ЖЭТФ, 2016, том 149, вып. 1, стр. 230–236

ДИНАМИЧЕСКИЙ ВЫВОД КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФУЗИИ ПО ИМПУЛЬСАМ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. В. Огнивенко*

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
61108, Харьков, Украина

Поступила в редакцию 22 июля 2015 г.

Получено выражение для тензора диффузии частиц в пространстве импульсов на основе динамики движения частиц. Общие уравнения использованы для нахождения среднеквадратичного разброса по импульсам при столкновениях релятивистских заряженных частиц на временах, меньших времени хаотизации движения частиц, и на больших временах, когда движение является полностью случайным.

DOI: 10.7868/S0044451016010223

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, процессы диффузии в импульсном пространстве в системах, состоящих из большого числа частиц, изучаются с помощью кинетических уравнений с интегралами столкновений, построенными для описания рассматриваемых физических явлений (см., например, [1–6] и цитируемую там литературу). Так, для кулоновски взаимодействующих нерелятивистских заряженных частиц интеграл столкновений был впервые получен в работе [1] исходя из интеграла столкновений Больцмана. Для релятивистских заряженных частиц интеграл столкновений найден в работе [2] релятивистским преобразованием интеграла столкновений, полученного в работе [1].

Кинетические уравнения с такими интегралами столкновений описывают диффузию частиц в импульсном пространстве на кинетическом этапе эволюции системы, т. е. на временах, больших некоторого характерного времени хаотизации движения частиц. В данной работе изложен вывод коэффициентов диффузии по импульсам исходя непосредственно из динамики движения отдельных частиц под действием суммарной силы, действующей со стороны каждой из них. Такой подход дает возможность не только исследовать диффузию частиц в пространстве импульсов на кинетическом этапе эволюции системы, когда движение частиц является полностью случайным, но и описать изменение среднеквадратичного значения импульса частиц на начальной стадии эволюции системы, в случае предброуновского движения частиц. С помощью такого метода исследован процесс радиационной релаксации потока первоначально моноэнергетических ультрарелятивистских электронов, движущихся в периодическом в пространстве статическом магнитном поле ондулятора [7].

В данной работе этим методом исследована диффузия в импульсном пространстве при столкновениях релятивистских заряженных частиц в отсутствие внешних полей. Поскольку ранее выражения для среднего квадратичного разброса по импульсам были получены для одномерного движения частиц одного сорта, в настоящей работе представлено обобщение этого метода на случай систем, состоящих из частиц разных сортов, и получено выражение для трехмерного тензора диффузии в пространстве импульсов.

2. КОЭФФИЦИЕНТ ДИФФУЗИИ ПО ИМПУЛЬСАМ

Рассмотрим систему, состоящую из N частиц разных сортов, занимающих некоторый объем V и подчиняющихся законам классической механики. Уравнения движения отдельной (пробной) частицы сорта a представим в виде

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \mathbf{F}\left[x_a(t), t\right] = \sum_{s=1}^{N} \mathbf{F}^{(s)}\left[x_a(t), t; x_s(t, x_{os})\right], \quad (1)$$

* E-mail: ognivenko@kipt.kharkov.ua

$$\frac{d\mathbf{r}_a}{dt} = \frac{\mathbf{p}_a}{m_a\gamma_a}, \tag{2}$$

где $\mathbf{r}_a$ и $\mathbf{p}_a$ — радиус-вектор и импульс частицы сорта a, $\mathbf{F}(x,t)$ — микроскопическая сила, $\mathbf{F}^{(s)}(x,t;x_s)$ — сила парного взаимодействия двух частиц, действующая на частицу в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t, со стороны s-й частицы, $x_s(t) \equiv \equiv \{\mathbf{r}_s(t), \mathbf{p}_s(t)\}$ — совокупность координат и импульс s-й частицы, $x_{0a} = x_a(t_0)$, t_0 — начальный момент времени, $\gamma_a = \sqrt{1+p_a^2/m_a^2c^2}$ — релятивистский фактор, m_a — масса частицы сорта a, c — скорость света в вакууме. В правой части уравнения (1) суммирование ведется по всем частицам системы.

Будем считать, что выражения для сил парного взаимодействия между частицами известны. Определяя из уравнения (1) отклонение от среднего значения импульса частицы

$$\Delta\mathbf{p}_a = \int\limits_{t_0}^{t} \delta\mathbf{F}\left[\mathbf{r}_a(t'),t'\right]dt',$$

выражение для тензора диффузии запишем в следующем виде:

$$D_{ij}^{(a)} = \frac{d}{2dt}\langle\Delta p_{ai}\Delta p_{aj}\rangle = = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} dt_1\left[K_{ij}^{(a)}(t,t_1) + K_{ji}^{(a)}(t,t_1)\right], \tag{3}$$

$$K_{ij}^{(a)}(t,t_1) = \langle\delta F_i[\mathbf{r}_a(t),t]\delta F_j[\mathbf{r}_a(t'),t']\rangle, \tag{4}$$

где $\Delta p_a = p_a(t) - \langle p_a\rangle$, $\delta\mathbf{F} = \mathbf{F} - \langle\mathbf{F}\rangle$, угловые скобки означают усреднение по ансамблю.

Для вычисления среднего значения произведения флуктуаций силы введем функцию распределения динамических состояний системы $D_N(x_{01},\ldots,x_{0N};t_0)$ в $6N$-мерном фазовом пространстве координат и импульсов частиц в начальный момент времени t_0 [3]. Эта функция вводится так, что $D_N(x_{01},\ldots,x_{0N};t_0)\,dx_{01}\ldots dx_{0N}$ есть вероятность того, что в момент времени t_0 система находится в состоянии, для которого координаты и импульс s-й частицы ($s = 1,\ldots,N$) находятся в бесконечно малом фазовом объеме dx_{0s} около точки фазового пространства x_{0s}.

Условие нормировки функции распределения D_N запишем в виде

$$\int\limits_{\Omega_X} D_N(x_{01},\ldots,x_{0N};t_0)\,dx_{01}\ldots dx_{0N} = 1, \tag{5}$$

где интегрирование ведется по всему допустимому $6N$-мерному фазовому пространству Ω_X.

С помощью функции распределения D_N можно выполнить статистическое усреднение микроскопической силы и произведения этих сил, которое входит в подынтегральное выражение в правой части уравнения (4):

$$\langle F(x(t),t)\rangle = \int\limits_{\Omega_X}\left\{\sum_{s=1}^{N}\mathbf{F}^{(s)}\left[x(t),t;x_s(t,x_{0s})\right]\right\}\times \times D_N(x_{01},\ldots,x_{0N};t_0)\,dx_{01}\ldots dx_{0N}, \tag{6}$$

$$\langle F_i(x(t),t)F_j(x(t'),t')\rangle = = \int\limits_{\Omega_X}\left\{\sum_{p=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}F_i^{(p)}\left[x(t),t;x_p(t,x_{0p})\right]\times \times F_j^{(s)}\left[x(t'),t';x_s(t',x_{0s})\right]\right\}\times \times D_N(x_{01},\ldots,x_{0N};t_0)\,dx_{01}\ldots dx_{0N}. \tag{7}$$

Пусть $N = \sum_a N_a$, где N_a — число частиц сорта a, суммирование по a означает суммирование по разным сортам частиц.

Считая, что x_{0n} является начальной координатой в фазовом пространстве частицы сорта b, определим одночастичную функцию распределения частиц этого сорта:

$$f_b(x_{0n},t_0) = N_b\int D_N(x_{01},\ldots,x_{0N};t_0)\times \times\prod_{s=1,s\neq n}^{N} dx_{0s}. \tag{8}$$

Согласно уравнению (5) эта функция удовлетворяет условию нормировки:

$$\int f_b(x_{0b},t_0)\,dx_{0b} = N_b.$$

Учитывая, что D_N является симметричной функцией относительно перестановки координат фазового пространства частиц одного сорта, а также используя определение (8), запишем выражение (6) в виде

$$\langle F(x(t),t)\rangle = \sum_b\int\mathbf{F}^{(b)}\left[x(t),t;x_b(t,x_{0b})\right]\times \times f_b(x_{0b},t_0)\,dx_{0b}. \tag{9}$$

Для вычисления среднего значения произведения микроскопических сил в разные моменты времени в подынтегральном выражении (7) двойную сумму представим в виде двух частей, в одной из которых оставим двойную сумму с одинаковыми индексами, а в другой — двойную сумму с разными индексами. Учитывая симметричность функции распределения D_N относительно перестановки координат фазового пространства частиц одного сорта, а также определение (5), запишем выражение (7) в виде

$$\begin{aligned}\langle F_i(x(t),t)F_j(x(t'),t')\rangle = \\ = \sum_b \int \mathbf{F}_i^{(b)}\left[x(t),t;x_b(t,x_{0b})\right] \times \\ \times \mathbf{F}_j^{(b)}\left[x(t'),t';x_b(t',x_{0b})\right] \times \\ \times f_b(x_{0b},t_0)\,dx_{0b} + \sum_a\sum_b\left(1-\frac{\delta_{ab}}{N_b}\right) \times \\ \times \int \mathbf{F}_i^{(a)}\left[x(t),t;x_a(t,x_{0a})\right]\mathbf{F}_j^{(b)}\left[x(t'),t';x_b(t',x_{0b})\right] \times \\ \times f_{ab}(x_{0a},x_{0b};t_0)\,dx_{0a}dx_{0b}. \quad (10)\end{aligned}$$

Здесь δ_{ab} — символ Кронекера, $f_{ab}(x_{0a},x_{0b};t_0)$ — двухчастичная функция распределения частиц сорта a и b, определяемая следующим образом:

$$\begin{aligned}f_{ab}(x_{0n},x_{0m};t_0) = \\ = N_aN_b\int D_N(x_{01},\ldots,x_{0N};t_0)\prod_{s=1,s\neq n,m}^{N} dx_{0s},\end{aligned}$$

x_{0n} и x_{0m} — начальные координаты частиц соответственно сорта a и b. Двухчастичная функция распределения, согласно (5), удовлетворяет условию нормировки:

$$\int f_{ab}(x_{0a},x_{0b};t_0)\,dx_{0a}dx_{0b} = N_aN_b.$$

Будем считать, что в начальный момент времени t_0 корреляциями между частицами можно пренебречь:

$$f_{ab}(x_{0a},x_{0b};t_0) = f_a(x_{0a},t_0)f_b(x_{0b},t_0).$$

Используя тождество

$$\begin{aligned}\langle \delta F_i(x,t)\delta F_j(x',t')\rangle \equiv \\ \equiv \langle F_i(x,t)F_j(x',t')\rangle - \langle F_i(x,t)\rangle\langle F_j(x',t')\rangle\end{aligned}$$

и пренебрегая в уравнении (10) малыми величинами, пропорциональными $1/N_b$, считая, что $N_b \gg 1$, находим среднее значение произведения флуктуаций микроскопических сил:

$$\begin{aligned}\langle \delta F_i(x(t),t)\delta F_j(x(t'),t')\rangle = \\ = \sum_b \int F_i^{(b)}\left[x(t),t;x_b(t,x_{0b})\right] \times \\ \times F_j^{(b)}\left[x(t'),t';x_b(t',x_{0b})\right] \times \\ \times f_b(x_{0b},t_0)\,dx_{0b}. \quad (11)\end{aligned}$$

Это соотношение позволяет выразить корреляционную функцию флуктуаций микроскопической силы (4) через произведение сил парного взаимодействия частиц, усредненное по начальному распределению частиц в шестимерном фазовом пространстве координат и импульсов частиц:

$$\begin{aligned}K_{ij}^{(a)}(t,t_1) = \sum_b \int dx_{0b}f_b(x_{0b}) \times \\ \times F_i^{(b)}(\mathbf{r}_a(t),t;x_b(t,x_{0b})) \times \\ \times F_j^{(b)}(\mathbf{r}_a(t_1),t_1;x_b(t_1,x_{0b})). \quad (12)\end{aligned}$$

Суммирование в правой части уравнения (12) проводится по всем сортам частиц, в том числе и по частицам сорта a.

Уравнения (3), (12) и (1), (2) описывают эволюцию во времени среднего квадратичного разброса по импульсам частиц. При этом сила парного взаимодействия частиц определяется законами их взаимодействия в рассматриваемой системе.

Решение этих уравнений в явном аналитическом виде в общем случае наталкивается на значительные трудности. Ниже мы найдем тензор диффузии в импульсном пространстве релятивистских заряженных частиц в отсутствие внешних полей, пренебрегая влиянием полей частиц на их движение.

3. КОЭФФИЦИЕНТ ДИФФУЗИИ ПО ИМПУЛЬСАМ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Воспользуемся полученными формулами для нахождения коэффициента диффузии по импульсам при столкновениях релятивистских заряженных частиц в отсутствие внешних полей. Выражение для силы, действующей на заряженную частицу сорта a в координате $\mathbf{r}$ в момент времени t со стороны b-й частицы, движущейся по траектории $\mathbf{r}_b(t)$, запишем с помощью потенциалов электромагнитного поля:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{(b)}(\mathbf{r},t;x_{0b}) = -\frac{e_a}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_b}{\partial t} - \\ - e_a\mathrm{grad}\,\varphi_b + \frac{e_a}{c}[\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A}_b], \quad (13)\end{aligned}$$

где

$$\varphi_b = \frac{e_b}{R' - \boldsymbol{\beta}_b' \cdot \mathbf{R}'}, \quad \mathbf{A}_b = \boldsymbol{\beta}_b' \varphi_b,$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t, x_{0b}), \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c},$$

e_a и e_b — заряды частиц соответственно сорта a и b; штрих означает, что величина берется в запаздывающий момент времени $t' = t - R'/c$.

Поскольку движение зарядов является релятивистским, в выражении для силы парного взаимодействия (13) мы учитываем как электрическое, так и магнитное поле, создаваемое зарядом.

Рассматривая малые промежутки времени, за которые скорость частиц существенно не меняется, представим траекторию движения частицы сорта b в виде

$$\mathbf{r}_b(t) = \mathbf{r}_{0b} + \mathbf{v}_{0b}(t - t_0).$$

Налагая на потенциалы условие

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \mathbf{A} = 0,$$

i-ю компоненту силы парного взаимодействия частиц (13) представим в виде

$$F_i^{(b)}(\mathbf{r}, t; x_{0b}) = -e_a e_b \alpha_{ik}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_{0b}) \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{1}{R_*}, \qquad (14)$$

где

$$\alpha_{ik}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_0) = (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_0)\delta_{ik} + \beta_{0i}(\beta_k - \beta_{0k}),$$

$$R_*(\mathbf{r}, t; x_{0b}) \equiv R' - \boldsymbol{\beta}_{0b} \cdot \mathbf{R}',$$

y_k — декартовы компоненты вектора $\mathbf{r}$, $k = 1, 2, 3$.

Рассмотрим пространственно-однородную систему, считая, что одночастичная функция распределения не зависит от пространственных координат. Тогда выражение (12) с учетом (14) можно записать в виде

$$K_{ij}^{(a)}(t, t_1) = \sum_b e_a^2 e_b^2 \int d\mathbf{p}_{0b} f_b(\mathbf{p}_{0b}) \alpha_{ik}(\boldsymbol{\beta}_a, \boldsymbol{\beta}_{0b}) \times$$
$$\times \alpha_{jp}(\boldsymbol{\beta}_a, \boldsymbol{\beta}_{0b}) J_{kp}(\boldsymbol{\beta}_a, \boldsymbol{\beta}_{0b}; t, t_1), \quad (15)$$

$$J_{kp} = \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_{1p}} \int \frac{d\mathbf{r}_{0b}}{R_*(\mathbf{r}, t; x_{0b}) R_*(\mathbf{r}_1, t_1; x_{0b})}. \qquad (16)$$

Вычислим интеграл по объему в правой части уравнения (16). Прежде всего отметим, что величина $R_*(\mathbf{r}, t; x_{0b})$ равна $\sqrt{(\boldsymbol{\beta}_{0b} \cdot \mathbf{R})^2 + R^2/\gamma_{0b}^2}$ и представляет собой модуль вектора

$$\mathbf{R}_\parallel(\mathbf{r}, t; x_{0b}) + \frac{1}{\gamma_{0b}} \mathbf{R}_\perp(\mathbf{r}, t; x_{0b}) \equiv \boldsymbol{\rho},$$

где символами «$\parallel$» и «$\perp$» обозначены компоненты вектора, параллельные и перпендикулярные вектору $\boldsymbol{\beta}_{0b}$. Величину же $R_*(\mathbf{r}_1, t_1; x_{0b})$ можно представить в виде

$$R_*(\mathbf{r}_1, t_1; x_{0b}) = |\boldsymbol{\rho} - \mathbf{w}|,$$

где

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\xi}_\parallel + \frac{1}{\gamma_{0b}} \boldsymbol{\xi}_\perp, \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 - \mathbf{v}_{0b}(t - t_1).$$

Переходя в подынтегральном выражении (16) от переменных интегрирования $\mathbf{r}_{0b}$ к новым переменным $\boldsymbol{\rho}$, получаем

$$J_{kp} = \gamma_{0b}^2 \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_{1p}} \int\limits_V \frac{d\boldsymbol{\rho}}{\rho|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{w}|}. \qquad (17)$$

Введем сферическую систему координат ρ, ϑ, φ с центром в $\boldsymbol{\rho} = 0$ и полярной осью, параллельной $\mathbf{w}$. Величина произведения $\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{w}$ будет равна $\rho w \cos\vartheta$, где ϑ — полярный угол. Проинтегрировав теперь правую часть уравнения (17) по углу φ, получим

$$J_{kp} = 2\pi \gamma_{0b}^2 \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_{1p}} \int\limits_0^{\rho_{max}} \rho \, d\rho \times$$
$$\times \int\limits_0^\pi \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho w \cos\vartheta + w^2}}. \quad (18)$$

Будем рассматривать предельный случай замкнутой системы с $N_b \to \infty$, считая одновременно $V \to \infty$, так что плотность числа частиц $n_b = N_b/V$ остается постоянной. Вычисляя интегралы в правой части уравнения (18) и устремляя границы области ($\rho_{max} \sim V^{1/3}$) к бесконечности, находим

$$J_{kp} = 2\pi \gamma_{0b}^2 \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_p} w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_{0b}). \qquad (19)$$

При выводе этого выражения мы заменили дифференцирование по $\mathbf{r}_1$ дифференцированием по $\mathbf{r}$, учитывая, что $\mathbf{w}$ зависит от разности этих векторов.

Из выражений (19) и (15) видно, что компоненты тензора $K_{ij}(t, t_1)$ симметричны относительно перестановки индексов i и j. Поэтому в подынтегральном выражении в правой части уравнения (3) достаточно вычислить одно из слагаемых.

Для выявления зависимости величины J_{kp} от скорости пробного заряда в правой части формулы (19), в выражении для $\boldsymbol{\xi}$, заменим $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_1$ координатами пробного заряда (сорта a) в моменты времени соответственно t и t_1, одновременно переходя в (19) от дифференцирования по $\mathbf{r}$ к дифференцированию по $\mathbf{v}_a$. Поскольку в рассматриваемом нами приближении эти координаты находятся в пренебрежении взаимодействием частиц друг с другом, можно написать:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_a(t) = \mathbf{r}_{0a} + \mathbf{v}_{0a}(t - t_0), \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_a(t_1).$$

Поэтому $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \mathbf{v}_a(t - t_1)$ и, следовательно,

$$\boldsymbol{\xi} = u\tau_1, \quad \frac{\partial}{\partial y_k} w(\xi) = \tau_1^{-1} \frac{\partial}{\partial v_{ak}} w(u\tau_1),$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_{0b}$, $\tau_1 = t - t_1$. Сделав таким способом соответствующие замены в правой части уравнения (19) и подставив полученное выражение для J_{kp} в уравнение (15), находим

$$K_{ij}^{(a)}(t, t_1) = \frac{2\pi}{|\tau_1|} \sum_b e_a^2 e_b^2 \int d\mathbf{p}_{0b} \gamma_{0b}^2 f_b(\mathbf{p}_{0b}) \times \\ \times \alpha_{ik}(\boldsymbol{\beta}_a, \boldsymbol{\beta}_{0b}) \alpha_{jp}(\boldsymbol{\beta}_a, \boldsymbol{\beta}_{0b}) \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial v_{ak} \partial v_{ap}} \sqrt{(\boldsymbol{\beta}_{0b} \cdot \mathbf{u})^2 + u^2/\gamma_{0b}^2}. \quad (20)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3) и вычисляя производные по скорости, получаем следующее выражение для коэффициента диффузии:

$$D_{ij}^{(a)} = \sum_b \int d\mathbf{p}_{0b} f_b(\mathbf{p}_{0b}) I_{ij}^{ab}(\boldsymbol{\beta}_a, \boldsymbol{\beta}_{0b}), \quad (21)$$

где

$$I_{ij}^{ab}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_0) = 2\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda \frac{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_0)^2 \gamma\gamma_0}{c \left[\gamma_0^2 \gamma^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_0)^2 - 1\right]^{3/2}} \times \\ \times \left\{ \left[\gamma_0^2 \gamma^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_0)^2 - 1\right] \delta_{ij} - \gamma^2 \beta_i \beta_j - \gamma_0^2 \beta_{0i} \beta_{0j} + \\ + \gamma_0^2 \gamma^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_0)(\beta_i \beta_{0j} + \beta_{0i} \beta_j) \right\}, \quad (22)$$

$$\Lambda = \int_0^\tau \frac{d\tau_1}{\tau_1}, \quad \tau = t - t_0,$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}.$$

Выражение для Λ расходится на нижнем пределе интегрирования. Это связано с тем, что при нахождении траектории движения частиц не учитывается взаимодействие пары зарядов на малых расстояниях друг от друга, в результате чего пробный заряд может приближаться сколь угодно близко к другим зарядам, в поле которых он находится. В действительности же заряды могут находиться только на некотором конечном расстоянии друг от друга. Учесть этот факт для устранения расходимости в (22) можно, например, представив потенциал электромагнитного поля, создаваемого в точке с координатой $\mathbf{r}_1$ в момент времени t_1 зарядом, движущимся по траектории $\mathbf{r}_b(t, x_{0b})$, в виде

$$\varphi_b(\mathbf{r}_1, t_1; x_{0b}) = \frac{e_b}{\sqrt{R_*^2(\mathbf{r}_1, t_1; x_{0b}) + R_{*min}^2}},$$

где

$$R_{*min} = \sqrt{(\boldsymbol{\beta}_{0b} \cdot \mathbf{r}_{min})^2 + r_{min}^2/\gamma_{0b}^2},$$

$\mathbf{r}_{min}$ — минимальное расстояние между двумя зарядами.

В результате подстановки этого потенциала в выражение для силы (13) находим (ср. с (14))

$$F_j^{(b)}(\mathbf{r}_1, t_1; x_{0b}) = -e_a e_b \alpha_{jp}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_{0b}) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial y_{1p}} \frac{1}{\sqrt{R_*^2(\mathbf{r}_1, t_1; x_{0b}) + R_{*min}^2}}.$$

Величина J_{kp}, входящая в подынтегральное выражение (15), тогда принимает вид

$$J_{kp} = \gamma_{0b}^2 \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_{1p}} \int_V \frac{d\boldsymbol{\rho}}{\rho \sqrt{(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{w})^2 + R_{*min}^2}}.$$

Такое же вычисление интеграла в правой части этого уравнения, как при выводе (19), приводит к следующему выражению:

$$J_{kp} = 2\pi\gamma_{0b}^2 \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_p} \left(\sqrt{w^2 + R_{*min}^2} + \frac{R_{*min}^2}{w} \times \right. \\ \left. \times \ln \left| \frac{w + \sqrt{w^2 + R_{*min}^2}}{R_{*min}} \right| \right). \quad (23)$$

Заменим теперь в правой части выражения (23) координаты $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_1$ координатами пробного заряда в моменты времени соответственно t и t_1 и перейдем от дифференцирования по координатам к дифференцированию по скорости, как это делалось при получении уравнения (20). В результате находим

$$J_{kp}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_0; \tau_1) = \frac{2\pi\gamma_0^2}{g} \left[\left(\frac{\delta_{kp}}{\gamma_0^2} + \beta_{0k}\beta_{0p} - 3\frac{\mu_k \mu_p}{g^2} \right) \times \right. \\ \times \left(\frac{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_0^2}}{\tau_1^2} - \frac{\tau_0^2}{\tau_1^3} \ln \left| \frac{\tau_1 + \sqrt{\tau_1^2 + \tau_0^2}}{\tau_0} \right| \right) + \\ \left. + \frac{2\mu_k \mu_p}{g^2 \sqrt{\tau_1^2 + \tau_0^2}} \right],$$

где

$$\mu_k = \frac{v_k}{\gamma_0^2} - (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_0) v_{0k}, \quad g = \sqrt{(\boldsymbol{\beta}_0 \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{u^2}{\gamma_0^2}},$$

$$\tau_0 = \frac{R_{*min}}{g}.$$

Используя это выражение, вычислим тензор, входящий в подынтегральное выражение в уравнении (15):

$$\alpha_{ik}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_0) \alpha_{jp}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_0) J_{kp}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_0; \tau_1) = \frac{2\pi}{g} \times \\ \times \left[(A_{ij} - 3B_{ij}) \left(\frac{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_0^2}}{\tau_1^2} - \frac{\tau_0^2}{\tau_1^3} \ln \left| \frac{\tau_1 + \sqrt{\tau_1^2 + \tau_0^2}}{\tau_0} \right| \right) + \right. \\ \left. + \frac{2B_{ij}}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_0^2}} \right], \quad (24)$$

где

$$A_{ij} = (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_0)^2 \delta_{ij} + h_{ij},$$

$$B_{ij} = \frac{\gamma^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_0)^2 \beta_i \beta_j - h_{ij}}{\gamma^2 \gamma_0^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_0)^2 - 1},$$

$$h_{ij} = (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_0)(\beta_i \beta_{0j} + \beta_{0i} \beta_j) - \frac{\beta_{0i} \beta_{0j}}{\gamma^2}.$$

Подставляя теперь корреляционную функцию (15), с учетом выражения (24), в уравнение (3) и проинтегрировав затем это уравнение по t_1, окончательно получаем

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta p_{ai} \Delta p_{aj} \rangle = \\ = 2 \sum_b \int d\mathbf{p}_{0b} f_b(\mathbf{p}_{0b}) I_{ij}^{ab}(\boldsymbol{\beta}_a, \boldsymbol{\beta}_{0b}; \tau/\tau_0), \quad (25)$$

где

$$I_{ij}^{ab}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_0; \zeta) = \frac{2\pi e_a^2 e_b^2 \gamma_0}{c\gamma \left[\gamma_0^2 \gamma^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_0)^2 - 1 \right]^{1/2}} \times \\ \times \left\{ \left[\left(1 + \frac{1}{2\zeta^2} \right) \ln \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 1} \right) - \frac{\sqrt{\zeta^2 + 1}}{2\zeta} \right] \times \right. \\ \left. \times (A_{ij} - 3B_{ij}) + 2B_{ij} \ln \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 1} \right) \right\}. \quad (26)$$

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Таким образом, в работе получены уравнения, описывающие изменение во времени среднеквадратичного разброса по импульсам в системе частиц разных сортов. Этот разброс выражается через произведение сил парного взаимодействия частиц, усредненное по начальному распределению частиц в шестимерном фазовом пространстве координат и импульсов. В пренебрежении отклонением траектории движения частиц от равновесной получены аналитические выражения для тензора диффузии по импульсам релятивистских заряженных частиц.

Выражение (26) не содержит расходимости при $\tau \to 0$. Действительно, в предельном случае малых промежутков времени $\tau \ll \tau_0$, раскладывая выражение (26) по малому параметру ζ до линейных членов включительно, получаем

$$I_{ij}^{ab}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_0) = \frac{4\pi e_a^2 e_b^2}{3R_{*min}} \tau \left[(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_0)^2 \delta_{ij} + \right. \\ \left. + (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_0)(\beta_i \beta_{0j} + \beta_{0i} \beta_j) - \frac{\beta_{0i} \beta_{0j}}{\gamma^2} \right]. \quad (27)$$

Изменение во времени разброса по импульсам частиц, описываемое уравнением (25) с подынтегральным выражением (27), соответствует предброуновскому движению заряженных частиц. В случае нерелятивистских заряженных частиц одного сорта формулы (25)–(27) переходят в соответствующие выражения, полученные в работе [8]. В частности, при $\tau \ll \tau_0$ разброс по импульсам нерелятивистских частиц является симметричным:

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta p_{ai} \Delta p_{aj} \rangle = \frac{8\pi e_a^4 \tau}{3r_{min}} \times \\ \times \int d\mathbf{p}_0 f_a(\mathbf{p}_0) \delta_{ij} = \frac{8\pi e_a^4}{3r_{min}} n_a \tau \delta_{ij},$$

а среднее квадратичное отклонение импульса увеличивается пропорционально квадрату времени:

$$\langle (\Delta p_a)^2 \rangle = \frac{4\pi e_a^4}{r_{min}} n_a \tau^2.$$

Заметим, что квадратичная зависимость от времени среднего значения квадрата отклонения скорости нерелятивистских частиц наблюдалась в ряде численных экспериментов [9].

В предельном случае больших промежутков времени $\tau \gg \tau_0$ асимптотическое представление выражения (26) при $\zeta \gg 1$, как легко показать, приводит к выражению (22), в котором величина Λ, играющая роль кулоновского логарифма, равна $\Lambda = \ln(2\tau/\tau_0)$. Следует отметить, что выражение (22) соответствует ядру релятивистского интеграла столкновений, полученному в работе [2], с разницей лишь в записи величины Λ. Для промежутков времени τ, бóльших характерного времени τ_{max}, за которое частицы в результате теплового движения могут достигнуть границ занимаемой ими области, в коэффициенте под логарифмом время τ следует заменить на τ_{max}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **7**, 203 (1937).
2. С. Т. Беляев, Г. И. Будкер, ДАН СССР **107**, 807 (1956).
3. Н. Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике*, Гостехиздат, Москва–Ленинград (1946).
4. В. П. Силин, *Введение в кинетическую теорию газов*, Наука, Москва (1971).
5. А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, Москва (1977).
6. Ю. Л. Климонтович, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1982).
7. В. В. Огнивенко, ЖЭТФ **142**, 1067 (2012).
8. В. В. Огнивенко, Доповiдi НАН України, № 3, 65 (2013).
9. J. M. Dawson, Rev. Mod. Phys. **55**, 403 (1983).