34)$$

При вычислении полного сечения интегралы по d^2p^+ и dp_z^- легко могут быть найдены с использованием свойств δ-функций. Выражение (26), однако, не зависит от переменной p_y^-, поэтому результатом интегрирования по dp_y^- является множитель p_y^- [32]. При этом в сечении возникает выражение $p_y^- S/V$, вид которого предложен в работе [32]:

$$\frac{p_y^- S}{V} \to m^2 h. \quad (35)$$

Наконец, после несложных вычислений резонансное сечение процесса принимает вид

$$\sigma_{-+} = \sigma_0(1+\Xi_3)\left[1+u^2+2u\xi_2 - s^2\xi_3\right], \quad (36)$$

$$\sigma_{--} = \sigma_0\frac{hl^+}{2}(1-\Xi_3)\left[1+u^2+2u\xi_2 - s^2\xi_3\right], \quad (37)$$

$$\sigma_{++} = \sigma_0\frac{h}{2l^-}\left\{(N^2\Xi_+ + n^2\Xi_-)(1+u^2+2u\xi_2) + \right. \\ + (N^2\Xi_+ - n^2\Xi_-)\xi_3 s^2 + \\ \left. + 2Nn\Xi_2[2u + (1+u^2)\xi_2] - 2Nn\Xi_1\xi_1 s^2\right\}, \quad (38)$$

$$\sigma_{+-} = \sigma_0\frac{h^2l^+}{4l^-}N^2(1-\Xi_3)\left[1+u^2+2u\xi_2+s^2\xi_3\right], \quad (39)$$

где $\Xi_\pm = 1 \pm \Xi_3$, $u = \cos\theta_1$, $s = \sin\theta_1$, а также

$$\sigma_0 = \frac{\alpha^2\pi}{m^2}\sqrt{\frac{m}{\delta\omega}}\left(\frac{m}{\Gamma}\right)^2 \times \\ \times \frac{\exp(-q_2)q_1^N q_2^{l^+ + n}}{s^2(1-\cos\chi)}\,\frac{l^-!/l^+!}{N(N!n!)^2}. \quad (40)$$

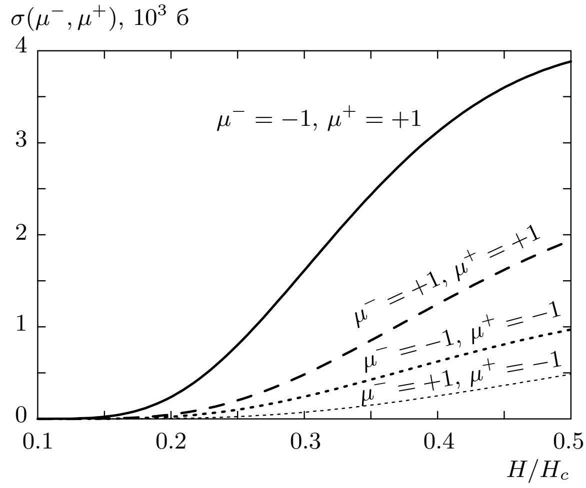

Рис. 3. Зависимости сечения рождения пары неполяризованными фотонами от напряженности поля $h = H/H_c$. Уровни Ландау $l^- = 2$, $l^+ = 1$, а $\delta\omega = \omega_1 = mh$

Здесь буквами Ξ обозначены параметры Стокса жесткого фотона, буквами ξ — мягкого фотона, первый индекс в выражениях (36)–(39) обозначает знак проекции спина электрона, второй — позитрона.

На рис. 3 изображены графики зависимости резонансного сечения фоторождения от напряженности магнитного поля для различных проекций спинов частиц. Как видно из выражений (36)–(39), сечение является наибольшим по порядку величины для рождения пары с направлениями спинов $\mu^- = -1$, $\mu^+ = +1$, как и в случае однофотонного рождения [33]. Данное спиновое состояние соответствует минимальной энергии взаимодействия магнитных моментов частиц с магнитным полем. Изменение проекции спина каждой частицы на обратную уменьшает сечение на один порядок по h.

Также следует отметить существенную зависимость сечения от поляризации жесткого фотона. В частности, для нормальной линейной поляризации имеем $\Xi_3 = -1$ и сечение σ_{-+} обращается в нуль. Отметим, однако, что в этом случае для корректного сравнения сечения σ_{-+} с остальными необходимо проводить его расчет с поправками по h соответствующего порядка. В случае линейной поляризации фотонов выражения (36)–(39) симметричны относительно значения полярного угла.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Henning, FAIR Conceptual Design Report, Gesellschaft für Schwerionenforschung (2001).

2. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Phys. Z. Sowjet. **6**, 244 (1934).

3. K. Hencken, D. Trautmann, and G. Baur, Phys. Rev. A **51**, 998 (1995).

4. G. Baur, K. Hencken, and D. Trautmann, Phys. Rep. **453**, 1 (2007).

5. G. Baur, K. Hencken, D. Trautmann et al., Phys. Rep. **364**, 359 (2002).

6. A. B. Arbuzov, V. V. Bytev, E. A. Kuraev et al., Phys. Part. Nuclei **42**, 101 (2011).

7. J. Reinhardt, B. Müller, and W. Greiner, Phys. Rev. A **24**, 103 (1981).

8. W. Greiner, B. Müller, and J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Springer-Verlag, Berlin (1985).

9. U. Müller-Nehler and G. Soff, Phys. Rep. **246**, 101 (1994).

10. S. R. McConnell, A. N. Artemyev, M. Mai, and A. Surzhykov, Phys. Rev. A **86**, 052705 (2012).

11. G. Soff, J. Reinhardt, and W. Greiner, Phys. Rev. A **23**, 701 (1981).

12. K. Rumrich, W. Greiner, and G. Soff, Phys. Lett. A **125**, 394 (1987).

13. G. Soff and J. Reinhardt, Phys. Lett. B **211**, 179 (1988).

14. П. И. Фомин, Р. И. Холодов, Докл. НАН Украины **12**, 91 (1998); arXiv:1107.4546 [hep-ph].

15. H. Backe, L. Handschug, F. Hessberger et al., Phys. Rev. Lett. **40**, 1443 (1978).

16. T. Cowan, H. Backe, K. Bethge et al., Phys. Rev. Lett. **56**, 444 (1986).

17. W. Koenig, F. Bosch, P. Kienle et al., Z. Phys. A **328**, 129 (1987).

18. H. A. Bethe and L. C. Maximon, Phys. Rev. **93**, 768 (1954).

19. H. Davies, H. A. Bethe, and L. C. Maximon, Phys. Rev. **93**, 788 (1954).

20. M. L. Burns and A. K. Harding, Astrophys. J. **285**, 747 (1984).

21. A. K. Harding, A. G. Muslimov, and B. Zhang, Astrophys. J. **576**, 366 (2002).

22. B. Zhang, Astrophys. J. **562**, L59 (2001).

23. Y. Ng and W. Tsai, Phys. Rev. D **16**, 286 (1977).

24. А. А. Козленков, И. Г. Митрофанов, ЖЭТФ **91**, 1978 (1986).

25. М. А. Дунаев, Н. В. Михеев, ЖЭТФ **141**, 419 (2012).

26. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).

27. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1981).

28. П. И. Фомин, Р. И. Холодов, Укр. физ. ж. **44**, 1526 (1999).

29. A. V. Kuznetsov and A. A. Okrugin, Int. J. Mod. Phys. A **26**, 2725 (2011).

30. М. М. Дяченко, А. П. Новак, Р. И. Холодов, Укр. физ. ж. **59**, 849 (2014).

31. C. Graziani, A. Harding, and R. Sina, Phys. Rev. D **51**, 7097 (1995).

32. Н. П. Клепиков, ЖЭТФ **26**, 19 (1954).

33. O. P. Novak and R. I. Kholodov, Phys. Rev. D **80**, 025025 (2009).