ЖЭТФ, 2016, том 149, вып. 4, стр. 756–769

СПИНОВЫЕ РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К ВЕРОЯТНОСТИ И МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

С. Л. Лебедев[*]

Сургутский государственный университет
628412, Сургут, Россия

Поступила в редакцию 1 апреля 2015 г.

Спиновые радиационные эффекты в одночастичном секторе КЭД имеют двойственную природу и могут быть поняты на основе френкелевской классической модели вращающегося электрона. В исследуемой области значений параметров $\gamma_\perp^2 \gg 1$ ($\gamma_\perp^2 = 1 + p_\perp^2/m^2$) и $\chi \ll 1$ ($\chi = \sqrt{(eF_{\mu\nu}p_\nu)^2}/m^3$) мнимая часть сдвига массы и мощность излучения содержат спиновые вклады двух типов. Вклады первого типа связаны с наличием у фермиона собственного магнитного момента, представляющего дополнительный источник электромагнитного излучения; вклады второго типа имеют противоположный знак и обязаны небольшому изменению ускорения электрона, возникающему из-за френкелевской добавки к массе частицы. В двух упомянутых величинах вклады второго типа доминируют, что объясняет «неправильный» знак полных спиновых поправок. Мы показываем, что не только знак, но и численные значения коэффициентов могут быть с заданной точностью объяснены в рамках классической электродинамики, если поправки к сдвигу массы (действию) и к мощности излучения вычислять в канонических переменных, т. е. при фиксированных значениях соответственно скорости и импульса. Полученные результаты можно трактовать как демонстрацию принципа соответствия в области радиационных спиновых эффектов — в дополнение к соответствию между классической и квантовой теорией на древесном (по внешнему полю) уровне. При $a_e \equiv (g-2)/2 \lesssim \chi \ll 1$ уравнения модели Френкеля приводят к обобщению системы уравнений Лоренца–БМТ (Баргманна–Мишеля–Телегди), учитывающему френкелевскую добавку к массе. Обсуждаются некоторые особенности эксперимента по наблюдению спинового света.

DOI: 10.7868/S0044451016040040

1. ВВЕДЕНИЕ

Излучение релятивистских пучков зависит от поляризационного состояния ускоряемых частиц. Отличие вероятности и мощности излучения заряда со спином от аналогичных величин для бесспиновой частицы служит теоретическим основанием для объяснения таких макроскопических спиновых эффектов как спиновый свет и радиационная (само)поляризация (РП) электронов в накопителях [1]. Радиационные эффекты в релятивистских пучках ускорителей — это преимущественно классическое явление [2]: главные члены в разложении вероятности и мощности излучения по степеням параметра χ ($\chi \sim 10^{-5}$–10^{-4}) объясняются классическим орбитальным движением точечного заряда. Старшие спиновые поправки к классическим выражениям линейны по χ (в относительных единицах) и отвечают за эффект спинового света, создаваемый квантовыми переходами без переворота спина [3, 4].

Наиболее интересными с практической точки зрения оказались следующие члены разложений, так как они содержали вклады от переходов с переворотом спина («спин-флип») и объясняли РП. Формулы, описывающие указанные эффекты, были получены методами квантовой электродинамики (КЭД, QED) достаточно давно [5–11]. Потребовались значительные усилия для их квазиклассического объяснения и обобщения на неоднородные поля [4, 9, 12, 13]. Необходимость наглядной физической интерпретации РП была тщательно обоснована в упомянутой работе Джексона. В дальнейшем, после выхода работ [14, 15] проблема интерпретации РП получила более широкий контекст в связи с так называемым циклическим эффектом Унру. Последний, как полагают, объясняет неполную равновесную поляризацию электронного пучка (см.

[*] E-mail: lsl@iff.surgu.ru

также [16, 17]). Повышенное внимание к РП объясняется уникальной ролью этого эффекта в экспериментальной физике высоких энергий[1]. Не вдаваясь в детали, отметим общий вывод, касающийся возможностей квазиклассического подхода[2]: в исследуемом диапазоне значений энергии электронов ($E_e \gtrsim 1$ ГэВ) и для полей $F \ll F_c$ орбитальное движение можно описывать классически, в то же время спин-флип-переходы должны рассматриваться в рамках квантовой теории [4, 9, 12, 13].

Вопрос о физической интерпретации старших (т. е. линейных по χ) спиновых слагаемых приобрел актуальность после того, как в ИЯФ СО АН был поставлен эксперимент [19] по наблюдению спинового света. Детальный анализ [4] выражения для мощности синхротронного излучения (СИ) в магнитном поле позволил выделить эффекты поляризации (электронов и самого СИ), а также эффекты отдачи. Однако он не дал ответа на вопрос, почему электрон больше излучает в состоянии с минимальной магнитной энергией[3]. В работах [4] и

Наша работа посвящена физической интерпретации именно старших спиновых слагаемых. Для трех типов постоянного внешнего поля мы показываем, что главные спиновые радиационные поправки (не только к мощности, но и к мнимой части сдвига массы (СМ)) все-таки могут быть поняты целиком на основе классической теории, в которой траектории частиц описываются уравнением Лоренца – Френкеля, а спиновое уравнение совпадает с уравнением Френкеля – БМТ (Баргманна – Мишеля – Телегди [21]). По существу, единственным элементом, необходимым для согласования классической и квантовой теорий излучения заряженного магнетона, оказалось понятие френкелевской массы, отсутствующее в стандартном классическом подходе. Доказательство этого факта потребовало, однако, дополнительных усилий. Мы, в частности, показываем, что инерционные спиновые эффекты должны появляться как линейные по χ добавки тогда, когда основное слагаемое имеет классическое происхождение. Что касается влияния этих эффектов на РП, то оно могло бы проявиться только в членах порядка χ^3, которые здесь не рассматриваются. Резюмируя, можно сказать, что классическая теория оказалась важным качественным дополнением к КЭД в области радиационных спиновых эффектов. Различие между спиновыми поправками к вероятности (т. е. к действию) и к мощности излучения в КЭД и в классической электродинамике (CED) (Лоренца – БМТ) позволяет, с одной стороны, глубже понять механизм спиновых радиационных эффектов и, с другой стороны, определить достаточно тонкие условия применимости классической теории.

Работа имеет следующую структуру. Раздел 2 носит вспомогательный характер. Здесь мы определяем основные динамические параметры, проводим сравнение классических и квантовых выражений для вероятности и мощности излучения, а также указываем на их принципиальное расхождение — при условии, что классические траектория и эволюция спина описываются уравнениями Лоренца и БМТ [23]. В разд. 3 для модели Френкеля предложен метод последовательных приближений, позволяющий находить поправки по степеням χ и $g-2$ к уравнениям Лоренца и БМТ. Здесь, в частности, доказывается основное соотношение (45), позволяющее считать френкелевскую массу медленно меняющимся параметром. В разд. 4, используя теорию излучения классических мультиполей [22–26], мы находим спиновый вклад в вероятность и мощность излучения и с требуемой точностью демонстрируем совпадение классических и квантовых выражений. Раздел 5 посвящен вопросам экспериментального наблюдения спинового света. В частности, обращается внимание на то, что поставленный эксперимент [19] (пока единственный) действительно указывает на «неправильный» знак главной спиновой поправки к мощности СИ. В Приложения мы поместили дополнительную информацию по модели Френкеля и, в справочных целях, некоторые формулы классической теории излучения точечных мультиполей, а также формулы для мощности СИ поляризованного электрона [20, 22]. Приложения содержат также ряд замечаний, дополняющих основной текст.

[1] Прекрасное изложение теории и приложений РП содержится в обзоре [18].

[2] Используется система единиц, в которой $\hbar = 1 = c$, $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$, боровский радиус $a_B = 4\pi\hbar^2/me^2$, и метрика, в которой $x_\mu = (\mathbf{x}, ix_0)$, а дуальный тензор $F^*_{\mu\nu} = (i/2)\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}$. Критическое (так называемое «швингеровское») значение электромагнитного поля $F_c = m^2c^3/|e|\hbar$. Мы используем также диадные обозначения $[A, B]$ для тензора с элементами $A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha$ и (в отдельных случаях) точку для указания свертки по лоренцевым индексам.

[3] В работе [4] правильная формула для мощности СИ сопровождается утверждением, противоречащим ей по смыслу (с. 1087). Это утверждение повторено и в тексте гл. 4 книги [22]. Однако в гл. 3 этой же книги имеется (на с. 199) правильное указание на увеличение мощности СИ электронов при антипараллельных $\boldsymbol{\zeta}$ и $\mathbf{H}_R$, которое, к сожалению, никак не комментируется.

2. КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОГО МАГНЕТОНА

Болометрические характеристики радиационных процессов в одночастичном секторе КЭД с внешним постоянным и однородным полем являются функциями инвариантов (см. [1, 4, 7–9])

$$\mathcal{F} = \frac{(eF_{\mu\nu})^2}{4m^4}, \tag{1a}$$

$$\mathcal{G} = \frac{e^2 F_{\mu\nu} F^*_{\mu\nu}}{4m^4}, \tag{1b}$$

$$\chi = \frac{1}{m^3}\sqrt{(eF_{\mu\nu}p_\nu)^2} \simeq \frac{\hbar\omega_{ph}}{E}, \tag{2}$$

к которым следует добавить

$$\widetilde{\gamma} = \frac{ep_\mu F^*_{\mu\nu} S_\nu}{2m^3} \tag{3a}$$

и

$$\widetilde{\gamma}_e = \frac{ep_\mu F_{\mu\nu} S_\nu}{2m^3}, \tag{3b}$$

если излучающая частица обладает поляризацией (ω_{ph} и E — соответственно характерная частота излучения и энергия частицы). Инварианты (1)–(3) безразмерны, и χ, $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\gamma}_e$ помимо внешнего поля зависят также от сохраняющихся комбинаций компонент импульса и (безразмерного) спина. Мы рассматриваем фоновые поля, для которых псевдоскаляр $\mathcal{G} = 0$, так что аналитические различия характеристик излучения могли бы быть связаны со знаком инварианта $\mathcal{F}$: значения $\mathcal{F} < 0$, $\mathcal{F} > 0$ и $\mathcal{F} = 0$ соответствуют динамически разным случаям электрического, магнитного и скрещенного полей соответственно. В действительности, в ультрарелятивистском случае имеет место универсальность скрещенного поля: почти для всех направлений импульса частицы внешнее поле выглядит скрещенным в ее системе покоя [7]. Универсальность проявляется, например, в совпадении (с точностью до членов порядка $\gamma^{-2} = (m/E)^2$) выражений для полной вероятности излучения в единицу собственного времени. Для трех указанных выше случаев внешнего поля эта вероятность [8, 10, 27, 28] равна

$$\lambda^{QED} = -2\,\mathrm{Im}\,\Delta m^{QED} = \lambda_{orb}\left[1 - \frac{8\sqrt{3}}{15}\chi + \frac{7}{2}\chi^2 + \ldots + \frac{3}{5}\widetilde{\gamma}\left(1 - 4\sqrt{3}\chi + \ldots\right)\right]. \tag{4}$$

Здесь

$$\lambda_{orb} = -2\,\mathrm{Im}\,\Delta m^{CED} = \frac{5\alpha}{2\sqrt{3}}\,\gamma\,\frac{|eF|}{m} = \frac{5}{2\sqrt{3}}\,\frac{\chi}{a_B}, \tag{5}$$

а Δm^{CED} — СМ классического бесспинового заряда, см. [29][4]. Исследуемая нами область значений инвариантов (1)–(3) соответствует условиям применимости квазиклассической теории [2]:

$$\chi \ll 1, \tag{6a}$$

$$\gamma \gg 1. \tag{6b}$$

Таким образом, в (4) отброшены слагаемые, имеющие порядок χ^4 и выше. Пропорциональное $\widetilde{\gamma}$ слагаемое в правой части (4) представляет спиновую составляющую λ^{QED} (обозначим ее λ^{QED}_s). При условии (6a)

$$\lambda^{QED}_s \simeq \frac{3}{5}\lambda_{orb}\widetilde{\gamma} = \frac{3}{10}\lambda_{orb}\,\mathrm{sign}\,(e)\zeta\chi, \tag{7}$$

где квантовое число $\zeta = \pm 1$ определяет проекцию спина на направление магнитного поля в собственной системе заряда. Совпадение выражений для λ^{QED} в трех упомянутых случаях внешнего поля имеется и в существенно квантовой области $\chi \gg 1$, которой, однако, мы здесь касаться не будем. Нашей главной целью является устранение принципиального расхождения между классической теорией спиновых радиационных эффектов [22,23] и тем, что дает квазиклассическое приближение КЭД.

Не отмеченной ранее (и неожиданной!) особенностью спинового вклада в (4) является его знак [23]. В системе покоя заряда энергия взаимодействия магнитного момента

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{g}{2}\,\frac{e}{2m}\boldsymbol{\zeta} \tag{8}$$

с внешним полем равна

$$-\frac{g}{2}\widetilde{\gamma} m = -\frac{g}{2}\,\frac{e}{2m}\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{H}_R, \tag{9}$$

где $\mathbf{H}_R$ и $\boldsymbol{\zeta}$ — магнитное поле и спин ($|\boldsymbol{\zeta}| = 1$) в этой же системе. Таким образом, полная вероятность излучения максимальна, когда магнитная энергия минимальна. Эта особенность кажется тем более удивительной, что эффект РП предполагает противоположное поведение: благодаря спин-флип-переходам циркулирующие в магнитном поле релятивистские электроны с вероятностью 0.924 релаксируют в состояние с минимальной магнитной энергией [1]. Это состояние имеет и наименьшую вероятность спин-флип-излучения.

[4] Для удобства оценок мы используем квантовые параметры в классических выражениях.

Подобно λ_s^{QED}, спиновый вклад в мощность СИ также обнаруживает необычную зависимость от направления спина [4, 6]:

$$P^{QED} = P_{orb}\left[1 - \frac{55\sqrt{3}}{16}\chi + \right.$$
$$\left. + 48\chi^2 + \ldots + 3\widetilde{\gamma}\left(1 - \frac{35\sqrt{3}}{4}\chi + \ldots\right)\right], \quad (10)$$

где [30]

$$P_{orb} = \frac{2}{3}\alpha\left(\frac{e\hat{F}\dot{x}}{m}\right)^2 = \frac{2}{3}\,\frac{m}{a_B}\chi^2 \quad (11)$$

— мощность излучения классического (бесспинового) заряда, а зависящее от спина слагаемое

$$P_s^{QED} \simeq 3\widetilde{\gamma}P_{orb} = \frac{3}{2}P_{orb}\,\mathrm{sign}\,(e)\zeta\chi \quad (12)$$

(ср. с (7)). Отмеченное свойство спиновых вкладов λ_s^{QED} и P_s^{QED} послужило автору поводом для рассмотрения спиновых радиационных эффектов в классической электродинамике, построенной на уравнениях Лоренца и БМТ [23]. Классические выражения, являющиеся аналогами формул (7) и (12), имеют вид

$$\lambda_{so}^{CED} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\frac{\chi^2}{a_B}\,\mathrm{sign}\,(e)\zeta =$$
$$= -\frac{1}{5}\lambda_{orb}\,\mathrm{sign}\,(e)\zeta\chi, \quad (13)$$

$$P_{so}^{CED} = -\frac{1}{2}P_{orb}\,\mathrm{sign}\,(e)\zeta\chi, \quad (14)$$

см. формулы (31) и (36) в [23][5]. Расхождение в знаках формул (7) и (12) с одной стороны и (13), (14) — с другой, является принципиальным: оно показывает, что частица БМТ, двигаясь во внешнем поле, будет излучать тем больше, чем больше ее магнитная энергия (9). Согласно формулам (7) и (12) квантовый электрон ведет себя противоположным образом.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В МОДЕЛИ ФРЕНКЕЛЯ: ОСНОВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Предлагаемая в данной работе интерпретация главных спиновых вкладов в вероятность (7) и в мощность (12) излучения основана на френкелевской классической модели заряженной частицы, обладающей собственным магнитным моментом.

Уравнения движения в модели Френкеля имеют вид[6] ($\partial_\alpha \equiv \partial/\partial x_\alpha$)

$$\frac{d}{d\tau}\left(\mathcal{M}\dot{x}\right) = e\hat{F}\dot{x} - \frac{1}{2}\partial\,\mathrm{tr}(\hat{\mu}\hat{F}) + \frac{d}{d\tau}\hat{\mu}a\,, \quad (15)$$

$$\frac{\dot{\hat{\mu}}}{\kappa} = \left[\hat{F}, \hat{\mu}\right] + \dot{x}\otimes\hat{\mu}a - \hat{\mu}a\otimes\dot{x} \quad (16)$$

(«шляпка» над символом используется для матриц: $\hat{\mu} = \|\mu_{\alpha\beta}\|$, $(\hat{\mu}a)_\alpha = \mu_{\alpha\beta}a_\beta$ и т. п.). Здесь классический параметр

$$\kappa = \frac{g}{2}\,\frac{e}{m} \equiv \frac{g}{2}\kappa_0, \quad (17)$$

и тензор магнитного момента

$$\mu_{\alpha\beta} = \mu\Sigma_{\alpha\beta}\,, \quad \mu = \frac{1}{2}\kappa\left(= \frac{\hbar}{2}\kappa\right). \quad (18)$$

Безразмерный 4-вектор спина S_α связан с $\Sigma_{\alpha\beta}$ посредством соотношений

$$\Sigma_{\alpha\beta} = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\dot{x}_\gamma S_\delta, \quad S_\alpha = -\frac{i}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\dot{x}_\beta\Sigma_{\gamma\delta} \quad (19)$$

и является пространственно-подобным:

$$\dot{x}S = 0\,. \quad (20)$$

В КЭД вектор S_α используется для параметризации поляризованных состояний электрона и при наличии внешнего поля входит в состав инвариантов (3), см. [33, 34]. В собственной системе заряда

$$S_\alpha^{RF} = (\boldsymbol{\zeta},\, 0), \quad |\boldsymbol{\zeta}| = 1. \quad (21)$$

Согласно модели Френкеля, $\mathcal{M} = m + \lambda$, где λ и a_α в уравнениях (15), (16) — лагранжевы множители, появляющиеся вследствие наложения связей:

$$\dot{x}^2(\tau) = -1, \quad (22)$$
$$\hat{\mu}\dot{x} = 0. \quad (23)$$

Условие (22) означает выбор собственного времени мировой линии $x(\tau)$ в качестве параметра, а условие (23) — отсутствие у частицы собственного электрического момента. Последнее условие приводит к вырожденности матрицы $\hat{\mu}$ и, как следствие, к неопределенности вектора a: преобразование

$$a_\alpha \to a_\alpha + \dot{x}_\alpha\psi(\tau) \quad (24)$$

[5] Классические спиновые вклады (13) и (14) связаны с интерференцией излучений, порождаемых орбитальным и спиновым токами. В связи с этим для их обозначения используется индекс "so".

[6] В оригинальной статье Френкеля [31] 1926 г. не могло быть, разумеется, упоминания о возможности $g \neq 2$. В то же время уравнения модели легко обобщаются на этот случай, см. [22, 32] и Приложение А.

($\psi(\tau)$ — произвольная функция) не меняет ни уравнение траектории (15), ни уравнение спина (16) в силу (23).

Условие сохранения связей (22), (23) приводит к равенствам (см. (A.6), (A.9); в дальнейшем полагаем $\hat{F} = \mathrm{const}$)

$$\lambda = m_{Fr} \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\hat{\mu}\hat{F}) = -\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\,, \tag{25}$$

$$\hat{\mu}a = \mathfrak{Fr}\,\hat{\mu}\hat{F}\dot{x} - \frac{1}{\mathcal{M}\kappa}\hat{\mu}\,\frac{d}{d\tau}\hat{\mu}a, \tag{26}$$

где множитель

$$\mathfrak{Fr} \equiv 1 - \frac{2}{g}\frac{m}{\mathcal{M}}\,, \tag{27}$$

и

$$\mathcal{M} = m + m_{Fr}\,, \quad \frac{m_{Fr}}{\mathcal{M}} \sim \chi. \tag{28}$$

Равенство (26) можно использовать рекуррентно для приближенного определения $\hat{\mu}a$. Вводя обозначение

$$\hat{\mu}a^{(0)} = \mathfrak{Fr}\,\hat{\mu}\hat{F}\dot{x}, \tag{29}$$

перепишем (26) в виде

$$\hat{\mu}a = \left(1 + \frac{\hat{\mu}}{\mathcal{M}\kappa}\frac{d}{d\tau}\right)^{-1}\mathfrak{Fr}\,\hat{\mu}\hat{F}\dot{x} = \hat{\mu}a^{(0)} + \hat{\mu}a^{(1)} + \hat{\mu}a^{(2)} + \ldots, \tag{30}$$

$$\hat{\mu}a^{(k)} = (-\hat{\mathcal{D}})^k\hat{\mu}a^{(0)}, \quad \hat{\mathcal{D}} \equiv \frac{\hat{\mu}}{\mathcal{M}\kappa}\frac{d}{d\tau}\,.$$

Сравнение членов разложения (30) удобно проводить в собственной системе отсчета частицы. Тогда

$$\frac{\hat{\mu}}{\mathcal{M}\kappa} \sim \frac{\mu}{\mathcal{M}\kappa} \sim \tau_C, \tag{31}$$

где τ_C — комптоновское время электрона, см. (18), (19), (21) и (28). Эффективным параметром в разложении (30) является

$$\tau_C\frac{d}{d\tau} \sim \tau_C\frac{eF^{RF}}{m} \sim \chi. \tag{32}$$

Здесь eF^{RF}/m — характеристическая частота в системе покоя заряда. Заметим, что само разложение (30) еще не является разложением по степеням χ, так как каждое отдельное слагаемое в правой части (30) в свою очередь представляется рядом по степеням χ и $g-2$. Параметры χ и $g-2$ независимы и в дальнейшем считаются малыми. Разложение (30) во всяком случае устанавливает иерархию спиновых вкладов в уравнениях движения (15) и (16). Мы найдем главные из этих вкладов и покажем, что в старшем порядке по χ и при $g = 2$ (дираковский электрон) спиновые поправки в (15) сводятся к изменению инерционных свойств классического электрона. По существу будет использована контролируемая параметрами a_e и χ (при $a_e \ll 1$ и $\chi \ll 1$) близость теории Френкеля – БМТ к электродинамике бесспинового заряда.

Здесь уместно, по-видимому, особо остановиться на физическом смысле рядов теории возмущений, получаемых на основе соотношений (28) и (30). Квантовый «вид» этих рядов (напомним, что $\chi \propto \hbar$, $a_e \simeq \alpha/2\pi$) не означает учета квантовых и радиационных эффектов более высокого порядка. Параметры μ и g в теории Френкеля являются свободными. Более того, если магнитный момент $\mu = e\hbar/2mc$ является квантовым свойством дираковского электрона, проявляющимся на древесном уровне, то сдвиг массы[7] приобретается электроном вследствие радиационного самодействия, т. е. — с диаграммной точки зрения — в процессах КЭД более высокого порядка теории возмущений. По этой причине в случае электрона или мюона (но не протона) сравнение классических и квантовых характеристик излучения должно проводиться при $g = 2$. При этом вещественная часть СМ ($\mathrm{Re}\,\Delta m^{QED}$) возникает благодаря реадсорбции виртуальных квантов, формируется в пространственной области размером порядка $\lambda\!\!\!^{-}_C$ и имеет, таким образом, целиком квантовое происхождение. В то же время его мнимая часть ($\mathrm{Im}\,\Delta m^{QED}$) связывает источники с каналом реальных частиц и поэтому должна подчиняться принципу соответствия в какой-либо форме. Тот факт, что получаемые в модели Френкеля аналоги формул (13) и (14) совпадают с выражениями (7) и (12), основан на существовании в самой квантовой теории разных способов получения квазиклассических асимптотик[8]. Указанное совпадение расширяет область применимости принципа соответствия [35, 36] с включением в нее и главных спиновых радиационных эффектов.

В постоянном однородном поле сила Штерна – Герлаха (второе слагаемое в правой части (15)) равна нулю. Поскольку масса $\mathcal{M}$ зависит от τ, уравнение (15) отличается от уравнения Лоренца двумя слагаемыми: $\dot{\mathcal{M}}\dot{x}$ в левой и $d\hat{\mu}a/d\tau$ в правой части.

[7] Его вещественная часть определяет аномальный магнитный момент, а мнимая — скорость излучения λ^{QED} согласно соотношению (4), см. [33, 34].

[8] Это свойство в конечном итоге и позволяет получить не содержащее $\hbar$ уравнение БМТ из уравнения Дирака (несмотря на «очевидное» исчезновение спина в пределе $\hbar \to 0$); см. по этому поводу работы [35, 36].

Рассмотрим вначале зависимость $\mathcal{M}(\tau)$. Из уравнений (16), (25) и (30) получаем

$$\dot{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\dot{\hat\mu}\hat F) = -\kappa\dot x\hat F\hat\mu a = = -\kappa\dot x\hat F\hat\mu a^{(1)} - \kappa\dot x\hat F\hat\mu a^{(2)} + \ldots, \quad (33)$$

поскольку $\dot x\hat F\hat\mu a^{(0)} \equiv 0$.

Используя (30) совместно с уравнениями движения (15), (16), можно вычислить правую часть (33) с любой точностью. Остановимся подробно на вычислении первого слагаемого. Для второго будет приведена только оценка.

В соответствии с (30), (32) грубая оценка слагаемого $-\kappa\dot x\hat F\hat\mu a^{(1)}$ в правой части (33) имеет следующий вид:

$$-\kappa\dot x\hat F\hat\mu a^{(1)} = \kappa\dot x\hat F\hat{\mathcal{D}}\,\mathfrak{Fr}\hat\mu\hat F\dot x \sim \kappa m_e F^{RF}\mathfrak{Fr}\,\chi^2, \quad (34)$$

т. е. (с точностью до знака):

$$\frac{\dot{\mathcal{M}}}{m} \sim \mathfrak{Fr}\,\frac{\chi^3}{\tau_C}. \quad (35)$$

В последнем из соотношений (34) мы отбросили слагаемое, пропорциональное $\dot{\mathcal{M}}$, которое не меняет оценку (35) основного слагаемого. Точно так же грубая оценка второго слагаемого в (33) дает

$$-\frac{\kappa}{m}\dot x\hat F\hat\mu a^{(2)} \sim \mathfrak{Fr}\,\frac{\chi^4}{\tau_C}. \quad (36)$$

Рассмотрим теперь первое слагаемое в (33) более подробно. Члены, содержащие $\dot{\mathcal{M}}$, отбрасываем:

$$-\kappa\dot x\hat F\hat\mu a^{(1)} = \frac{\mathfrak{Fr}}{\mathcal{M}}\,\dot x\hat F\hat\mu\left(\dot{\hat\mu}\hat F\dot x + \hat\mu\hat F\ddot x\right). \quad (37)$$

Использование в (37) уравнений движения (15) и (16), а также связи (23) и свойств симметрии

$$\dot x\hat F\dot x = 0, \quad \dot x\hat F\hat\mu\hat F\dot x = 0$$

и т. п. позволяет переписать (37) в виде

$$-\kappa\dot x\hat F\hat\mu a^{(1)} = \mathfrak{Fr}\left(-\frac{\kappa}{\mathcal{M}}\,\mathfrak{Fr}\,\dot x\hat F\hat\mu\hat\mu\hat F\hat F\dot x + + \frac{1}{\mathcal{M}^2}\,\dot x\hat F\hat\mu\hat\mu\hat F\frac{d}{d\tau}\hat\mu a\right). \quad (38)$$

Обратим внимание на появление дополнительного множителя $\mathfrak{Fr}$ в (38), который образуется вкладами от двух слагаемых в скобках уравнения (37). Подобным же образом этот множитель возникает и в расчетах высших порядков. Этот механизм в конечном итоге уменьшает оценки (35), (36).

Оценка

$$\frac{d}{d\tau}\hat\mu a \simeq \frac{d}{d\tau}\hat\mu a^{(0)}$$

выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{d\tau}\hat\mu a^{(0)} \approx \mathfrak{Fr}\left(-\kappa\,\mathfrak{Fr}\hat\mu\hat F\hat F\dot x + \kappa\hat F\hat\mu\hat F\dot x + + \frac{1}{\mathcal{M}}\hat\mu\hat F\frac{d}{d\tau}\hat\mu a\right). \quad (39)$$

Здесь старшее слагаемое

$$\kappa\,\mathfrak{Fr}\,\hat F\hat\mu\hat F\dot x = O\left(\mathfrak{Fr}\chi^2\frac{m}{\tau_C}\right), \quad (40)$$

так что для двух слагаемых в скобках уравнения (38) находим:

$$-\frac{\kappa}{\mathcal{M}}\,\mathfrak{Fr}\,\dot x\hat F\hat\mu\hat\mu\hat F\hat F\dot x = O\left(\mathfrak{Fr}\,\chi^3\frac{m}{\tau_C}\right), \quad (41a)$$

$$\frac{1}{\mathcal{M}^2}\,\dot x\hat F\hat\mu\hat\mu\hat F\frac{d}{d\tau}\hat\mu a = O\left(\mathfrak{Fr}\,\chi^4\frac{m}{\tau_C}\right). \quad (41b)$$

Заметим, что слагаемые, пропорциональные $\dot{\mathcal{M}}$, отброшенные в процессе вычислений, вносят вклады не старше, чем $\chi^2\dot{\mathcal{M}}$, $\chi^2\mathfrak{Fr}\dot{\mathcal{M}}$, и, таким образом, могут изменить относительную оценку $\dot{\mathcal{M}}$ только во втором порядке по χ. В то же время оценка слагаемого $-\kappa\dot x\hat F\hat\mu a^{(2)}$ в (33) имеет вид[9)]

$$-\kappa\dot x\hat F\hat\mu a^{(2)} = O\left(\mathfrak{Fr}^2\chi^4\frac{m}{\tau_C}\right), \quad (42)$$

т. е. приводит к слагаемым $\sim\chi$ по отношению к основному члену (38).

С помощью (38), (41) и (42) окончательно получаем

$$\frac{\dot{\mathcal{M}}}{m} = -\frac{\kappa}{m^2}\,\mathfrak{Fr}^2\,\dot x\hat F\hat\mu\hat\mu\hat F\hat F\dot x\,(1 + O(\chi)). \quad (43)$$

Из выражения

$$\mathfrak{Fr} = \frac{g-2}{g} + \frac{2}{g}\frac{m_{Fr}}{\mathcal{M}} = O(g-2,\chi) \quad (44)$$

следует, что при $g = 2$ выполняется соотношение $\mathfrak{Fr} \simeq \chi$, и мы имеем

$$\frac{\dot{\mathcal{M}}}{m} \sim \frac{\chi^5}{\tau_C}. \quad (45)$$

Возвращаясь к уравнению (15), с учетом соотношений (39) и (40) находим

$$\ddot x = \frac{e}{\mathcal{M}}\,\hat F\dot x + O\left(\frac{\mathfrak{Fr}\chi^2}{\tau_C}\right), \quad (46)$$

где последнее слагаемое дает оценку для члена $(1/\mathcal{M})d\hat\mu a/d\tau$ в правой части (15). При $g \approx 2$, см. (44), этот член имеет порядок χ^3/τ_C и оказывается

9) Простые, но громоздкие выкладки приводят к следующему выражению: $-\kappa\dot x\hat F\hat\mu a^{(2)} = \kappa(\mathfrak{Fr}/\mathcal{M})^2\dot x\hat F\hat\mu\{\hat F,\hat\mu\} \times \times \hat\mu\hat F\hat F\dot x(1 + O(\chi))$.

малым по сравнению со спиновой поправкой к лоренцевому ускорению $\kappa_0\hat{F}\dot{x}$ в правой части (46):

$$\frac{e}{\mathcal{M}}\,\hat{F}\dot{x} \simeq \kappa_0\hat{F}\dot{x} - \frac{m_{Fr}}{m}\,\kappa_0\hat{F}\dot{x} = \\ = \kappa_0\hat{F}\dot{x} + O(\chi^2/\tau_C)\,. \quad (47)$$

Таким образом, в старшем по спину порядке отличие уравнения (15) от уравнения Лоренца $m\ddot{x} = e\hat{F}\dot{x}$ сводится к замене массы m на $\mathcal{M}$, которую благодаря (45) в этом приближении можно считать постоянной. В окончательных формулах для скорости и мощности излучения френкелевского электрона мы должны будем учесть не только излучение, порождаемое его собственным магнитным моментом, но и вклад последнего в орбитальное излучение (в старшем порядке по χ), возникающий благодаря изменению инерционных свойств заряда.

В заключение отметим, что использованная нами иерархия спиновых вкладов, основанная на уравнении (30), имеет место также и для протонов — с естественной заменой

$$\chi \to \chi_p = \left(\frac{m}{m_p}\right)^2 \chi.$$

Однако второй малый параметр (a_e) в этом случае отсутствует, что существенным образом сказывается на динамике. Например, спиновый вклад в лоренцево ускорение (второе слагаемое в правой части (47)) становится теперь сравнимым по порядку со слагаемым $(1/\mathcal{M})d\hat{\mu}a/d\tau$ в (15), см. (46). В случае протона инерционные спиновые эффекты в уравнении траектории пренебрежимо малы. Они малы и в уравнении БМТ, так как

$$\frac{m_{Fr}}{\mathcal{M}} \sim \chi_p \ll g_p - 2.$$

В случае электрона последнее неравенство может не выполняться: планируемые в настоящее время эксперименты [37] рассчитаны на условия $\chi \lesssim 1$ (и даже $\chi > 1$). В случае $1 > \chi \gtrsim a_e$ теория Френкеля приводит к обобщению уравнения БМТ, которое мы получим в Приложении А.

4. СПИНОВЫЙ СВЕТ В МОДЕЛИ ФРЕНКЕЛЯ

Увеличение мощности излучения поляризованных электронных пучков по сравнению с мощностью излучения неполяризованных частиц («спиновый свет») объясняется присутствием в квадратных скобках формул (4) и (10) слагаемых, пропорциональных спиновому инварианту $\widetilde{\gamma}$, см. (3а). Эффекты отдачи, представленные там же вторыми слагаемыми, по порядку величины ($\sim \chi$) совпадают со спиновыми поправками, не зависят от ориентации спина и являются квантовыми [4]. Нас будут интересовать только главные (классические) слагаемые в этих формулах и старшие спиновые поправки к ним.

Для получения λ_{orb} и P_{orb} в теории Френкеля следует, во-первых, учесть, что с требуемой точностью уравнение (46) совпадает по форме с уравнением Лоренца, так что определяемые по классическим мировым линиям λ_{orb} и P_{orb} (см. [23] и Приложение В) получаются из выражений (5) и (11) заменой массы: $m \to \mathcal{M}$. Согласно (28) «инерционное» изменение λ_{orb} и P_{orb} зависит от направления спина и имеет тот же порядок величины, что и классические спин-орбитальные вклады λ_{so}^{CED} и P_{so}^{CED}.

Во-вторых, рассматриваемые как функции параметра (массы) зависимости $\lambda_{orb}(\mathcal{M})$ и $P_{orb}(\mathcal{M})$ должны пониматься по-разному. СМ, определяющий поправку к функции Лагранжа частицы [29], является функцией ее скорости; в то же время мощность СИ связана с энергией частицы и как функция параметра определяется при фиксированных значениях (канонического) импульса (см. [38], § 40). Таким образом, с точностью порядка χ имеем

$$\lambda_{orb}(m + m_{Fr}) = \lambda_{orb}(m) + \left(\frac{\partial\lambda_{orb}}{\partial m}\right)_{x,v} m_{Fr}, \quad (48)$$

$$P_{orb}(m + m_{Fr}) = P_{orb}(m) + \left(\frac{\partial P_{orb}}{\partial m}\right)_{x,p} m_{Fr}. \quad (49)$$

В Приложении А показано, что канонический импульс с необходимой точностью может быть получен из лоренцевского с помощью той же замены $m \to \mathcal{M}$. Учитывая тогда, что $\lambda_{orb}(m,v) \propto m^{-1}$ и $P_{orb}(m,p) \propto m^{-4}$, см. (5) и (11), находим с помощью (13) и (14) полные спиновые вклады в вероятность и в мощность излучения:

$$\lambda_{so}^{CED} - \lambda_{orb}\frac{m_{Fr}}{m} = \frac{3}{10}\lambda_{orb}\,\mathrm{sign}\,(e)\,\zeta\,\chi, \quad (50)$$

$$P_{so}^{CED} - 4P_{orb}\frac{m_{Fr}}{m} = \frac{3}{2}P_{orb}\,\mathrm{sign}\,(e)\,\zeta\,\chi. \quad (51)$$

Тем самым, френкелевские выражения $\lambda_{orb}(\mathcal{M}) + \lambda_{so}^{CED}$ и $P_{orb}(\mathcal{M}) + P_{so}^{CED}$ дают главные слагаемые формул (4) и (10) вместе со старшими спиновыми слагаемыми (7) и (12).

Обратим внимание на то, что инерционные добавки

$$-\lambda_{orb}\frac{m_{Fr}}{m} \quad \text{и} \quad -4P_{orb}\frac{m_{Fr}}{m}$$

превосходят спин-орбитальные, определяя в итоге знак полных спиновых вкладов (50) и (51). Таким образом, увеличение магнитной энергии (9) приводит к двум конкурирующим эффектам: к росту вклада магнито-дипольного тока в излучение и к уменьшению орбитального излучения, из которых второй эффект оказывается доминирующим.

Предложенную здесь интерпретацию главных спиновых слагаемых формул (4) и (10) следует дополнить определением условий ее применимости. И СМ, и мощность излучения, строго говоря, не являются локальными динамическими переменными. Излучение формируется на конечном участке траектории, приводя к потерям энергии, относительная величина которых возрастает в релятивистской области. Классическое условие малости радиационных потерь, соблюдение которого позволяет рассматривать λ_{orb} и P_{orb} как функции интегралов движения, можно представить в виде[10)]

$$t_{UR} \equiv \frac{m^3c^5}{\gamma_\perp e^4 H^2} \gg \Delta t_f \simeq \frac{mc}{eH}, \qquad (52)$$

или:

$$\alpha\,\chi \ll 1. \qquad (53)$$

Здесь t_{UR}– время «высвечивания» ультрарелятивистского электрона (определяемое из условия $(\Delta E/E)_{rad} \sim 1$), а Δt_f — время формирования излучения[11)]. Таким образом, радиационное уменьшение λ_{orb} и P_{orb} за время формирования излучения составит

$$\left(\frac{\Delta\lambda_{orb}}{\lambda_{orb}}\right)_{rad} \sim \left(\frac{\Delta P_{orb}}{P_{orb}}\right)_{rad} \sim \alpha\,\chi. \qquad (54)$$

Условие (52) хорошо известно и подробно обсуждается в учебниках [30]. В теории Френкеля, однако, необходимо еще рассмотреть изменение λ_{orb} и P_{orb}, связанное с зависимостью $\mathcal{M}$ от времени. «Эволюционные» изменения λ_{orb} и P_{orb} за время Δt_f по порядку величины равны (см. (45))

$$\left(\frac{\Delta\lambda_{orb}}{\lambda_{orb}}\right)_{ev} \sim \left(\frac{\Delta P_{orb}}{P_{orb}}\right)_{ev} \sim \frac{\dot{\mathcal{M}}}{m}\,\frac{\Delta t_f}{\gamma} \simeq \chi^4. \qquad (55)$$

Важно, что относительное изменение λ_{orb} и P_{orb}, связанное с (нединамической) вариацией направления спина, очевидно, имеет порядок

$$\frac{\delta\mathcal{M}}{m} \sim \frac{m_{Fr}}{m} \sim \chi \qquad (56)$$

и превосходит как радиационное, так и эволюционное изменение этих величин за время формирования. С точки зрения классического подхода эта особенность и делает спиновый свет наблюдаемым.

[10)] Для определенности в оценках мы используем случай магнитного поля.

[11)] Оба масштаба относятся к лабораторной системе отсчета. Выражение (52) для Δt_f эквивалентно другому известному условию: $\delta\theta \sim \gamma^{-1}$, определяющему телесный угол около направления скорости, в который релятивистская частица излучает [30, 39].

5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ СПИНОВОГО СВЕТА

Обратимся к работам [3, 19], в которых излагаются идея и результаты эксперимента по наблюдению зависимости мощности СИ от направления поляризации пучка позитронов. Хотя сами авторы специально на это внимание не обращают, результаты их эксперимента, представленные на рис. 14 работы [19], демонстрируют отмечавшийся в связи с формулами (7) и (12) необычный знак спиновых поправок к характеристикам излучения. Действительно, из данных на рисунке видно, что когда магнитное поле в центральной части змейки совпадает по направлению с ведущим полем ускорителя, интенсивность СИ второго «банча» превосходит интенсивность первого (в области a–b на рис. 14 величина $\dot{N}_1/\dot{N}_2 - 1$ отрицательна). Поскольку оба сгустка были предварительно поляризованы за счет РП[12)], а деполяризован в момент измерения только первый сгусток, в согласии с (7) и (12) излучение от второго (поляризованного) сгустка превосходило излучение от первого (сгустки проходили центральную часть змейки по очереди). Обращение направления магнитного поля змейки в этом же временно́м промежутке приводило к уменьшению излучения второго банча $(\dot{N}_1/\dot{N}_2 - 1 > 0)$[13)]. К сказанному следует добавить, что время пролета позитронов в области излучения должно было быть намного меньше времени высвечивания за счет спин-орбитальных эффектов [40],

$$T_{so} \simeq \frac{1}{|\lambda_{so}^{CED}|}\,\gamma \simeq 2\sqrt{3}\,\frac{a_B}{\chi^2}\gamma \sim 0.1\text{–}1 \text{ с}. \qquad (57)$$

Это условие было выполнено с более чем достаточной точностью: длительность импульса, соответствовавшего прохождению банча, составила 100 нс, а в сгустке содержалось примерно 10^9 частиц. Таким образом, время пролета одного позитрона было не более 10^{-7} с[14)].

Заслуживает также внимания вопрос о раздельном наблюдении инерционных и магнито-дипольных составляющих спинового света. Для внешних

[12)] При этом магнитные моменты частиц выстраивались преимущественно по полю.

[13)] Нужно подчеркнуть, что излучение в центральной части вигглера не могло быть спин-флипом направлений полей ускорителя и змейки величина $\dot{N}_1/\dot{N}_2 - 1$ должна была бы быть больше нуля: позитроны второго банча находятся в основном спиновом состоянии и согласно теории РП меньше излучают.

[14)] Заметим, что время формирования, см. (52), $\Delta t_f \sim \sim \alpha\chi T_{so} \approx 10^{-7}$–$10^{-6}$ с. Этого оказалось достаточно для возникновения сигнала.

полей, у которых инвариант (1b) равен нулю, этого, по-видимому, сделать нельзя. Например, в случае так называемого фильтра Вина (поле $\boldsymbol{\mathcal{E}}\perp\mathbf{H}$, $\mathcal{E} < H$) реализуется равномерное движение (вдоль направления $\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \mathbf{H}$) с постоянной скоростью $v = \mathcal{E}/H$. Инерционные эффекты в этом случае отсутствуют. В то же время равен нулю и спин-орбитальный вклад в СМ [23] ($\lambda_{so}^{CED} = -2\,\mathrm{Im}\,\Delta m_{so}$, см. Приложение В),

$$\Delta m_{so} = \frac{\mu e}{8\pi\sqrt{3}}\,\frac{\dot{x}\wedge\ddot{x}\wedge\dddot{x}\wedge S}{\sqrt{\ddot{x}^2}}\,, \tag{58}$$

поскольку $\ddot{x} = 0$ и $\dddot{x} = 0$. В случае равноускоренного движения 4-векторы $\dot{x}$ и $\dddot{x}$ параллельны, так что СМ (58) равен нулю. При этом не проявляет себя и m_{Fr}: при равноускоренном движении вдоль электрического поля магнитная энергия (9) обращается в нуль. Эти примеры наводят на мысль, что выражение (58) и m_{Fr} связаны между собой. Для рассматриваемых здесь конфигураций постоянных полей это действительно так [23]:

$$\dot{x}\wedge\ddot{x}\wedge\dddot{x}\wedge S = -i\kappa_0^3(\dot{x}FF\dot{x})(\dot{x}F^*S),$$

что с точностью до множителя совпадает с (9). В случае, когда инвариант (1b) отличен от нуля, инерционная спиновая добавка сохраняет свой вид, а СМ приобретает слагаемое, связанное с аномальным электрическим моментом [34]. Однако это слагаемое имеет лишнюю степень γ^{-2} [23] и при условиях (6) его наблюдение будет затруднено.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Объяснение спиновых радиационных эффектов КЭД, полученное здесь в рамках классической теории Френкеля, не следует рассматривать как указание на исключительность этой модели. В действительности, модель Френкеля не охватывает всех свойств дираковского электрона. Заметим, что модель Березина – Маринова [41] также приводит к зависящему от внешнего поля массовому слагаемому (укажем еще на работы [42–46], где упоминается такая же зависимость). Не исключено, что изменение инерционных свойств заряда во внешнем поле, возникающее вследствие магнитного взаимодействия, следует рассматривать как универсальное свойство подобных физических систем (спин «сидит на массе», и при наличии магнитного поля магнитная энергия должна давать вклад в полную энергию покоя, изменяя тем самым и инерцию частицы). Помимо этого есть одно свойство у дираковского электрона, не представленное в модели Френкеля. Речь идет о слагаемом $-ie\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\mathcal{E}}$ в квадрированном уравнении Дирака (см., например, [33, 47]), аналог которого в модели Френкеля отсутствует. Связывая большие и малые компоненты биспиноров, это слагаемое ответственно за различия в процессах рождения пар внешним полем у фермионов и бозонов. Проявляется это различие также на квазиклассическом уровне [48].

В заключение перечислим основные результаты. Главным качественным итогом работы можно, по-видимому, считать утверждение о существовании двух способов, которыми спин обнаруживает себя в излучении релятивистского заряда. Это изменение инерции частицы, влекущее за собой изменение орбитальной составляющей тока, и магнито-дипольная добавка к орбитальному току. Обе поправки имеют одинаковый порядок ($\sim \chi$), но разные знаки, причем инерционный вклад в скорость и мощность излучения превалирует. Обоснование этого утверждения получено нами в рамках модели Френкеля с помощью процедуры (30) последовательного вычисления поправок к уравнениям Лоренца и БМТ. Итогом является полностью классическое объяснение эффекта спинового света [19]. Упомянутая процедура позволяет также получить обобщение уравнения БМТ, учитывающее френкелевскую массу (25) и справедливое в экспериментально достижимой области значений χ и a_e (Приложение А). Анализ имеющихся экспериментов подтверждает наличие необычного знака у старших спиновых слагаемых в скорости и мощности излучения. Это позволяет поставить интересный вопрос о раздельном наблюдении инерционных и магнито-дипольных спиновых эффектов в излучении релятивистского заряда.

Автор благодарен В. И. Ритусу за обсуждения и полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Имеются два больших класса лагранжевых релятивистских моделей, дающих описание точечного заряда со спином. Так или иначе, все они восходят либо к модели Френкеля [31], либо к модели Березина – Маринова [41, 49], использующей грассмановы функции времени для представления спиновых степеней свободы (краткий обзор различных подходов и ссылки на литературу см. в [50]). Обе модели в линейном приближении по спину приводят к уравнению БМТ [32, 41, 51], представляющему собой простейшее релятивистское обобщение уравнений прецессии магнитного волчка с $g \neq 2$ [33, 39].

В настоящей работе мы используем модель Френкеля для интерпретации главных слагаемых квазиклассических разложений (4) и (10). Важным преимуществом модели Френкеля является простота ее конфигурационного пространства с минимальным набором связей (22), (23). Основной недостаток модели — это невозможность локального определения лагранжевого множителя $a_\alpha(\tau)$, который тем не менее может быть определен (с точностью до калибровочного преобразования (24)) по теории возмущений. Важно при этом, что параметром возмущения оказывается квазиклассический параметр χ.

Лагранжиан модели Френкеля,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + e\dot{x}A(x) + T - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\hat{\mu}\hat{F})\,, \qquad (\mathrm{A}.1)$$

дополненный слагаемыми $\lambda(\dot{x}^2+1)/2$ и $a\hat{\mu}\dot{x}$, содержащими лагранжевы множители $\lambda(\tau)$ и $a_\alpha(\tau)$, приводит к уравнениям движения (15), (16) и уравнениям связей (22), (23). При этом вариации кинетической энергии T и тензора $\hat{\mu}$ определялись Френкелем по аналогии с трехмерным волчком:

$$\delta T = -\frac{1}{2\kappa}\,\mathrm{tr}(\hat{\mu}\delta\hat{\omega})\,, \qquad (\mathrm{A}.2)$$

$$\delta\hat{\mu} = [\hat{\mu}, \delta\hat{\Omega}]\,. \qquad (\mathrm{A}.3)$$

Здесь $\delta\Omega_{\alpha\beta} = -\delta\Omega_{\beta\alpha}$ — параметры бесконечно малого преобразования Лоренца и

$$\delta\omega_{\alpha\beta} = \frac{d}{d\tau}\delta\Omega_{\alpha\beta}.$$

Кинетический член, описывающий собственную энергию вращения, мог бы составить проблему, так как не наблюдается в природе. Однако уравнение (16) и связь (23) приводят к точному закону сохранения:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\mathrm{tr}\,\hat{\mu}^2\right) = 0\,, \qquad (\mathrm{A}.4)$$

который эквивалентен сохранению T, если полагать, что $\mu_{\alpha\beta} \propto \omega_{\alpha\beta}$.

Выполняя дифференцирование в левой части (15) и умножая обе части полученного равенства на $\dot{x}$, находим

$$-\dot{\mathcal{M}} = \dot{x}\frac{d}{d\tau}\,(\hat{\mu}a) - \frac{1}{2}\;\mathrm{tr}\left(\hat{\mu}\frac{d}{d\tau}\hat{F}\right)\,. \qquad (\mathrm{A}.5)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\dot{\hat{\mu}}\hat{F}) = -\kappa\dot{x}\hat{F}\hat{\mu}a$$

и

$$\dot{x}\frac{d}{d\tau}\,(\hat{\mu}a) = \dot{x}\dot{\hat{\mu}}a = \kappa\dot{x}\hat{F}\hat{\mu}a$$

(использованы связь (23) и уравнение (16)), получаем

$$\dot{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\,\frac{d}{d\tau}\,\mathrm{tr}(\hat{\mu}\hat{F})\,. \qquad (\mathrm{A}.6)$$

Поскольку в отсутствие поля масса $\mathcal{M} = m + \lambda$ совпадает с массой электрона, приходим к уравнению (25). Подчеркнем, что для получения (A.6) использовались уравнения движения (15), (16), связи (22), (23), а также условие сохранения связи (22): $\dot{x}\ddot{x} = 0$. Это позволило определить лагранжев множитель $\lambda = m_{Fr}$.

Для нахождения $\hat{\mu}a$ следует воспользоваться условием сохранения связи (23), т. е. равенством

$$\dot{\hat{\mu}}\dot{x} + \hat{\mu}\ddot{x} = 0\,, \qquad (\mathrm{A}.7)$$

из которого вначале находим [31]

$$\hat{\mu}a = \hat{\mu}\left(\hat{F}\dot{x} - \frac{1}{\kappa}\ddot{x}\right)\,. \qquad (\mathrm{A}.8)$$

После подстановки в правую часть (A.8) 4-ускорения $\ddot{x}$, взятого из уравнения (15), получаем соотношение, используемое для приближенного вычисления вектора $\hat{\mu}a$:

$$\hat{\mu}a = \mathfrak{Fr}\,\hat{\mu}\hat{F}\dot{x} + \frac{1}{2\kappa\mathcal{M}}\hat{\mu}\partial\,\mathrm{tr}(\hat{\mu}\hat{F}) - \frac{1}{\kappa\mathcal{M}}\hat{\mu}\frac{d}{d\tau}(\hat{\mu}a). \quad (\mathrm{A}.9)$$

Для постоянных однородных полей ($\partial\hat{F} = 0$) (A.9) совпадает с (26).

Канонический импульс

$$p = \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\dot{x}} = \mathcal{M}\dot{x} + eA(x) - \hat{\mu}a\,, \qquad (\mathrm{A}.10)$$

где

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} + \frac{1}{2}\,\lambda(\dot{x}^2+1) + a\hat{\mu}\dot{x}\,. \qquad (\mathrm{A}.11)$$

Уравнение «массовой поверхности» принимает вид

$$-(m+\lambda)^2 + (\hat{\mu}a)^2 = (p - eA(x))^2\,. \qquad (\mathrm{A}.12)$$

При этом (см. (29), (30))

$$(\hat{\mu}a)^2 \simeq (\hat{\mu}a^{(0)})^2 = m^2 O(\mathfrak{Fr}^2\chi^2), \qquad (\mathrm{A}.13)$$

в то время как френкелевская добавка $\lambda = m_{Fr}$ в левой части (A.12) приводит к слагаемым $\sim m^2\chi$ и $m^2\chi^2$. Таким образом, с точностью, включающей члены $m^2\chi^2$, уравнение массовой поверхности имеет тот же вид, что и в теории Лоренца, но с заменой m на $\mathcal{M}$:

$$-\mathcal{M}^2 = (p - eA(x))^2 \,. \qquad \text{(A.14)}$$

После отбрасывания слагаемых $\sim \mathfrak{Fr}\chi^2/\tau_C$ уравнение движения (46) совпадает по форме с уравнением Лоренца[15]. Тогда для мощности СИ заряда мы получим формулу (11) с заменой m на $\mathcal{M}$ и $m\dot{x}$ на $\mathcal{M}\dot{x} \approx p - eA$:

$$P_{orb}(\mathcal{M}) = \frac{2}{3}\,\alpha \left(\frac{e\hat{F}(p-eA)}{\mathcal{M}^2}\right)^2 . \qquad \text{(A.15)}$$

При получении (A.15) мы учли соотношения (29), (44) (с $g = 2$) и (A.10). Проводя разложение

$$\mathcal{M}^{-4} = m^{-4}\left(1 - 4\,\frac{m_{Fr}}{m}\right)$$

(p и x остаются фиксированными), получаем

$$P_{orb}(\mathcal{M}) = P_{orb} - 4P_{orb}\frac{m_{Fr}}{m} \,. \qquad \text{(A.16)}$$

Последнее слагаемое в (A.16) представляет спиновую инерционную поправку к мощности излучения заряда, которая в сумме с магнито-дипольным вкладом (14) дает P_s^{QED} (12), см. (51).

Инерционная добавка к скорости излучения находится с помощью формулы (5) и замены $m \to \mathcal{M}$:

$$\lambda_{orb}(\mathcal{M}) = \frac{5\alpha}{2\sqrt{3}}\,\gamma\,\frac{|eF|}{\mathcal{M}} = \lambda_{orb} - \lambda_{orb}\,\frac{m_{Fr}}{m} \,. \qquad \text{(A.17)}$$

В отличие от (A.15), (A.16) здесь разложение по m_{Fr}/m проводится при фиксированном значении скорости $\dot{x}_0 = \gamma$. Последнее слагаемое в (A.17) в сумме с λ_{so}^{CED} (13) дает λ_s^{QED} (7).

Уравнения Френкеля (15), (16) и предложенная здесь процедура вычисления поправок позволяют получить обобщение системы уравнений Лоренца – БМТ, в которой одновременно учтены и аномальный магнитный момент, и m_{Fr}. В этой связи заметим, что с точки зрения теории Френкеля область применимости системы Лоренца – БМТ ограничена соотношениями

$$\chi \ll a_e \lesssim 1 \,. \qquad \text{(A.18)}$$

[15] Мы сохраняем френкелевскую добавку в знаменателях выражений типа $e/\mathcal{M}$ в целях удобства. В окончательных формулах для мощности и вероятности излучения учитываются, разумеется, только линейные по m_{Fr}/m поправки.

Для протона, например, $\chi_p \ll a_p \sim 1$ и уравнение траектории Френкеля отличается от уравнения Лоренца в линейном приближении по спину[16] (см. работу [52]). Уравнения Хайнемана могут быть легко получены из уравнений (15), (16) с помощью разложения (30). Нас будет интересовать промежуточная область значений параметров, в которой система уравнений Френкеля – БМТ также отличается от системы Лоренца – БМТ:

$$a_e \lesssim \chi \ll 1 \,. \qquad \text{(A.19)}$$

Экспериментальная реализация этих неравенств является, по-видимому, делом ближайшего будущего [37].

Воспользуемся связью (18), (19) между $\hat{\mu}$ и S, записанной в диадном представлении [53, 54]:

$$\hat{\mu}^* = -\mu\,[\dot{x}, S]\,, \qquad \text{(A.20a)}$$

$$\hat{\mu} = \mu\,[\dot{x}, S]^*\,, \qquad \text{(A.20b)}$$

$$S = \frac{1}{\mu}\,\dot{x}\hat{\mu}^* \,. \qquad \text{(A.20c)}$$

Дифференцируем (A.20c):

$$\dot{S} = \frac{1}{\mu}\,\ddot{x}\hat{\mu}^* + \frac{1}{\mu}\,\dot{x}\dot{\hat{\mu}}^* \,, \qquad \text{(A.21)}$$

и для двух слагаемых в (A.21) находим

$$\frac{1}{\mu}\,\ddot{x}\hat{\mu}^* = \tilde{\kappa}_0\,\dot{x}(S\hat{F}\dot{x}) - \frac{\dot{x}}{2\mathcal{M}}\,S\cdot\mathrm{tr}(\hat{\mu}\partial\hat{F}) + {} + \frac{\kappa}{\mathcal{M}}\,\dot{x}(S\hat{F}\hat{\mu}a)\,, \qquad \text{(A.22)}$$

$$\frac{1}{\mu}\,\dot{x}\dot{\hat{\mu}}^* = \kappa\hat{F}S + \kappa\,\dot{x}(\dot{x}\hat{F}S)\,. \qquad \text{(A.23)}$$

Здесь $\tilde{\kappa}_0 \equiv e/\mathcal{M}$ и мы использовали уравнения (15), (16), а также соотношения (A.20)[17]. Уравнение для 4-вектора S принимает теперь вид

$$\dot{S} = \kappa\hat{F}S + \kappa\mathfrak{Fr}\,\dot{x}\,(\dot{x}\hat{F}S) - \frac{\mu}{\mathcal{M}}\,\dot{x}(S\partial)\,(S\hat{F}^*\dot{x}) + {} + \frac{\kappa}{\mathcal{M}}\,\dot{x}(S\hat{F}\hat{\mu}a)\,. \qquad \text{(A.24)}$$

Уравнение траектории (15) с применением (A.20b) перепишется в виде

$$\ddot{x} = -\frac{\dot{\mathcal{M}}}{\mathcal{M}}\,\dot{x} + \tilde{\kappa}_0\,\hat{F}\dot{x} - \frac{\mu}{\mathcal{M}}\partial(S\hat{F}^*\dot{x}) + \frac{1}{\mathcal{M}}\,\frac{d}{d\tau}\hat{\mu}a \,. \qquad \text{(A.25)}$$

[16] Уравнение БМТ следует в этом приближении из уравнения спина Френкеля, см. (A.24) ниже.

[17] Соотношения (A.20) гарантируют выполнение связей (20), (22), (23). Могут также оказаться полезными следующие формулы: $[\hat{W}, \hat{V}^*] = [\hat{W}, \hat{V}]^*$, $\mathrm{tr}\,(\hat{W}\hat{V}^*) = \mathrm{tr}\,(\hat{V}\hat{W}^*)$, где $\hat{W}$ и $\hat{V}$ — произвольные антисимметричные матрицы [53, 54].

Слагаемые правых частей уравнений (A.24) и (A.25), содержащие вектор $\hat{\mu}a$, можно заменить их приближенными выражениями, получаемыми на основе соотношения (A.9) или с помощью разложения (30) (в случае $\partial\hat{F}=0$).

Воспользуемся оценками из разд. 3 и найдем главные члены уравнений (A.24), (A.25) для постоянных фоновых полей при условиях (A.19). Поскольку (см. (39), (40)) $d(\hat{\mu}a)/d\tau = O(\mathfrak{Fr}\chi^2/\tau_C)$, с точностью до членов $\sim \chi/\tau_C$, $\sim \chi^2/\tau_C$ и $\sim \mathfrak{Fr}\chi/\tau_C$ включительно имеем

$$\dot{S} = \kappa\hat{F}S + \kappa\mathfrak{Fr}\,\dot{x}\,(\dot{x}\hat{F}S)\,, \tag{A.26}$$

$$\ddot{x} = \tilde{\kappa}_0\,\hat{F}\dot{x}\,. \tag{A.27}$$

В последнем уравнении для обоснования отбрасывания малых членов использованы соотношения (39), (40) и (43). Френкелевская добавка m_{Fr}, входящая в коэффициенты $\tilde{\kappa}_0$ и $\mathfrak{Fr}$, должна использоваться с линейной точностью. Член $-(\dot{\mathcal{M}}/\mathcal{M})\dot{x}$ согласно (43) значительно меньше отбрасываемых слагаемых ($\sim \mathfrak{Fr}\chi^2/\tau_C$), поэтому уравнения (A.26) и (A.27), как и должно быть, приводят к сохранению $m_{Fr} = \mu\, S\hat{F}^*\dot{x}$. Отметим еще, что продольное слагаемое в (A.26) не обращается в нуль при $g=2$ и уравнения (A.26) и (A.27) сохраняют как длины 4-векторов S, $\dot{x}$, так и равенство (20). Решение уравнений (A.26) и (A.27) для произвольного постоянного поля приведено в работе [55].

ПРИЛОЖЕНИЕ B

Фурье-образ классического точечного источника

$$j^{orb}(\mathbf{k}) = e\int d\tau\,\dot{x}(\tau)e^{-ikx(\tau)}\,, \tag{B.1}$$

где $x(\tau)$ — мировая линия заряда и $k_0=|\mathbf{k}|$. Магнито-дипольный ток

$$j^s_\alpha(\mathbf{k}) = ik_\beta\int d\tau\,\mu_{\alpha\beta}(\tau)e^{-ikx(\tau)}\,, \tag{B.2}$$

а $\mu_{\alpha\beta}(\tau)$ — введенный в (18) тензор магнитного момента, см. [22, 24–26]. Зависимости $x(\tau)$ и $\hat{\mu}(\tau)$ находятся из уравнений движения (с точностью, необходимой для получения формулы (13), в выражении (58) достаточно использовать только уравнения Лоренца–БМТ). Поле излучения

$$A^{rad}_\mu(x) = \int d^4x'\,G^{(-)}(x,x')\,J_\mu(x') \tag{B.3}$$

определяется полным током

$$J_\mu(x) = j^{orb}_\mu(x) + j^s_\mu(x)\,, \tag{B.4}$$

а $G^{(-)} = G_{ret} - G_{adv}$ [47], где G_{ret} и G_{adv} — запаздывающая и опережающая функции Грина уравнения Д'Аламбера. Определяемая полем $A^{rad}_\mu(x)$ энергия излучения выражается через фурье-компоненты (B.1) и (B.2) следующим образом:

$$E^{CED} = \int \frac{d\mathbf{k}}{2(2\pi)^3}\left|j^{orb}_\alpha(\mathbf{k}) + j^s_\alpha(\mathbf{k})\right|^2 = E_{orb} + E^{CED}_{so} + E^{CED}_{ss}\,. \tag{B.5}$$

Для постоянных фоновых полей интеграл (B.5) пропорционален времени нахождения заряда в поле, что позволяет перейти от трех составляющих энергии в правой части (B.5) к соответствующим вкладам в мощность излучения P_{orb}, P^{CED}_{so} и P^{CED}_{ss}. Спин-спиновый вклад $P^{CED}_{ss} \sim \chi^2 P_{orb}$ и здесь не рассматривается. Явные выражения для P_{orb} и P^{CED}_{so} приведены в уравнениях (11) и (14)[18].

Спин-орбитальный вклад в СМ заряда находится из соответствующей поправки к действию частицы [40]:

$$\Delta W_{so} = -\frac{\mu e}{2\pi^2}\int d\tau'\times \times\int d\tau\,\frac{(x'-x)\wedge\dot{x}'\wedge\dot{x}\wedge S}{((x-x')^2+i0)^2}\,. \tag{B.6}$$

В этом интеграле удобно вначале проинтегрировать по разности собственных времен $\Delta\tau = \tau'-\tau$, учтя, что собственное время формирования интеграла (ср. с (52))

$$\Delta\tau_f = \sqrt{12/\ddot{x}^2} \sim \frac{m}{\gamma|eF|} \tag{B.7}$$

уменьшается с ростом энергии частицы. В результате приходим к выражению [23]

$$\Delta W_{so} = -\frac{\mu e}{8\pi\sqrt{3}}\int d\tau\,\frac{\dot{x}\wedge\ddot{x}\wedge\dddot{x}\wedge S}{\sqrt{\ddot{x}^2}}\,, \tag{B.8}$$

определяющему СМ (58). В постоянном однородном поле подынтегральное выражение в (B.8) является медленно меняющейся функцией времени. Можно также показать, что для ортогональных полей, когда инвариант (1b) равен нулю, СМ (58) является интегралом движения [55]. Его мнимая часть определяет $\lambda^{CED}_{so} = -2\,\mathrm{Im}\,\Delta m_{so}$, ср. с (4) и (5).

[18] Подробности вычислений имеются в [23] — см. в особенности формулу (16). Ее частным случаем, адаптированным к условиям плоской синхротронной орбиты, является формула (14). Выражение (14) для P^{CED}_{so} было ранее получено в [22] другим способом.

ПРИЛОЖЕНИЕ C

В этом Приложении обсудим более детально различия спиновых радиационных процессов, приводящих к спиновому свету, с одной стороны, и к РП — с другой. Нам понадобится выражение для мощности СИ (просуммированное по поляризациям фотона), полученное в [4, 6]:

$$P^{(\zeta\zeta')} = P_{orb}\,\delta_{\zeta\zeta'}\left[1 - \left(\frac{55\sqrt{3}}{16} + \frac{3}{2}\zeta\right)\chi + \right.$$
$$\left. + \left(45 + \frac{735\sqrt{3}}{64}\zeta\right)\chi^2 + \ldots\right] +$$
$$+ P_{orb}\,\delta_{\zeta,-\zeta'}\left[\left(3 + \frac{105\sqrt{3}}{64}\zeta\right)\chi^2 + \ldots\right]. \quad (C.1)$$

Здесь квантовые числа ζ, $\zeta' = \pm 1$ и определяют проекцию спина $\boldsymbol{\zeta}$ на направление $\mathbf{H}_R$ (см. (8), (9)) в начальном (ζ) и конечном (ζ') состояниях. Для плоской орбиты $\mathbf{H}_R$ совпадает по направлению с лабораторным полем $\mathbf{H}$. Формула (C.1) записана для электрона: $\mathrm{sign}\,(e) = -1$. Сумма по поляризациям конечного состояния

$$\sum_{\zeta'} P^{(\zeta\zeta')} = P^{QED}, \quad (C.2)$$

см. (10). Таким образом, мощность излучения (C.1) содержит вклады от квантовых переходов, не меняющих направление спина ($\zeta = \zeta'$), и от переходов, сопровождающихся его переворотом ($\zeta = -\zeta'$). Подстановка (C.1) в (C.2) и последующее сравнение с (10) показывают, что ответственное за спиновый свет слагаемое (12) связано с «беспереворотными» переходами. Эта особенность СИ и делает возможным анализ проблемы в рамках классической электродинамики. Использование классических источников (B.4) для расчета излучения предполагает, что координаты и спин эволюционируют согласно классическим уравнениям движения, а эффекты отдачи и спин-флип-переходы в первом приближении можно не учитывать.

Действительно, вклад в мощность СИ от переходов с переворотом спина (второе слагаемое в правой части (C.1)),

$$3P_{orb}\left[\left(1 + \frac{35\sqrt{3}}{64}\zeta\right)\chi^2 + \ldots\right], \quad (C.3)$$

имеет второй порядок малости по χ и противоположный знак спинового слагаемого (по сравнению с P_s^{QED} (12)). И мощность излучения (C.3), и связанная с ней вероятность излучения с переворотом спина [1, 5]

$$W^{\uparrow\downarrow} = \frac{1}{2T_{QED}}\left(1 + \frac{8}{5\sqrt{3}}\zeta\right), \qquad T_{QED} = \frac{8\sqrt{3}}{15}\frac{a_B\,\gamma}{\chi^3}, \quad (C.4)$$

демонстрируют преобладание в спин-флип-излучении электронов, имеющих наибольшую магнитную энергию (9) ($\zeta = +1$). При наличии компенсации потерь кинетической энергии это свойство обеспечивает РП пучка. Важно подчеркнуть, что спиновая поправка (12) к мощности не приводит к РП пучка, см. [18, 20].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Соколов, И. М. Тернов, *Релятивистский электрон*, Наука, Москва (1983).
2. J. Schwinger, Phys. Rev. **75**, 1912 (1949).
3. A. E. Bondar and E. L. Saldin, Nucl. Instr. Meth. **195**, 577 (1982).
4. В. А. Бордовицын, И. М. Тернов, В. Г. Багров, УФН **165**, 1083 (1995).
5. А. А. Соколов, И. М. Тернов, ДАН СССР **153**, 1052 (1963).
6. И. М. Тернов, В. Г. Багров, Р. А. Рзаев, ЖЭТФ **46**, 374 (1964).
7. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **46**, 776 (1964).
8. В. И. Ритус, ЖЭТФ **57**, 2176 (1969).
9. В. Н. Байер, УФН **105**, 441 (1971).
10. W. Tsai and A. Yildiz, Phys. Rev. D **8**, 3446 (1973).
11. J. Schwinger and W. Tsai, Phys. Rev. D **9**, 1843 (1974).
12. Я. С. Дербенёв, А. М. Кондратенко, ЖЭТФ **64**, 1919 (1973).
13. J. D. Jackson, Rev. Mod. Phys. **48**, 417 (1976).
14. J. S. Bell and J. M. Leinaas, Nucl. Phys. B **212**, 131 (1983).
15. J. S. Bell and J. M. Leinaas, Nucl. Phys. B **284**, 488 (1987).
16. W. G. Unruh, in *Quantum Aspects of Beam Physics*, ed. by Pisin Chen, World Sci., Singapore (1999), p. 21.

17. J. M. Leinaas, arXiv:hep-th/0101054.

18. S. R. Mane, Yu. M. Shatunov, and K. Yokoya, Rep. Progr. Phys. **68**, 1997 (2005).

19. S. A. Belomestnykh, A. E. Bondar, M. N. Yegorychev et al., Nucl. Instr. Meth. **227**, 173 (1984).

20. И. М. Тернов, *Введение в физику спина релятивистских частиц*, Изд-во МГУ, Москва (1997), с. 1.

21. V. Bargmann, L. Michel, and V. L. Telegdi, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1959).

22. В. А. Бордовицын (ред.), *Теория излучения релятивистских частиц*, Физматлит, Москва (2002), с. 1.

23. S. L. Lebedev, Int. J. Mod. Phys. A **29**, 1450186 (2014).

24. J. R. Ellis, J. Math. Phys. **7**, 1185 (1966).

25. С. Р. Де-Гроот, Л. Г. Сатторп, *Электродинамика*, Наука, Москва (1982), с. 1.

26. C. Teitelboim, D. Villaroel, and Ch. G. van Weert, Rivista del Nuovo Cim. **3**, 1 (1980).

27. В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко, ДАН СССР **197**, 66 (1971).

28. С. Л. Лебедев, ЯФ **74**, 433 (2011).

29. В. И. Ритус, ЖЭТФ **80**, 1288 (1981).

30. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973), с. 1.

31. J. Frenkel, Zs. Phys. **37**, 243 (1926).

32. И. М. Тернов, В. А. Бордовицын, УФН **132**, 345 (1980).

33. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989), с. 1.

34. В. И. Ритус, Труды ФИАН **168**, 52 (1986).

35. S. I. Rubinov and J. B. Keller, Phys. Rev. **131**, 2789 (1963).

36. K. Rafanelli and R. Schiller, Phys. Rev. B **135**, 279 (1964).

37. J. Esberg and U. I. Uggerhøj, J. Phys: Conf. Ser. **198**, 012007 (2009).

38. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1988), с. 1.

39. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, J. Wiley & Sons, Hoboken, NJ, USA (1999), p. 1.

40. S. L. Lebedev, in *Proc. Int. Conf.* “*I. Ya. Pomeranchuk and Physics at the Turn of Centuries*”, ed. by A. Berkov, N. Narozhny, and L. Okun, World Sci., Singapore (2003), p. 440; arXiv:hep-th/0508166.

41. F. A. Berezin and M. S. Marinov, Ann. Phys. **104**, 336 (1977).

42. H. C. Corben, Phys. Rev. **121**, 1833 (1961).

43. R. Schiller, Phys. Rev. **128**, 1402 (1962).

44. A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Dover Publ., New York (1964), p. 1.

45. C. A. P. Galvao and C. Teitelboim, J. Math. Phys. **21**, 1863 (1980).

46. S. L. Lyakhovich, A. Yu. Segal, and A. A. Sharapov, Phys. Rev. D **54**, 5223 (1996).

47. К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля*, т. 1, Мир, Москва (1984), с. 1.

48. С. Л. Лебедев, ЯФ **42**, 1391 (1985).

49. Ф. А. Березин, М. С. Маринов, Письма в ЖЭТФ **21**, 678 (1975).

50. A. Frydryszak, arXiv:hep-th/9601020.

51. В. Г. Багров, В. А. Бордовицын, Изв. вузов, сер. физика № 2, 67 (1980).

52. K. Heinemann, arXiv:physics/9611001.

53. H. J. Bhabha and H. C. Corben, Proc. Roy. Soc. A **178**, 273 (1941).

54. E. G. P. Rowe and G. T. Rowe, Phys. Rep. **149**, 287 (1987).

55. С. Л. Лебедев, Письма в ЖЭТФ **101**, 708 (2015).