ЖЭТФ, 2016, том 149, вып. 1, стр. 53–62

ВЫНУЖДЕННОЕ КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ В СРЕДЕ С ПОСТОЯННЫМИ ДИПОЛЬНЫМИ МОМЕНТАМИ

А. А. Заболотский[*]

Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук 630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 29 июня 2015 г.

Выведены эволюционные уравнения двухчастотного вынужденного комбинационного рассеяния в молекулярной квазитрехуровневой среде с постоянными дипольными моментами. При выводе применялись приближения неистощения поля накачки и однонаправленного распространения поля Стокса. Найдены полностью интегрируемые частные случаи полученной системы уравнений. В рамках этой модели изучаются новые механизмы управления параметрами микроволновых импульсов, генерируемых в такой системе. Численный анализ и частные точные решения показывают возможность переключения между режимами генерации узких импульсов стоксова поля и импульсов с формой, близкой к прямоугольной.

DOI: 10.7868/S0044451016010053

1. ВВЕДЕНИЕ

Комбинационное рассеяние света в двухуровневой среде, как один из основных механизмов конверсии частоты, является важным и детально как теоретически, так и экспериментально изученным явлением нелинейной оптики [1–3]. Стандартные начальные условия, реализуемые при экспериментальном наблюдении комбинационного рассеяния, отвечают разным режимам генерации импульсов поля Стокса (ПС) в нелинейной резонансной среде. Наряду с кооперативным комбинационным рассеянием [4], в котором ПС описывается пакетом затухающих нелинейных осцилляций [5, 6], возможны условия, при которых генерируются солитоны ПС. Изучение генерации солитонов при вынужденном комбинационном рассеянии (ВКР) имеет длительную историю, начиная с работ [7, 8] и др. Теория ВКР, как правило, использует приближение медленных огибающих для взаимодействующих полей [1]. Вне рамок этого приближения эволюция световых полей при параметрическом двухфотонном взаимодействии изучалась численно в работе [9] и теоретически для постоянной квазимонохроматической волны поля накачки и импульса ПС без огибающей в линейном приближении — в [10]. Схемы, включающие резонансные трехуровневые среды, в которых происходит эффективная конверсия светового поля в импульсы другого частотного диапазона, представляют практический интерес. В работе [11] экспериментально показана возможность эффективного параметрического четырехволнового смешения волн, включающего две компоненты светового квазимонохроматического поля накачки и две компоненты стоксовой микроволны в двухуровневой среде. В [12] теоретически исследовался интегрируемый вариант аналогичной схемы взаимодействия.

Изучение динамики импульсов полей в нецентрально-симметричных средах вне рамок приближения медленных огибающих требует учета постоянных дипольных моментов (ПДМ), нередко имеющих тот же порядок, что и дипольные моменты оптических переходов. В двухуровневой среде вклад ненулевого ПДМ проявляется в квазирезонансном одно- или двухфотонном нелинейном поглощении и комбинационном рассеянии [13–15], микроволновой генерации лазерным излучением [16] и т. д.

Наиболее полную аналитическую информацию об эволюции импульсов в нелинейных средах можно получить точным решением начально-краевой задачи, поэтому нахождение и исследование полностью интегрируемых систем представляет несомненный интерес [17]. В рамках интегрируемых уравнений Максвелла – Блоха однофотонное взаимодей-

[*] E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

ствие света с двухуровневой средой без использования приближения медленной огибающей в простейшем случае изучалось в работе [18] и др., с учетом ПДМ и других обобщений — в работах [19–23] и др., см. также обзоры [3, 24].

В настоящей работе выведена новая модель ВКР в эффективной двухуровневой среде с ПДМ в режиме неистощения монохроматического поля накачки. Для ПС применяется приближение однонаправленного распространения. В частности, такая модель может применяться для описания генерации импульсов микроволнового или терагерцевого ПС вне рамок приближения медленной огибающей.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 выводится основная система уравнений. Раздел 3 посвящен численному решению уравнений. В разд. 4 приводится представление нулевой кривизны интегрируемого варианта уравнений. Затем, в разд. 5 рассматривается предел слабого возбуждения среды. После Заключения (разд. 6) в Приложении приводятся значения коэффициентов линейных систем, дающих представление нулевой кривизны некоторых интегрируемых вариантов выведенной системы уравнений.

2. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть электромагнитные волны, имеющие следующую форму:

$$E(x,t) = P(x,t)e^{i\omega t - ikx} + P(x,t)^* e^{-i\omega + ikx} + S(x,t), \quad (1)$$

распространяются в одномерной среде, содержащей многоуровневую систему, показанную на рис. 1. Здесь P — амплитуда монохроматического поля накачки с несущей частотой ω и волновым вектором k, S — амплитуда ПС. Считается, что

$$\omega,\ \omega_{1l},\ \omega_{21} \gg \omega_{l2}, \quad (2)$$

где ω_{ij} — частота перехода $i \leftrightarrow j$ и индекс $l = 3$, 4, $5, \ldots, L$ относится к группе из $L-2, L \geq 3$, виртуальных уровней с энергией $\hbar\omega_l > \hbar\omega_2$ (рис. 1). Дипольные переходы между уровнями с энергией ω_l не учитываем, поскольку далее предполагается, что время жизни виртуальных уровней мало.

Обозначим амплитуду j-го уровня как ψ_j ($j = 1$, 2, l, $l = 3, 4, \ldots, L$) и пусть

$$\psi_n(x,t) = \phi_n(x,t)e^{i\omega t - ikx}, \quad \psi_1(x,t) = \phi_1(x,t), \quad (3)$$

где $n = 2, l$, и для амплитуд ψ_2, ψ_l применим приближение медленных огибающих:

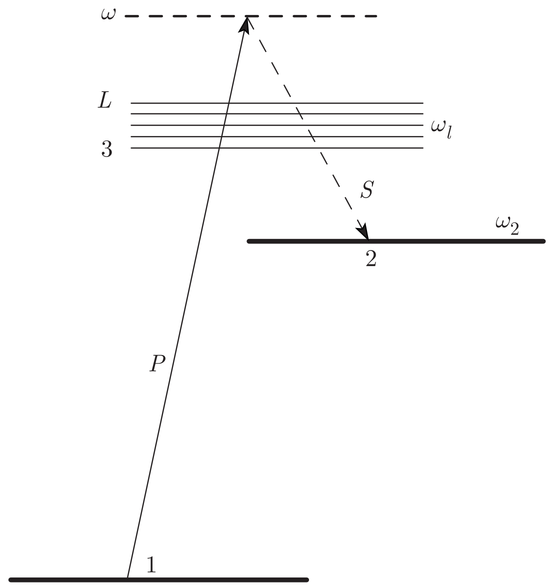

Рис. 1. Схема взаимодействия L-уровневой среды ($L \geq 3$) с полем накачки P. S — генерируемое поле Стокса

$$|\partial_t \phi_n(x,t)| \ll \omega |\phi_n(x,t)|, \quad n = 2, l.$$

Динамика амплитуд описывается уравнениями фон Неймана [25]:

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial t} = i\left(\omega_{l1} - \omega + i\gamma_l + \mu_{ll}S\right)\phi_l + i\mu_{l2}S\phi_2 + i\mu_{l1}P\psi_1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = i\left(\omega_{21} - \omega + i\gamma_2 + \mu_{22}S\right)\phi_2 + i\sum_l \mu_{2l}S\phi_l, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = i\left(\mu_{11}S\right)\psi_1 + i\sum_l \mu_{1l}P^*\phi_l, \quad (6)$$

где $\mu_{ij} = d_{ij}\hbar^{-1}$, d_{ij} — дипольный момент перехода $i \leftrightarrow j$, $i \neq j$, и d_{ii} — ПДМ, ассоциированный с уровнем энергии i.

В многоуровневой среде метод адиабатического исключения виртуальных уровней позволяет свести уравнения Максвелла – Блоха к эффективной системе нелинейных эволюционных уравнений, описывающих нелинейную стадию комбинационного взаимодействия для квазимонохроматических импульсов [1, 26–29]. При выполнении ряда стандартных упрощений эти уравнения приводятся к полностью интегрируемой системе уравнений двухфотонного взаимодействия [30, 31].

Предполагаем, что время жизни виртуальных уровней $l = 3, 4, \ldots, L$ мало́ и к ним может быть применена стандартная процедура адиабатического исключения [1, 27], после применения которой получаем уравнения

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = iS\left(\sum_l \frac{\mu_{1l}\mu_{l2}}{\Omega_l} P\rho_{21} + \right.$$
$$\left. + \sum_l \frac{\mu_{2l}\mu_{l1}}{\Omega_l^*} P^* \rho_{12}\right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} = -i\left[\omega_{21} - \omega - i\gamma_2 + (\mu_{22} - \mu_{11}) S + \right.$$
$$\left. + \sum_l \frac{|\mu_{1l}|^2}{\Omega_l} |P|^2\right] \rho_{12} - i\sum_l \frac{\mu_{2l}\mu_{l1}}{\Omega_l^*} \times$$
$$\times SP^* (\rho_{22} - \rho_{11}), \quad (9)$$

где

$$\Omega_l = \omega_{l1} - \omega + i\gamma_l + \mu_{ll} S,$$

$\rho_{ij} = \psi_i \psi_j^*$, $i, j = 1, 2, l$ — элементы матрицы плотности [1]. При выводе уравнения (9), полагая, что $|P|^2 \gg S^2$, мы пренебрегли членами, пропорциональными $|\mu_{2l}S|^2, |\mu_{2l}\mu_{l1}|S^2$, в правой его части, как и во всех остальных уравнениях. Амплитуду поля накачки считаем константой. Ниже мы рассматриваем когерентный режим эволюции ПС, поэтому пренебрегаем релаксацией, положив $\gamma_2 \to 0$, $\gamma_l \to 0$. С учетом этих предположений ниже полагаем, что $\Omega_l = \omega_{l1} - \omega$.

Остальные элементы матрицы плотности:

$$\rho_{l2} = -\frac{S\mu_{2l}}{\Omega}\rho_{22} - \frac{P\mu_{l1}}{\Omega}\rho_{12}, \quad (10)$$

$$\rho_{1l} = -\frac{S\mu_{l2}}{\Omega}\rho_{12} - \frac{P^*\mu_{1l}}{\Omega}\rho_{11}, \quad (11)$$

$$\rho_{ll} = \frac{|P|^2|\mu_{1l}|^2}{|\Omega|^2}\rho_{11} +$$
$$+ \frac{S}{|\Omega|^2}\left(P\mu_{1l}\mu_{l2}\rho_{12} + P^*\mu_{l1}\mu_{2l}\rho_{21}\right), \quad (12)$$

адиабатически следуют изменениям $\rho_{ij}(x,t)$, $i, j = 1, 2$.

Поляризация молекулы, ассоциированная с полем S, имеет вид

$$p = \mathrm{Tr}\left\{\hat\rho \frac{H_{int}}{\partial S}\right\} = d_{11}\rho_{11} + d_{22}\rho_{22} +$$
$$+ \sum_{l=0}^{L} \left(d_{ll}\rho_{ll} + d_{l2}\rho_{2l} + d_{2l}\rho_{l2}\right), \quad (13)$$

где H_{int} — гамильтониан взаимодействия электромагнитного поля с молекулой.

Используя (10)–(12), находим из (13), что

$$p = d_{22}\rho_{22} + \left(d_{11} + \kappa'_{11}|P|^2\right)\rho_{11} +$$
$$+ S\left(P\rho_{12}\kappa'_{12} + P^*\rho_{21}\kappa'_{21}\right) - 2\hbar\kappa_{22}S\rho_{22} -$$
$$- \hbar\left(\rho_{12}\kappa_{12}P + \rho_{21}\kappa_{21}P^*\right). \quad (14)$$

Здесь

$$\kappa_{12} = \sum_{l=3}^{L} \frac{d_{l1}d_{2l}}{\hbar^2\Omega_l}, \quad \kappa'_{12} = \sum_{l=3}^{L} \frac{d_{ll}d_{l1}d_{2l}}{\hbar^2|\Omega_l|^2},$$
$$\kappa'_{21} = \sum_{l=3}^{L} \frac{d_{ll}d_{1l}d_{l2}}{\hbar^2|\Omega_l|^2}, \quad (15)$$

$$\kappa_{ii} = \sum_{l=3}^{L} \frac{d_{li}d_{il}}{\hbar^2\Omega_l}, \quad \kappa'_{ii} = \sum_{l=3}^{L} \frac{d_{ll}d_{li}d_{il}}{\hbar^2|\Omega_l|^2}, \quad i = 1, 2.$$

Введем эффективные действительные дипольные моменты m_{ij}, m'_{jl} следующим образом:

$$\begin{aligned} &\hbar\kappa_{12} = \epsilon m_{12} f e^{i\alpha_1}, \quad \hbar\kappa_{21} = \epsilon m_{12} f e^{-i\alpha_1}, \\ &\kappa'_{12} = m'_{12} f^2 e^{i\alpha_2}, \quad \kappa'_{21} = m'_{12} f^2 e^{-i\alpha_2}, \\ &\hbar\kappa_{ii} = \epsilon m_{ii} f, \quad \kappa'_{ii} = m'_{ii} f^2, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $f = d_0/\hbar|\Omega_0|$, d_0 — некоторый средний дипольный момент, Ω_0 — средняя частота. Далее полагаем, что $\alpha_1 = \alpha_2$. Это равенство выполняется в каждом из следующих случаев: 1) $L = 3$, т. е. имеется только один виртуальный уровень; 2) дипольные моменты d_{1l}, d_{2l} действительны; 3) ПДМ d_{ll} не зависит от l.

Перепишем поляризацию p в виде

$$p = \left(m_- - m_{22}\frac{d_0 G}{m_{12}F}\right) R_3 +$$
$$+ \epsilon R_+ \left(m'_{12}\frac{d_0 G}{m_{12}} - m_{12}F\right) +$$
$$+ \left(m_+ - m_{22}\frac{d_0 G}{m_{12}F}\right)\rho_0, \quad (17)$$

где $F = f|P|$ — безразмерная константа, $\epsilon = \mathrm{sign}(\Omega_0)$, $P = |P|\exp(i\alpha_0)$, $\rho_0 = \rho_{22} + \rho_{11}$,

$$m_{\mp} = \frac{1}{2}\left(d_{22} \mp d_{11} \mp m'_{11}F^2\right). \quad (18)$$

Введены безразмерная функция

$$G = \epsilon \frac{m_{12}}{d_0} f S F \quad (19)$$

и вектор Блоха $\mathbf{R} = (R_+, R_-, R_3)$,

$$\begin{aligned} &R_+ = \rho_{12}e^{i\alpha} + \rho_{21}e^{-i\alpha}, \\ &R_- = i\rho_{12}e^{i\alpha} - i\rho_{21}e^{-i\alpha}, \quad R_3 = \rho_{22} - \rho_{11}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_0$.

Эволюция поля S в одномерной среде описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{1}{c_S^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{4\pi N}{c_S^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (21)$$

где c_S — фазовая скорость поля Стокса в среде и N — плотность имплантированных в нее резонансных молекул.

Применим к (21) приближение однонаправленного распространения

$$c_S \partial_x S \approx -\partial_t S, \tag{22}$$

которое, как показано в работе [18], основывается на условии малости безразмерного коэффициента q перед элементами матрицы плотности в правой части (21). Численный анализ полученной ниже системы уравнений показал, что условие однонаправленности (22) выполняется при $q \lesssim 0.5$.

После применения приближения (22) уравнения (7)–(9), (17), (21) принимают вид

$$\frac{\partial R_+}{\partial \tau} = -\left(\nu + mG\right) R_-, \tag{23}$$

$$\frac{\partial R_-}{\partial \tau} = \left(\nu + mG\right) R_+ + 2GR_3, \tag{24}$$

$$\frac{\partial R_3}{\partial \tau} = -2GR_-, \tag{25}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \chi} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(cR_3 + aR_+ + dR_+G + hR_3G\right), \tag{26}$$

где $\tau = |\Omega_0| t$,

$$\frac{\partial}{\partial \chi} = \frac{\hbar F}{2\pi m_{12}^2 N}\left(c_S \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) - \frac{\epsilon m_{22} d_0 \rho_0}{m_{12}^2 F |\Omega_0|}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{27}$$

$$\begin{gathered} \nu = \frac{\omega_{21} - \omega}{|\Omega_0|} + \frac{\epsilon m_{11}}{d_0} F^2, \quad m = \epsilon \frac{d_{22} - d_{11}}{m_{12} F}, \\ c = -\epsilon \frac{m_-}{m_{12}}, \quad a = F, \\ d = -\frac{m_{12}' d_0}{m_{12}^2}, \quad h = \epsilon \frac{m_{22} d_0}{m_{12}^2 F}. \end{gathered} \tag{28}$$

Поскольку из уравнений (7)–(8) следует $\partial_t \rho_0 = 0$, последний член в правой части (17) дает вклад лишь в выражение для (27).

Система уравнений (23)–(26) описывает преобразование светового поля накачки в импульсы микроволнового ПС. Анализ показал, что при наложении условия

$$2c + ma = \nu d \tag{29}$$

эта система допускает представление нулевой кривизны и, как следствие, применение к ней метода обратной задачи рассеяния.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ

Рассмотрим неинтегрируемый в общем случае вариант системы (23)–(26). Результаты численного решения для некоторых действительных значений коэффициентов показаны на рис. 2–4. Обнаружено, что форма импульсов ПС критическим образом меняется при смене знака ϵ или ν. Для $\nu > 0$ с ростом $|h|, |d|$ полуширина импульса стремится к нулю (рис. 2), а в случае $\nu < 0$ принимает прямоугольную форму (рис. 3). Форму импульса можно контролировать сдвигом несущей частоты, дающей вклад в ν, или изменением амплитуды поля накачки, которые входят в выражения для коэффициентов (28). Эти эффекты обусловлены вкладом нелинейностей с коэффициентами d, h и наличием ПДМ. Для резонансной среды с ПДМ изменение расстройки $|\omega_{12} - \omega| \propto \nu$ критическим образом влияет на форму импульса в отличие от ВКР в такой же среде, но без ПДМ. В рамках моделей ВКР, выведенных в приближении медленных огибающих [27, 30], изменение $|\nu|$ приводит лишь к изменению групповой скорости импульсов. Таким образом, применение резонансной среды с ПДМ дает дополнительные возможности контроля параметров импульсов ПС при ВКР. На рис. 4 в качестве иллюстрации показана форма импульсов ПС для разных ν.

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Система (23)–(26) допускает представление нулевой кривизны, применение метода обратной задачи рассеяния [17], других методов нахождения точных солитонных и других решений при выполнении условия (29). В частном случае $h = d = 0$ система (23)–(26) формально эквивалентна редуцированным уравнениям Максвелла – Блоха для двухуровневой среды с ПДМ. При этом условие (29) удовлетворяется вследствие симметрии соответствующего гамильтониана [19]. В общем случае условие (29) может быть выполнено подбором несущей частоты ω и (или) амплитуды $|P|$.

При выполнении условия (29) и $\nu \neq 0$ система (23)–(26) является необходимым условием коммутативности ($\partial_\tau \widehat{L} - \partial_\chi \widehat{A} + [\widehat{L}, \widehat{A}] = 0$) следующих систем уравнений:

$$\partial_\tau \Phi = \widehat{L} \Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda & \gamma G + \gamma_0 \\ \widetilde{\gamma} G + \widetilde{\gamma}_0 & i\lambda \end{pmatrix} \Phi, \tag{30}$$

$$\partial_\chi \Phi = \widehat{A} \Phi, \tag{31}$$

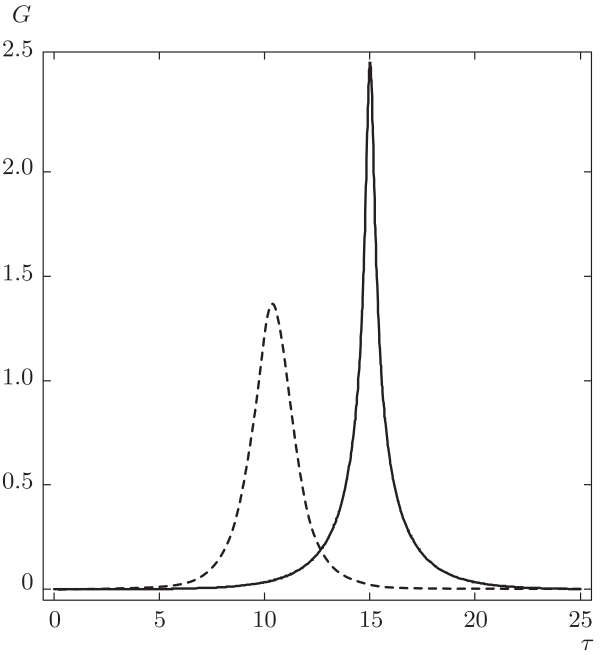

Рис. 2. Форма импульсов $G(\tau)$ при $a = -1$, $m = \nu = 1$, $d = 0$, $h = 0.5$ (сплошная линия), 0 (пунктирная)

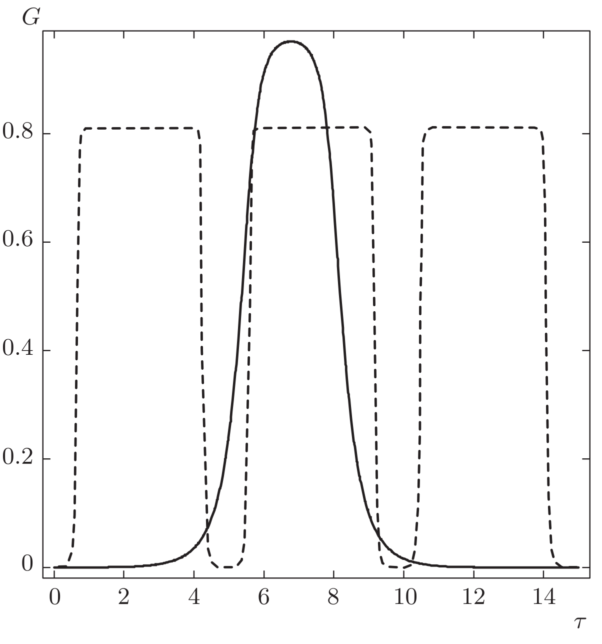

Рис. 3. Форма импульсов $G(\tau)$ при $a = -\nu = 1$, $m = 2$, $d = 0.5$, $h = 0.5$ (сплошная линия), 0.99 (пунктирная)

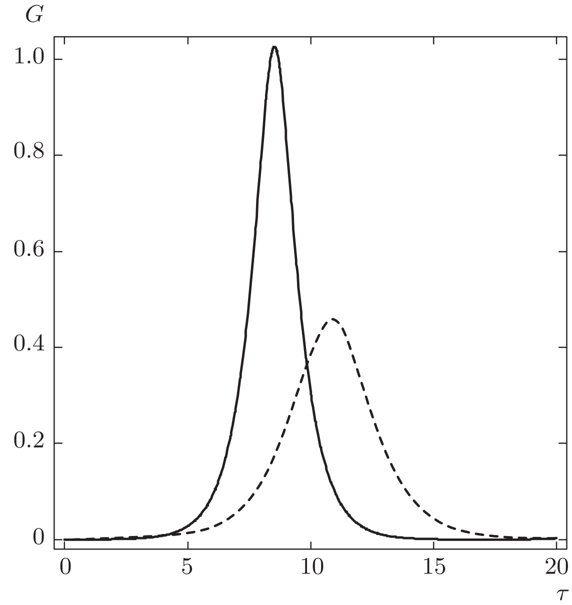

Рис. 4. Форма импульсов $G(\tau)$ при $a = 1$, $m = 1$, $d = 0$, $h = -0.2$, $\nu = 0.5$ (сплошная линия), 1 (пунктирная)

где $\Phi(\tau,\chi)$ — 2×2-матричная функция. Элементы A_{ij} матрицы $\widehat{A}$ имеют следующий вид:

$$A_{12} = \beta_+ R_+ + \beta_- R_- + \beta_3 R_3 + \delta G R_+ + \sigma G R_3, \qquad (32)$$

$$A_{21} = \widetilde{\beta}_+ R_+ + \widetilde{\beta}_- R_- + \widetilde{\beta}_3 R_3 + \widetilde{\delta} G R_+ + \widetilde{\sigma} G R_3, \qquad (33)$$

$$A_{11} = i\alpha_+ R_+ + i\alpha_3 R_3 = -A_{22}. \qquad (34)$$

В общем случае, т. е. для произвольных действительных параметров a, d, h, m, ν, представление (30), (31) допускает однозначную спектральную параметризацию только на эллиптической кривой. Общее и некоторые частные выражения для коэффициентов матриц $\widehat{L}$ и $\widehat{A}$ приведены ниже и в Приложении.

Система уравнений (23)–(26), описывающая генерацию импульсов микроволнового поля при ВКР, является новой и для среды с центром симметрии, т. е. среды, в которой $\mu_{ii} = 0$, $i = 1, 2, l$ ($c = d = m = 0$, $a \neq 0$, $\nu \neq 0$, $h \neq 0$). Как следствие, условие интегрируемости (29) выполняется тождественно. Линейные системы (30) и (31) в этом случае имеют вид

$$\partial_\tau \Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda & (iq\lambda + s)G \\ (iq\lambda - s)G & i\lambda \end{pmatrix} \Phi, \qquad (35)$$

$$\partial_\chi \Phi = \begin{pmatrix} 0 & (iq\lambda + s)hR_3G \\ (iq\lambda - s)hR_3G & 0 \end{pmatrix} \Phi + \frac{1}{\nu^2 - 4\lambda^2} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} i\left[\lambda\nu\,(2a - h\nu) + 4h\lambda^3\right] R_3 & (iq\lambda + s)\left[a\nu^2 R_+ - 2ia\nu\lambda R_-\right] \\ (iq\lambda - s)\left[a\nu^2 R_+ + 2ia\nu\lambda R_-\right] & -i\left[\lambda\nu\,(2a - h\nu) + 4h\lambda^3\right] R_3 \end{pmatrix} \Phi, \quad (36)$$

где
$$s = \sqrt{1 - \frac{h\nu}{2a}}, \quad q = \sqrt{\frac{2h}{a\nu}}. \qquad (37)$$

Если дополнительно положить $h = 0$, то система уравнений (23)–(26) приводится к системе уравнений, применяемых для описания эволюции солитонов без огибающей в двухуровневой среде [18]. Эти солитоны распространяются в среде без изменения формы. Изменение частоты пропорционально ν приводит в этом случае лишь к монотонному изменению групповой скорости солитона. При $h \neq 0$ и в интегрируемом частном случае форма солитонов так же, как и выше, зависит от знака ν критическим образом. Линейная система (35) эквивалентна спектральной задаче Вадатти–Конно–Ичикавы, которая использовалась Матсуно [32] при нахождении солитонных и бризерных решений обобщенного уравнения синус-Гордона. Аналогичная проблема возникает и в другой точно решаемой задаче [33]. Следуя работам [32], можно найти решения для этого частного случая модели. Солитонные решения подтверждают зависимость формы импульсов ПС от значений коэффициентов ν, a, h. Более сложные, например, бризерные решения, демонстрируют сильную зависимость от нелинейности, пропорциональную h. В качестве иллюстрации на рис. 5 для трех малых значений h приведены графики точного бризерного решения, которое получено по аналогии с решениями Матсуно [32].

5. СЛАБОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ

Рассмотрим предел слабого возбуждения уровня 2, т. е. $\rho_{22} \ll 1$, $R_3 \approx -1$. После преобразований
$$r_+ = R_+ + 2/m, \quad U = G + \nu/m, \quad \chi' = m\chi - m\tau/2 \qquad (38)$$
система (23)–(26) принимает вид
$$\frac{\partial r_+}{\partial \tau'} = -UR_-, \qquad (39)$$
$$\frac{\partial R_-}{\partial \tau'} = Ur_+ + p_0, \qquad (40)$$
$$\frac{\partial U}{\partial \chi'} = (d\nu - am)\,UR_- + dm\frac{\partial^2 R_-}{\partial \tau'}, \qquad (41)$$
где $\tau' = m\tau$ и $p_0 = 2\nu/m^2$.

Найдем автомодельное решение, зависящее от переменной $\eta = \tau' - \chi'/V$, где V — константа. Пусть $\nu = 0$, тогда для угла Блоха
$$\Theta = \int_{-\infty}^{\eta} U(\eta')\,d\eta'$$
находим из уравнений (39)–(41) выражение
$$\left(\frac{1}{V} + d\cos\Theta\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} = -c_0 - a\cos\Theta, \qquad (42)$$
где c_0 — константа интегрирования. Уравнение (42) имеет решение в неявном виде:
$$\frac{2\,(a - c_0Vd)}{V\sqrt{a^2 - c_0^2}}\,\mathrm{arth}\left(\frac{c_0 - a}{\sqrt{a^2 - c_0^2}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\Theta d}{a} - \eta. \quad (43)$$

Зависимость $\Theta(\eta)$ изображена на рис. 6 и 7 для разных значений коэффициента нелинейности d. Обнаружено, что для $d < 0$ зависимость Θ от η может быть трехзначной, а для $d > 0$ Θ монотонно растет с увеличением η. Заметим, что в этом пределе модели, т. е. для постоянной амплитуды поля накачки и слабого возбуждения среды, нетривиальная динамика ВКР возможна лишь для ненулевого ПДМ ($m \neq 0$) и вне приближения медленных огибающих для ПС. Отметим, что в этом пределе не существует представления нулевой кривизны для системы (39)–(41).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выведена новая система уравнений ВКР в резонансной среде, в которой применяется приближение однонаправленного распространения ПС вместо обычно применяемого приближения медленной огибающей. Для резонансной среды без центра симметрии учтен вклад постоянных дипольных моментов, ассоциированных с разными уровнями энергии. В такой системе выявлены новые механизмы когерентного управления режимами генерации и параметрами импульсов ПС посредством изменения параметров поля накачки. Значения ПДМ варьируются в широких пределах для разных сред. Например, для молекулы PVPHC можно выделить трехуровневую оптическую схему с дипольными моментами $d_{12} = 4.92d_0$, $d_{13} = 2.804$ Д, $d_{23} = 9.821$ Д, $d_{22} = 2.95$ Д, $d_{33} = 2.67$ Д, $d_{11} \approx 0$ [34].

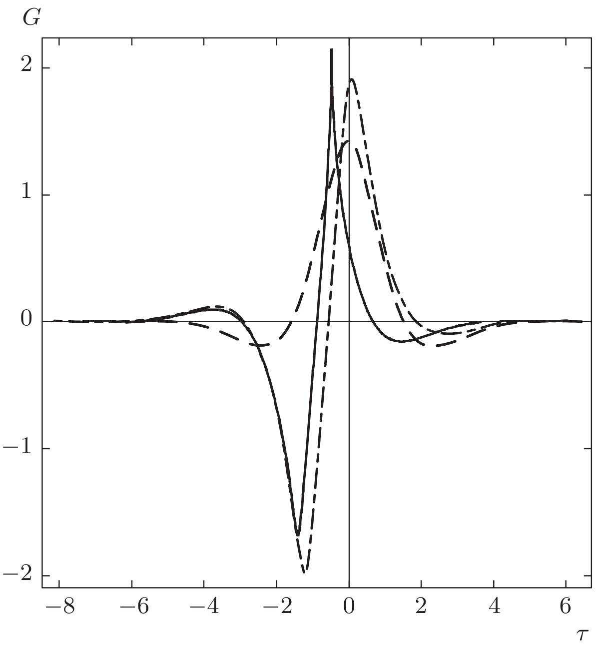

Рис. 5. Форма бризерного решения $G(\tau)$ при $-a = m = \nu = 1$, $d = 0$, $h = 10^{-4}$ (штриховая линия), 10^{-2} (штрихпунктирная), $1/18$ (сплошная)

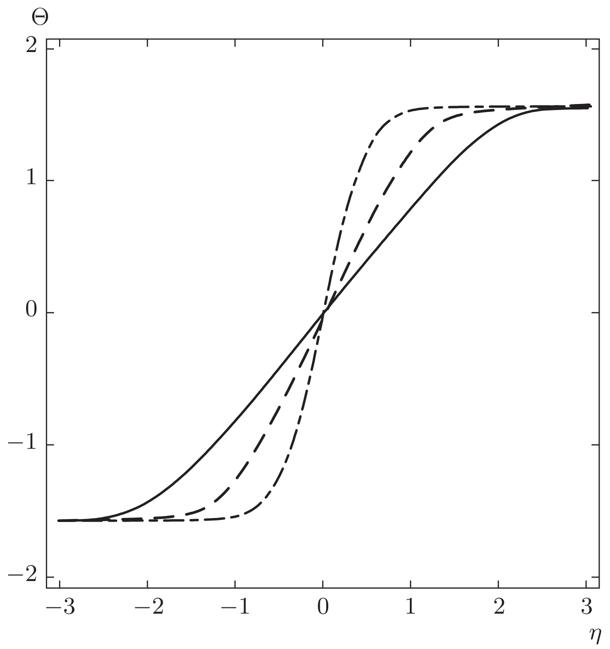

Рис. 6. Зависимости Θ от η для $d = 1$ (штриховая линия), 0.5 (штрихпунктирная), 0.1 (сплошная)

Наряду с молекулярными средами ненулевой ПДМ возможен и в полупроводниках. Квантовый конфайнмент носителей в полупроводниках приво-

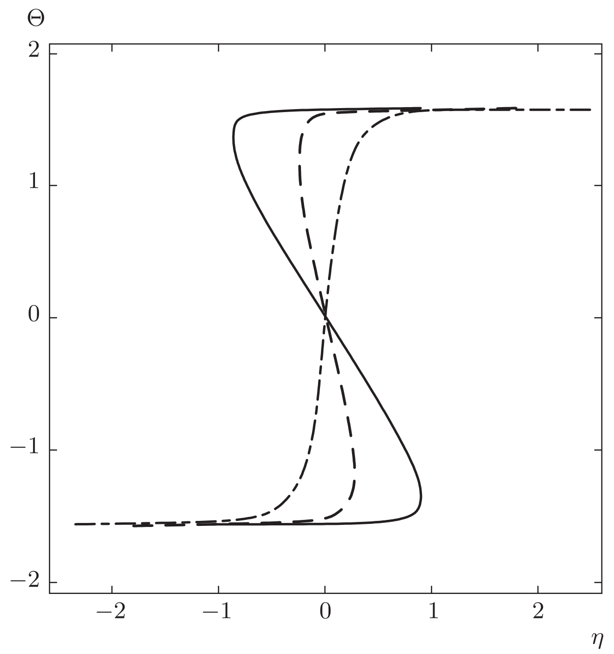

Рис. 7. Зависимости Θ от η для $d = -1$ (штриховая линия), -0.5 (штрихпунктирная), -0.1 (сплошная)

дит к образованию дискретных зон с очень большими силами осцилляторов, связанных с межзонными переходами. В асимметричных квантовых ямах возможен ненулевой ПДМ. Например, в работе [35] приводятся значения дипольных моментов для $GaAs/Al_{0.14}Ga_{0.86}$ с барьерами $Al_{0.3}Ga_{0.3}As$ между ямами. Дипольные моменты в трехзонной схеме следующие: $d_{12} = 17.6d_0$, $d_{13} = 11.1d_0$, $d_{23} = 33.4d_0$, и, соответственно, следующие ПДМ: $d_{22} - d_{11} = -77.8d_0$, $d_{33} - d_{11} = -72.9d_0$, $d_{33} - d_{22} = 4.9d_0$, где $d_0 = 1.6 \cdot 10^{-29}$ Кл·м.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Коэффициенты матрицы $\widehat{A}$

1. Общий вид

Для $\nu \neq 0$ коэффициент $\alpha_3(\lambda)$ — решение уравнения

$$\nu\left[\nu\alpha_3\left(\alpha_3 + \lambda h\right) + \lambda\nu d\alpha_+\right] = \\ = \lambda\left[2\lambda\left(\alpha_3 + \lambda h\right) + a\nu\right]\left(2\alpha_3 + m\alpha_+\right), \quad \text{(A.1)}$$

где

$$\alpha_+ = \frac{m}{2}\left(\alpha_3 + \lambda h\right) - \lambda d. \quad \text{(A.2)}$$

Остальные коэффициенты имеют вид

$$\beta_3 = -\frac{\gamma_0\alpha_3}{\lambda}, \quad \widetilde{\beta}_3 = -\frac{\widetilde{\gamma}_0\alpha_3}{\lambda}, \tag{A.3}$$

$$\beta_- = -i\gamma\left(\alpha_3 + \lambda h\right), \quad \widetilde{\beta}_- = i\widetilde{\gamma}\left(\alpha_3 + \lambda h\right), \tag{A.4}$$

$$\beta_+ = -\frac{\gamma}{\nu}\left[2\lambda\left(\alpha_3 + \lambda h\right) + a\nu\right], \quad \widetilde{\beta}_+ = \frac{\widetilde{\gamma}}{\gamma}\beta_+, \tag{A.5}$$

$$\gamma_0 = \frac{\gamma\lambda}{2\nu\alpha_3}\left[ma\nu - d\nu^2 + 2m\lambda\left(\nu\alpha_3 + h\lambda\right)\right],$$
$$\widetilde{\gamma}_0 = \gamma_0\frac{\widetilde{\gamma}}{\gamma}, \tag{A.6}$$

$$\sigma = \gamma h, \quad \widetilde{\sigma} = \widetilde{\gamma}h, \quad \delta = \gamma d, \quad \widetilde{\delta} = \widetilde{\gamma}d, \tag{A.7}$$

причем γ и $\widetilde{\gamma}$ — произвольные нетривиальные функции параметра λ, связанные условием

$$\gamma\widetilde{\gamma} = -\frac{\alpha_3\left(4 + m^2\right) + m\lambda\left(mh - 2d\right)}{4\left(\alpha_3 + h\lambda\right)}. \tag{A.8}$$

В общем случае однозначная параметризация спектральной проблемы (30) возможна на эллиптической кривой.

2. Эллиптическая параметризация

Для произвольных действительных величин $\nu \neq 0$, m, a, d, h введем спектральный параметр ζ следующим образом:

$$\lambda = \lambda_- \operatorname{sn}(\zeta, k), \quad k = \frac{\lambda_-}{\lambda_+}, \tag{A.9}$$

где

$$\lambda_\mp^2 = \frac{1}{4\left(2h + dm\right)^2}\times$$
$$\times\left\{Q_0 \mp |\nu|\,|hm - 2d|\,\sqrt{\nu\left[d^2\nu - a\left(2h + dm\right)\right]}\right\}, \tag{A.10}$$

$$Q_0 = \nu\left\{\nu\left[4h^2 + d^2\left(8 + m^2\right)\right] - \right.$$
$$\left. - a\left(2h + d\,m\right)\left(4 + m^2\right)\right)\right\}, \tag{A.11}$$

k — модуль эллиптических функций Якоби: $\operatorname{sn} = \operatorname{sn}(\zeta, k)$, $\operatorname{cn} = \operatorname{cn}(\zeta, k)$, $\operatorname{dn} = \operatorname{dn}(\zeta, k)$; ζ лежит в прямоугольнике

$$\mathcal{R} = \left\{\zeta : |\operatorname{Re}\zeta| \le 2\mathcal{K}, |\operatorname{Im}\zeta| \le 2\mathcal{K}'|\right\}.$$

Здесь $\mathcal{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода и $\mathcal{K}'(k) = \mathcal{K}(k')$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$; $4\mathcal{K}(k)$ и $4\mathcal{K}'(k)$ — соответственно действительный и мнимый периоды функций Якоби.

Решение (A.1) имеет вид

$$\alpha_3(\zeta) = \lambda_- \operatorname{sn}(\zeta, k)\times$$
$$\times\frac{Q_1 - 4\left(2h + dm\right)\lambda_-\lambda_+ \operatorname{cn}(\zeta, k)}{4\left[\nu^2 - \lambda_-^2\, \operatorname{sn}(\kappa, \zeta)^2\left(4 + m^2\right)\right]}, \tag{A.12}$$

где

$$Q_1 = \nu a\left(4 + m^2\right) - \nu^2\left(2h + dm\right), \tag{A.13}$$

$$\lambda_-\lambda_+ =$$
$$= \frac{\nu\sqrt{\left\{Q_2 + \nu^2\left[4h\left(h - dm\right) + d^2\left(16 + m^2\right)\right]\right\}}}{4\left(2h + dm\right)}, \tag{A.14}$$

$$Q_2 = a^2\left(4 + m^2\right)^2 -$$
$$- 2a\nu\left[2h\left(4 - m^2\right) + dm\left(12 + m^2\right)\right]. \tag{A.15}$$

Коэффициенты γ и $\widetilde{\gamma}$ — нетривиальные функции ζ, связанные соотношением

$$4\gamma\widetilde{\gamma} = \frac{G_1 + 4\lambda_- \operatorname{sn}(\zeta, k)\left(4 + m^2\right)\left(2h + dm\right)\lambda_-\lambda_+ \operatorname{cn}(\kappa, \zeta)\operatorname{dn}(\kappa, \zeta)}{G_2 + 4\lambda_- \operatorname{sn}(\zeta, k)\left(4 + m^2\right)\left(2h + dm\right)\lambda_-\lambda_+ \operatorname{cn}(\kappa, \zeta)\operatorname{dn}(\kappa, \zeta)}, \tag{A.16}$$

где

$$G_1 = \nu\lambda_- \operatorname{sn}(\zeta, k)\left\{a\left(4 + m^2\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \nu\left[2h\left(m^2 - 4\right) - 2dm\left(12 + m^2\right)\right]\right\} +$$
$$+ 4\left(2h + dm\right)\left(4 + m^2\right)\left[\lambda_- \operatorname{sn}(\zeta, k)\right]^3, \tag{A.17}$$

$$G_2 = \nu\lambda_- \operatorname{sn}(\zeta, k)\left[-a\left(4 + m^2\right) - 2h\nu - dm\nu\right] +$$
$$+ 4\left(2h + dm\right)\left[\lambda_- \operatorname{sn}(\zeta, k)\right]^3. \tag{A.18}$$

Остальные коэффициенты матрицы $\widehat{A}$ определяются формулами (A.2) и (A.3)–(A.7).

3. Алгебраическая параметризация

В ряде частных случаев матрицы $\widehat{L}$ и $\widehat{A}$ имеют менее громоздкое, алгебраическое представление, например, для

$$d^2\nu = a\left(2h + dm\right). \tag{A.19}$$

Еще более простую форму параметризации находим для $2d = mh$:

$$\gamma = g_1\left(1 - g_2\lambda\right), \quad \widetilde{\gamma} = -g_1\left(1 + g_2\lambda\right), \tag{A.20}$$

$$g_1^2 = \frac{\left(4+m^2\right)^2\left(2a-h\nu\right)}{2\left[2a\left(4+m^2\right)-m^2h\right]}, \quad g_2^2 = \frac{4h}{2a\nu - h\nu^2}, \tag{A.21}$$

$$\gamma_0 = \gamma\, g_0, \quad \widetilde{\gamma}_0 = \widetilde{\gamma}\, g_0, \quad g_0 = \frac{m\nu}{4+m^2}, \tag{A.22}$$

$$\beta_+ = \frac{\gamma\nu\left(2a\nu - hm^2\lambda^2\right)}{2\left[\nu^2 - \left(4+m^2\right)\lambda^2\right]}, \quad \widetilde{\beta}_+ = \frac{\widetilde{\gamma}}{\gamma}\beta_+, \tag{A.23}$$

$$\beta_- = -i\gamma\frac{\nu\lambda\left[2a\left(4+m^2\right) - hm^2\nu\right]}{4\left[\nu^2 - \left(4+m^2\right)\lambda^2\right]},$$

$$\widetilde{\beta}_- = -\frac{\widetilde{\gamma}}{\gamma}\beta_-, \tag{A.24}$$

$$\beta_3 = -\frac{\gamma m\nu\left[2a\nu - h\left(\nu^2 - 4\lambda^2\right)\right]}{4\left[\nu^2 - \left(4+m^2\right)\lambda^2\right]}, \quad \widetilde{\beta}_3 = \frac{\widetilde{\gamma}}{\gamma}\beta_3, \tag{A.25}$$

$$\alpha_3 = \frac{\left(4+m^2\right)\lambda\left(2a\nu - h\nu^2 + 4h\lambda^2\right)}{4\left(\nu^2 - (4+m^2)\lambda^2\right)}, \tag{A.26}$$

$$\alpha_+ = \frac{m\left(4+m^2\right)\lambda\left(2a\nu - h\nu^2 + 4h\lambda^2\right)}{8\left(\nu^2 - (4+m^2)\lambda^2\right)}, \tag{A.27}$$

$$\sigma = \gamma h, \quad \widetilde{\sigma} = \widetilde{\gamma}\, h, \quad \delta = \gamma\frac{mh}{2}, \quad \widetilde{\delta} = \widetilde{\gamma}\frac{mh}{2}. \tag{A.28}$$

Линейная система (30) в этом случае имеет вид

$$\partial_\tau \Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda & (1 - g_2\lambda)(U + g) \\ -(1 + g_2\lambda)(U + g) & i\lambda \end{pmatrix}\Phi, \tag{A.29}$$

где $U = g_1 G$, $g = g_0 g_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*, Wiley, New York (1984).
2. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
3. А. И. Маймистов, КЭ **30**, 287 (2000).
4. В. С. Пивцов, С. Г. Раутиан, В. П. Сафонов, К. Г. Фолин, Б. М. Черноброд, Письма в ЖЭТФ **30**, 342 (1979).
5. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **93**, 84 (1987).
6. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **115**, 1168 (1999).
7. И. А. Полуэктов, Ю. М. Попов, В. С. Ройтберг, КЭ **3**, 2621 (1975).
8. М. Махвиладзе, М. Е. Сарычев, ЖЭТФ **71**, 896 (1976).
9. A. Nazarkin and G. Korn, Phys. Rev. A **58**, R61 (1998).
10. M. Müller, P. Kalosha, and J. Herrmann, Phys. Rev. A **58**, 1372 (1998).
11. A. S. Zibrov, A. B. Matsko, and M. O. Scully, Phys. Rev. Lett. **89**, 103601(4p) (2002).
12. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **130**, 589 (2006).
13. R. Bavli, D. F. Heller, and Y. B. Band, Phys. Rev. A **41**, 3960 (1990).
14. C. Hoerner, J. P. Lavoine, and A. A. Villaeys, Phys. Rev. A **48**, 1564 (1993).
15. M. C. Bessega, J. L. Paz, A. J. Hernrändez, and A. E. Crärdenas, Phys. Lett. A **206**, 305 (1995).
16. V. P. Gavrilenko and E. Oks, Phys. Rev. Lett. **74**, 3796 (1995).
17. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*: *метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
18. J. K. Eilbeck, J. Phys. A: Math. Gen. **5**, 1355 (1972).
19. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, and J. V. Moloney, Physica D **138**, 134 (2000).
20. А. А. Заболотский, Письма в ЖЭТФ **77**, 558 (2003) [A. A. Zabolotskii, JETP Lett. **77**, 464 (2003)].
21. A. A. Zabolotskii, Physica D **185**, 117 (2003).
22. H. Steudel, A. A. Zabolotskii, and R. Meinel, Phys. Rev. E **72**, 056608 (2005).
23. A. A. Zabolotskii, Phys. Rev. E **75**, 036612 (2007).
24. A. A. Zabolotskii, Eur. Phys. J. Special Topics **173**, 193 (2009).
25. R. P. Feynman, F. L. Vernon, and R. W. Hellwarth, J. Appl. Phys. **28**(1), 49 (1957).

26. J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, and P. S. Pershan, Phys. Rev. **127**, 1918 (1962); N. Bloembergen and P. S. Pershan, Phys. Rev. **128**, 606 (1962).

27. H. Steudel, Ann. Phys. (Leipzig) **34**, 188 (1977).

28. C. C. Gerry and J. H. Eberly, Phys. Rev. A **42**, 6805 (1990).

29. M. Alexanian and S. K. Bose, Phys. Rev. A **52**, 2218 (1995).

30. H. Steudel, Physica D (Amsterdam) **6**, 155 (1983).

31. D. J. Kaup, Physica D (Amsterdam) **6**, 143 (1983).

32. Y. Matsuno, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 105204 (2010); J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 375201 (2010).

33. A. A. Zabolotskii, Phys. Rev. A **85**, 063833 (2012).

34. Y.-H. Sun, K. Zhao, C.-K. Wang et al., Chem. Phys. Lett. **394**, 176 (2004).

35. S. Kŏcinac, Z. Ikonić, and V. Milanović, Opt. Comm. **140**, 89 (1997).