

НАДКОНДЕНСАТНЫЕ АТОМЫ В РЕЖИМЕ СЕЛЕКТИВНОГО ПО СКОРОСТЯМ КОГЕРЕНТНОГО ПЛЕНЕНИЯ НАСЕЛЕННОСТЕЙ

*Л. В. Ильичёв, В. А. Томилин**

*Институт автоматизации и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

*Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 28 мая 2015 г.

Рассмотрена модель бозе-конденсата атомов в режиме селективного по скоростям когерентного пленения населенностей. Вследствие межчастичных взаимодействий некоторая доля атомов находится вне конденсата, продолжая оставаться в состоянии когерентного пленения. Эти атомы оказываются вовлеченными в процесс кратких актов интенсивного взаимодействия с внешними резонансными электромагнитными полями. Интенсивные вынужденные и спонтанные переходы сопровождаются обменом импульсом между атомами и излучением, что проявляется как миграция атомов в пространстве скоростей. Рассчитана скорость такой миграции. В рамках предположения о незначительной роли корреляций атомов с разными импульсами выведено нелинейное кинетическое уравнение для многочастичного статистического оператора надконденсатных атомов. Из структуры его стационарного решения можно сделать некоторые заключения о картине упомянутой миграции с учетом эффектов бозе-статистики. Для частот, управляющих миграцией с учетом эффектов статистики, выведены нелинейные интегральные уравнения. В приближении слабого межатомного взаимодействия представлены результаты их численного решения.

DOI: 10.7868/S0044451016010028

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение атомарных бозе-эйнштейновских конденсатов обнаруживает большое разнообразие необычных физических явлений [1], что питает надежду превращения со временем этих конденсатов в инструмент новых технологий. Все атомы конденсата находятся в одном квантовом состоянии. Именно это обстоятельство обуславливает специфическую физику конденсата. Ясно, что свойства состояния, в котором находятся атомы, определяют в значительной степени и свойства конденсата. Это было продемонстрировано в работе [2], где рассматривался гипотетический (в настоящее время) конденсат, все атомы которого находятся в состоянии селективного по скоростям когерентного пленения населенностей (coherent population trapping, CPT). Способ получения такого

конденсата еще не найден, что, однако, не делает беспредметным изучение его свойств. Сам факт предсказания специфических и интересных свойств конденсата в состоянии CPT может послужить мотивацией и оправданием усилий по поиску способа получения такого конденсата.

Уже известны совместные рассмотрения явлений конденсации и когерентного пленения населенностей. В работе [3] показана возможность явления CPT между двумя конденсатами, занимающими разные зеемановские подуровни основного состояния атома. Варьирование фаз оптических полей в схеме когерентного пленения позволяет контролировать относительную фазу конденсатов и приготавливать их перепутанное состояние. Коллективное поведение атомов в конденсате делает возможным, как показано в работе [4], возникновение явления CPT даже в широкополосных тепловых оптических полях. В работе [5] сообщается о наблюдении когерентного пленения с возникновением суперпозиционного состояния пары атомов и двухатомной молекулы в конденсате атомов Rb.

* E-mail: 8342tomilin@mail.ru

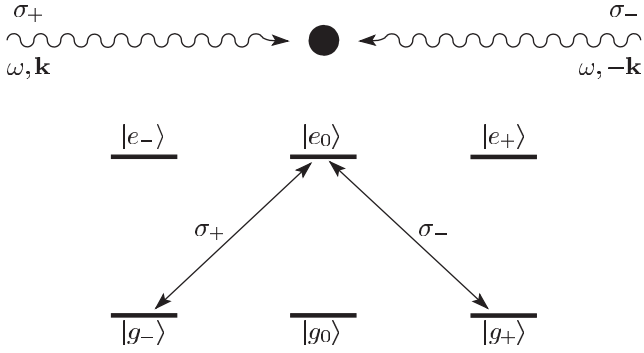


Рис. 1. Схема встречных циркулярно-поляризованных волн, действующих на переходах атома

Метод генерации перепутанных состояний атомов и фотонов с использованием конденсата в состоянии СРТ предложен в [6]. В работе [7] рассматривается создание перепутанного состояния двух пространственно-разнесенных конденсатов с использованием явления СРТ. Интерес к нему в контексте физики ультрахолодных атомов обусловлен также надеждой использовать само явление когерентного пленения для конденсации. На этом пути, однако, имеются серьезные препятствия [8]. Недостаточно ясны некоторые аспекты явления, в частности, процесс миграции атомов по скоростям. Это оправдывает настоящую попытку рассмотреть данный вопрос, совершенно не затронутый в работе [2], в предположении, что конденсат уже получен (тем или иным способом) и миграция атомов осуществляется в его присутствии и модифицирована взаимодействием с конденсатом.

Опишем явление СРТ, селективное по скоростям атомов. Это позволит ввести необходимые для дальнейшего понятия и обозначения. Две встречные плоские монохроматические электромагнитные волны одинаковой частоты взаимодействуют с дипольным переходом из основного состояния атома. Для определенности предполагаем единичные угловые моменты атома как в основном (g), так и в возбужденном (e) состояниях (рис. 1).

Обе волны имеют одинаковые спиральности, т. е. правую и левую циркулярные поляризации, σ_+ и σ_- , по отношению к выбранному направлению (слева направо) на оси распространения, являющейся также осью квантования. В этом случае они вызывают переходы в атоме между подуровнями соответственно $|g_- \rangle \leftrightarrow |e_0 \rangle$ и $|g_+ \rangle \leftrightarrow |e_0 \rangle$. Свободно движущийся атом при поглощении фотона из волны σ_+ (σ_-) приобретает импульс \mathbf{k} ($-\mathbf{k}$). При равных амплитудах волн и с учетом величин соответствующих

матричных элементов дипольного момента состояние

$$|\text{СРТ}(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g_-, p - k\rangle + |g_+, p + k\rangle) \quad (1)$$

оказывается выключенным из взаимодействия с электромагнитными волнами. Причина этого — деструктивная интерференция вынужденных переходов в состояние $|e_0, p\rangle$ из обоих членов суперпозиции (1). Будем называть состояние (1) «темным». Ортогональное ему «светлое» состояние

$$|\overline{\text{СРТ}}(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g_-, p - k\rangle - |g_+, p + k\rangle) \quad (2)$$

образовано суперпозицией, наиболее сильно взаимодействующей с полем. В состояниях (1) и (2) фигурируют проекции импульсов на направление \mathbf{k} . Мы имеем дело с эффективной одномерной моделью.

Если $p \neq 0$, то кинетические энергии в состояниях, образующих суперпозицию (1), различны. Следствием этого является фазовый сдвиг между ними, линейно возрастающий по времени, что, в свою очередь, приводит к трансформации состояний $|\text{СРТ}(p)\rangle$ в $|\overline{\text{СРТ}}(p)\rangle$. Как уже было сказано, последнее состояние включается в процесс вынужденных и спонтанных переходов. Направление вылета и поляризация спонтанного кванта, испущенного при распаде состояния $|e_0, p\rangle$, случайны. В результате атом оказывается в некоторой суперпозиции состояний $|g_-, p' - k\rangle$ и $|g_+, p' + k\rangle$ с некоторым новым импульсом p' или, что эквивалентно, в некоторой суперпозиции состояний $|\text{СРТ}(p')\rangle$ в $|\overline{\text{СРТ}}(p')\rangle$ ¹. Таким образом, следствием спонтанных переходов является своего рода случайное блуждание атома в подпространстве $\text{span}\{|g_+\rangle, |g_-\rangle\}$ внутренних состояний и пространстве импульсов. После каждого акта спонтанного распада электромагнитное поле играет роль измерительного прибора, тестирующего атом на предмет нахождения в темном или светлом состоянии. Попадание в состояние $|\text{СРТ}(p')\rangle$ выводит атом из быстрого этапа эволюции при взаимодействии с полем и снова начинается относительно медленный процесс накопления разности фаз.

Из сказанного ясно, что истинно стабильными по отношению к взаимодействию с излучением являются только атомы в состоянии $|\text{СРТ}(0)\rangle$. Предположим, что в результате некоторого процесса (указать который в настоящее время авторы не берутся)

¹ Переходы в состояние $|g_0\rangle$ запрещены в силу выбора $J_e = J_g = 1$.

в этом состоянии оказалось макроскопически большое число атомов. Они образуют конденсат, в котором внутреннее состояние атома (нахождение его на магнитном подуровне $|g_+\rangle$ или $|g_-\rangle$) оказывается скоррелированным (спутанным) с состоянием его движения (импульс \mathbf{k} или $-\mathbf{k}$). Эффекты пространственной неоднородности конденсата пока не рассматриваются. Нетривиальным следствием взаимодействия между атомами оказывается появление надконденсатных темных атомов. Важное свойство этих атомов — возникновение при выключенных полях двух типов боголюбовских квазичастиц с необычным спектром — рассмотрено в работе [2] (этот факт, в частности, должен, по нашему мнению, оправдывать поиск способа получения конденсата в состоянии СРТ). Надконденсатные атомы участвуют в описанном выше чередовании быстрых и медленных процессов и, следовательно, подвержены случайной миграции в пространстве импульсов. Данный процесс не был рассмотрен в работе [2], где для упрощения модели предполагалось, что после превращения темного атома в светлый последний возвращается в конденсат. Главной целью настоящей работы является устранение данного недостатка модели из работы [2] и исследование квазистационарного кинетического состояния темных надконденсатных атомов с учетом их миграции по скоростям. В этом направлении, как оказывается, можно продвинуться достаточно далеко, прежде чем прибегнуть к численным методам, составляющим основное содержание многих работ по теории атомарных конденсатов.

В разд. 2 будет обоснован выбор операторной структуры, отвечающей за миграцию в квантовом кинетическом уравнении для состояния надконденсатных атомов. В разд. 3 выводится выражение для скорости миграции. В разд. 4 вводится квантовое кинетическое уравнение для статистического оператора надконденсатных атомов, определяется вид его квазистационарного решения и приводятся результаты численного решения. В Заключение подводятся итог, а в Приложение вынесены детали расчета скорости миграции.

2. МИГРАЦИЯ АТОМОВ ПО СКОРОСТЯМ

Процесс миграции темных атомов определяется скоростью перехода $\nu(p'|p)$ из состояния $|\text{СРТ}(p)\rangle$ в состояние $|\text{СРТ}(p')\rangle$. В этой величине должны быть отражены детали как динамического процесса превращения темного атома в светлый из-за фазового

набега, так и последующего быстрого кинетического процесса взаимодействия с излучением до попадания атома в состояние $|\text{СРТ}(p')\rangle$. К вычислению $\nu(p'|p)$ мы обратимся в следующем разделе.

Наиболее прозрачной картина миграции атомов выглядит в терминах чисел заполнения в импульсном пространстве. Введем необходимые обозначения: \hat{a}_p и \hat{a}_p^\dagger — операторы уничтожения и рождения атома в состоянии $|\text{СРТ}(p)\rangle$; $\hat{n}_p = \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p$ — оператор числа темных атомов с импульсом p . Уравнение эволюции среднего числа атомов $\langle \hat{n}_p \rangle = \text{Tr} \hat{\rho} \hat{n}_p$ ($\hat{\rho}$ — статистический оператор системы темных атомов) вследствие миграции и без учета эффектов статистики,

$$\left(\frac{d}{dt} \langle \hat{n}_p \rangle \right)_{\text{migr}}^{(0)} = \sum_{p'} \nu(p|p') \langle \hat{n}_{p'} \rangle - \sum_{p'} \nu(p'|p) \langle \hat{n}_p \rangle, \quad (3)$$

является простым уравнение баланса. Эти эффекты можно ввести, модифицировав (3) следующим образом:

$$\left(\frac{d}{dt} \langle \hat{n}_p \rangle \right)_{\text{migr}}^{(1)} = \sum_{p'} (1 + \langle \hat{n}_p \rangle) \nu(p|p') \langle \hat{n}_{p'} \rangle - \sum_{p'} (1 + \langle \hat{n}_{p'} \rangle) \nu(p'|p) \langle \hat{n}_p \rangle. \quad (4)$$

Заметим, что в правой части этого уравнения, по сравнению с (3), появились слагаемые, пропорциональные $\langle \hat{n}_p \rangle \langle \hat{n}_{p'} \rangle$, в которых статистический оператор фигурирует дважды. Следовательно, уравнение (4) не может быть выведено из линейного квантового кинетического уравнения для $\hat{\rho}$. Из такого уравнения может возникнуть следующий вариант модификации уравнения (3):

$$\left(\frac{d}{dt} \langle \hat{n}_p \rangle \right)_{\text{migr}}^{(2)} = \sum_{p'} \nu(p|p') \langle (1 + \hat{n}_p) \hat{n}_{p'} \rangle - \sum_{p'} \nu(p'|p) \langle (1 + \hat{n}_{p'}) \hat{n}_p \rangle. \quad (5)$$

Усреднение в обеих частях этого уравнения встречается однократно. Различие уравнений (4) и (5) состоит, как нетрудно заметить, в учете в последнем случае корреляций между числами темных атомов с разными импульсами. Поскольку далее вычисляется статистический оператор $\hat{\rho}$ как решение соответствующего квантового кинетического уравнения, заметим, что выражение (5) возникает из следующей операторной структуры Линдблада:

$$\left(\frac{d}{dt}\hat{\rho}\right)_{migr}^{(2)} = \sum_{p \neq p'} \nu(p|p') \times \\ \times \left(\hat{a}_{p'}^\dagger \hat{a}_p \hat{\rho} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{p'} - \frac{1}{2} \{ \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{p'} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{p'}, \hat{\rho} \} \right). \quad (6)$$

Она должна входить составной частью в пока еще не сконструированное уравнение эволюции для $\hat{\rho}$. Забегая вперед, приходится констатировать, что поиск аналитического решения уравнения, включающего (6), наталкивается на существенные математические трудности. В то же время легко убедиться, что выражение (4) получается из

$$\left(\frac{d}{dt}\hat{\rho}\right)_{migr}^{(1)} = \sum_p \nu_+(p) (2\hat{a}_p^\dagger \hat{\rho} \hat{a}_p - \{ \hat{a}_p \hat{a}_p^\dagger, \hat{\rho} \}) + \\ + \sum_p \nu_-(p) (2\hat{a}_p \hat{\rho} \hat{a}_p^\dagger - \{ \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p, \hat{\rho} \}). \quad (7)$$

Здесь

$$\nu_+(p) \doteq \frac{1}{2} \sum_{p'} \nu(p|p') \langle \hat{n}_{p'} \rangle, \\ \nu_-(p) \doteq \frac{1}{2} \sum_{p'} \nu(p'|p) (1 + \langle \hat{n}_{p'} \rangle). \quad (8)$$

Поскольку данные скорости зависят от $\hat{\rho}$ через числа заполнения, уравнение (7) оказывается нелинейным. Оно, однако, позволяет найти структуру стационарного решения. Если бы из этой структуры следовало наличие сильных корреляций между числами заполнения, т.е. если бы среднее значение $\langle \hat{n}_p \hat{n}_{p'} \rangle$ значительно отличалось от $\langle \hat{n}_p \rangle \langle \hat{n}_{p'} \rangle$, полученное решение не отражало бы реальность. К счастью, как будет показано, оно хорошо согласуется с предположением о слабости корреляций, сделанном при его выводе и позволившем заменить уравнение (6) на (7).

3. СКОРОСТЬ МИГРАЦИИ

Обратимся к определению скорости миграции $\nu(p'|p)$. Запишем темное и светлое состояния в координатном представлении (x — координата вдоль \mathbf{k}):

$$\langle x | \text{CPT}(p) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ipx} (e^{ikx} |+\rangle + e^{-ikx} |-\rangle) \equiv \\ \equiv e^{ipx} | \text{CPT}(x) \rangle, \\ \langle x | \overline{\text{CPT}}(p) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ipx} (e^{ikx} |+\rangle - e^{-ikx} |-\rangle) \equiv \\ \equiv e^{ipx} | \overline{\text{CPT}}(x) \rangle. \quad (9)$$

Предположим, что в системе появляется светлый атом с импульсом p . Его матрица плотности $\hat{\rho}^{(pre)}$ до начала взаимодействия с электромагнитным полем имеет в координатном представлении следующий вид:

$$\langle x_1 | \hat{\rho}^{(pre)} | x_2 \rangle = \langle x_1 | \overline{\text{CPT}}(p) \rangle \langle \overline{\text{CPT}}(p) | x_2 \rangle \equiv \\ \equiv e^{ip(x_1 - x_2)} | \overline{\text{CPT}}(x_1) \rangle \langle \overline{\text{CPT}}(x_2) |. \quad (10)$$

Через короткое время, не успев сместиться²⁾, атом окажется в темном состоянии:

$$\langle x_1 | \hat{\rho}^{(pre)} | x_2 \rangle \rightarrow \langle x_1 | \hat{\rho}^{(post)} | x_2 \rangle = \\ = | \text{CPT}(x_1) \rangle \langle \text{CPT}(x_2) | f(x_1 - x_2), \quad (11)$$

где в пока еще не определенной функции координат $f(x)$ содержится вся информация об импульсе, который приобрел атом в результате взаимодействия с полем. Зная эту функцию, не составляет труда вычислить вероятность $\text{Prob}(p' \leftarrow p)$ приобретения атомом импульса p' при условии приготовления светлого атома с импульсом p :

$$\text{Prob}(p' \leftarrow p) = \text{Tr} \int \langle p' | x_1 \rangle \langle x_1 | \hat{\rho}^{(post)} | x_2 \rangle \langle x_2 | p' \rangle \times \\ \times d(x_1 - x_2) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ip'x} \cos(kx) f(x) dx. \quad (12)$$

Для вычисления функции $f(x)$ воспользуемся приемом из работы [9], обобщив его на поступательные степени свободы атомов (см. также [10]). Уравнение эволюции элемента $\langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle$ матрицы плотности атома можно записать, введя супероператор $\mathcal{R}(x_1, x_2)$:

$$\frac{d}{dt} \langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle = \mathcal{R}(x_1, x_2) [\langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle]. \quad (13)$$

В супероператоре отражены взаимодействие атома с двумя электромагнитными волнами, а также спонтанные переходы (см. Приложение). Как уже было сказано, считается возможным пренебрежение движением атома. Введем супероператор $\mathcal{R}^\dagger(x_1, x_2)$, сопряженный к $\mathcal{R}(x_1, x_2)$ относительно скалярного произведения операторов, генерируемого следом по внутренним состояниям атома:

$$\text{Tr} (\mathcal{R}^\dagger(x_1, x_2) [\hat{\chi}(x_1, x_2)] \langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle) = \\ = \text{Tr} (\hat{\chi}(x_1, x_2) \mathcal{R}(x_1, x_2) [\langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle]). \quad (14)$$

²⁾ Для этого частота Раби и скорость спонтанного распада должны значительно превышать обратное время pk/m пролета атомом длины световой волны (см. также далее).

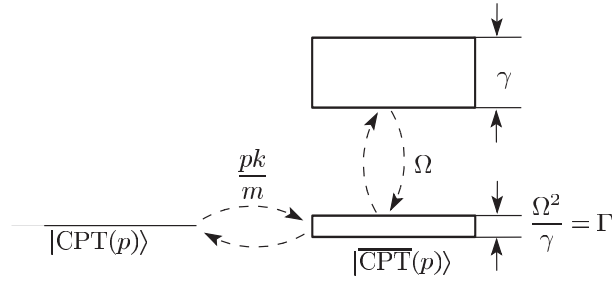


Рис. 2. Схема нутаций между темным и светлым состояниями надконденсатного атома и необратимого ухода из светлого состояния $|\text{CPT}(p)\rangle$

По своему физическому смыслу $\mathcal{R}^\dagger(x_1, x_2)$ является генератором обращенной по времени эволюции. Пусть известна неподвижная точка для такой эволюции:

$$\mathcal{R}^\dagger(x_1, x_2)[\hat{\chi}(x_1, x_2)] = 0. \quad (15)$$

Из выражений (13) и (14) тогда следует, что

$$\text{Tr} \left(\hat{\chi}(x_1, x_2) \frac{d}{dt} \langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle \right) = 0 \quad (16)$$

и, как результат,

$$\text{Tr} \left(\hat{\chi}(x_1, x_2) \langle x_1 | \hat{\rho}^{(pre)} | x_2 \rangle \right) = \text{Tr} \left(\hat{\chi}(x_1, x_2) \langle x_1 | \hat{\rho}^{(post)} | x_2 \rangle \right). \quad (17)$$

Из последнего выражения легко находится функция $f(x)$. Основные моменты ее вычисления приведены в Приложении.

Теперь необходимо определить частоту, с которой в системе появляются светлые атомы. Частота нутаций между $|\text{CPT}(p)\rangle$ и $|\text{CPT}(p)\rangle$ из-за набегающего фазового сдвига в суперпозиции равна $(p+k)^2/2m - (p-k)^2/2m = pk/m$ (рис. 2). Если эта частота мала в сравнении со скоростью Γ ухода атома из состояния $|\text{CPT}(p)\rangle$ за счет взаимодействия с излучением, т. е. атомы двигаются достаточно медленно, для оценки частоты появления светлых атомов годится правило Ферми: $p^2k^2/m^2\Gamma$. Скорость светоиндуцированных переходов определяется частотой Раби Ω и скоростью спонтанного распада γ . В случае $\gamma \gg \Omega$ можно полагать $\Gamma \approx \Omega^2/\gamma$. При увеличении импульса приближение Ферми перестает отвечать ситуации. Если частота нутации значительно превосходит Γ , скорость появления светлых атомов, включившихся во взаимодействие с излучением, стремится, очевидно, к $\Gamma/2$. Мы будем использовать соотношение, равно применимое для быстрых и медленных атомов и подсказанное элементарными

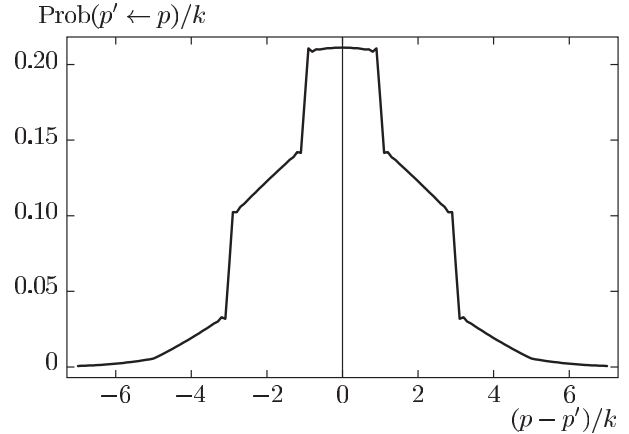


Рис. 3. Вероятность $\text{Prob}(p' \leftarrow p)$ приобретения атомом импульса p' при условии приготовления светлого атома с импульсом p

моделями нелинейной спектроскопии, отражающими эффект «насыщения». Будем использовать следующее окончательное выражение для скорости миграции:

$$\nu(p'|p) = \text{Prob}(p' \leftarrow p) \frac{\Gamma p^2 k^2 / m^2}{2p^2 k^2 / m^2 + \Gamma^2}. \quad (18)$$

Множитель $\gamma p^2 k^2 / m^2 \Omega^2$ фигурировал в работе [2] как скорость исчезновения темных атомов. Настоящая модель более реалистична — темный атом превращается в светлый со скоростью, задаваемой вторым множителем в правой части выражения (18), и затем практически мгновенно снова становится темным, поменяв свой импульс.

Результаты вычисления плотности вероятности $\text{Prob}(p' \leftarrow p)$ представлены на рис. 3. Стоит отметить необычную ступенчатую структуру. Расположение ступенек соответствует нечетным (в единицах волнового вектора k) значениям разности импульсов.

4. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ

В работе [2] фигурировало квантовое кинетическое уравнение для многочастичного статистического оператора $\hat{\rho}$ надконденсатных атомов. Ниже будет использован гамильтониан из этого уравнения, который с небольшой модификацией воспроизводит модель Боголюбова [11] для системы слабозаимодействующих бозонов:

$$\hat{H} = \sum_p \left(\frac{p^2 + k^2}{2m} + 2\lambda \right) \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \lambda \sum_p \left(\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{-p}^\dagger + \hat{a}_p \hat{a}_{-p} \right). \quad (19)$$

Частота λ задает эффективность межатомного взаимодействия и пропорциональна числу атомов в конденсате. В рассматриваемой модели однородный конденсат с $p = 0$ рождает или уничтожает пары надконденсатных атомов с противоположными импульсами.

К динамической части уравнения эволюции для $\hat{\rho}$ с гамильтонианом (19) мы добавляем кинетическую часть — миграцию атомов (7):

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \left(\frac{d}{dt} \hat{\rho} \right)_{migr}. \quad (20)$$

Для нахождения стационарного решения (фактически квазистационарного, как будет пояснено в заключении) полученного уравнения годится тот же анзац, который использовался в работе [2]. Следует искать $\hat{\rho}^{(st)}$ в виде

$$\hat{\rho}^{(st)} = \hat{S} \left(\prod_p (1 - q_p) q_p^{n_p} \right) \hat{S}^\dagger, \quad (21)$$

где унитарный оператор \hat{S} задает некоторое каноническое преобразование пары атомных мод с p и $-p$:

$$\hat{S}^\dagger \hat{a}_p \hat{S} = \text{ch } \xi_p \hat{a}_p + e^{i\varphi_p} \text{sh } \xi_p \hat{a}_{-p}^\dagger. \quad (22)$$

Видно, что состояние (21) оказывается произведением частичных состояний атомов с определенной величиной импульса. Таким образом, корреляции существуют только между состояниями движения с p и $-p$. Подстановка (22) в (20) дает после ряда преобразований следующие соотношения для введенных параметров q_p , ξ_p и φ_p :

$$q_p = \frac{\nu_+(p) + \nu_-(p) \text{th}^2 \xi_p}{\nu_-(p) + \nu_+(p) \text{th}^2 \xi_p},$$

$$\text{th } 2\xi_p = -\frac{2\lambda}{\sqrt{\omega_p^2 + (\nu_+(p) - \nu_-(p))^2}}, \quad (23)$$

$$\text{tg } \varphi_p = \frac{\nu_-(p) - \nu_+(p)}{\omega_p}.$$

Здесь $\omega_p = (p^2 + k^2)/2m$.

Поскольку в $\nu_\pm(p)$ входят значения $\langle \hat{n}_p \rangle^{(st)}$, выражение (21) есть фактически очень сложное нелинейное уравнение для $\hat{\rho}^{(st)}$. Проще всего выразить это обстоятельство в виде условий согласования для частот $\nu_\pm(p)$:

$$\nu_+(p) = \frac{1}{2} \sum_{p'} \nu(p|p') \left(\frac{\nu_+(p')}{\nu_-(p') - \nu_+(p')} + \frac{\nu_+(p') + \nu_-(p')}{\nu_-(p') - \nu_+(p')} \times \frac{2\lambda^2}{\omega_{p'}^2 - 4\lambda^2 + (\nu_+(p') - \nu_-(p'))^2} \right), \quad (24)$$

$$\nu_-(p) = \frac{1}{2} \sum_{p'} \nu(p'|p) \left(\frac{\nu_-(p')}{\nu_-(p') - \nu_+(p')} + \frac{\nu_+(p') + \nu_-(p')}{\nu_-(p') - \nu_+(p')} \times \frac{2\lambda^2}{\omega_{p'}^2 - 4\lambda^2 + (\nu_+(p') - \nu_-(p'))^2} \right).$$

Мы имеем дело с системой нелинейных интегральных уравнений для $\nu_+(p)$ и $\nu_-(p)$. В них явно выделены части, обусловленные взаимодействием атомов. При $\lambda = 0$, т.е. в отсутствие конденсата или при выключенном взаимодействии между атомами, когда нет надконденсатных атомов, уравнения (24) имеют простые решения (рис. 4а)

$$\nu_+^{(0)}(p) = 0,$$

$$\nu_-^{(0)}(p) \doteq \sum_{p'} \frac{\nu(p'|p)}{2} = \frac{\Gamma p^2 k^2 / m^2}{4p^2 k^2 / m^2 + 2\Gamma^2}.$$

Решение при малых λ можно найти, воспользовавшись теорией возмущений. Представим решение в виде $\nu_\pm(p) = \nu_\pm^{(0)}(p) + \nu_\pm^{(1)}(p)$. Уравнения для первых поправок по малому параметру λ разделяются:

$$\nu_+^{(1)}(p) = \frac{1}{2} \sum_{p'} \nu(p|p') \times \left(\frac{\nu_+^{(1)}(p')}{\nu_-^{(0)}(p')} + \frac{2\lambda^2}{\omega_{p'}^2 + \nu_-^{(0)}(p')^2} \right), \quad (25)$$

$$\nu_-^{(1)}(p) = \frac{1}{2} \sum_{p'} \nu(p'|p) \times \left(\frac{\nu_+^{(1)}(p')}{\nu_-^{(0)}(p')} + \frac{2\lambda^2}{\omega_{p'}^2 + \nu_-^{(0)}(p')^2} \right).$$

Заменяя сумму по импульсам соответствующим интегралом (при этом $\langle \hat{n}_p \rangle$ приобретает смысл среднего числа надконденсатных атомов на единицу длины в импульсном и координатном пространствах), можно заметить, что первое уравнение в (25) является линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода с интегральным членом типа свертки. Его решение находится методом преобразования Фурье. Первый член в правой

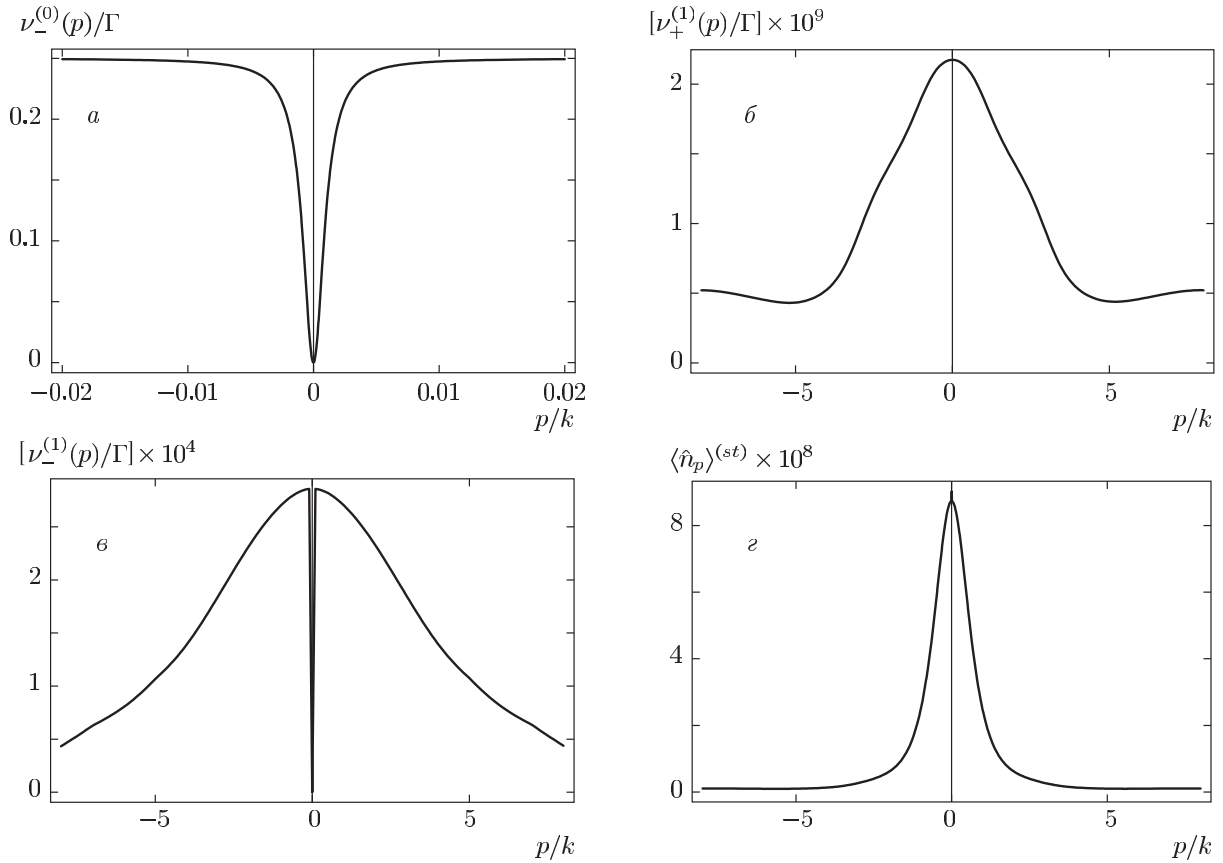


Рис. 4. Кинетический коэффициент $\nu_{-}^{(0)}(p)$ при $\lambda = 0$ (а), поправки к коэффициентам при $\lambda = \Gamma/10$ (б, в) и стационарное распределение темных атомов по импульсам (г). $m = 87$ ат. ед., $k \approx 10^6$ см, $\gamma = 6$ МГц, $\Omega = \gamma/60$, $L = 20$ мкм

части второго уравнения имеет неинтегрируемую особенность в нуле импульсов, так как $\nu_{-}^{(0)}(p)$ имеет асимптотику в нуле порядка p^2 . Но ввиду конечного размера конденсата область вблизи нуля импульсов можно исключить из промежутка интегрирования. Размер этой области в пространстве импульсов примерно равен $2\pi/L$, где L — размер конденсата. При этом очевидно, что условие применимости теории возмущений (малость поправок по сравнению с невозмущенным решением) налагает ограничение на максимальный размер конденсата $L \lesssim 2\pi k/\Gamma m$ ($\Gamma m/k$ — характерная ширина «провала» решения $\nu_{-}^{(0)}(p)$ вблизи нуля).

Результаты вычисления первых поправок к решению для массы m , равной массе изотопа ^{87}Rb , представлены на рис. 4б,в. В рис. 4в заметен характерный узкий провал шириной $\Gamma m/k$. Распределение среднего числа темных атомов по импульсам представлено на рис. 4г. Для приведенных параметров системы максимальный размер конденсата составляет около 40 мкм.

Малость полученной плотности темных надконденсатных атомов свидетельствует о несущественности эффектов статистики в данном выбранном диапазоне параметров. Распределение $\langle \hat{n}_p \rangle^{(st)}$ с рис. 4г можно получить в предположении, что $\nu_{-}(p) = \nu_{-}^{(0)}(p)$ и $\nu_{+}(p) = 0$, а затем найти поправки $\nu_{-}^{(1)}(p)$ и $\nu_{+}^{(1)}(p)$ из (8).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Свойства рассмотренного в работе атомарного конденсата оказываются обусловленными свойствами состояния когерентного пленения населенностей (1). Принципиально важно существование ортогонального состояния (2) атома и динамического механизма взаимных превращений темного и светлого состояний. Через эти превращения в ансамбль темных надконденсатных атомов привносится необратимость, поскольку светлые атомы участвуют в спонтанных переходах. Фактор необратимости проявляется в виде случайной миграции темных ато-

мов по скоростям. Два других фактора — эффекты бозе-статистики и взаимодействие с конденсатом — модифицируют картину миграции. Рассматриваемая система достаточно сложна. Лишь некоторые ее основные свойства можно описать в рамках предложенной модели. Прежде всего отметим еще раз, что процесс создания конденсата остается целиком за рамками модели. Модель также не учитывает весьма важного аспекта необратимой динамики. А именно, каждый акт изменения скорости надконденсатного темного атома сопровождается испусканием спонтанных квантов. Их перепоглощение удаляет атомы из конденсата. Поэтому стационарное состояние (21) является фактически квазистационарным. Оценка верхней границы времени квазистационарности в предположении, что каждый испущенный квант перепоглощается в конденсате, дается отношением

$$N_0 / \sum_p \frac{p^2 k^2}{m^2 \Omega^2} \gamma \langle \hat{n}_p \rangle^{(st)}, \quad (26)$$

где N_0 — начальное число атомов в конденсате и предполагается, что короткий период эволюции атома через его светлое состояние сопровождается испусканием одного спонтанного кванта. В принципе в знаменателе в (26) должен стоять дополнительный множитель, равный среднему числу таких квантов. (Квази)стационарное число атомов $\langle \hat{n}_p \rangle^{(st)}$ определяется в общем случае выражением в круглых скобках из первой формулы (24).

В рамках прозрачной физической модели рассчитана скорость миграции (18) в нулевом по эффектам статистики приближении. Поскольку в результате миграции атомы накапливаются в состояниях с малыми импульсами, учет эффектов статистики в принципе необходим (хотя для выбранных параметров численной иллюстрации рис. 4 он является излишним). Платой за это оказалась нелинейность введенного квантового кинетического уравнения (20), что, в свою очередь, привело к системе нелинейных интегральных уравнений (24) для кинетических коэффициентов $\nu_+(p)$ и $\nu_-(p)$. В нелинейном кинетическом уравнении при учете эффектов статистики не отражены корреляции между разными состояниями движения атомов. Такой подход адекватен в предположении слабой роли таких корреляций. Структура (квази)стационарного статистического оператора системы надконденсатных атомов (21) не находится в противоречии с указанным предположением, поскольку содержит корреляции только между атомами с противоположными скоростями. Полностью прояснить

вопрос о роли корреляций можно на основе кинетического уравнения с миграционным членом (6).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-02-05754).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Супероператор $\mathcal{R}(x_1, x_2)$ в уравнении (13) действует на $\langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x_1, x_2)[\langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle] = & -i\Delta[\hat{P}_+ + \hat{P}_-, \langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle] - \\ & - i\hat{V}(x_1)\langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle + i\langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle\hat{V}(x_2) + \\ & + \tilde{\gamma}(x_1 - x_2) \left(\hat{P}_+ + \hat{P}_- \right) Tr \left(\hat{P}_0 \langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle \right) - \\ & - \gamma \left(\hat{P}_0 \langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle + \langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle \hat{P}_0 \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь Δ — отстройка частоты перехода в атоме от частоты световых волн, $\hat{P}_\pm = |g_\pm\rangle\langle g_\pm|$, $\hat{P}_0 = |e_0\rangle\langle e_0|$, $\gamma = \tilde{\gamma}(0)$ — скорость спонтанного распада,

$$\hat{V}(x) = \Omega |e_0\rangle \left(e^{ikx} \langle g_- | - e^{-ikx} \langle g_+ | \right) + \text{H.c.},$$

Ω — частота Раби. Действие сопряженного супероператора имеет, соответственно, вид

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^\dagger(x_1, x_2)[\hat{\chi}(x_1, x_2)] = & i\Delta[\hat{P}_+ + \hat{P}_-, \hat{\chi}(x_1, x_2)] + \\ & + i\hat{V}(x_1)\hat{\chi}(x_1, x_2) - i\hat{\chi}(x_1, x_2)\hat{V}(x_2) + \\ & + \tilde{\gamma}(x_1 - x_2)\hat{P}_0 Tr \left[\left(\hat{P}_+ + \hat{P}_- \right) \hat{\chi}(x_1, x_2) \right] - \\ & - \gamma \left(\hat{P}_0 \hat{\chi}(x_1, x_2) + \hat{\chi}(x_1, x_2) \hat{P}_0 \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Решение уравнения $\mathcal{R}^\dagger(x_1, x_2)[\hat{\chi}(x_1, x_2)] = 0$, можно искать среди операторов со свойством $\hat{\chi}^\dagger(x_1, x_2) = \hat{\chi}(x_2, x_1)$. Это ограничение определяет решение с точностью до несущественного действительного множителя. Полагаем

$$\langle e_0 | \hat{\chi}(x_1, x_2) | e_0 \rangle = 1. \quad (29)$$

Тогда необходимые в (17) матричные элементы имеют вид

$$\begin{aligned} \langle g_+ | \hat{\chi}(x_1, x_2) | g_- \rangle = & \\ = 2 \frac{\gamma - \tilde{\gamma}(x_1 - x_2) \cos k(x_1 - x_2)}{\tilde{\gamma}(x_1 - x_2) (e^{-2ikx_1} + e^{-2ikx_2})}, & \\ \langle g_\pm | \hat{\chi}(x_1, x_2) | g_\pm \rangle = & \\ = \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}(x_1 - x_2) \cos k(x_1 - x_2)} e^{\pm ik(x_1 - x_2)}. & \end{aligned} \quad (30)$$

Окончательно для функции $f(x)$ получаем

$$f(x) = \frac{\tilde{\gamma}(x) \cos kx}{2\gamma - \tilde{\gamma}(x) \cos kx} e^{ipx}. \quad (31)$$

Эта функция зависит от $\tilde{\gamma}(x)$. В простейшей модели, которая игнорирует зеемановскую структуру уровней атома и поляризацию излучения, $\tilde{\gamma}(x) = \gamma \sin(kx)/kx$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bose-Einstein Condensates and Atom Lasers*, ed. by S. Martellucci et al., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2002).
2. Л. В. Ильичёв, Письма в ЖЭТФ **93**, 488 (2011).
3. J. Ruostekoskia and D. F. Walls, Eur. Phys. J. D **5**, 335 (1999).
4. M. Macoveia, Z. Ficeka, and C. H. Keitela, Phys. Rev. A **73**, 063821 (2006).
5. K. Winkler, G. Thalhammer, M. Theis et al., Phys. Rev. Lett. **95**, 063202 (2005).
6. Le-Man Kuang and Lan Zhou, Phys. Rev. A **68**, 043606 (2003).
7. Le-Man Kuang, Zeng-Bing Chen, and Jian-Wei Pan, Phys. Rev. A **76**, 052324 (2007).
8. Ф. Барду, Ж.-Ф. Бушо, А. Аспе, К. Коэн-Таннуджи, *Статистика Леви и лазерное охлаждение*, Физматлит, Москва (2006).
9. A. V. Taichenachev, A. M. Tumaikin, and V. I. Yudin, Laser Phys. **2**, 575 (1992).
10. Л. В. Ильичёв, Письма в ЖЭТФ **85**, 263 (2005).
11. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (1978).