

РЕЗОНАНСНОЕ СЖАТИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ПУЧКА В КРИСТАЛЛЕ

В. И. Альшиц^{}, Д. А. Бессонов, В. Н. Любимов*

*Институт кристаллографии им. А. В. Шубникова Российской академии наук
119333, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 5 августа 2015 г.

Описано резонансное возбуждение интенсивного акустического пучка в кристалле при специальной геометрии отражения волны накачки от его поверхности. Резонанс возникает в окрестности угла полного внутреннего отражения при условии, что волновое поле в сжатом отраженном пучке, распространяющемся почти параллельно поверхности, близко к объемной собственной моде, удовлетворяющей условию свободной границы. Подробно рассмотрены критерии существования таких мод. Анализируются условия конверсии, при которых «паразитная» отраженная волна той же ветви, что и падающая, отсутствует, а вся энергия из падающей волны попадает в узкий интенсивный звуковой пучок другой ветви. Показано, что при выборе поверхности, параллельной плоскости симметрии кристалла, критерий конверсии сводится к единственному условию на модули упругости среды. Анализ выполнен аналитическими и численными методами для косых срезов моноклинных, ромбических, тригональных и гексагональных кристаллов, когда граница — плоскость симметрии, а сагиттальная плоскость симметрией не обладает. Выявлен ряд кристаллов, в которых резонансное возбуждение очень близко к конверсии.

DOI: 10.7868/S0044451016040088

1. ВВЕДЕНИЕ

В современной технике, медицине и научном приборостроении все большую роль играют устройства, построенные на использовании ультра- и гиперзвука [1–4]. При этом особое значение имеют узкие пучки высокой интенсивности. В работе [5] был предложен способ создания таких пучков в кристаллах, основанный на особенностях их упругой анизотропии. Идея «сжатия» акустического пучка заключается в таком выборе геометрии его падения на поверхность, когда при отражении большая часть энергии попадает в узкий пучок, распространяющийся под малым углом к поверхности (рис. 1а). Подобное концентрирование энергии в пучке оказывается возможным, когда составляющее его волновое поле близко к собственной моде: особой (exceptional) объемной волне (ООВ), удовлетворяющей условию свободной границы [6]. Возмущение выделенной геометрии распространения ООВ превращает это однопарциальное решение в компоненту резонансного отражения.

Реализация такого специального резонансного отражения вблизи собственной моды требует, чтобы ООВ существовала на средней полости поверхности медленности, а падающая волна «накачки» принадлежала внешней полости (рис. 1б). Подходящие срезы можно найти практически в любом кристалле [5, 6]. Следует, однако, иметь в виду, что при таком отражении кроме возбуждаемой отраженной волны 2 (k_{r2}) со средней полости поверхности медленности неизбежно существует и другая отраженная волна 3 (k_{r1}), принадлежащая внешней полости. Минимизация потерь энергии, связанных с этой паразитной волной, достигается выбором кристаллов с параметрами, отвечающими близости рассматриваемого отражения к конверсии, когда такая волна не возникает.

Конечно, схему сжатия отраженного пучка, показанную на рис. 1а, можно реализовать и в изотропном теле, но концентрирования энергии в таком пучке получить не удастся. В этом случае по мере сужения пучка 2 в него попадает все меньше энергии, и в пределе вся отраженная энергия окажется в паразитном пучке 3. Таким образом, анизотропия играет определяющую роль в рассматриваемом эффекте.

^{*} E-mail: alshits@ns.crys.ras.ru

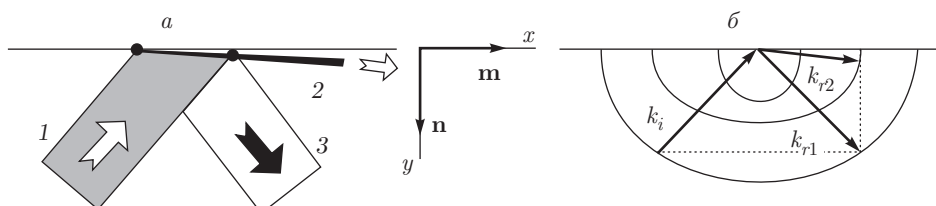


Рис. 1. Схема резонансного отражения в r -пространстве (а) и k -пространстве (б): 1 — падающий пучок (k_i — его средний волновой вектор); 2 — интенсивный отраженный пучок (k_{r2}); 3 — сопутствующий паразитный пучок (k_{r1}); \mathbf{n} — нормаль к поверхности, \mathbf{m} — направление распространения вдоль поверхности

С другой стороны, согласно теории [5], справедливой для среды произвольной анизотропии, выбор кристалла, обеспечивающего близость отражения к конверсионному, в общем случае крайне затруднен. В отсутствие элементов симметрии критерий конверсии определяется двумя независимыми соотношениями между его модулями упругости. Поэтому все оценки эффекта сжатия пучка были сделаны в [5] применительно к более симметричной предельной волновой геометрии, когда и поверхность кристалла, и невозмущенная сагиттальная плоскость параллельны плоскостям симметрии. В этом случае критерий конверсии сводится к единственному условию на модули упругости, а существование ООВ гарантировано симметрией. Именно для такой геометрии в работах [5, 7] подобрана серия реальных гексагональных кристаллов, допускающих высокую эффективность преобразования пучка с утечкой энергии в паразитную волну, не превышающей нескольких процентов (в [5] возмущение осуществлялось поворотами сагиттальной плоскости, а в [7] — вращением границы).

Между тем, как будет показано, оптимизация резонанса не требует столь высокой симметрии. Оказывается, что для совмещения минимума потерь энергии и максимума амплитуды резонанса достаточно лишь одного элемента симметрии в схеме отражения — граница должна быть параллельной плоскости упругой симметрии кристалла. Кстати, такие плоскости есть во всех кристаллах, кроме триклинных [8, 9]. В этом случае критерий конверсии, когда минимум потерь точно равен нулю, тоже сводится к единственному условию на модули упругости, которое ниже будет найдено аналитически.

Проблема осложняется необходимостью нахождения ориентации несимметричной сагиттальной плоскости, в которой существует ООВ. Для этого в работе будет получена новая более компактная и удобная для использования форма общего критерия существования ООВ в кристаллах произволь-

ной анизотропии, а также конкретизация этого критерия применительно к случаям моноклинной волновой геометрии в кристаллах разных сингоний.

Аналитическое рассмотрение оптимизированного резонанса отражения будет дополнено численным анализом для конкретных кристаллов моноклинной, ромбической, тригональной и гексагональной симметрии.

Доказанная в работе возможность существования изучаемого явления в кристаллах любых систем, начиная с моноклинной, при несимметричных ориентациях сагиттальной плоскости представляется весьма полезной при подборе материалов для его реализации. При выборе кристаллов следует стремиться не только к уменьшению потерь энергии, но и к улучшению других характеристик эффекта. В частности, оказалось, что рассматриваемый резонанс отражения весьма узок по углам падения. Это серьезно ограничивает допустимую расходимость падающего пучка, а также требует повышенной точности при обработке соответствующих срезов кристалла для обеспечения тонкой юстировки резонансного угла падения. С этой точки зрения, чем шире резонанс по углам падения, тем лучше. Как будет показано ниже, среди отобранных нами кристаллов наилучшими параметрами обладает моноклинный кристалл стильбен, где потери энергии меньше 3%, а ширина резонанса по углам падения $\delta\alpha \approx 0.16$ рад является рекордной, примерно на порядок превышая типичные значения для других кристаллов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим полубесконечную упругую среду произвольной анизотропии со свободной границей. Сагиттальную плоскость будут задавать два единичных вектора: \mathbf{n} — нормаль к поверхности и \mathbf{m} —

направление распространения вдоль поверхности (см. рис. 1).

Отражение, схематически показанное на рис. 1б, представляет собой суперпозицию четырех парциальных волн: падающей ($\alpha = 4 = i$) и отраженной ($\alpha = 1 = r1$) волн с внешней полости поверхности медленности, отраженной волны ($\alpha = 2 = r2$) со средней полости и локализованной волны ($\alpha = 3 = l$) с внутренней полости:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \\ (i/k)\mathbf{n}\hat{\sigma}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \sum_{\alpha=1}^4 C_{\alpha} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\alpha} \\ \mathbf{L}_{\alpha} \end{pmatrix} \times \exp\{ik[(\mathbf{m} + p_{\alpha}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{r} - vt]\}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{u} и $\hat{\sigma}$ — вектор смещений и тензор напряжений волнового поля, C_{α} и \mathbf{A}_{α} — скалярные амплитуды и нормированные векторы поляризации парциальных волн, \mathbf{L}_{α} — нормированные векторы парциальных сил, k и kp_{α} — компоненты волновых векторов вдоль соответственно \mathbf{m} и \mathbf{n} . Совокупные 6-векторы $\xi_{\alpha} = \{\mathbf{A}_{\alpha}, \mathbf{L}_{\alpha}\}^T$ (T — знак транспонирования) вместе с параметрами p_{α} находятся как собственные векторы и собственные значения 6×6 -матрицы Стро \hat{N} [5, 10],

$$\hat{N}\xi_{\alpha} = p_{\alpha}\xi_{\alpha}, \quad (2)$$

и считаются известными.

В этих терминах граничное условие свободной поверхности $(\hat{\sigma}\mathbf{n})_{y=0} = 0$ имеет вид

$$C_i\mathbf{L}_4 + C_{r1}\mathbf{L}_1 + C_{r2}\mathbf{L}_2 + C_l\mathbf{L}_3 = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3) амплитуды отраженных волн выражаются через амплитуду C_i падающей волны следующим образом [5]:

$$\begin{aligned} C_{r1} &= -C_i \frac{[\mathbf{L}_4\mathbf{L}_2\mathbf{L}_3]}{[\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\mathbf{L}_3]}, & C_{r2} &= C_i \frac{[\mathbf{L}_4\mathbf{L}_1\mathbf{L}_3]}{[\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\mathbf{L}_3]}, \\ C_l &= -C_i \frac{[\mathbf{L}_4\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2]}{[\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\mathbf{L}_3]}, \end{aligned} \quad (4)$$

где комбинации векторов типа $[\mathbf{abc}]$ обозначают их смешанные произведения. Отсюда вытекают общие формулы для интересующих нас коэффициентов отражения волн:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{C_{r1}}{C_i} = -\frac{[\mathbf{L}_4\mathbf{L}_2\mathbf{L}_3]}{[\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\mathbf{L}_3]}, \\ R_2 &= \frac{C_{r2}}{C_i} = \frac{[\mathbf{L}_4\mathbf{L}_1\mathbf{L}_3]}{[\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\mathbf{L}_3]}. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя эти параметры, введем удобные количественные характеристики обсуждаемого резонанса — коэффициенты потерь K_1 и усиления K_2 :

$$K_1 = |R_1|^2, \quad K_2 = |R_2|^2(s_2/s_4), \quad (6)$$

где s_{α} — длины соответствующих векторов лучевых скоростей парциальных волн. Коэффициент K_1 есть доля энергии, уносимой паразитной отраженной волной. А второй коэффициент K_2 равен отношению интенсивностей возбуждаемой и падающей волн. Полезной представляется и еще одна характеристика резонанса — коэффициент эффективности возбуждения

$$\eta = 1 - |R_1|^2, \quad (7)$$

равный доле энергии, попадающей из падающей волны в возбуждаемую.

3. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ, РЕГУЛИРУЮЩИЕ РЕЗОНАНС

Обсудим теперь геометрические параметры, с помощью которых можно управлять ключевыми характеристиками резонанса — функциями (6), (7). В настоящей работе, как и в [5], поверхность кристалла считается неизменной. Регулирование и оптимизация свойств эффекта осуществляется изменением ориентации φ сагиттальной плоскости и угла падения α волны накачки в этой плоскости. Сначала находится выделенная ориентация φ_0 плоскости распространения особой объемной волны, а затем поворотом вокруг нормали \mathbf{n} к поверхности задается возмущенная позиция $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$ сагиттальной плоскости. Угол падения α выбирается в близкой окрестности угла $\hat{\alpha}$ полного внутреннего отражения: $\alpha = \hat{\alpha} + \delta\alpha$ (рис. 2).

Величины приращений угла $\delta\alpha$, скорости δv и параметра $p_2 = \delta p$ жестко связаны между собой. Нетрудно убедиться, что

$$\delta p^2 = 2\kappa\delta v, \quad (8)$$

где κ — кривизна сечения средней полости поверхности медленности сагиттальной плоскостью в предельной точке $v^{-1} = \hat{v}^{-1}$ (рис. 2). При выводе формулы (8) принято во внимание, что $\delta v^{-1} = (\hat{v} + \delta v)^{-1} - \hat{v}^{-1} \approx -\delta v/\hat{v}^2$. Соотношение (8) было приведено в работе [5]. Там же была указана связь угла падения $\delta\alpha$, отсчитанного от предельного угла $\hat{\alpha}$, с параметрами δv и δp , но только для гексагонального кристалла в частном случае сагиттальной плоскости, близкой к плоскости поперечной изотропии. Для целей настоящей работы мы найдем в этом разделе связь между указанными характеристиками в общем случае произвольной анизотропии.

Заметим, что кривая 1 на рис. 2, отвечающая сечению внешней полости поверхности медленности, является декартовым графиком функции

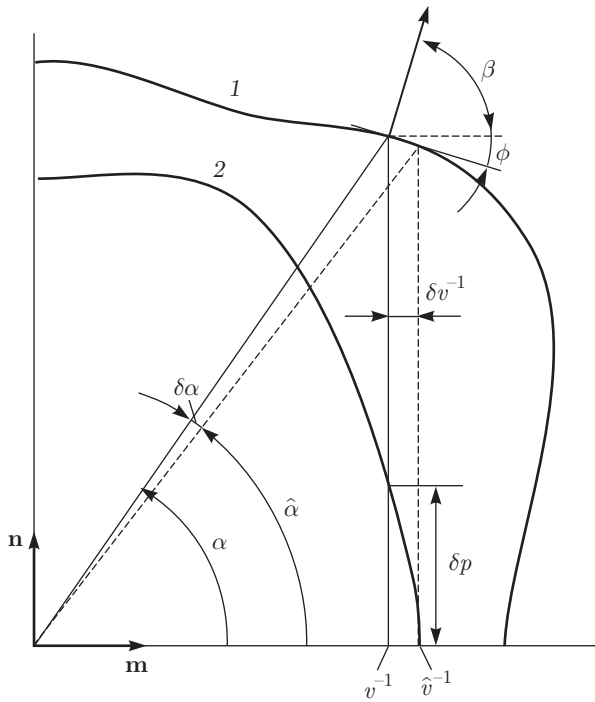


Рис. 2. Связь между приращениями угла $\delta\alpha$, медленности δv^{-1} и параметра $p_2 = \delta p$ на примере кристалла стильбена в сечении поверхности медленности сагиттальной плоскостью при угле $\varphi = 1.37$ рад, отсчитанном от кристаллографической плоскости xy . Угол β нормали к поверхности медленности ($\beta + \phi = \pi/2$) задает направление распространения падающего пучка в r -пространстве

$v^{-1}p_1(v^{-1})$. Поэтому угол α определяется уравнением $\text{tg } \alpha = v^{-1}p_1/v^{-1} = p_1$. Следовательно, $\alpha = \arctg p_1$ и

$$\delta\alpha \approx \delta v^{-1} \frac{1}{1 + \hat{p}_1^2} \left(\frac{dp_1}{dv^{-1}} \right)_{\hat{v}^{-1}}, \quad (9)$$

где $\hat{p}_1 = p_1(\hat{v}^{-1})$ и индекс у производной указывает, что она берется в предельной точке $v^{-1} = \hat{v}^{-1}$. Выразим эту производную через характеристики поверхности медленности. Введем угол $\hat{\phi}$ наклона касательной к кривой $v^{-1}p_1(v^{-1})$ в точке $v^{-1} = \hat{v}^{-1}$ ($\hat{\phi}$ — предельное значение угла ϕ на рис. 2 при $\delta\alpha \rightarrow 0$). В этих терминах, очевидно, справедливо тождество

$$-\text{tg } \hat{\phi} = \left(\frac{d(v^{-1}p_1)}{dv^{-1}} \right)_{\hat{v}^{-1}} = \hat{p}_1 + \hat{v}^{-1} \left(\frac{dp_1}{dv^{-1}} \right)_{\hat{v}^{-1}}, \quad (10)$$

которое дает

$$\left(\frac{dp_1}{dv^{-1}} \right)_{\hat{v}^{-1}} = -\hat{v} (\text{tg } \hat{\phi} + \hat{p}_1). \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9) с учетом (8), имеем окончательно

$$\delta\alpha \approx \delta p^2 \frac{\text{tg } \hat{\phi} + \hat{p}_1}{2\kappa\hat{v}(1 + \hat{p}_1^2)}. \quad (12)$$

Полученные связи между параметрами $\delta\alpha$, δv и δp ниже окажутся весьма полезными. При конкретных расчетах для нас удобнее всего будет использование величины δp . Но на стадии практических оценок эффекта, его оптимизации, а также при поиске перспективных кристаллов для применения мы перейдем от δp к углу падения $\delta\alpha$.

4. СЛУЧАЙ ГРАНИЦЫ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛА

Нулевой коэффициент потерь ($K_1 = 0$) реализуется в условиях конверсии, когда паразитная отраженная волна не возникает. Покажем, что критерий такой конверсии сильно упрощается, когда граница является плоскостью симметрии кристалла.

Собственные векторы ξ_α ($\alpha = 1, \dots, 6$) матрицы Стро образуют полную ортонормированную систему. При преобразованиях симметрии такая система векторов, очевидно, переходит сама в себя. Это, конечно, относится и к 3-векторам \mathbf{L}_α , определяющим коэффициенты отражения (5). Если граница параллельна плоскости S симметрии кристалла, пары вещественных векторов \mathbf{L}_α и $\mathbf{L}_{\alpha+3}$, относящихся к одной и той же полости поверхности медленности, должны быть симметричны относительно S :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &= \mathbf{L}_1^s + \mathbf{L}_1^n, & \mathbf{L}_4 &= \mathbf{L}_1^s - \mathbf{L}_1^n, \\ \mathbf{L}_2 &= \mathbf{L}_2^s + \mathbf{L}_2^n, & \mathbf{L}_5 &= \mathbf{L}_2^s - \mathbf{L}_2^n, \end{aligned} \quad (13)$$

где \mathbf{L}_α^s — компонента вектора \mathbf{L}_α , лежащая в плоскости S , а \mathbf{L}_α^n — его нормальная компонента. Что же касается комплексного вектора \mathbf{L}_3 , то симметричный ему вектор \mathbf{L}_6 является комплексно-сопряженным [5]. Поэтому их структура очевидна:

$$\mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_3^s + i\mathbf{L}_3^n, \quad \mathbf{L}_6 = \mathbf{L}_3^s - i\mathbf{L}_3^n. \quad (14)$$

Подставляя в соотношения (5) соответствующие выражения из (13) и (14), получаем

$$R_1 = -\frac{\Phi - \Lambda' + i\Lambda''}{\Phi + \Lambda' + i\Lambda''}, \quad R_2 = -\frac{M}{\Phi + \Lambda' + i\Lambda''}, \quad (15)$$

где введены функции

$$\begin{aligned} \Lambda'(\varphi, \delta p) &= [\mathbf{L}_1^n \mathbf{L}_2^s \mathbf{L}_3^s], & \Lambda''(\varphi, \delta p) &= [\mathbf{L}_1^s \mathbf{L}_2^s \mathbf{L}_3^n], \\ \Phi(\varphi, \delta p) &= [\mathbf{L}_1^s \mathbf{L}_2^n \mathbf{L}_3^s], & M(\varphi, \delta p) &= 2[\mathbf{L}_1^s \mathbf{L}_3^s \mathbf{L}_1^n]. \end{aligned} \quad (16)$$

Полученные соотношения (15), (16) являются точными, в них φ и δp — произвольные параметры, регулирующие резонанс. Только в разд. 6 при анализе этих соотношений величины $\delta\varphi^2 = (\varphi - \varphi_0)^2$ и δp будут считаться малыми параметрами.

Условие конверсии $R_1 = 0$ достигается выполнением следующих соотношений в (15):

$$\begin{aligned} \Lambda'(\varphi, \delta p) &= \Phi(\varphi, \delta p), \\ \Lambda'' &= [\mathbf{L}_1^s \mathbf{L}_2^s \mathbf{L}_3^n] = L_3^n [\mathbf{L}_1^s \times \mathbf{L}_2^s] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь первое уравнение задает линию $\delta p = p_2(\varphi)$ минимума потерь энергии, т.е. связь между параметрами возмущения, а второе определяет условие на упругие константы, которое обеспечивает на этой линии минимума конверсию отражения.

В терминах (15) коэффициент эффективности резонанса η равен

$$\eta = 1 - |R_1|^2 = \frac{4\Phi\Lambda'}{(\Phi + \Lambda')^2 + (\Lambda'')^2}. \quad (18)$$

На линии минимума потерь энергии $\Lambda' = \Phi$ (17) этот коэффициент принимает вид

$$\eta = \frac{1}{1 + (\Lambda''/2\Lambda')^2}. \quad (19)$$

Таким образом, близость эффективности возбуждения к 100 %, а самого отражения — к конверсионному определяется условием

$$(\Lambda''/2\Lambda')^2 \ll 1. \quad (20)$$

Неравенство (20), как видно из соотношений (16), (17), не зависит от длины вектора \mathbf{L}_2 , которая является малой величиной в резонансной области, но присутствует как в числителе, так и в знаменателе выражения (20). Поэтому для приближения к конверсии требуется малость остальных входящих в Λ'' величин $L_3^n L_1^s \sin \angle(\mathbf{L}_1^s, \mathbf{L}_2^s)$, что можно обеспечить только подбором кристалла с оптимальным сочетанием модулей упругости. Тем самым неравенство (20) действительно является критерием для отбора кристаллов с резонансом отражения близким к конверсии.

Нетрудно проверить, что условия конверсии (17) одновременно обеспечивают большой коэффициент усиления K_2 (6):

$$\begin{aligned} K_2 &= \left(\frac{M s_2}{2\Phi s_4} \right)^2 = \left(\frac{|(\mathbf{L}_1^s \times \mathbf{L}_3^s) \mathbf{L}_1^n| s_2}{|(\mathbf{L}_1^s \times \mathbf{L}_3^s) \mathbf{L}_2^n| s_4} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{L_1^n s_2}{L_2^n s_4} \right)^2 \gg 1. \end{aligned} \quad (21)$$

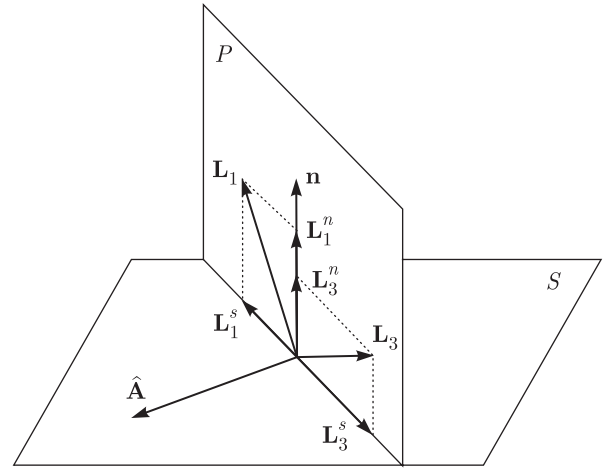


Рис. 3. Невозмущенные компоненты векторов $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1^s + \mathbf{L}_1^n$ и $\mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_3^s + \mathbf{L}_3^n$ (при $\varphi = \varphi_0$) в плоскости P с нормалью $\hat{\mathbf{A}}$, параллельной плоскости поверхности кристалла S

Последнее неравенство возникает из-за малости длины вектора \mathbf{L}_2 при малом возмущении $\delta\varphi$ исходной ориентации сагиттальной плоскости, в которой особая объемная волна удовлетворяет условию свободной границы: $\mathbf{L}_2 = \hat{\mathbf{L}} = 0$. Любопытно, что вблизи невозмущенной ориентации φ_0 сагиттальной плоскости малостью обладают все смешанные произведения в (16): три из них, Φ , Λ' и Λ'' , — из-за малости длины L_2 , а четвертое, M , — совсем по другой причине. Дело в том, что в сагиттальной плоскости при $\varphi = \varphi_0$ существует не только особая объемная волна, но и трехпарциальное отражение, обеспеченное компланарностью векторов \mathbf{L}_4 , \mathbf{L}_1 и \mathbf{L}_3 . Согласно работе [5], они всегда принадлежат плоскости, ортогональной вектору поляризации $\hat{\mathbf{A}}$ особой объемной волны. В нашем случае такая компланарность эквивалентна условию $[\mathbf{L}_1^s \mathbf{L}_3^s \mathbf{L}_1^n] = 0$ или $\mathbf{L}_1^s \parallel \mathbf{L}_3^s$ (рис. 3). При малом возмущении $\delta\varphi$ ориентации сагиттальной плоскости величина $|\mathbf{L}_1^s \times \mathbf{L}_3^s|$ становится дополнительным фактором малости в (21), который присутствует как в числителе, так и в знаменателе дроби и потому исключается. В результате коэффициент возбуждения K_2 (21) оказывается пропорциональным большому параметру $(L_2^n)^{-2}$, что и обеспечивает резонансное усиление интенсивности отраженного пучка.

Выражения (15) имеют ту же структуру, что и в рассмотренном в работе [5] случае для ромбического кристалла, хотя, конечно, конкретные определения коэффициентов M , Φ , Λ' и Λ'' теперь совсем иные. Причина идентичности очевидна: структура

формулы (15) полностью определяется тем, что граница кристалла параллельна плоскости симметрии. А дополнительная плоскость симметрии ромбического кристалла, как мы теперь понимаем, лишь упрощает выражения для M , Φ , Λ' и Λ'' . С другой стороны, рассмотренный в [5] случай моноклинного кристалла с плоскостью симметрии, параллельной не поверхности, а невозмущенной сагиттальной плоскости, описывается структурой коэффициентов отражения такой же, как в триклинном кристалле. В последнем случае сходные параметры в числителе и знаменателе коэффициента отражения R_1 более не тождественны друг другу, хотя выражения для них тоже упрощаются.

5. ГЕОМЕТРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОСОБЫХ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН

Как уже говорилось, исследуемый резонанс отражения всегда существует вблизи выделенной геометрии срезов кристалла, допускающей распространение ООВ, которая удовлетворяет условию свободной границы. В работе [5] исходная геометрия срезов кристалла не определялась, а считалась уже подобранной исходя из требования существования ООВ. Это подразумевалось как в общем случае произвольной анизотропии, так и для моноклинного кристалла с плоскостью симметрии, параллельной сагиттальной плоскости. Применительно к ромбическим и гексагональным кристаллам, существование ООВ в соответствующих плоскостях распространения автоматически обеспечивалось симметрией поставленных задач [5, 7].

В настоящей работе выбор исходной геометрии срезов, отвечающих существованию ООВ, является важной частью исследования. В этом разделе рассмотрены критерии, определяющие несимметричные направления распространения ООВ в кристаллах разных типов, когда граница параллельна плоскости симметрии. Но начнем мы с общего критерия для произвольной анизотропии, которому будет найдена новая более компактная форма.

5.1. Альтернативная форма общего критерия существования особых объемных волн

Как уже упоминалось, однопарциальные ООВ могут существовать даже в триклинных кристаллах во всех трех полостях поверхности медленности. Общий критерий и теорема существования данных волн сформулированы в работе [6]. Критерий определяет направление \mathbf{m} волновой нормали,

при распространении вдоль которой волна является ООВ, т. е. удовлетворяет условию свободной границы. Ориентация \mathbf{n} этой границы также подлежит определению. Уравнение для \mathbf{m} сводится к условию обращения в нуль смешанного произведения трех векторов:

$$Q_\alpha(\mathbf{m}) = [(\hat{\mu}^\alpha \mathbf{A}_\beta) \times (\hat{\mu}^\alpha \mathbf{A}_\gamma)] \mathbf{m} = 0. \quad (22)$$

Здесь $\mu_{ij}^\alpha(\mathbf{m}) = c_{ijkl} m_l A_{\alpha k}$ — тензор, пропорциональный амплитуде поля напряжений ООВ, c_{ijkl} — тензор модулей упругости кристалла, \mathbf{A}_α , \mathbf{A}_β и \mathbf{A}_γ — взаимно ортогональные векторы поляризации изонормальных волн, отвечающие трем различным полостям поверхности медленности для одной и той же волновой нормали \mathbf{m} . Вектор поляризации \mathbf{A}_α ООВ удовлетворяет уравнению Кристоффеля

$$m_i c_{ijkl} m_l A_{\alpha k} \equiv m_i \mu_{ij}^\alpha = \rho v_\alpha^2 A_{\alpha j}, \quad (23)$$

где ρ — плотность кристалла, а v_α — фазовая скорость волны. Таким образом, свертка симметричного тензора $\hat{\mu}^\alpha$ с волновой нормалью \mathbf{m} дает вектор, параллельный вектору поляризации \mathbf{A}_α . Аналогичная свертка $\hat{\mu}^\alpha$ с нормалью \mathbf{n} должна обращаться в нуль,

$$\hat{\mu}^\alpha \mathbf{n} = 0, \quad (24)$$

из-за граничного условия свободной поверхности. Совокупность этих двух свойств тензора $\hat{\mu}^\alpha$ приводит к важному следствию:

$$m_i \mu_{ij}^\alpha n_j = \rho v_\alpha^2 \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (25)$$

т. е. ООВ поляризована в плоскости границы [6, 11] (см. вектор $\hat{\mathbf{A}}$ на рис. 3). При этом уравнения (22) и (24) определяют соответственно направления волновой нормали \mathbf{m} этой волны и нормали \mathbf{n} к границе кристалла, которые в общем случае, конечно, не ортогональны друг другу. В свою очередь, совокупность векторов \mathbf{n} и \mathbf{m} задает ориентацию плоскости распространения ООВ.

В критерий (22) вовлечены векторы поляризации всех трех изонормальных волн, что имеет свои неудобства. Покажем теперь, что данному критерию можно придать более компактную форму, в которую войдет только один вектор поляризации \mathbf{A}_α ООВ. Введем тензор $\hat{\mu}^\alpha$ взаимный к $\hat{\mu}^\alpha$, который определен соотношением $\hat{\mu}^\alpha \hat{\mu}^\alpha = |\hat{\mu}^\alpha|$, где $|\hat{\mu}^\alpha| \equiv \det \hat{\mu}^\alpha$. Согласно [12], для любой пары векторов \mathbf{A}_β и \mathbf{A}_γ справедливо тождество

$$(\hat{\mu}^\alpha \mathbf{A}_\beta) \times (\hat{\mu}^\alpha \mathbf{A}_\gamma) = \hat{\mu}^\alpha (\mathbf{A}_\beta \times \mathbf{A}_\gamma). \quad (26)$$

Комбинируя (26) и (22) с учетом коллинеарности $\mathbf{A}_\beta \times \mathbf{A}_\gamma \parallel \mathbf{A}_\alpha$, приходим к новой форме критерия существования ООВ:

$$Q_\alpha(\mathbf{m}) = \mathbf{m} \cdot \hat{\mu}^\alpha \mathbf{A}_\alpha = 0. \quad (27)$$

На сфере единичного радиуса $\mathbf{m}^2 = 1$ уравнение (27), как и (22), описывает линии решений для ООВ, существующих в кристаллах любой симметрии [6].

5.2. Моноклинный кристалл с границей, параллельной плоскости симметрии

При распространении ООВ в плоскости симметрии кристалла задача значительно упрощается. Ориентация нормали \mathbf{n} становится определенной, а направление распространения ООВ задается единственным неизвестным параметром: азимутом φ_0 вектора волновой нормали \mathbf{m}_0 в плоскости симметрии. В моноклинном кристалле с границей, параллельной его плоскости симметрии xz в кристаллофизической системе координат, направление $\mathbf{m}_0 = (\cos \varphi_0, 0, \sin \varphi_0)$ должно удовлетворять уравнению¹⁾

$$\frac{f_3 - f_2}{f_1} = \frac{g_2^2 - g_1^2}{g_1 g_2}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= c_{15} \cos^2 \varphi_0 + (c_{13} + c_{55}) \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + c_{35} \sin^2 \varphi_0, \\ f_2 &= c_{11} \cos^2 \varphi_0 + 2c_{15} \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + c_{55} \sin^2 \varphi_0, \\ f_3 &= c_{55} \cos^2 \varphi_0 + 2c_{35} \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + c_{33} \sin^2 \varphi_0, \\ g_1 &= c_{12} \cos \varphi_0 + c_{25} \sin \varphi_0, \\ g_2 &= c_{25} \cos \varphi_0 + c_{23} \sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (29)$$

В (29) параметры c_{ij} — модули упругости в обозначениях Фойгта [9, 12]. ООВ распространяется с фазовой скоростью \hat{v}_0 и поляризацией $\hat{\mathbf{A}}_0$, которые определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \rho \hat{v}_0^2 &= f_2 - f_1 g_1 / g_2, \\ \hat{\mathbf{A}}_0 &\parallel (g_2, 0, -g_1). \end{aligned} \quad (30)$$

Условие (28) сводится к полному уравнению четвертой степени относительно $\operatorname{tg} \varphi_0$. Нас интересуют

лишь вещественные корни этого уравнения, число которых может быть 4, 2 или 0. Таким образом, при выбранном симметричном направлении границы в моноклинном кристалле существование ООВ не гарантировано. Но если они существуют, то их должно быть четыре или две. Ниже при выборе кристаллов нам не попадет ни одного, где бы не было вещественных решений уравнения (28), в том числе на интересующей нас средней полости поверхности медленности.

Уравнения (28)–(30) описывают ООВ в плоскостях симметрии любых кристаллов. При переходе к более симметричным кристаллам просто следует учесть уменьшение числа независимых модулей упругости (например, в ромбическом кристалле [9, 12]: $c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{45} = 0$). При этом во всех кристаллах, кроме тригональных, уравнение (28) распадается на несколько более простых уравнений, а его корни сразу находятся. Это мы увидим на примере ромбических и гексагональных кристаллов.

5.3. Особые объемные волны в ромбических и гексагональных кристаллах

В ромбических кристаллах все три плоскости кристаллофизических координат являются плоскостями симметрии, а координатные оси — осями симметрии второго порядка. На поверхности xz этих кристаллов уравнение (28) распадается на два:

$$\sin 2\varphi_0 = 0, \quad \operatorname{tg}^2 \varphi_0 = \frac{\Delta_{15} - d_1 c_{12} / c_{23}}{\Delta_{35} - d_1 c_{23} / c_{12}}, \quad (31)$$

$$\Delta_{ij} = c_{ii} - c_{jj}, \quad d_1 = c_{13} + c_{55}.$$

Здесь угол φ_0 отсчитывается от оси x в плоскости границы. Данные соотношения были ранее получены в работе [13] при непосредственном анализе ромбических кристаллов. Корни $\varphi_0 = 0, \pi/2$ первого уравнения в (31) отвечают ООВ, распространяющимся вдоль осей симметрии x и z и существующим при любых значениях упругих модулей. Резонансы, связанные с этими симметричными ООВ, изучались ранее [5]. В данной работе нас будут интересовать только ООВ с несимметричными направлениями распространения $\mathbf{m}_0 = (\cos \varphi_0, 0, \sin \varphi_0)$, задаваемыми вторым уравнением в (31). Для них соотношения (30) дают выражения

$$\rho \hat{v}_0^2 = (c_{11} - d_1 c_{12} / c_{23}) \cos^2 \varphi_0 + c_{55} \sin^2 \varphi_0, \quad (32)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_0 \parallel (c_{23} \sin \varphi_0, 0, -c_{12} \cos \varphi_0).$$

¹⁾ Это уравнение было получено Йенсом Лоте (Prof. Jens Lothe, Physical Department, University of Oslo, Norway). Результат публикуется впервые с разрешения автора.

Данные волны существуют не всегда — они появляются только при положительной правой части выражения для $\text{tg}^2 \varphi_0$ в (31). Разумеется, подобные волны могут существовать и на других поверхностях, параллельных координатным плоскостям симметрии yz и xy того же кристалла. Приведенные выражения охватывают и эти случаи после циклической перестановки индексов у модулей упругости.

Переход от ромбических к гексагональным кристаллам отвечает дальнейшему упрощению тензора модулей упругости: $c_{23} = c_{13}$, $c_{55} = c_{44}$ [9, 12]. При этом вместо (31), (32) для «косых» ООВ получаем [14]

$$\begin{aligned} \text{tg}^2 \varphi_0 &= b_1/b_2, \\ b_1 &= \Delta_{14} - \frac{dc_{12}}{c_{13}}, \quad b_2 = \Delta_{34} - \frac{dc_{13}}{c_{12}}, \\ d &= c_{13} + c_{44}, \\ \rho \hat{v}_0^2 &= c_{44} + b_1 \cos^2 \varphi_0, \\ \hat{\mathbf{A}}_0 &\parallel (c_{13} \sin \varphi_0, 0, -c_{12} \cos \varphi_0). \end{aligned} \tag{33}$$

Заметим, что эти формулы справедливы и для тетрагонального кристалла с поверхностью, параллельной одной из четырех плоскостей симметрии, проходящих через ось 4.

Формулы (28)–(33) понадобятся нам в разд. 7 для численного анализа исследуемого резонанса на косых срезах в моноклинных, тригональных, ромбических и гексагональных кристаллах. Впрочем, выражения (33) будут использоваться уже в следующем разделе при аналитическом описании резонанса в гексагональных кристаллах.

6. РЕЗОНАНС НА МОНОКЛИННЫХ СРЕЗАХ ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ КРИСТАЛЛОВ

Рассмотрим теперь аналитическое описание конверсионного резонанса отражения в несимметрично-ориентированной сагиттальной плоскости на примере гексагонального кристалла. Границу среды выбираем параллельной зональной плоскости симметрии xz , проходящей через гексагональную ось 6. Ориентация φ сагиттальной плоскости, как и в (33), отсчитывается от поперечно-изотропного направления. Воспользуемся выражениями для собственных векторов $\xi_\alpha = (\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{L}_\alpha)^T$ и собственных значений p_α , полученных в работе [14] для той же геометрии задачи. При этом некоторые обозначения и нуме-

рация ветвей будут адаптированы применительно к настоящему рассмотрению:

$$\xi_1 = \beta_1 \begin{pmatrix} p_1 \\ -\cos \varphi \\ 0 \\ c_{66}(\cos^2 \varphi - p_1^2) \\ 2c_{66}p_1 \cos \varphi \\ c_{44} \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$$\xi_{2,3} = \beta_{2,3} c_{44} \begin{pmatrix} -d \sin 2\varphi \\ -2p_{2,3} d \sin \varphi \\ (F_- \pm R)/c_{44} \\ 2p_{2,3} c_{66} \sin 2\varphi \\ (G \pm R) \sin \varphi \\ -p_{2,3}(H \pm R) \end{pmatrix},$$

$$p_1(v, \varphi) = \sqrt{\frac{\rho v^2 - c_{66} - \Delta_{46} \sin^2 \varphi}{c_{66}}}, \tag{35}$$

$$p_{2,3}(v, \varphi) = \sqrt{\frac{Q \pm R}{2c_{11}c_{44}}}.$$

Здесь верхний знак в « \pm » отвечает первому индексу и введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} R(v, \varphi) &= \\ &= \sqrt{(c_{44}u + c_{11}w + d^2 \sin^2 \varphi)^2 - 4c_{11}c_{44}uw}, \\ u &= \rho v^2 - c_{44} \sin^2 \varphi, \quad w = \rho v^2 - c_{33} \sin^2 \varphi, \\ G &= \rho v^2(2d + \Delta_{14}) - 4c_{66}d \cos^2 \varphi - \\ &\quad - (c_{11}c_{33} - c_{13}^2) \sin^2 \varphi, \\ H &= F_- - 2c_{44}d \sin^2 \varphi, \\ Q &= F_+ - 2c_{11}c_{44} \cos^2 \varphi, \\ F_\mp &= \rho v^2(c_{11} \mp c_{44}) + \\ &\quad + [d^2 - (c_{11}c_{33} \mp c_{44}^2)] \sin^2 \varphi. \end{aligned} \tag{36}$$

В рассматриваемом диапазоне скоростей v (рис. 2) параметры $p_{1,2}$ в формулах (35) автоматически оказываются вещественными, а параметр p_3 является чисто мнимым: $p_3 \equiv iq$. Константы нормировки β_α в (34) находятся из условия $\mathbf{A}_\alpha^2 = 1$. Они выпадают из коэффициентов потерь K_1 (6) и эффективности η (7), а в коэффициент возбуждения K_2 (6) входят в комбинации $(\beta_1/\beta_2)^2$, которая приводится в нулевом приближении ($\varphi = \varphi_0$, $v = \hat{v}_0$):

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 = \frac{4d^2 c_{44}^2 c_{66}}{c_{11}} \left\{ 1 - \frac{c_{13} b_1^2 (b_3 c_{11} - d c_{44})}{c_{44}^2 c_{12} b_2 (b_1 + b_2)} \right\}, \tag{37}$$

где $b_3 = c_{11}c_{13}/c_{12} - d$.

В точных формулах (34), (35) под углом φ мы понимаем возмущенное значение $\varphi_0 + \delta\varphi$, где угол φ_0 определяется первым уравнением в (33). Напомним, что резонансная область волновой геометрии задается поворотом сагиттальной плоскости на угол $\delta\varphi$ и сопутствующим малым изменением $\delta v = v - \hat{v}$ приведенной скорости v , отсчитанным от новой позиции предельной скорости $\hat{v}(\varphi)$ [14]:

$$\rho\dot{v}^2 = \frac{1}{2} \left[c_{11} \cos^2 \varphi + c_{33} \sin^2 \varphi + c_{44} - \sqrt{(\Delta_{14} \cos^2 \varphi - \Delta_{34} \sin^2 \varphi)^2 + d^2 \sin^2 2\varphi} \right]. \quad (38)$$

Отметим попутно, что это тоже точная формула. Как видно из рис. 2, параметр δv задает угол падения $\delta\alpha \propto \delta v$ резонансного отражения, отсчитываемый от предельного угла падения, отвечающего полному внутреннему отражению. При этом величина δv жестко связана с параметром $\delta p = p_2(\varphi)$ (8): $\delta v \propto \delta p^2$.

После подстановки в формулы (16) соответствующих выражений из (34)–(36), разложенных по малым параметрам $\delta\varphi$ и δp , находим в главном порядке

$$\begin{aligned} \Lambda' &= h_1 \delta p, & \Lambda'' &= h_2 \delta p, \\ \Phi &= h_3 \delta\varphi^2, & M &= h_4 \delta\varphi, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} h_1 &= -\frac{4\beta c_{11} c_{44} c_{66}^2 b_2 p_0 q_0^3}{d\sqrt{b_1(b_1 + b_2)}}, \\ h_2 &= h_1 \frac{c_{11} c_{44}^2 c_{12} q_0}{4dc_{13} c_{66}^2 p_0}, \\ h_3 &= \frac{4\beta b_1 b_2^2 b_3 q_0 \sin^3 \varphi_0}{d^2(b_1 c_{12}^{-2} + b_2 c_{13}^{-2})}, \\ h_4 &= -h_3 \frac{2\beta_1 d c_{66} p_0}{\beta_2 c_{13} b_1 \sin \varphi_0}. \end{aligned} \quad (40)$$

Входящий сюда совокупный множитель $\beta = \beta_1 \beta_2 \beta_3$ при дальнейших вычислениях выпадает, а параметры $p_0 = p_1(\varphi_0, v_0)$ и $q_0 = q_1(\varphi_0, v_0)$ в соответствии с (35) равны

$$p_0 = \sqrt{\frac{b_2(b_1 + \Delta_{46})}{c_{66}(b_1 + b_2)}}, \quad (41)$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{4dc_{13}c_{66}^2}{c_{11}c_{44}c_{12}(b_1 + b_2)} \left(1 - \frac{c_{44}}{g}\right)},$$

$$g = \frac{4c_{13}^2 c_{66}^2}{c_{11}c_{13}^2 - c_{33}c_{12}^2 + 4c_{12}c_{13}c_{66}}. \quad (42)$$

Теперь можно вычислить параметр конверсии (20) в гексагональном кристалле:

$$\left(\frac{\Lambda''}{2\Lambda'}\right)^2 = \gamma \left(1 - \frac{c_{44}}{g}\right), \quad (43)$$

$$\gamma = \frac{c_{11}c_{12}c_{44}^3}{16dc_{13}c_{66}b_2(b_1 + \Delta_{46})}. \quad (44)$$

Таким образом, строгие условия конверсии (17) могут реализоваться только при условии $c_{44} = g$, где g (42) от c_{44} не зависит. Из сравнения формулы (43) с выражением для параметра q_0 (41) видно, что условие $c_{44} = g$ эквивалентно требованию $q_0 = 0$, которое реализуется только при вырождении собственных значений $p_2 = p_3$ для предельных волн, отвечающих средней и внутренней полостям поверхности медленности кристалла, что случается весьма редко. Впрочем, при подборе кристаллов следует учитывать, что близость к конверсии рассматриваемого резонансного отражения можно получить не только за счет близости c_{44} к g , но и благодаря малости фактора γ (44). Так или иначе, малость параметра конверсии действительно реализуется в ряде кристаллов. В табл. 1 приведены параметры резонанса для пяти конкретных кристаллов. Все они имеют относительно низкие параметры конверсии (43) и, соответственно, высокие коэффициенты эффективности η . В трех из них это обеспечивается в основном малостью параметра γ , в четвертом — благодаря произведению обоих параметров, и только в пятом — из-за того, что $|1 - c_{44}/g| \ll 1$. Но и в последнем случае близости к вырождению нет, поскольку параметр q_0 (41) оказывается не малым из-за множителя перед скобкой в подкоренном выражении.

Найденные зависимости (39) основных величин, характеризующих резонансное отражение, от параметров настройки $\delta\varphi$ и δp приводят к следующей структуре коэффициентов усиления K_2 (6), (15) и эффективности η (18):

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{|\mu|^2 (s_2/s_4) \delta\varphi^2}{(\delta\varphi^2 + \lambda' \delta p)^2 + (\lambda'' \delta p)^2}, \\ \eta &= \frac{4\lambda' \delta p \delta\varphi^2}{(\delta\varphi^2 + \lambda' \delta p)^2 + (\lambda'' \delta p)^2}, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$\lambda' = h_1/h_3, \quad \lambda'' = h_2/h_3, \quad \mu = h_4/h_3. \quad (46)$$

Следует подчеркнуть, что структура приближенных выражений (45) справедлива для любых кристаллов с поверхностью, параллельной плоскости симметрии, включая и моноклинные. Правда,

Таблица 1. Параметры резонанса для пяти гексагональных кристаллов

Кристаллы	φ_0 , рад	γ	$1 - c_{44}/g$	$(\Lambda''/2\Lambda')^2$
Селенид галлия GaSe	0.9913	0.1254	0.5422	0.064
PVC	0.2425	0.0195	0.6026	0.012
CaCO ₃	0.5952	0.0248	0.3672	0.009
Al(IO ₃) ₃	0.0944	-0.2378	-0.3410	0.075
Гидроксипатит	0.4255	-2.6340	-0.0984	0.206

при этом постоянные параметры λ' , λ'' и μ нужно находить отдельно. В частности, в работе [5] они были получены для более симметричной ориентации невозмущенной сагиттальной плоскости ($\varphi_0 = 0$) в гексагональном кристалле.

Из соотношений (45) видно, что в используемом приближении максимумы обеих величин, K_2 и η , достигаются на одной и той же «траектории»

$$\delta\varphi^2 = \delta p \sqrt{(\lambda')^2 + (\lambda'')^2} = |\lambda| \delta p. \tag{47}$$

Как уже говорилось, рассматриваемые регулировочные параметры $\delta\varphi$ и δp характеризуют ориентацию сагиттальной плоскости и угол падения волны накачки. Если от δp перейти непосредственно к углу падения $\delta\alpha$ (см. рис. 2), то из (12), (47) получим

$$\delta\alpha = \delta\varphi^4 \frac{\text{tg } \beta + \hat{p}_1}{2|\lambda|^2 \kappa \hat{v} (1 + \hat{p}_1^2)}. \tag{48}$$

Это соотношение показывает существенную разницу между порядками величин углов $\delta\varphi$ и $\delta\alpha$. Даже при не слишком малых значениях $\delta\varphi$ угол $\delta\alpha$ оказывается по настоящему малым параметром. Таким образом, область резонанса по углам падения $\delta\alpha$ должна быть исключительно узкой, что представляет собой серьезное неудобство и делает ширину этой области не менее важным параметром, чем коэффициент эффективности резонанса η .

Из соотношений (45) следует, что вдоль оптимальной траектории (47) в нашем приближении $\eta_{max} = \text{const}$, $K_2^{max} \propto 1/\delta\varphi^2$. Поэтому, с учетом (48), ожидаемая зависимость $K_2^{max}(\delta\alpha)$ имеет вид

$$K_2^{max} \approx K/\sqrt{\delta\alpha}. \tag{49}$$

Численная проверка по точным формулам (15), (18) для кристаллов селенида галлия и PVC (см. табл. 1) показывает, что пропорциональность $K_2^{max} \propto 1/\sqrt{\delta\alpha}$ (49), предсказываемая нашей простой теорией, действительно реализуется в этих

кристаллах с неплохой точностью. Как мы увидим в следующем разделе, это справедливо и для многих других кристаллов разных сингоний.

Таким образом, фактор K оказывается удобной характеристикой резонанса в кристалле. При известном значении K угол падения $\delta\alpha$ на оптимальной траектории, при котором достигается желаемый коэффициент усиления K_2^{max} , определяется оценкой

$$\delta\alpha \approx (K/K_2^{max})^2. \tag{50}$$

Формула (49), казалось бы, указывает путь неограниченного повышения амплитуды коэффициента возбуждения посредством согласованного уменьшения углов $\delta\alpha \propto \delta\varphi^4$. Это, конечно, иллюзия, поскольку формулы (49), (50), полученные в приближении плоских волн, не учитывают дифракционной расходимости пучка. В действительности, как только ширина резонанса по углам падения $\delta\alpha$ станет меньше расходимости пучка, дальнейшее снижение величины возмущения $\delta\varphi$ ориентации сагиттальной плоскости станет бессмысленным. Вместо роста амплитуды K_2 , при этом будет происходить выход части волновой суперпозиции в пучке из резонанса.

Есть и другое важное ограничение обсуждаемого резонанса, связанное с уширением возбуждаемого пучка. Пусть ширины падающего и отраженного пучков равны D и d . Тогда углы их расходимости $\delta\psi_i$ и $\delta\psi_r$ оцениваются отношениями

$$\delta\psi_i \sim \lambda/D, \quad \delta\psi_r \sim \lambda/d, \tag{51}$$

где λ — средняя длина волны. Если грубо оценивать $K_2^{max} \sim D/d$, то угол расходимости сжатого пучка будет увеличиваться пропорционально K_2^{max} :

$$\delta\psi_r \sim \delta\psi_i K_2^{max}. \tag{52}$$

А по мере уширения этого пучка будет уменьшаться его интенсивность. Таким образом, оптимальная

величина K_2^{max} зависит от расстояния, на котором интенсивный пучок будет использоваться. Согласно оценкам работы [5], ограничивая значения K_2^{max} в пределах 5–10, реально получить приемлемые значения расходимости $\delta\psi_r$.

Итак, для реализации резонанса требуется достаточно высокая коллимация падающего пучка. А при отборе кристаллов следует отдавать предпочтение кандидатам с наибольшими факторами K , обеспечивающими существенное превышение угла падения $\delta\alpha$ (50) над углом расходимости падающего пучка при разумных значениях коэффициента K_2^{max} . С этих позиций из рассмотренных нами пяти гексагональных кристаллов только верхняя пара в табл. 1 с наибольшими значениями параметра K ($K \approx 0.42$ для GaSe и $K \approx 0.35$ для PVC) могут представить какой-то интерес для приложений. В них амплитуда коэффициента $K_2^{max} = 4.5$ достигается при углах падения $\delta\alpha \approx 0.5^\circ$ (для GaSe) и $\delta\alpha = 0.35^\circ$ (для PVC). Для остальных кристаллов в таблице эти углы на порядок меньше.

Проведенное в этом разделе аналитическое рассмотрение основано на теории, построенной в первом исчезающем приближении. Область допустимого варьирования управляющих резонансом малых параметров $\delta\varphi$ и $\delta\alpha$ может сильно различаться в разных кристаллах. В анизотропных кристаллах с большим разбросом величин упругих модулей область применимости этой теории может оказаться весьма узкой. Между тем неприменимость приближения отнюдь не указывает на слабость эффекта. В следующем разделе мы приведем примеры таких гексагональных, тригональных, ромбических и моноклинных кристаллов, где параметры резонанса, найденные путем численного анализа по точным формулам, гораздо привлекательней для приложений, чем в случае кристаллов, представленных в табл. 1, но реализуются они за пределами применимости нашего приближенного описания.

7. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ РЯДА КРИСТАЛЛОВ РАЗНЫХ СИНГОНИЙ

Ниже при численной характеристике резонанса будем исходить из точных формул, полученных в разд. 2–5. Это, в частности, потребует нахождения собственных векторов и собственных значений матрицы Стрo как функций ориентации φ сагиттальной плоскости в исследуемых кристаллах. Будут рассматриваться моноклинные, тригональные, ромбические и гексагональные кристаллы, основываясь

на данных об их модулях упругости, приведенных в [15]. Нас будут интересовать как общие свойства резонанса, характерные для всех кристаллов, так и его индивидуальные особенности в ряде кристаллов, возникающие из-за дисперсии параметров, прежде всего в связи с перспективами этих кристаллов для наблюдения и использования изучаемого явления. Отдельные численные характеристики для некоторых из рассмотренных ниже кристаллов уже представлены в кратком виде в трудах конференции [16].

7.1. Квазисимметрия и резкая асимметрия эффекта в разных кристаллах

Как видно из выражений (45), при малых отклонениях $\delta\varphi$ ориентации сагиттальной плоскости от невозмущенной позиции φ_0 , отвечающей существованию собственного решения для ООВ, основные характеристики резонанса K_2 и η не зависят от знака $\delta\varphi$.

Поскольку в данной работе рассматриваются только несимметричные ориентации φ_0 плоскости распространения ООВ, предсказываемая выражениями (45) инвариантность резонанса относительно знака возмущения $\delta\varphi$, конечно, никак не связана с симметрией кристалла. Формулы для K_2 и η , полученные в работе [5] для общего случая кристалла произвольной анизотропии, обладают такой же инвариантностью. И хотя обсуждаемое свойство резонанса в работе [5] не обсуждалось, проведенный в ней математический анализ позволяет прояснить происхождение и физический смысл такой квазисимметрии.

Формальной причиной квадратичной зависимости величин K_2 и η от $\delta\varphi$ является то обстоятельство, что линейный по $\delta\varphi$ член разложения функции $\mathbf{L}_2(\varphi_0 + \delta\varphi)$ не дает вклада в коэффициенты отражения R_1 и R_2 (5). Это, в свою очередь, связано с компланарностью соответствующих троек векторов в смешанных произведениях в (5) из-за неполупростого (non-semisimple) вырождения матрицы Стрo в предельной точке $v = \hat{v}_0$. Разумеется, кубичный и другие нечетные члены по $\delta\varphi$ из разложения не выпадают, так что полной симметрии, конечно, нет. Но члены эти считаются малыми и в формулах (45) опущены.

Рисунок 4 демонстрирует эту псевдосимметрию на примере зависимостей $K_2(\delta\alpha, \delta\varphi)$ и $\eta(\delta\alpha, \delta\varphi)$ для ромбического кристалла эпоксиборпласт и тригонального кристалла $(C_6H_{12}O_6)_2NaI \cdot H_2O$. В первом случае симметрия выглядит практически полной, а во втором — почти полной. Есть и другие кристал-

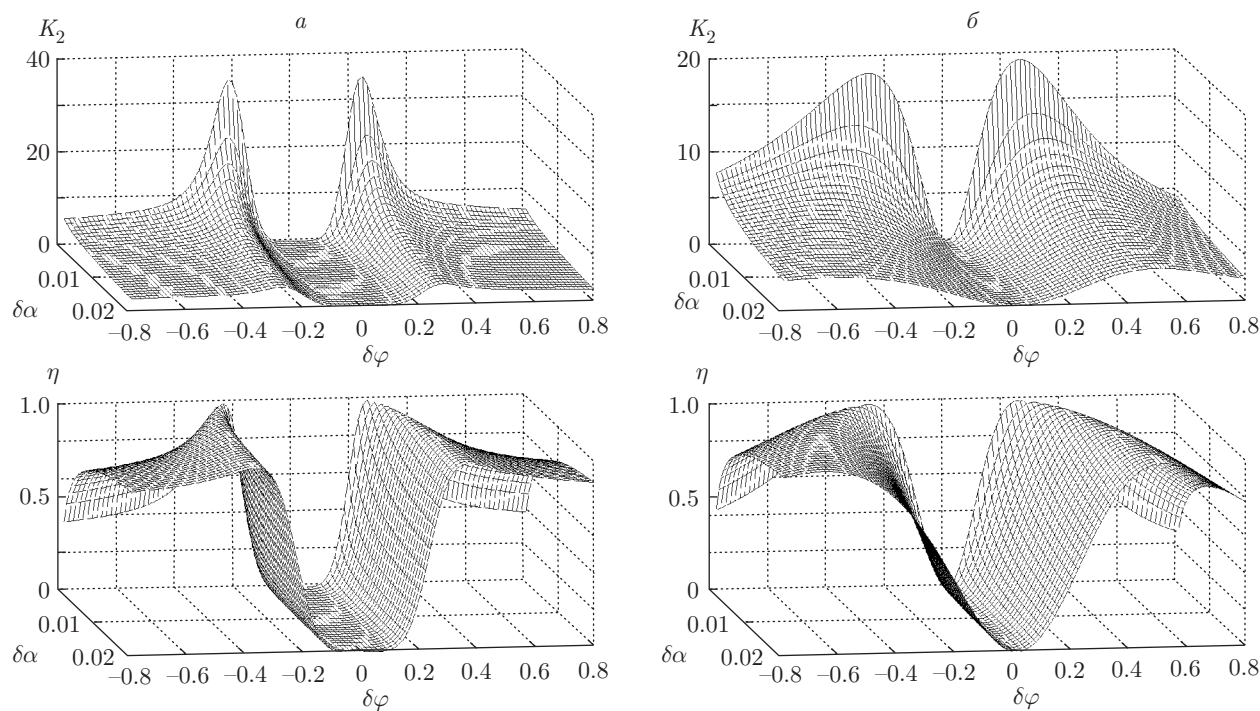


Рис. 4. Иллюстрация квазисимметрии коэффициента усиления $K_2(\delta\varphi, \delta\alpha)$ и доли энергии в возбуждаемом пучке $\eta(\delta\varphi, \delta\alpha)$ по отношению к изменению знака $\delta\varphi$ в ромбическом кристалле эпоксиборпласт (при выборе поверхности, параллельной кристаллофизической плоскости yz) (а) и в тригональном кристалле $(C_6H_{12}O_6)_2NaI \cdot H_2O$ (б)

лы, где это свойство убедительно проявляется. Например, в моноклинном кристалле $Na_2S_2O_3 \cdot 5H_2O$ отклонения от симметрии, связанные с нечетными членами разложения L_2 по $\delta\varphi$, тоже невелики. С другой стороны, для многих кристаллов асимметрия бывает гораздо более выраженной. Причина этого в основном одна и та же. Как уже говорилось, из практических соображений при отборе мы отдавали предпочтение кристаллам, в которых резонанс не слишком узок по углам падения $\delta\alpha$. А поскольку оптимальная «траектория» резонанса требует согласованного изменения геометрии срезов $\delta\alpha \propto \delta\varphi^4$ (48), при таком отборе относительный вклад нечетных членов $\delta\varphi^3/\delta\varphi^2 = \delta\varphi$ утрачивает свою малость, что видно и из рис. 4.

Особенно существенная асимметрия резонанса при смене знака $\delta\varphi$ должна иметь место в условиях, когда невозмущенная сагиттальная плоскость находится вблизи позиции, отвечающей резкой смене геометрии поверхности медленности, так что ее сечения $\varphi_0 + \delta\varphi$ и $\varphi_0 - \delta\varphi$ сильно различаются. Например, в гексагональных кристаллах AgI и CeF_3 внешняя и средняя полости поверхности медленности пересекаются по окружности, т. е. в каждом из них существует конус акустических осей. При этом в обо-

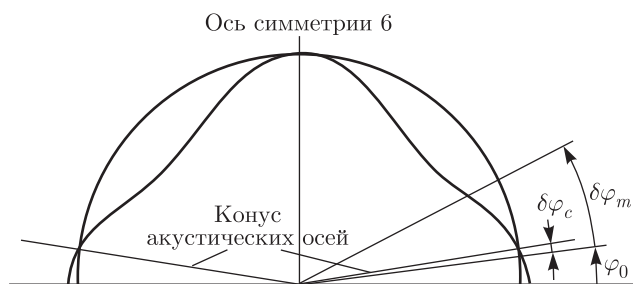


Рис. 5. Сечение внешней и средней полостей поверхности медленности кристалла AgI плоскостью поверхности, проходящей через ось симметрии б, а также положения конуса акустических осей и сагиттальных плоскостей, невозмущенной ($\varphi_0 \approx 0.15$ рад) и возмущенной ($\varphi_0 + \delta\varphi_m \approx 0.7$ рад), отвечающей $K_2^{max} = 5$ (табл. 2)

их случаях ориентация φ_0 сагиттальной плоскости отвечает ООВ на внешней полости поверхности медленности, но очень близко от пересечения (см. рис. 5 для кристалла AgI). Очевидно, что в этих кристаллах описываемый нами резонанс существует только при возмущениях $\delta\varphi$ одного знака, обеспечивающих переход через точку вырождения на среднюю полость поверхности медленности. При этом величина

Таблица 2. Ключевые параметры резонанса для серии кристаллов разных сингоний

Системы	Кристаллы	φ_0 , рад	$\delta\varphi_m$, рад	$\delta\alpha_m$, рад	η , %	\bar{K}	$\frac{\Delta\bar{K}}{\bar{K}}$, %
Моноклинная	Стильбен	1.54	-0.16	0.155	97.2	1.63	12.0
	Триглицинульфат (TGS)	1.35	0.12	0.089	91.0	1.30	7.1
	Бензил C ₁₄ H ₁₀	1.03	0.73	0.069	97.6	1.13	8.4
	Винная кислота C ₄ H ₆ O ₆	-1.13	-0.30	0.021	97.4	0.72	1.0
	Тиоцианат пентагидрид натрия Na ₂ S ₂ O ₃ · 5H ₂ O	0.78	-0.10	0.012	98.6	0.56	0.5
Тригональная	Ортофосфат свинца β -Pb ₃ (PO ₄) ₂	-1.41	0.29	0.019	93.6	0.73	2.8
	NaH ₄ SnF ₃	0.59	0.20	0.016	90.1	0.65	3.8
	Co[C ₂ H ₄ (NH ₃) ₂] ₃ Br ₃ · 3H ₂ O	-0.43	-0.22	0.013	94.6	0.58	3.7
	(C ₆ H ₁₂ O ₆) ₂ NaI · H ₂ O	0.09	0.45	0.011	99.7	0.51	0.6
	Se-10%Te	0.54	0.35	0.010	98.7	0.51	1.5
Ромбическая	Сегнетова соль (<i>yz</i>)	0.48	0.54	0.015	99.1	0.65	2.0
	Эпоксидорпласт (<i>xz</i>)	0.20	0.14	0.014	87.8	0.66	8.0
Гексагональная	AgI	0.15	0.55	0.011	96.6	0.55	2.6
	CeF ₃	0.29	0.44	0.010	94.1	0.53	4.9

$\delta\varphi$ должна превысить пороговое значение $\delta\varphi_c$.

Конечно, развитая в разд. 6 аналитическая теория не описывает резонанс в этих кристаллах. С другой стороны, точный численный расчет для кристаллов AgI и CeF₃ при не слишком малых $\delta\varphi$ дает для них эффекты возбуждения с высокой эффективностью $\eta > 94\%$ при приемлемых значениях ширины резонанса по углам падения $\delta\alpha$ (см. табл. 2 и рис. 6 для кристалла AgI). Проверка показывает, что для этих кристаллов многие обсуждавшиеся выше свойства резонанса удовлетворительно выполняются, включая зависимость (49) при факторе $K \approx \text{const}$ и даже связь между согласованными экстремальными углами $\delta\alpha \propto \delta\varphi^4$ (см. ниже). В принципе, подбором в (45) коэффициентов λ' , λ'' и μ , рассматриваемых как феноменологические параметры, можно было бы описать приведенные на рис. 6 зависимости.

7.2. Аномалии резонанса, вызванные анизотропией

В приведенном выше примере кристаллов AgI и CeF₃ аномалии, связанные с полной асимметрией резонанса по $\delta\varphi$, не устраняют вытекающие из

теории простые связи между параметрами резонанса. Это, конечно, не означает, что такие связи являются универсальными. В настоящем разделе мы рассмотрим другую пару моноклинных кристаллов, бензил и стильбен, где поверхности $K_2(\delta\varphi, \delta\alpha)$ и $\eta(\delta\varphi, \delta\alpha)$ (рис. 7) заведомо не описываются простыми функциями (45). Набор упругих модулей для этих кристаллов обладает столь выраженной дисперсией, что разложения параметров типа использованных в разд. 6 оказываются применимыми в слишком узких диапазонах углов $\delta\varphi$ и $\delta\alpha$. А за пределами этих интервалов простые соотношения усложняются. В результате поверхности на рис. 7 приобретают весьма специфические черты.

В случае бензила (рис. 7a) коэффициент эффективности η на оптимальной траектории, отвечающей «гребню» рельефа, близок к константе, как следует из формулы (45), и превышает 97% (см. табл. 2). Однако сама эта траектория согласованного изменения углов $\delta\alpha$ и $\delta\varphi$ на гребне весьма далека от пропорциональности $\delta\alpha \propto \delta\varphi^4$ (кривая 1 на рис. 8). Как видно из рис. 7 и 8, во всей интересующей нас области изменения коэффициента K_2^{max} угол $\delta\alpha$ меняется примерно в 7 раз, а угол $\delta\varphi$ — только приблизительно на 25%. Причем для попадания

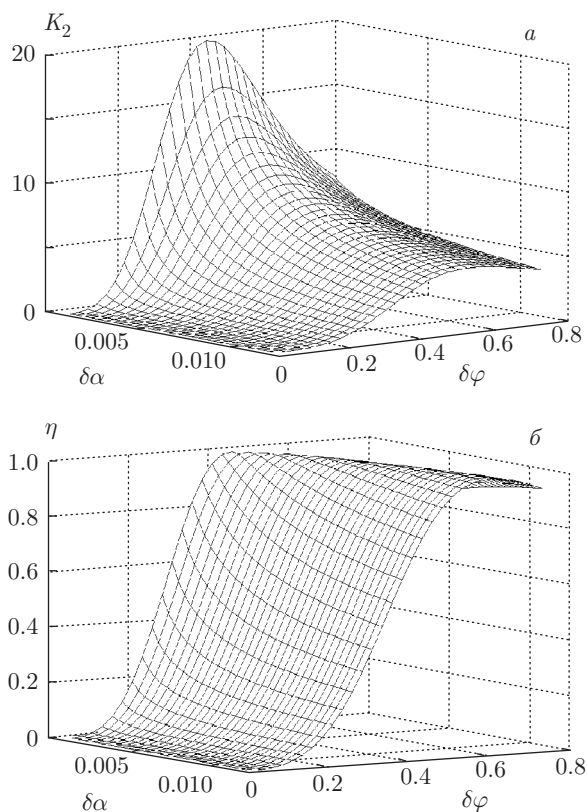


Рис. 6. Зависимости коэффициента усиления K_2 (а) и доли энергии η в возбуждаемом пучке (б) от угла падения $\delta\alpha$ и угла отклонения сагиттальной плоскости $\delta\varphi$ в кристалле AgI

в резонансную область, показанную на рис. 7а, требуются необычно большие повороты сагиттальной плоскости ($\delta\varphi \approx 0.7-0.8$ рад). При уменьшении этого угла эффект резко падает в узком интервале практически до нуля. А в области достаточно больших углов $\delta\alpha$ сама конфигурация поверхностей на рис. 7а приобретает новое качество: на каждой из них появляется побочный хребет, т. е. второй максимум в сечении $\delta\alpha = \text{const}$. Впрочем если отвлекаться от всех этих аномалий, то данный кристалл вполне может быть кандидатом на экспериментальную реализацию резонанса. Высокая эффективность η в этом случае дополняется увеличенной шириной резонанса по углам падения, которая почти в семь раз превышает аналогичную характеристику резонансов в обсуждавшейся выше паре кристаллов AgI и CeF₃ из табл. 2.

Моноклинный кристалл стильбен также весьма специфичен. Два резонанса, отвечающие возмущениям $\pm\delta\varphi$ ориентации сагиттальной плоскости, в этом случае сильно асимметричны. На рис. 7б пока-

зан более выигрышный вариант, соответствующий ориентации $\varphi = \varphi_0 - |\delta\varphi|$. Но главная аномалия резонанса не в этом. Она состоит в том, что поверхность $\eta(\delta\varphi, \delta\alpha)$ имеет не гребень оптимальных ориентаций, близких к конверсии, а плато на уровне $\eta \approx 100\%$ (рис. 7б). На этом плато величина η варьируется около максимально возможных значений в пределах всего нескольких процентов. Естественно, такая аномалия очень привлекательна для приложений. Для этого кристалла, в отличие от бензила, отклонения от пропорциональности $\delta\alpha \propto \delta\varphi^4$ на оптимальной траектории невелики (кривая 2 на рис. 8). При этом, как видно из табл. 2, в этом случае на конце траектории, отвечающем усилению $K_2^{max} = 5$, величины оптимальных углов $\delta\alpha_m$ и $\delta\varphi_m$ близки друг к другу, и не выполняется обычное соотношение $\delta\alpha_m \ll \delta\varphi_m$, которое справедливо для остальных кристаллов в табл. 2. Для стильбена угол $\delta\alpha_m$ оказывается самым большим в таблице, а угол $\delta\varphi_m$ — один из самых маленьких.

Строго говоря, максимальные значения функций $K_2(\delta\varphi, \delta\alpha)$ и $\eta(\delta\varphi, \delta\alpha)$ в бензиле, стильбене и других кристаллах реализуются на разных, хотя и близких, оптимальных траекториях $\delta\varphi_{K,\eta} = f_{K,\eta}(\delta\alpha)$. На рис. 9 показаны зависимости $K_2(\delta\alpha)$ и $\eta(\delta\alpha)$ на таких траекториях в кристалле стильбена. Верхние линии отвечают выбору $\delta\varphi_{K,\eta}$ на «своей» траектории, соответствующей максимуму изображаемой характеристики, а нижние линии построены при $\delta\varphi_{\eta,K}$ с «чужой» траектории. Из двух возможных вариантов оптимизации в данном случае более выгодной представляется траектория $\delta\varphi_K$, на которой реализуется K_2^{max} . Это соответствует линиям 1 на рис. 9. Очевидно, что при таком выборе в случае стильбена мы проигрываем в эффективности только примерно 2.5%, зато выигрываем в ширине резонанса вдвое: величина $\delta\alpha_m$ оптимального угла падения, отвечающего амплитуде $K_2^{max} = 5$, возрастает от 0.08 до 0.155 рад. При этом $\delta\varphi_m = \delta\varphi_K \approx -0.16$ рад (см. табл. 2).

7.3. Основные характеристики резонанса в ряде кристаллов разных сингоний

В табл. 2 представлены результаты численных расчетов основных параметров резонанса для четырнадцати кристаллов моноклинной, тригональной, ромбической и гексагональной систем. Значения $\delta\alpha_m$, $\delta\varphi_m$ и η , приведенные в таблице, для всех кристаллов соответствуют одному и тому же уровню усиления $K_2^{max} = 5$ и отвечают такому же выбору оптимальной траектории $\delta\varphi_K$, какой был сделан

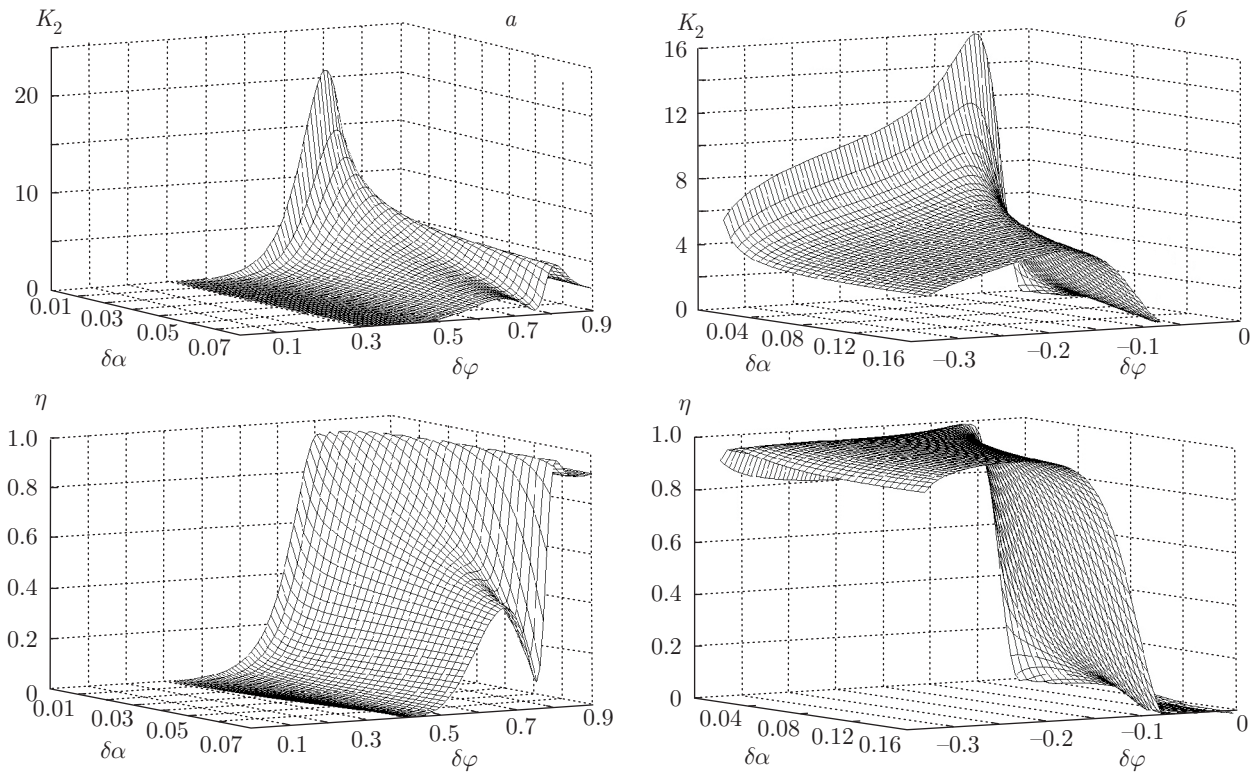


Рис. 7. Зависимости коэффициента усиления K_2 и доли энергии η в возбуждаемом пучке от угла падения $\delta\alpha$ и угла отклонения сагиттальной плоскости $\delta\varphi$ в кристаллах бензила (а) и стильбена (б)

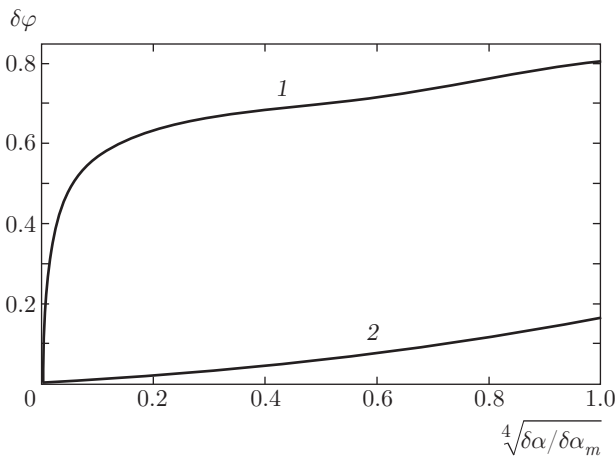


Рис. 8. Связи между экстремальными углами $\delta\varphi$ и $\delta\alpha$ на поверхностях $K_2(\delta\alpha, \delta\varphi)$ для кристаллов бензила (1) и стильбена (2)

выше для стильбена. Это обеспечивает максимальную ширину резонанса при небольшом снижении эффективности η . Кстати, по величине $\delta\alpha_m$ стильбен является абсолютным лидером в таблице, а по величине эффективности η — одним из лидеров.

В численном «кастинге» приняли участие около 350 кристаллов. Основными критериями отбора были близость резонанса к конверсии и не слишком низкие значения его ширины по углам падения ($\delta\alpha_m \geq 0.01$ рад при $K_2^{max} = 5$). Этот отбор касался не только кристаллов, но и конкретных резонансов в одном кристалле, когда их было несколько. Такие ситуации возникали из-за обсуждавшейся выше квазисимметрии при возмущениях $\pm\delta\varphi$ и для границ, параллельных разным плоскостям симметрии в ромбических кристаллах. В частности, поэтому ромбический кристалл эпоксиборпласт представлен в табл. 2 для среза поверхности xz , а на рис. 4а — для среза yz , обеспечивающего максимальную похожесть резонансов-близнецов.

В соответствии с такими критериями, все кристаллы в табл. 2 характеризуются достаточно высокими значениями параметра эффективности η . А ширина резонансов по углам падения $\delta\alpha$ удовлетворяет сформулированному правилу отбора и имеет наибольшие значения в моноклинных кристаллах стильбена, триглицинсульфата и бензила.

Отдельным важным вопросом является применимость введенной выше аппроксимации (49), да-

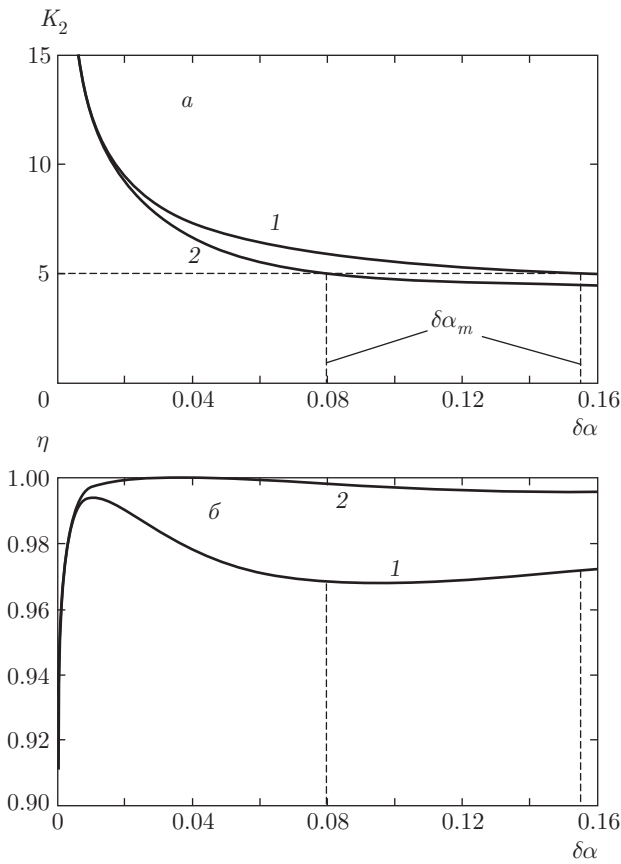


Рис. 9. Зависимости коэффициента усиления K_2 (а) и доли энергии η в возбуждаемом пучке (б) от угла падения $\delta\alpha$ в кристалле стильбена, построенные на оптимальных траекториях, отвечающих «хребтам» поверхностей $K_2(\delta\alpha, \delta\varphi)$ (линии 1) и $\eta(\delta\alpha, \delta\varphi)$ (линии 2)

ющей простую связь между амплитудой резонанса K_2^{max} и углом падения $\delta\alpha$ при оптимальной ориентации сагиттальной плоскости $\delta\varphi_K = f_K(\delta\alpha)$:

$$K_2^{max} \sqrt{\delta\alpha} = K(\delta\alpha) \approx \text{const.} \quad (53)$$

Для характеристики кристаллов в табл. 2 по этому признаку мы ввели два параметра: среднее значение функции $K(\delta\alpha)$ (53) на интервале $(0, \delta\alpha_m)$,

$$\bar{K} = \frac{1}{\delta\alpha_m} \int_0^{\delta\alpha_m} K(t) dt, \quad (54)$$

и среднее отклонение функции $K(\delta\alpha)$ от \bar{K} на том же интервале,

$$\overline{\Delta K} = \frac{1}{\delta\alpha_m} \int_0^{\delta\alpha_m} |K(t) - \bar{K}| dt. \quad (55)$$

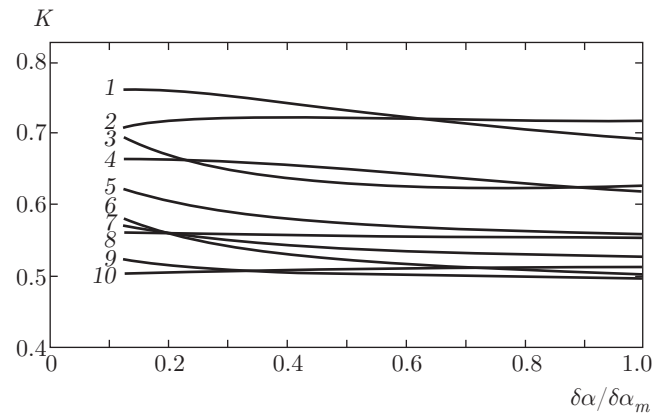


Рис. 10. Зависимости величины $K = K_2^{max} \sqrt{\delta\alpha}$ от отношения $\delta\alpha/\delta\alpha_m$ для кристаллов ортофосфата свинца (1), винной кислоты (2), NaH_4SnF_3 (3), сегнетовой соли (4), $\text{Co}[\text{C}_2\text{H}_4(\text{NH}_3)_2]_3\text{Br}_3 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ (5), CeF_3 (6), AgI (7), тиоцината пентагидрида натрия (8), Se-10\%Te (9) и $(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6)_2\text{NaI} \cdot \text{H}_2\text{O}$ (10)

Как видно из табл. 2, максимальные четыре относительных отклонения $\overline{\Delta K}/\bar{K}$ составляют 12.0, 8.4, 8.0 и 7.1%. Как можно было ожидать, рекорсменами тут оказались обсуждавшиеся в предыдущем разделе суперанизотропные кристаллы стильбен и бензил. Но даже эти наибольшие отклонения не являются устрашающими и не исключают возможность использования формулы (53) для простых приближенных оценок. А для остальных десяти кристаллов аналогичные отклонения не превышают 5%, что отражает буквальную близость характеризующих их функций $K(\delta\alpha) = K_2^{max}(\delta\alpha)\sqrt{\delta\alpha}$ на интервале $(0, \delta\alpha_m)$ к соответствующим константам (рис. 10). Следует также отметить, что для всех 14 кристаллов функции $K(\delta\alpha)$ при стремлении $\delta\alpha$ к нулю стремятся к конечным значениям, отличие которых от \bar{K} не является существенным.

Конечно, вместо приближенной формулы (49) можно пользоваться точными зависимостями $K_2^{max}(\delta\alpha)$, полученными численно. Такие зависимости показаны на рис. 11 для восьми избранных кристаллов из табл. 2. Как видно на вставке, кривые действительно неплохо спрямляются в координатах $K_2^{max} \div 1/\sqrt{\delta\alpha}$ даже для аномального стильбена. Впрочем, в последнем случае экстраполяция этой спрямленной зависимости при $\delta\alpha \rightarrow \infty$ не попадает в начало координат, а отсекает на оси ординат довольно большой отрезок $K_{2\infty}^{max} \approx 2.1$.

Любопытно проверить, как соотносится в тех же кристаллах оптимальная траектория согласован-

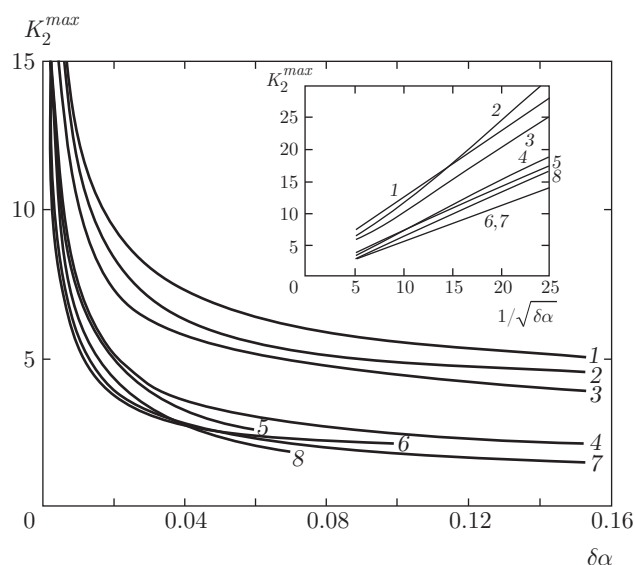


Рис. 11. Зависимости коэффициента усиления K_2^{max} от угла падения $\delta\alpha$ в кристаллах стильбена (1), триглицинсульфата (2), бензила (3), винной кислоты (4), ортофосфата свинца (5), AgI (6), тиоцината пентагидрида натрия (7) и сегнетовой соли (8). На вставке показаны те же зависимости в «спрямляющих» координатах

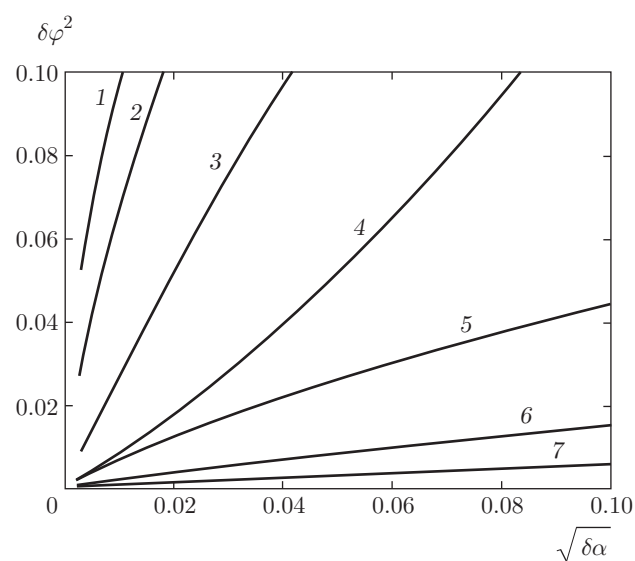


Рис. 12. Связи между углами $\delta\varphi$ и $\delta\alpha$ на оптимальных траекториях, обеспечивающих максимум коэффициента усиления K_2^{max} для кристаллов AgI (1), сегнетовой соли (2), $(C_6H_{12}O_6)_2NaI \cdot H_2O$ (3), Se-10%Te (4), $Co[C_2H_4(NH_3)_2]_3Br_3 \cdot 3H_2O$ (5), тиоцината пентагидрида натрия (6) и стильбена (7)

ного изменения углов $\delta\varphi_K = f_K(\delta\alpha)$, отвечающая экстремальному спуску по ребру хребта $K_2^{max}(\delta\alpha)$, с предсказанием $\delta\varphi_K^2 \propto \sqrt{\delta\alpha}$ приближенной теории (рис. 12). Конечно, такое предсказание относится к области достаточно малых углов. Поэтому на рис. 12 область изменения $\delta\alpha$ ограничена диапазоном $\delta\alpha < 10^{-2}$ рад, чтобы для всех кристаллов отношение $\delta\alpha/\delta\alpha_m$ нигде не превышало единицу. Как видно из рисунка, и здесь соответствие вполне удовлетворительное, хотя далеко не идеальное. Но для некоторых кристаллов (например, для того же стильбена) в рассмотренном интервале наблюдается почти идеальная пропорциональность $\delta\varphi_K^2 \propto (\delta\alpha)^{1/2}$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе строго доказано, что выбор поверхности кристалла параллельной плоскости симметрии сводит критерий сосуществования конверсии и полного внутреннего отражения акустического пучка к единственному условию на модули упругости. При этом условии вся энергия из падающего пучка перекачивается в узкий отраженный пучок высокой интенсивности. Приведены примеры 19 конкретных кристаллов моноклинной, тригональной, ромбической и гексагональной систем (см. табл. 1 и 2), где отражение волны от границы, параллельной плоскости симметрии, в несимметричной плоскости распространения при оптимальном угле падения является почти полностью конверсионным. Во всех этих кристаллах найдена геометрия отражения, при которой из падающего на поверхность потока энергии в паразитный отраженный пучок (см. рис. 1а) попадает лишь малая доля.

Аналитический анализ проблемы основан на точных выражениях для коэффициентов отражения в терминах собственных векторов матрицы Стру. Полученная система уравнений (17) задает оптимальную геометрию резонанса отражения в данном кристалле и условие на модули упругости ($\Lambda'' = 0$), обеспечивающее конверсию этого отражения.

Согласно работе [5], оптимальная траектория резонанса, связывающая согласованные изменения ориентаций плоскости отражения ($\delta\varphi$) и угла падения ($\delta\alpha$), проходит через сингулярную точку, которая отвечает плоскости распространения особой объемной волны, удовлетворяющей условию свободной границы кристалла. Для рассматриваемой в этой работе моноклинной геометрии резонанса ори-

ентация сингулярной плоскости не связана с элементами симметрии кристалла и подлежит определению. Получена новая форма (27) уравнения, задающего эту ориентацию в случае кристалла произвольной анизотропии. По сравнению с известным [6] уравнением (22), в него входит только вектор поляризации \mathbf{A}_α ООВ вместо векторов \mathbf{A}_α , \mathbf{A}_β , \mathbf{A}_γ всех трех изонормальных волн. Новым является и уравнение (28) для случая моноклинного кристалла с границей, параллельной плоскости симметрии (см. сноску 1). А выражение (31) для ромбического кристалла ранее публиковалось лишь в малодоступных трудах конференции [13].

Явные выражения (45) для коэффициентов усиления K_2 и эффективности η основаны на простых разложениях общих выражений по малым углам падения $\delta\alpha$ и поворота сагиттальной плоскости $\delta\varphi$ относительно исходной сингулярной ориентации. Они предсказывают максимум коэффициентов K_2 и η на оптимальной траектории $\delta\alpha \propto \delta\varphi^4$. На этой траектории предсказывается простая зависимость (49) $K_2^{max} = K/\sqrt{\delta\alpha}$, где K — величина, близкая к константе.

Из зависимости $\delta\alpha \propto \delta\varphi^4$ вытекает узость резонанса по углам падения, а следовательно, жесткость требований к малой дифракционной расходимости падающего пучка. Поэтому критерий отбора кристаллов, наряду с близостью к конверсии, включал требование не слишком малой ширины резонанса по углам падения $\delta\alpha$. Как показывают оценки, для наилучших кристаллов, где эта ширина порядка 10^{-1} рад, обеспечение необходимой малости дифракционной расходимости падающего пучка потребует использования высокочастотного ультразвука 10–100 МГц.

Теория предсказывает также квазисимметрию в структуре соседних пар резонансных пиков, обусловленную квадратичной зависимостью коэффициентов K_2 и η от угла $\delta\varphi$ поворота сагиттальной плоскости (45). Квазисимметрия не связана с симметрией кристалла и реализуется даже в самом общем случае триклинных кристаллов. В ее основе лежит просто исчезновение линейного по $\delta\varphi$ члена разложения одного из собственных векторов матрицы Стро из-за ее неполупростого вырождения. Поскольку другие нечетные члены по $\delta\varphi$ не выпадают, в разных кристаллах возможны как случаи высокой симметрии парных пиков (см. рис. 4), так и случаи полной их асимметрии, а также ситуации, когда один из них отсутствует (см. рис. 6).

Компьютерный анализ проблемы, основанный на точных уравнениях, позволил выйти за рамки приближенной теории и выявить особенности резонанса в конкретных 14 кристаллах разных сингоний (см. табл. 2), в том числе в условиях аномально высокой упругой анизотропии. Расчеты показали, что зависимость (49) хорошо выполняется для 10 кристаллов, где среднее отклонение K от константы не превышает 5%. Для оставшихся четырех кристаллов отклонения тоже невелики и находятся в интервале 7–12%. Таким образом, средняя величина \overline{K} (54) действительно является удобным параметром для сравнения кристаллов по величине эффекта. Что касается зависимости $\delta\alpha \propto \delta\varphi^4$ на оптимальной траектории, то, как и следовало ожидать, в разных кристаллах она выполняется в различной степени и тем лучше, чем меньше углы $\delta\alpha$ и $\delta\varphi$.

Авторы выражают искреннюю признательность профессору Йенсу Лоте за любезное предложение включить в эту статью его ранее не публиковавшийся результат — уравнение (28).

ЛИТЕРАТУРА

1. К. С. Александров, Б. П. Сорокин, С. И. Бурков, *Эффективные пьезоэлектрические кристаллы для акустоэлектроники, пьезотехники и сенсоров*, Изд-во СО РАН, Новосибирск, т. 1 (2007), т. 2 (2008).
2. D. Royer and E. Dieulesaint, *Elastic Waves in Solids*, I, II, Springer, Berlin (2000).
3. О. А. Сапожников, В. А. Хохлова, *Медицинская физика* № 11, 32 (2001).
4. А. Е. Пономарев, С. И. Булатицкий, О. А. Сапожников, *Акуст. ж.* **53**(2), 157 (2007).
5. В. И. Альшиц, Д. А. Бессонов, В. Н. Любимов, *ЖЭТФ* **143**, 1077 (2013).
6. В. И. Альшиц, Е. Лоте, *Кристаллография* **24**, 1122 (1979).
7. В. И. Альшиц, Д. А. Бессонов, В. Н. Любимов, *Кристаллография* **58**, 868 (2013).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1987).

9. Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская, *Основы кристаллофизики*, Наука, Москва (1979).
10. N. Stroh, *J. Math. Phys.* **41**, 77 (1962).
11. P. Chadwick and G. P. Smith, *Adv. Appl. Mech.* **17**, 303 (1977).
12. Ф. И. Федоров, *Теория упругих волн в кристаллах*, Наука, Москва (1965).
13. V. I. Alshits, V. N. Lyubimov, and A. L. Shuvalov, in: *Proc. Int. Symp. Surface Waves in Solids and Layered Structures*, Vol. 1, Novosibirsk (1986), p. 210.
14. В. И. Альшиц, Е. Лоте, *Кристаллография* **23**, 901 (1978).
15. Н. Н. Landolt, R. Börnstein, *Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaften und Technik. Neue Serie*, III/11, ed. by К.-Н. Hellwege, Springer, Berlin (1979).
16. В. И. Альшиц, Д. А. Бессонов, В. Н. Любимов, *Изв. РАН, сер. физ.* **78**, 1287 (2014).