

ФОРМИРОВАНИЕ КВАНТОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И СЧИТЫВАНИЕ СО СВЕРХРАЗРЕШЕНИЕМ

*Д. А. Балакин, А. В. Белинский**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 4 июня 2015 г.

Изображения, сформированные светом с подавленными фотонными флуктуациями, являются интересным объектом исследования с точки зрения повышения их предельной информационной емкости и качества изображения. Такой свет в субпуассоновском состоянии может быть приготовлен в резонаторе, заполненном средой с керровской нелинейностью, в которой происходит фазовая самомодуляция. Исследованы многомодовые в пространстве и времени световые пучки, описано получение пространственно-частотных спектров подавляемых фотонных флуктуаций. Найдены эффективные режимы работы системы. Описано конкретное схемное решение, позволяющее в наибольшей степени реализовать потенциальные возможности, заложенные в формировании сжатых состояний света в процессе фазовой самомодуляции в резонаторе с целью максимального подавления амплитудных квантовых шумов при формировании двумерных изображений. Исследована эффективность использования света с подавленными квантовыми флуктуациями при компьютерной обработке изображений. Описан алгоритм интерпретации измерений для увеличения разрешения по отношению к геометрическому. Построена математическая модель, характеризующая схему измерений, и решена задача восстановления изображений. Верифицирован алгоритм интерпретации изображений. Выявлены условия эффективности применения субпуассоновского света для формирования изображений в целях получения сверхразрешения. Оказалось, что изображение при этом должно быть малоконтрастным и максимально прозрачным.

DOI: 10.7868/S0044451016050011

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффективное приготовление субпуассоновских состояний света, характеризующихся подавленными по амплитуде квантовыми флуктуациями, является актуальной задачей современной физики не только в фундаментальном, но и в практическом аспектах (см., например, [1]). Дело в том, что фотонные флуктуации определяют предельный порог точности измерительных устройств, использующих свет в качестве носителя информации. В то же время, существует множество задач, в которых достигнут предел разрешения оптических изображений, и дальнейшее его повышение требует принципиально новых решений. Например, для оптических телескопов в целях повышения качества получаемых изображений необходимо увеличение апертуры, что яв-

ляется дорогостоящим действием и иногда сопряжено с непреодолимыми техническими сложностями. Аналогичные проблемы возникают и при создании высокоразрешающих оптических микроскопов.

Определенные перспективы в этой ситуации может дать синтез использования света с подавленными фотонными флуктуациями и методов редукции. Если существует математическая модель, которая связывает идеальное изображение и реальное, которое получено в оптическом приборе, то при использовании этой модели можно решить задачу восстановления исходного изображения, которое было бы на выходе идеального прибора. К такого рода задачам относятся, например, синтез идеального прибора с ограничением на уровень шума на его выходе, редукция измерений при наличии априорной информации [2–4], минимаксное оценивание и оценивание, связанное с минимизацией возможности потерь [5]. Однако во всех этих методах качество получаемой оценки зависит от уровня шума. А квантовые субпуассоновские состояния и да-

* E-mail: belinsky@inbox.ru

ют возможность уменьшения предельно возможного уровня фотонного шума. Поэтому актуальной задачей становится сочетание преимуществ формирования квантовых изображений с их компьютерной обработкой и выяснение условий, при которых такой синтез окажется эффективным, в частности, ответ на вопрос, какого типа изображения есть смысл подвергать такой процедуре.

В когерентных источниках света минимально возможный по уровню фотонный шум подчиняется пуассоновской статистике. Субпуассоновские состояния света характеризуются подавленными по амплитуде квантовыми флуктуациями. Существует масса способов приготовления таких состояний, но у каждого есть свои недостатки (см., например, [6, 7] и цитируемую там литературу). Проще всего получить субпуассоновский поток фотонов, испускаемый светодиодом, ток питания которого представляет собой субпуассоновский поток электронов [8], что легко реализовать в силу отталкивания их друг от друга и выстраивания в правильную цепочку. Разменивая каждый электрон на фотон, получим субпуассоновский свет. Однако плохо то, что упорядочивание фотонов происходит только во времени, а пространственной регуляризации не происходит, и малощумящие изображения таким образом получить невозможно.

Исследованию пространственно-временного поведения квантовых полей посвящена работа [9], а приготовлению трехмерного субпуассоновского квантового света — работа [10]. В них использовался параметрический процесс преобразования когерентного света или вакуума в кристалле с квадратичной нелинейностью. В [10] предлагалось направлять два пучка мощного когерентного излучения на нелинейную среду: один в качестве накачки, а другой в качестве затравочной сигнальной волны. Параметрический процесс ослабления последней приводит к уменьшению не только ее средней амплитуды, но и амплитудных флуктуаций сигнальной волны. Однако режим ослабления сигнала не является стабильным, поскольку система стремится к усилению. Видимо поэтому до сих пор исследователями не достигнута эффективная реализация этого способа, которая, помимо прочего, представляет собой довольно сложную техническую задачу.

Альтернативный способ был предложен в работах [11–13], где показано, что сравнительно несложно поставленная цель достигается с использованием нелинейного эффекта фазовой самомодуляции в прозрачной среде с кубической нелинейностью, помещенной в оптический многолучевой интерферометр.

В этих работах показана принципиальная возможность приготовления субпуассоновского света (а в работах [13–15] — и трехмерного). Рассмотрим теперь возможности формирования квантовых изображений, сформированных субпуассоновским светом.

2. МНОГОЛУЧЕВАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ В КОЛЬЦЕВОМ РЕЗОНАТОРЕ, ЗАПОЛНЕННОМ СРЕДОЙ С КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

На рис. 1 представлена схема нелинейного кольцевого интерферометра, возбуждаемого внешним излучением. Он проводит своеобразную фильтрацию фотонных шумов когерентного осветителя в определенной области спектра, как временного, так и пространственного. Физический смысл рассматриваемого явления состоит в следующем. Интенсивность поля I внутри обыкновенного линейного многолучевого интерферометра зависит от суммарного фазового набега Φ плоской гармонической волны за время полного обхода интерферометра. Характерная резонансная кривая приведена на рис. 2. Выберем рабочую точку в области экстремальной производной. Теперь предположим, что Φ зависит от I , т. е. в интерферометре имеется нелинейная среда, в которой реализуется фазовая самомодуляция. Выберем знак нелинейности таким, чтобы увеличение интенсивности вызывало удаление от резонанса, а уменьшение — приближение к нему. Ясно, что такая отрицательная обратная связь стабилизирует

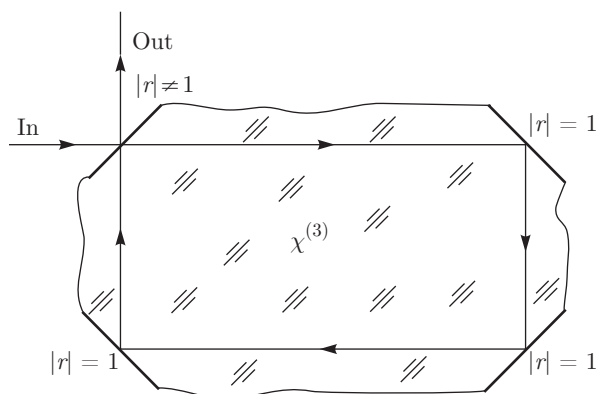


Рис. 1. Схема кольцевого интерферометра, заполненного средой с кубической керровской нелинейностью. Входное зеркало — частично пропускающее, остальные — глухие с единичным коэффициентом отражения

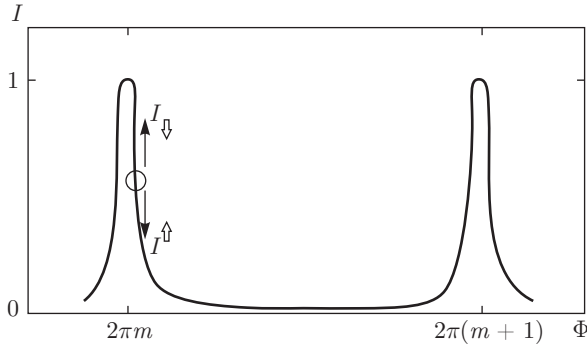


Рис. 2. Резонансная кривая многолучевого интерферометра. Рабочую точку можно выбрать так, что увеличение интенсивности I при наличии керровской нелинейности будет сопровождаться удалением от резонанса, а уменьшение I — приближением к нему

ет интенсивность. Посмотрим, как это реализуется в действительности.

3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Электрическое поле в интерферометре будем описывать волновым уравнением для напряженности электрического поля $e(\mathbf{r}, t)$:

$$\nabla^2 e(\mathbf{r}, t) - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 e(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где n — показатель преломления, который в нелинейной среде с фазовой самомодуляцией зависит от напряженности поля, c — скорость света в вакууме.

Представим $e(\mathbf{r}, t)$ в виде

$$e(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t) \exp(-i(\omega t - kz)), \tag{2}$$

где $E(\mathbf{r}, t)$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда, ω — круговая частота излучения, которое предполагается монохроматическим, t — время, $k = n\omega/c$ — волновое число. В квазимонохроматическом приближении медленно меняющихся (по сравнению со световой частотой) процессов и для квазиплоской волны, распространяющейся в направлении оси z ,

$$\frac{\partial^2 e(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} \approx \left[2ik \frac{\partial E(\mathbf{r}, t)}{\partial z} - k^2 E(\mathbf{r}, t) \right] \times \exp(-i(\omega t - kz)). \tag{3}$$

Итак,

$$-\frac{i}{2k} \Delta_{\perp} E(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial E(\mathbf{r}, t)}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial E(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \tag{4}$$

где $v = c/n$ — фазовая скорость света в среде, а $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — поперечный лапласиан. Если бы не зависимость n от интенсивности света, это уравнение было бы линейным уравнением параболического типа.

Пусть на длине полного обхода высокодобротного интерферометра l (базе интерферометра) электрическое поле изменяется незначительно, тогда дифференциалы можно заменить конечными приращениями:

$$\frac{\partial E}{\partial z} \approx \frac{\Delta E}{\Delta z} \approx \frac{\Delta E}{l}, \tag{5}$$

а

$$\Delta E(\mathbf{r}, t) \approx \left[\frac{i}{2k} \Delta_{\perp} E(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v} \frac{\partial E(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \times \times l - \alpha E(\mathbf{r}, t) + i\varphi E(\mathbf{r}, t) + \sqrt{2\alpha} E_{in}(\mathbf{r}, t). \tag{6}$$

Здесь индекс “in” соответствует внешнему облучению интерферометра на входе, $\alpha = 1 - r \ll 1$ — коэффициент потерь, r — амплитудный коэффициент отражения частично пропускающего входного зеркала, коэффициент потерь α связан с добротностью интерферометра Q как

$$2\alpha = \frac{\omega T}{Q}, \tag{7}$$

где $T = l/v$ — время полного обхода интерферометра. Фазовая расстройка интерферометра

$$\varphi = (\varphi_l + \varphi_{nl}) \ll 1 \tag{8}$$

определяется дополнительным фазовым набегом света при полном обходе интерферометра по отношению к условию резонанса, когда полный фазовый набег кратен 2π . Эта фазовая расстройка складывается из линейной и нелинейной частей.

Отметим, что малое изменение поля за один проход в высокодобротном интерферометре предполагает малые потери и высокий коэффициент отражения выходного зеркала $r^2 \approx 1$, так что амплитудный коэффициент пропускания

$$\tau = \sqrt{1 - r^2} = \sqrt{(1 - r)(1 + r)} \approx \sqrt{2\alpha}. \tag{9}$$

Он стоит и перед комплексной амплитудой внешнего входного поля E_{in} , так что произведение $\sqrt{2\alpha} E_{in}$ представляет собой небольшую часть поля, прошедшего извне в интерферометр.

Будем интересоваться установившимся режимом работы — квазистационарным случаем, когда масштабы изменения поля во времени существенно

больше времени полного обхода интерферометра T . При этом $\Delta E(\mathbf{r}, t) \approx 0$ и окончательно получим

$$\frac{1}{v} \frac{\partial E(\mathbf{r}_\perp, t)}{\partial t} - \frac{i}{2k} \Delta_\perp E(\mathbf{r}_\perp, t) + \frac{1}{l} \left[(\alpha - i\varphi) E(\mathbf{r}_\perp, t) - \sqrt{2\alpha} E_{in}(\mathbf{r}_\perp, t) \right] = 0, \quad (10)$$

где $E(\mathbf{r}_\perp, t)$ — комплексная амплитуда электрического поля, медленно меняющаяся в пространстве и во времени, $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ — двумерный вектор поперечных координат, перпендикулярный оптической оси пучка и интерферометра z (в случае кольцевого интерферометра представляющей собой замкнутую линию, например, на рис. 1 — прямоугольник).

Без учета дисперсии скорость $v = c/n$ можно считать постоянной, поскольку в установившемся режиме нелинейные изменения показателя преломления n за счет флуктуационных изменений интенсивности светового поля существенно меньше среднего значения n .

Нелинейный набег фазы, как известно (см., например, [16, с. 71]), определяется как

$$\varphi_{nl} = \chi l |E|^2, \quad (11)$$

где χ — коэффициент, пропорциональный кубичной нелинейности среды $\chi^{(3)}$. В обычных для фазовой самомодуляции обозначениях

$$\chi^{(3)} = \frac{k\varepsilon_2}{2\varepsilon_0}, \quad (12)$$

где ε_0 — обычная линейная диэлектрическая проницаемость среды в слабом поле, а ε_2 — коэффициент нелинейности.

Предположим, что интерферометр освещается интенсивной когерентной плоской волной с круговой частотой несущей ω и распространяющейся в направлении оси z . Здесь и далее мы используем приближение плоских безграничных зеркал, которое позволяет получить наглядные аналитические результаты.

Представим E_{in} в виде регулярной и флуктуационной составляющих:

$$E_{in}(\mathbf{r}_\perp, t) = \langle E_{in}(\mathbf{r}_\perp, t) \rangle + \Delta E_{in}(\mathbf{r}_\perp, t). \quad (13)$$

Здесь интересно, несколько забегая вперед, отметить следующий факт. В дальнейшем мы перейдем к квантовому описанию, и входное поле при этом будем считать находящимся в когерентном состоянии. Хорошо известно, что амплитуда вакуумной моды отличается от амплитуды когерентной моды на величину средней комплексной амплитуды последней.

В силу этого свойства любое когерентное состояние $|z\rangle$ можно представить как результат действия оператора смещения $\hat{D}(z)$ на вакуум: $|z\rangle = \hat{D}(z)|0\rangle$, а оператор смещения изменяет лишь среднюю амплитуду поля. Итак, флуктуационной составляющей когерентного поля $\Delta E_{in}(\mathbf{r}, t)$ в дальнейшем мы припишем свойства вакуумных флуктуаций. Это не относится к флуктуационной составляющей внутреннего поля:

$$\Delta E(\mathbf{r}_\perp, t) = E(\mathbf{r}_\perp, t) - \langle E(\mathbf{r}_\perp, t) \rangle, \quad (14)$$

вычисление свойств которой и является целью рассматриваемой задачи.

Интенсивность флуктуаций полагаем незначительной по сравнению с интенсивностью регулярной составляющей. При этом, пренебрегая флуктуациями для невозмущенного поля, в стационарном случае имеем

$$\sqrt{2\alpha} \langle E_{in} \rangle = [\alpha - i(\varphi_l + \chi l |\langle E \rangle|^2)] \langle E \rangle, \quad (15)$$

откуда следует связь между регулярными составляющими внешнего и внутреннего полей. Так, для средних интенсивностей $\bar{I} = |\langle E \rangle|^2$ и $\bar{I}_{in} = |\langle E_{in} \rangle|^2$ имеем

$$2\alpha \bar{I}_{in} = [\alpha^2 + (\varphi_l + \chi l \bar{I})^2] \bar{I}. \quad (16)$$

Как указывалось выше, есть простые качественные соображения, которые проясняют рассматриваемый нами эффект подавления флуктуаций $\Delta E_{in}(\mathbf{r}_\perp, t)$. Амплитуда поля в интерферометре зависит от фазовой расстройки φ , которая, в свою очередь, сама зависит от интенсивности. Возможен такой нерезонансный режим, когда увеличение интенсивности как внутреннего, так и внешнего поля приводит за счет нелинейной фазы φ_{nl} к еще большему удалению от резонанса, при этом интенсивность поля в интерферометре практически не увеличивается. И наоборот, флуктуационное уменьшение интенсивности сдвигает фазу в сторону приближения к резонансу, а интенсивность внутри интерферометра опять же остается практически неизменной. Убедимся в этом формально.

Подставим разложение на среднюю и флуктуационную составляющие (13) и (14) в уравнение (10) и проведем линеаризацию по флуктуациям. Получим

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{2k} \Delta_\perp \right) \Delta E(\mathbf{r}_\perp, t) - i\chi \left[\langle E \rangle^2 \Delta E^*(\mathbf{r}_\perp, t) + 2|\langle E \rangle|^2 \Delta E(\mathbf{r}_\perp, t) \right] + \frac{1}{l} \left[(\alpha - i\varphi_l) \Delta E(\mathbf{r}_\perp, t) - \sqrt{2\alpha} \Delta E_{in}(\mathbf{r}_\perp, t) \right] = 0. \quad (17)$$

Поскольку уравнение (17) линейно по флуктуациям, комплексные амплитуды можно заменить соответствующими операторами в представлении Гейзенберга:

$$\begin{aligned} \Delta E(\mathbf{r}_\perp, t) &\rightarrow \Delta E^{(+)}(\mathbf{r}_\perp, t), \\ \Delta E^*(\mathbf{r}_\perp, t) &\rightarrow \Delta E^{(-)}(\mathbf{r}_\perp, t). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\Delta E^{(+)}(\mathbf{r}_\perp, t)$ — положительно-частотный оператор электрического поля, а $\Delta E^{(-)}(\mathbf{r}_\perp, t)$ — отрицательно-частотный. Их спектральное разложение по плоским модам имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_\perp, t) &= \mathfrak{N} \int_{-\omega}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a}(\mathbf{k}_\perp, \Omega) \times \\ &\times \exp\{-i(\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + \Omega t)\} d^2 k_\perp d\Omega, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_\perp, t) &= \mathfrak{N} \int_{-\omega}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_\perp, \Omega) \times \\ &\times \exp\{i(\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + \Omega t)\} d^2 k_\perp d\Omega, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\hat{a}(\mathbf{k}_\perp, \Omega)$ и $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_\perp, \Omega)$ — соответственно операторы уничтожения и рождения фотона плоской моды, определяемой поперечной составляющей волнового вектора \mathbf{k}_\perp — новой переменной преобразования Фурье — и частотной отстройкой Ω от несущей

ω , поскольку флуктуации немонахроматичны. Нормировочный коэффициент \mathfrak{N} , строго говоря, слабо зависит от Ω , но мы этим пренебрегаем.

Коммутационные соотношения для операторов уничтожения и рождения фотона в случае непрерывных по \mathbf{k}_\perp и Ω разложений (19), (20) имеют вид

$$[\hat{a}(\mathbf{k}_\perp, \Omega), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}'_\perp, \Omega')] = \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, \Omega - \Omega'), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\mathbf{k}_\perp, \Omega), \hat{a}(\mathbf{k}'_\perp, \Omega')] &= \\ &= [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_\perp, \Omega), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}'_\perp, \Omega')] = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\delta(\cdot, \cdot)$ — трехмерная δ -функция Дирака. Соотношение (22) показывает, что разные моды с несовпадающими \mathbf{k}_\perp и (или) Ω , будучи независимыми степенями свободы поля, коммутируют.

Подстановка разложений (19), (20) в (17) с учетом замены (18) даст систему двух линейных уравнений, которую удобно представить в матричном виде

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} \hat{a}(\mathbf{k}_\perp, \Omega) \\ \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}_\perp, -\Omega) \end{pmatrix} &= \\ &= \sqrt{2\alpha} \begin{pmatrix} \hat{a}_{in}(\mathbf{k}_\perp, \Omega) \\ \hat{a}^\dagger_{in}(-\mathbf{k}_\perp, -\Omega) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (23)$$

где матрица

$$M = \begin{pmatrix} -i\Omega T + \frac{ik_\perp^2 l}{2k} - i(\varphi + \varphi_{nl}) + \alpha & -i\varphi_{nl} e^{-2i\theta} \\ i\varphi_{nl} e^{2i\theta} & -i\Omega T - \frac{ik_\perp^2 l}{2k} + i(\varphi + \varphi_{nl}) + \alpha \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Здесь T , как и ранее, — время однократного полного обхода интерферометра, $k_\perp = |\mathbf{k}_\perp|$ — длина вектора \mathbf{k}_\perp , а θ — фаза регулярной составляющей:

$$\langle \hat{E}^{(+)} \rangle = |\langle \hat{E}^{(+)} \rangle| e^{-i\theta}, \quad (25)$$

которую без ограничения общности рассмотрения можно положить равной нулю, поскольку это свободный параметр, зависящий от фазы внешнего поля.

Прежде чем записать решение системы (23), перейдем к полю на выходе интерферометра:

$$\hat{E}_{out}^{(+)}(\mathbf{r}_\perp, t) = \sqrt{2\alpha} \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_\perp, t) - \hat{E}_{in}^{(+)}(\mathbf{r}_\perp, t), \quad (26)$$

которое состоит из выходящего из интерферометра излучения (первое слагаемое) и отраженного от выходного зеркала падающего излучения (“in”) с практически единичным коэффициентом отражения и

фазовым набегом π , изменяющим знак $\hat{E}_{in}^{(+)}$. Для регулярной и флуктуационной составляющих выходного поля соотношения аналогичны (26) в силу его линейности.

Обратим внимание на следующую тонкость. При отражении от плоского зеркала декартова система координат, образующая правую тройку, превращается в левую. В этом легко убедиться, построив изображение трех ортогональных ортов в плоском зеркале. Поэтому, для того чтобы за один обход интерферометра совершался полный цикл и поперечное распределение поля в установившемся режиме переходило само в себя, зеркал в кольцевом интерферометре должно быть четное число, иначе после однократного полного обхода интерферометра электрическое поле, описываемое правой тройкой, будет описываться левой и цикл придется удваивать. По

этой причине на рис. 1 четыре отражающие поверхности, а, например, не три. Кроме того, координатные орты отраженного от выходного зеркала излучения $-\hat{E}_{in}^{(+)}(\mathbf{r}_\perp, t)$ должны совпадать с ортами выходящего излучения $\sqrt{2\alpha}\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_\perp, t)$, что и выполняется в схеме на рис. 1: в обоих случаях они образуют левую тройку. Здесь, конечно, речь не идет о том, что векторное электромагнитное поле при отражении от плоских зеркал меняет свою структуру, а просто о самовоспроизведении полей в резонаторе в установившемся режиме.

Итак, решение системы уравнений (23) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{a}_{out}(\mathbf{k}_\perp, \Omega) &= \mu(\mathbf{k}_\perp, \Omega)\hat{a}_{in}(\mathbf{k}_\perp, \Omega) + \\ &+ \nu(\mathbf{k}_\perp, \Omega)\hat{a}_{in}^\dagger(-\mathbf{k}_\perp, -\Omega), \\ \hat{a}_{out}^\dagger(\mathbf{k}_\perp, \Omega) &= \mu^*(\mathbf{k}_\perp, \Omega)\hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k}_\perp, \Omega) + \\ &+ \nu^*(\mathbf{k}_\perp, \Omega)\hat{a}_{in}(-\mathbf{k}_\perp, -\Omega), \end{aligned} \quad (27)$$

где $\mu(\mathbf{k}_\perp, \Omega)$ и $\nu(\mathbf{k}_\perp, \Omega)$ — комплекснозначные функции,

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{k}_\perp, \Omega) &= \frac{2\alpha}{K} \times \\ &\times \left(-i\Omega T - \frac{ik_\perp^2}{2k} + i(\varphi + \varphi_{nl}) + \alpha \right) - 1, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\nu(\mathbf{k}_\perp, \Omega) = \frac{2\alpha i\varphi_{nl}e^{-2i\theta}}{K}, \quad (29)$$

$$K = (\alpha - i\Omega T)^2 + \left(\frac{lk_\perp^2}{2k} - (\varphi + \varphi_{nl}) \right)^2 - \varphi_{nl}^2.$$

Для проверки правильности полученных результатов мы посчитали коммутатор $[\hat{a}_{out}, \hat{a}_{out}^\dagger]$, который, как и должно быть, оказался равным единичному оператору.

4. ПЯТИМОДОВЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СТРУКТУРЫ

Рассмотрим спектральный состав исследуемых пучков. Регулярная составляющая представляет собой когерентную моду, описываемую оператором $\hat{a}_0 = \hat{a}(0, 0)$. Флуктуационная составляющая дает, согласно (23), (27), еще четыре взаимодействующие моды: $\hat{a}(\mathbf{k}_\perp, \Omega)$, $\hat{a}(\mathbf{k}_\perp, -\Omega)$, $\hat{a}(-\mathbf{k}_\perp, \Omega)$, $\hat{a}(-\mathbf{k}_\perp, -\Omega)$. В пространстве они образуют полосатую в поперечном направлении структуру (см., например, [17]). Реально выделить эти пять мод можно с помощью системы линз и спектрометра (по частоте биений с регулярной модой), см. рис. 3.

Упомянутые выше четыре флуктуационные моды составляют простейшую элементарную структуру, которую можно проанализировать с помощью

уравнений (23). Более сложные поля можно представить в виде линейной суперпозиции таких элементарных структур.

Запишем суммарный оператор элементарной спектральной структуры из этих пяти мод:

$$\begin{aligned} \hat{A}(\mathbf{k}_\perp, \Omega) &= \\ &= e^{-i\omega t} [\hat{a}_0 + \hat{a}(\mathbf{k}_\perp, \Omega) \exp\{-i(\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + \Omega t)\} + \\ &+ \hat{a}(\mathbf{k}_\perp, -\Omega) \exp\{-i(\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp - \Omega t)\} + \hat{a}(-\mathbf{k}_\perp, \Omega) \times \\ &\times \exp\{-i(-\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + \Omega t)\} + \hat{a}(-\mathbf{k}_\perp, -\Omega) \times \\ &\times \exp\{-i(-\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp - \Omega t)\}]. \end{aligned} \quad (30)$$

Найдем дисперсию флуктуаций оператора числа фотонов:

$$\langle \Delta(\hat{A}^\dagger \hat{A})^2(\mathbf{k}_\perp, \Omega) \rangle = \langle (\hat{A}^\dagger \hat{A})^2(\mathbf{k}_\perp, \Omega) \rangle.$$

Поскольку $\langle \hat{A}^\dagger \hat{A}(\mathbf{k}_\perp, \Omega) \rangle = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \langle (\hat{A}^\dagger \hat{A})^2 \rangle &= \\ &= 2 \left\{ \langle \hat{a}_0^\dagger \rangle^2 \exp(2i\theta_{out}) [\mu(\mathbf{k}_\perp, \Omega)\nu(\mathbf{k}_\perp, -\Omega) + \mu(\mathbf{k}_\perp, -\Omega)\nu(\mathbf{k}_\perp, \Omega)] + \langle \hat{a}_0 \rangle^2 \exp(-2i\theta_{out}) \times \right. \\ &\times [\mu^*(\mathbf{k}_\perp, \Omega)\nu^*(\mathbf{k}_\perp, -\Omega) + \mu^*(\mathbf{k}_\perp, -\Omega)\nu^*(\mathbf{k}_\perp, \Omega)] + \\ &+ \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle [|\mu(\mathbf{k}_\perp, \Omega)|^2 + |\mu(\mathbf{k}_\perp, -\Omega)|^2] + \\ &\left. + \langle \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \rangle [|\nu(\mathbf{k}_\perp, \Omega)|^2 + |\nu(\mathbf{k}_\perp, -\Omega)|^2] \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь θ_{out} — постоянная фаза регулярной составляющей выходящего из интерферометра излучения.

Введем фактор Фано, количественно определяющий эффективность подавления фотонных флуктуаций по отношению к когерентному свету:

$$F = \frac{\langle (\hat{A}^\dagger \hat{A})^2 \rangle}{\langle (\hat{A}^\dagger \hat{A})_0^2 \rangle}, \quad (32)$$

где $\langle (\hat{A}^\dagger \hat{A})_0^2 \rangle = 4\eta \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle$, а η — квантовая эффективность фотодетектора.

Для учета неидеальности фотодетекторов (в смысле $\eta \neq 1$) оказывается полезной модель [18], основанная на том, что механизм квантовых потерь в линейном светоделителе (за счет расщепления пучка) и в неидеальном фотодетекторе одинаков (см. рис. 4).

Для данной схемы оператор уничтожения детектируемого сигнала имеет вид

$$\hat{a}_d = \eta^{1/2} \hat{a}_s + (1 - \eta)^{1/2} \hat{a}_{vac}, \quad (33)$$

где \hat{a}_{vac} — оператор уничтожения вакуумной моды, входящей в светоделитель сверху.

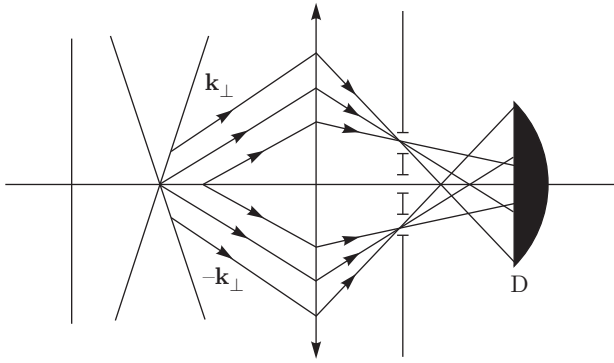


Рис. 3. Схема разложения светового пучка света по пяти модам и их детектирования: в фокальной плоскости линзы установлена диафрагма, выделяющая три пространственно-частотные составляющие с $(\mathbf{k}_\perp)_0 = 0$, \mathbf{k}_\perp и $-\mathbf{k}_\perp$. Эти пучки регистрируются фотодетектором D. В случае осевой симметрии диафрагма может быть кольцевой с отверстием в середине

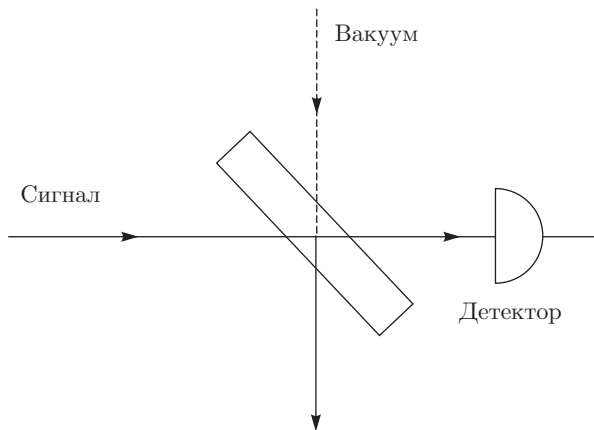


Рис. 4. Перед фотодетектором, который предполагается идеальным, располагается фиктивный светоделитель, помогающий учесть потери при детектировании вследствие неединичной квантовой эффективности η

В результате получается следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 F = & 1 - \eta + \frac{\eta}{2} \{ \exp(2i\theta_{out}) [\mu(\mathbf{k}_\perp, \Omega)\nu(\mathbf{k}_\perp, -\Omega) + \\
 & + \mu(\mathbf{k}_\perp, -\Omega)\nu(\mathbf{k}_\perp, \Omega)] + \exp(-2i\theta_{out}) \times \\
 & \times [\mu^*(\mathbf{k}_\perp, \Omega)\nu^*(\mathbf{k}_\perp, -\Omega) + \mu^*(\mathbf{k}_\perp, -\Omega)\nu^*(\mathbf{k}_\perp, \Omega)] + \\
 & + (|\mu(\mathbf{k}_\perp, \Omega)|^2 + |\mu(\mathbf{k}_\perp, -\Omega)|^2) + \\
 & + (|\nu(\mathbf{k}_\perp, \Omega)|^2 + |\nu(\mathbf{k}_\perp, -\Omega)|^2) \}. \quad (34)
 \end{aligned}$$

Отметим, что формула (34) не изменится и для более простого случая элементарной структуры из

трех мод: одной регулярной и двух флуктуационных: $\hat{a}(\mathbf{k}_\perp, \Omega)$ и $\hat{a}(-\mathbf{k}_\perp, -\Omega)$, благодаря четности $\mu(\mathbf{k}_\perp, \Omega)$ и $\nu(\mathbf{k}_\perp, \Omega)$ по \mathbf{k}_\perp .

5. ПРИГОТОВЛЕНИЕ МНОГОМОДОВОГО СУБПУАССОНОВСКОГО СВЕТА

С помощью полученных соотношений рассмотрены два режима работы нелинейного интерферометра. В первом стабилизировалось внутреннее поле интерферометра $E(\mathbf{k}_\perp, \Omega)$ в предположении, что построение и обработка малошумящих изображений происходит именно внутри. Конечно, в определенном смысле это получается «вещь в себе», но и она, как представляется, может найти применение, если освещаемый объект находится внутри резонатора. Во втором режиме с помощью соотношения (26) мы переходили к внешнему сигналу $E_{out}(\mathbf{k}_\perp, \Omega)$ и тоже проводили оптимизацию. Для простоты квантовую эффективность η считали равной единице. В обоих случаях оптимизацию режимов работы интерферометра осуществляли с точки зрения получения минимально возможных значений фактора Фано (34). Варьируемыми параметрами были линейный (φ_l) и нелинейный (φ_{nl}) набег фазы. Результаты отражены на рис. 5, 6.

При рассмотрении поля внутри интерферометра вместо формул (28) и (29) должны использоваться следующие соотношения:

$$\mu'(\mathbf{k}_\perp, \Omega) = \frac{A_2}{\sqrt{A_1 A_2 - B_1 B_2}},$$

$$\nu'(\mathbf{k}_\perp, \Omega) = \frac{-B_1}{\sqrt{A_1 A_2 - B_1 B_2}},$$

где

$$A_1 = -i\Omega T + \frac{ik_\perp^2}{2k} - i(\varphi + \varphi_{nl}) + \alpha,$$

$$A_2 = -i\Omega T - \frac{ik_\perp^2}{2k} + i(\varphi + \varphi_{nl}) + \alpha,$$

$$B_1 = -i\varphi_{nl}e^{-2i\theta}, \quad B_2 = i\varphi_{nl}e^{2i\theta}.$$

Поскольку условия квантования поля внутри интерферометра отличаются от таковых вне его, приходилось выполнять перенормировку операторов \hat{a} и \hat{a}^\dagger , чтобы выполнялось коммутационное соотношение $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I}$, где \hat{I} — единичный оператор. Достаточным условием для этого является выполнение равенства $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$.

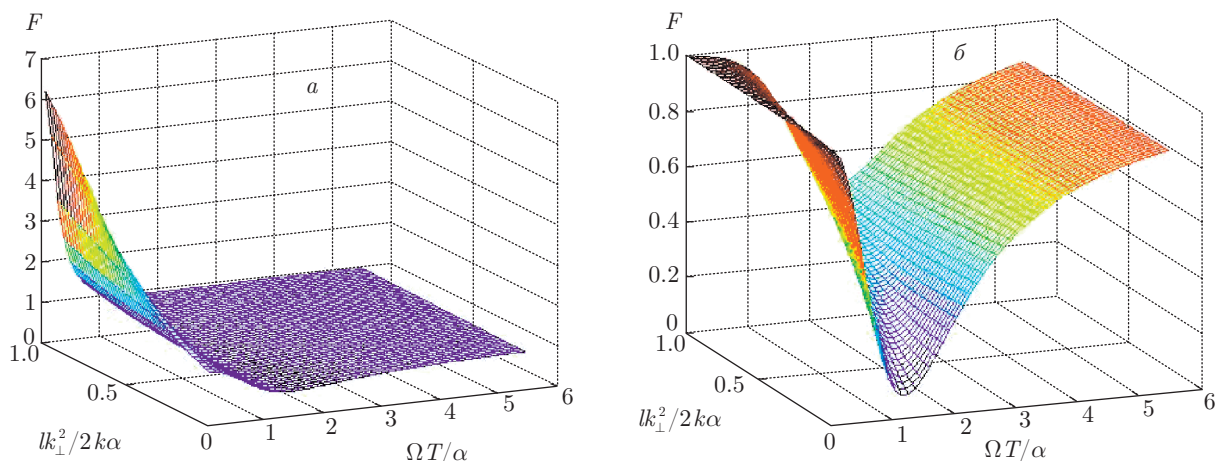


Рис. 5. (В цвете онлайн) Графики значений фактора Фано F при оптимизации внутреннего поля интерферометра при фиксированной регулярной фазе: минимальное значение $F = 0.6057$ достигается при $\varphi_l/\alpha = -0.6$, $\varphi_{nl}/\alpha = 0.8$ для самофокусирующей нелинейности $\chi > 0$ (а), минимальное значение $F = 0.0833$ достигается при $\varphi_l/\alpha = 0.9$, $\varphi_{nl}/\alpha = -1.0$ для самодефокусирующей нелинейности $\chi < 0$ (б)

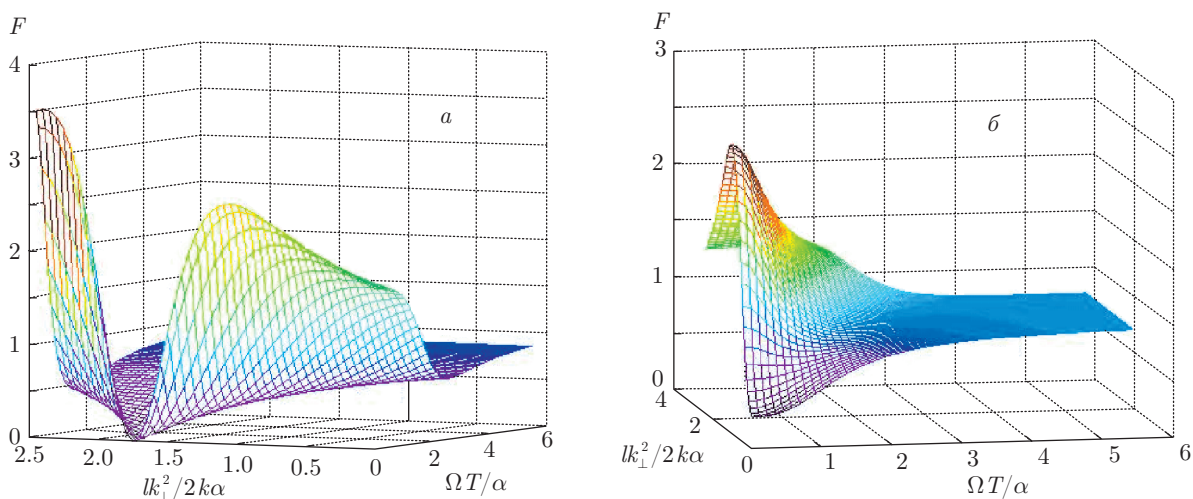


Рис. 6. (В цвете онлайн) Графики значений фактора Фано F в случае оптимизации внешнего поля интерферометра при фиксированной регулярной фазе: минимальное значение $F = 0.0144$ достигается при $\varphi_l/\alpha = 0.2$, $\varphi_{nl}/\alpha = 0.8$, $\theta_{out} = 0.75$ для самофокусирующей нелинейности $\chi > 0$ (а), минимальное $F = 0.2774$ достигается при $\varphi_l/\alpha = 1.4$, $\varphi_{nl}/\alpha = -0.4$, $\theta_{out} = 5.00$ для самодефокусирующей нелинейности $\chi < 0$ (б)

Как известно, нелинейный интерферометр с керровской нелинейностью представляет собой бистабильную и даже мультистабильную систему, в которой имеются участки неустойчивости (см., например, [6, 19]). Попадание в эти неустойчивые гистерезисные режимы никакой стабилизации не даст. Поэтому прежде вынесения резюме об эффективной стабилизации фотонных флуктуаций необходима проверка найденных оптимальных режимов на устойчивость. Это можно сделать, рассчитав функцию \bar{I} от \bar{I}_{in} согласно (16), или, что эквивалентно при соответствующей перенормировке, φ_{nl}/α от

\bar{I}_{in} . Последняя зависимость удобнее в чисто практическом смысле. Результаты проверки показали, что мы попали в устойчивые режимы.

Отметим также, что использованное нами при выводе основных соотношений условие (8) в наших оптимальных вариантах выполняется, поскольку коэффициент потерь $\alpha \ll 1$.

Проанализируем полученные результаты. В предельном случае линейного интерферометра, когда фазовая самомодуляция отсутствует, $\nu = 0$, а $|\mu| = 1$, как и следовало ожидать, получаем единичный фактор Фано, что соответствует дробовому шуму

обычного когерентного источника с пуассоновской статистикой фотонов и фотоотчетов.

Далее, возвращаясь к нелинейному режиму, отметим, что при увеличении Ω , т. е. при входе в высокочастотную область, эффективность подавления квантового шума ухудшается и фактор Фано асимптотически стремится к единице. Это тоже ожидаемый результат. Дело в том, что многолучевой интерферометр представляет собой динамическую систему с постоянной времени порядка T/α . Это среднее время удержания фотона интерферометром. На быстрые шумовые осцилляции входного поля интерферометр не успевает среагировать, так как для стабилизации требуется многократное обхождение излучением интерферометра. Этим и объясняется асимптотическое стремление к единице фактора Фано при увеличении $\Omega \gg \alpha/T$.

Во всех четырех оптимальных вариантах получены субпуассоновские состояния, однако с разной эффективностью подавления фотонных шумов. Наиболее перспективным в практическом смысле формирования квантовых изображений представляется случай стабилизации внешнего поля при самофокусирующей нелинейности (рис. 6а). В области $lk_{\perp}^2/2k\alpha \approx 1.75$ и при низких частотах отстройки Ω депрессия квантовых флуктуаций интенсивности в этом случае достигает одного порядка.

6. ФОРМИРОВАНИЕ КВАНТОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Полученные нами в предыдущем разделе пространственно-частотные спектры хотя и демонстрируют субпуассоновскую статистику фотонов, но мало пригодны для формирования малошумящих в квантовом смысле изображений. Дело в том, что любое изображение имеет конечную ширину спектра по k_{\perp} , а субпуассоновость в наших спектрах достигается лишь в некоторых точках, и интегрального по всему диапазону пространственных частот выигрыша в подавлении квантовых шумов практически не будет. Выровнять спектр по k_{\perp} в необходимом для получения качественного изображения интервале, целиком находящемся ниже уровня фотонного шума когерентного состояния, можно, изменив фазу регулярной составляющей излучения. С этой целью следует скорректировать направление вектора средней амплитуды на комплексной плоскости для каждого конкретного k_{\perp} так, чтобы область неопределенности была вытянута перпендикулярно этому вектору (рис. 7б). Для этого можно смешать сфор-

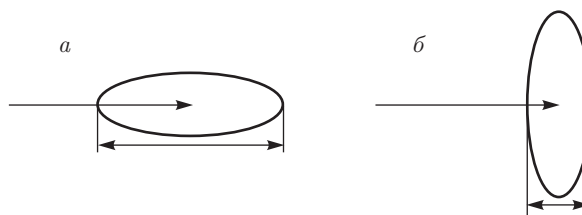


Рис. 7. Состояния, в которых область неопределенности расположена: вдоль вектора средней амплитуды, когда подавлены фазовые флуктуации по сравнению с когерентным состоянием (а), перпендикулярно вектору средней амплитуды, когда подавлены амплитудные флуктуации по сравнению с когерентным состоянием (б)

мированный в интерферометре световой поток с излучением мощного когерентного гомодина так, как это, например, предложено в работе [8], см. также [7, с. 131]. Правда, там речь шла об одной моде, а нам нужно скорректировать многомодовый свет.

Рассмотрим схему на рис. 8. В ней квазимонохроматические периодические импульсы, поступающие из лазера 1, попадают на светоделитель 2 с малым коэффициентом отражения ($\sim 1\%$). Первая часть пучка, проходящая через светоделитель, направляется на линзу 3, которая фокусирует падающее излучение таким образом, что его перетяжка попадает в центр точечной диафрагмы 4, используемой в данной схеме с целью получения сферической пространственно-когерентной волны. Далее свет коллимируется линзой 5. Затем параллельный пучок света проходит сквозь амплитудную картинку 6 и прозрачный фазовый элемент 7, который формирует фазовую задержку гомодина. С помощью линзы 8 строится изображение объекта 6 в плоскости матрицы датчиков измерительного прибора 12. Вторая часть пучка, отраженная от светоделителя 2, поступает в кольцевой интерферометр, внутри которого заключена среда с кубичной нелинейностью. Выходящее из интерферометра излучение проходит через линзу, формирующую его пространственный фурье-образ в плоскости матрицы датчиков измерительного прибора 12. При этом после светоделителя 11 происходит гомодинное смешение разделенных ранее пучков. Тем самым достигается необходимая корректировка направления вектора средней амплитуды на комплексной плоскости для каждой конкретной поперечной составляющей волнового вектора в выходящем излучении интерферометра.

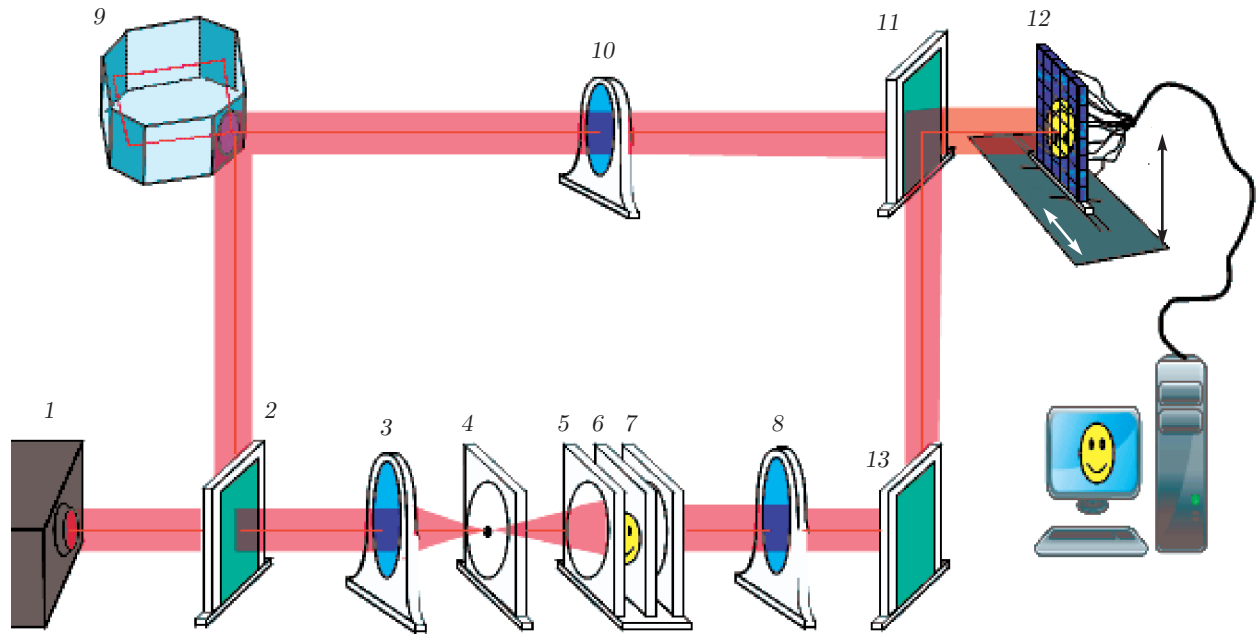


Рис. 8. Схемное решение, позволяющее реализовать возможность подавления амплитудных флуктуаций квантового изображения: 1 — лазер, генерирующий квазимонохроматические импульсы с постоянной частотой Ω ; 2 — светоделитель с малым ($\sim 1\%$) коэффициентом отражения; 3 — линза, фокусирующая пучок так, чтобы перетяжка попадала в центр точечной диафрагмы 4; 5 — коллимирующая линза; 6 — амплитудная картинка; 7 — прозрачный фазовый элемент, формирующий фазовую задержку гомодина, необходимую для оптимального подавления квантовых флуктуаций; 8 — линза, строящая изображение объекта 6 в выходной плоскости 12; 9 — кольцевой интерферометр, внутри которого заключена среда с кубичной нелинейностью; 10 — линза, в переднем фокусе которой зеркало интерферометра, в заднем — входная плоскость 12, линза 10 формирует пространственный фурье-образ излучения, выходящего из интерферометра, в плоскости 12; 11 — светоделитель с малым ($\sim 1\%$) коэффициентом отражения. Сформированное изображение с подавленными амплитудными флуктуациями сканируется измерительным устройством 12, представляющим собой матрицу фотодетекторов; 13 — зеркало

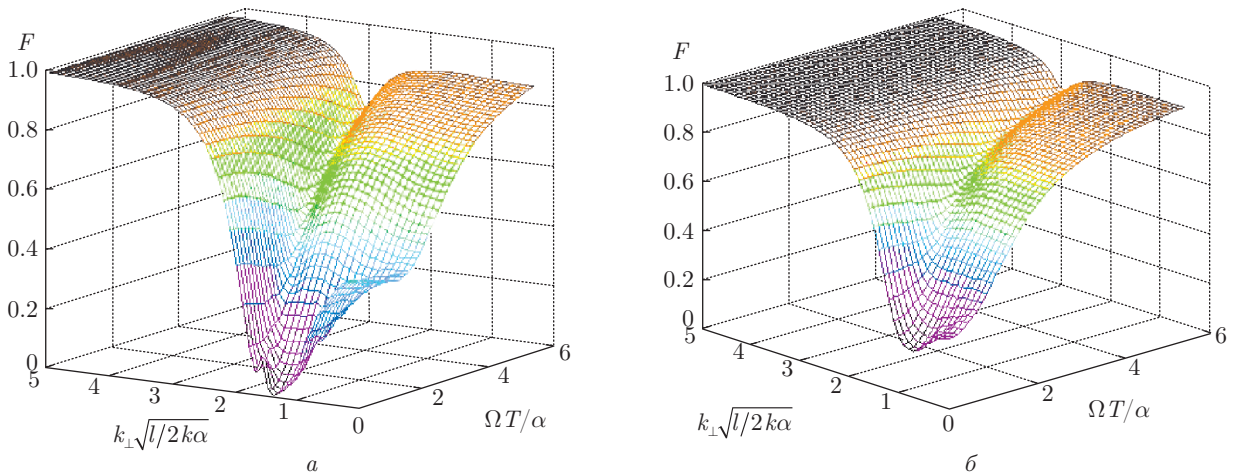


Рис. 9. (В цвете онлайн) Графики зависимости значений фактора Фано F от k_{\perp} при оптимизации внешнего поля интерферометра по регулярной фазе θ_{out} : минимальное значение $F = 0.013$ достигается при $\varphi_l/\alpha = 0.2$, $\varphi_{nl}/\alpha = 0.8$ для самофокусирующей нелинейности $\chi > 0$ (а), минимальное значение $F = 0.192$ — при $\varphi_l/\alpha = 1.4$, $\varphi_{nl}/\alpha = -0.4$ для самодефокусирующей нелинейности $\chi < 0$ (б)

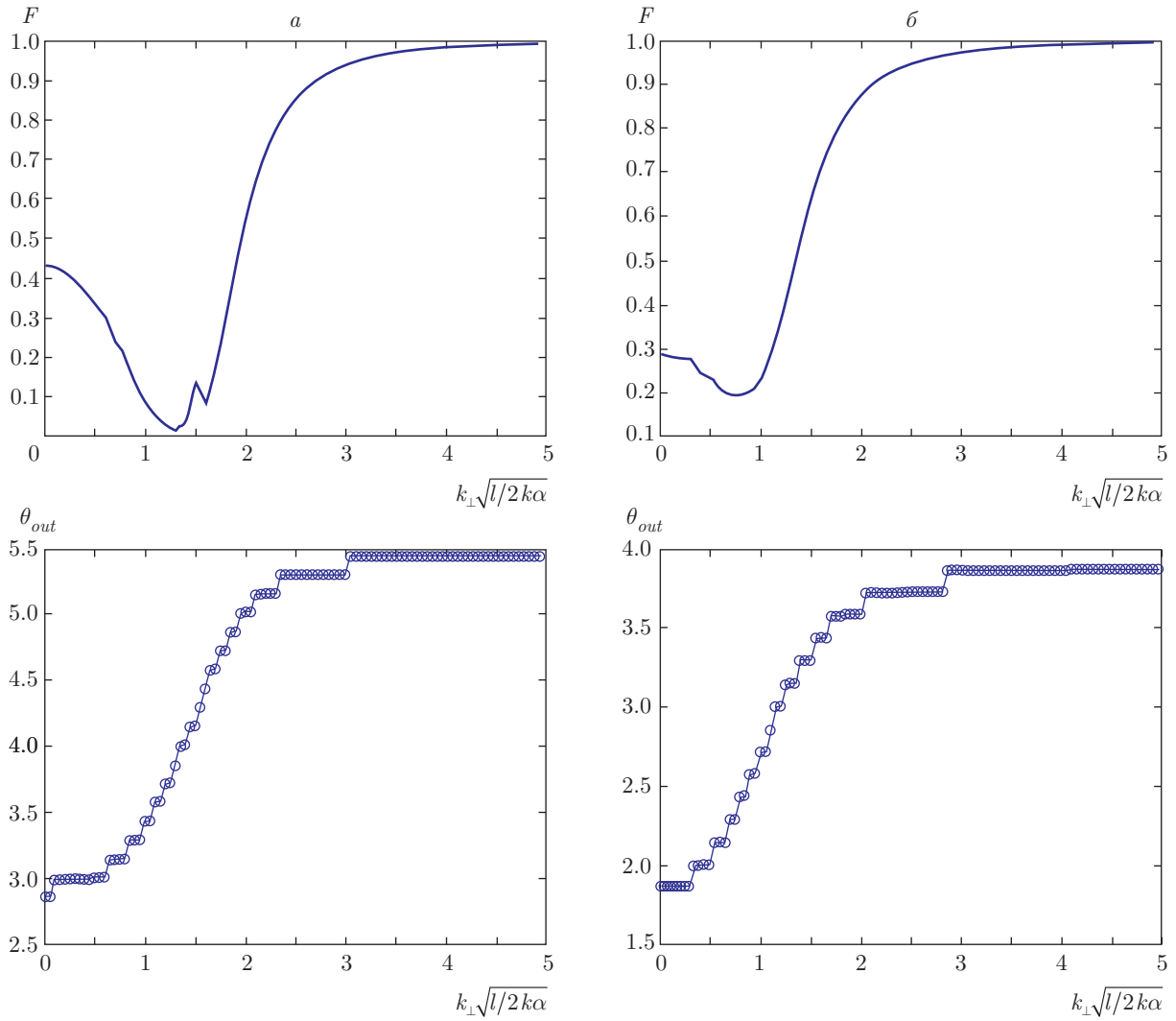


Рис. 10. Графики зависимости фактора Фано и соответствующих им значений θ_{out} от $k_{\perp} \sqrt{l/2k\alpha}$ для оптимальных режимов стабилизации внешнего поля интерферометра при фиксированном $\Omega T/\alpha = 0.01$: при $\varphi_i/\alpha = 0.2, \varphi_{nl}/\alpha = 0.8$ для самофокусирующей нелинейности $\chi > 0$ (а), при $\varphi_i/\alpha = 1.4, \varphi_{nl} = -0.4$ для самодефокусирующей нелинейности $\chi < 0$ (б)

6.1. Расчет параметров прозрачного фазового элемента

Вычислим многомодовую пространственную структуру пучка гомодина, требуемую для формирования квантового изображения. Для этого найдем оптимальные фазы регулярной составляющей сигнала θ_{out} (см. (34)) для каждого k_{\perp} , при которых фактор Фано минимален. Результаты компьютерной оптимизации представлены в виде графиков зависимости фактора Фано от k_{\perp} на рис. 9. Далее зафиксируем частоту, например, $\Omega T/\alpha = 0.01$, при которой наблюдается хорошее подавление квантовых флуктуаций, и снова проведем компьютерную оптимизацию. Результаты представлены на рис. 10

в виде графиков зависимостей от k_{\perp} минимальных значений фактора Фано и соответствующих им оптимальных значений θ_{out} . Полученные нелинейные зависимости значений θ_{out} от k_{\perp} можно аппроксимировать, например, полиномами шестой степени, практически полностью повторяющими исходные кривые:

$$\theta_{out} = -7.242 \cdot 10^{-3} Z^6 + 0.091 Z^5 - 0.344 Z^4 + 0.131 Z^3 + 1.368 Z^2 - 0.788 Z + 3.027, \quad (35)$$

$$\theta_{out} = 7.465 \cdot 10^{-3} Z^6 - 0.129 Z^5 + 0.873 Z^4 - 2.816 Z^3 + 4.111 Z^2 - 1.255 Z + 1.942, \quad (36)$$

где $Z = k_{\perp} \sqrt{l/2k\alpha}$.

Эти зависимости (35), (36) описывают форму осесимметричного прозрачного фазового элемента, формирующего необходимую фазовую задержку для двух вариантов нелинейности, соответственно, «а» и «б» на рис. 10. Радиальная координата при этом пропорциональна k_{\perp} .

Из рис. 10а видно, что в интервале

$$1.0 < k_{\perp} \sqrt{\frac{l}{2k\alpha}} \leq 1.5$$

достигается подавление фотонных флуктуаций примерно на порядок. Этого интервала, с учетом малости α , вполне достаточно для получения квантовых изображений хорошего качества, т. е. в достаточном интервале пространственных частот. Итак, если амплитудный транспарант b (некий объект) освещать светом в когерентном состоянии, то при прямом его детектировании предельная точность считываемого изображения будет определяться уровнем дробового шума. В нашем случае в плоскости 12 изображение будет менее ярким, но зато и менее шумящим, т. е. субпуассоновским. Собственно говоря, объект можно расположить и в самой плоскости 12 , освещая его субпуассоновским светом с последующим прямым детектированием. Амплитудный экран b в этом случае, разумеется, надо убрать. Объект, однако, должен быть практически прозрачным, иначе диссипативные потери приведут к исчезновению субпуассоновских свойств. Тем не менее, и такой вариант выполнения устройства, как представляется, может найти применение, например, при исследовании практически прозрачных биологических объектов, яркое освещение которых оказывало бы на них разрушительное воздействие. А снижение интенсивности света как раз ведет к увеличению относительного уровня дробовых шумов фотодетектирования, и субпуассоновский свет оказывается тут весьма уместным.

Итак, в результате оптимизации параметров и оптимального подбора формы осесимметричного прозрачного фазового элемента удалось получить заметное подавление фотонных шумов при фиксированной частоте модуляции в сравнительно широкой области пространственно-частотного спектра, достаточной для формирования сверхмалошумящих квантовых изображений. Таким образом, предлагаемая схема позволяет получить изображение с подавленными квантовыми флуктуациями в плоскости матрицы датчиков измерительного прибора. Теперь перейдем к интерпретации такого типа изображений.

7. ЗАДАЧА ИНТЕРПРЕТАЦИИ СЛАБОЗАШУМЛЕННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

В качестве измерительного устройства на рис. 8 использована динамическая сканирующая матрица датчиков. Аналогичная задача интерпретации изображений была исследована в работе [20] для обычного света. Мы же хотим получить пространственное сверхразрешение с помощью динамической системы регистрации сигналов в условиях депрессии квантового шума.

Рассмотрим изображение объекта, прозрачность которого зависит только от одной пространственной координаты, а выходной сигнал каждого датчика пропорционален падающему на его поверхность световому потоку. Геометрическая разрешающая способность строки датчиков определяется размером сенсоров, из которых она состоит. Для того чтобы получить сигнал с более высоким разрешением, чем у исходной строки сенсоров, будем перемещать ее по полю зрения с шагом, длина которого меньше размера датчика, и каждый раз снимать значение выходного сигнала. Чтобы восстановить сигнал размерности N , т. е. состоящий из N пикселей, имея строку из s сенсоров, необходимо перемещать ее на длину, равную длине одного пикселя и провести измерения не менее, чем для N/s позиций системы датчиков. Это условие является необходимым, но не достаточным, см. ниже. Полагаем, что измерения проведены для n положений системы датчиков.

Данные измерений, сформированные в процессе взаимодействия измеряемого объекта, среды и измерительного преобразователя (ИП), можно представить воздействием f на ИП и преобразованием в сигнал $\xi = Af + \nu$, где A — оператор, моделирующий физические процессы в ИП, определяющие преобразование воздействия f в сигнал, ν — шум, присутствующий в системе и влияющий на погрешность преобразования. До момента, когда сигнал ξ поступает в вычислительный преобразователь (ВП), все процессы контролируются физическими законами. Далее решающую роль играют математические свойства физической модели измерительного эксперимента, т. е. взаимодействующих ИП, среды и измеряемого объекта, а также математические свойства реализуемого ВП алгоритма анализа и интерпретации данных измерений, доступных в виде сигнала ξ . Алгоритм должен построить по ξ максимально точные оценки представляющих интерес характеристик исследуемого объекта, т. е. такие характеристики, какие он имел бы, будучи в своем естественном, невозмущенном измерении, состоянии.

Идеальный ИП, как правило, не может быть реализован материально, поскольку его «функционирование» обычно противоречит физическим законам, но при известных требованиях к математической модели физических процессов, описывающих взаимодействия, сигнал идеального ИП Uf может быть максимально точно воспроизведен измерительно-вычислительным преобразователем (ИВП).

Итак, рассмотренной системе регистрации в нашей задаче соответствует закон измерений

$$\xi = Af + \nu, \tag{37}$$

где $f \in \mathfrak{R}^N$ — заранее неизвестный вектор, описывающий пространственное распределение прозрачности измеряемого объекта, $\nu \in \mathfrak{R}^{ns}$ — случайный вектор с ковариационным оператором $\Sigma_\nu : \mathfrak{R}^{ns} \rightarrow \mathfrak{R}^{ns}$, причем ν обладает нулевым математическим ожиданием. Оператор $A : \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}^{ns}$ моделирует воздействие прошедшего через объект f светового потока

на матрицу датчиков, принимающую различные положения в поле зрения. Вектор ξ — совокупность векторов выходных сигналов ξ_p регистраций светового потока динамической матрицей, $p = 1, \dots, n$.

Когерентный свет имеет пуассоновское распределение числа фотонов:

$$pr(m) = \frac{D^m}{m!} e^{-D}. \tag{38}$$

Для такого дискретного распределения математическое ожидание и дисперсия случайной величины равны D . В рассматриваемом случае предполагается, что при фиксированной позиции строки сенсоров регистрация проводится одновременно, а флуктуации в различные моменты времени и, следовательно, для отличающихся положений строки независимы. Таким образом, в нашей модели матрица ковариационного оператора шума на выходе ИП блочно-диагональна и имеет следующий вид:

$$\Sigma_\nu(f) = g \begin{pmatrix} A_1 \text{diag}(f) A_1^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 \text{diag}(f) A_2^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \text{diag}(f) A_n^* \end{pmatrix} = g A \text{diag}(f) A^*, \tag{39}$$

где A_p — часть матрицы A , соответствующая измерениям в p -й позиции строки сенсоров, $\text{diag}(f)$ — матрица, диагональные элементы которой равны соответствующим компонентам вектора f , а остальные — нулю, g — множитель, связывающий единицу измерения с числом фотонов (равный показанию датчика после воздействия единичного фотона).

Субпуассоновское состояние света характеризуется меньшим значением дисперсии шума. Пусть достигается подавление квантовых флуктуаций в k раз. В таком случае ковариационная матрица шума имеет вид

$$\Sigma_\nu^{(k)}(f) = \frac{1}{k} \Sigma_\nu(f), \tag{40}$$

где матрица Σ_ν дается формулой (39).

Поскольку нас интересует неискаженное восстановление исследуемого сигнала, примем матрицу оператора U единичной.

Приведем задачу редукции измерения, выполненного на ИП $[A, \Sigma_\nu]$, к виду $R_* \xi = R_* A f + R_* \nu$, свойственному измерению на ИП $[R_* A, R_* \Sigma_\nu R_*^*]$, максимально точно аппроксимирующему выходной сигнал идеального ИП $[U, 0]$. Задача редукции ИП $[A, \Sigma_\nu]$ к ИП $[R_* A, R_* \Sigma_\nu R_*^*]$ ставится в виде минимизации среднеквадратичной погрешности в наихуд-

шем по f случае интерпретации результата $R\xi$ преобразования измерения ξ как выходного сигнала Uf идеального ИП $[U, 0]$ как функционала оператора $R : \mathfrak{R}^{ns} \rightarrow \mathfrak{R}^N$, осуществляющего это преобразование:

$$\begin{aligned} \text{Er}(A, \Sigma_\nu, U) &= \sup_{f \in \mathfrak{R}^N} M \| R_* \xi - Uf \|^2 = \\ &= \min_{R: \mathfrak{R}^{ns} \rightarrow \mathfrak{R}^N} \sup_{f \in \mathfrak{R}^N} M \| R\xi - Uf \|^2. \end{aligned} \tag{41}$$

Решение этой задачи известно [3]:

$$R_* = U(A^* \Sigma_\nu^{-1} A)^{-1} A^* \Sigma_\nu^{-1}, \tag{42}$$

$$\text{Er}(A, \Sigma_\nu, U) = \text{tr} \left[U (A^* \Sigma_\nu^{-1} - A)^{-1} U^* \right], \tag{43}$$

где $\text{Er}(A, \Sigma_\nu, U)$ — ошибка редукции. В случае $U(I - A^{-1}A) \neq 0$ ошибка редукции равна бесконечности, т.е. значение Uf не может быть оценено с конечной погрешностью по результатам измерений. Следовательно, сама возможность оценивания Uf с конечной среднеквадратичной погрешностью по результатам измерений не зависит от ковариационного оператора шума и, в частности, от уровня подавления флуктуаций k (см. ниже).

В поставленной задаче интерпретации изображения, сформированного пуассоновским или субпуассоновским светом с помощью динамической регистрации, матрица ковариационного оператора шума задается соответственно формулами (39) или (40), а матрица U является единичной, поэтому выходной сигнал предложенного измерительно-вычислительного преобразования имеет вид

$$R_*\xi = (A^*\Sigma_\nu^{-1}A)^{-1}A^*\Sigma_\nu^{-1}\xi, \quad (44)$$

при этом ошибка редукции равна

$$\text{Er}(A, \Sigma_\nu, U) = \text{tr} [(A^*\Sigma_\nu^{-1}A)^{-1}]. \quad (45)$$

Но, согласно формулам (39) и (40), ковариационный оператор шума зависит от неизвестного исследователю вектора f . Тем не менее, величина погрешности редукции (45) все же представляет интерес как среднеквадратичная погрешность наилучшей линейной оценки.

В компьютерном эксперименте мы сравнили следующие два способа, использующие приближенную матрицу ковариационного оператора шума для вычисления оценки.

1. Для оценки f берется формула (44) с ковариационным оператором (39) или (40), в котором вместо $\text{diag}(f)$ используется σ^2I (заметим, что значение результата редукции не зависит от σ). Обозначим матрицу такого ковариационного оператора как $\Sigma'_\nu = AA^*$. Таким образом, оценка f есть

$$\left(A^*\Sigma'^{-1}_\nu A\right)^{-1}A^*\Sigma'^{-1}_\nu \xi. \quad (46)$$

Это приближение соответствует слабоконтрастным изображениям. При этом математическое ожидание погрешности имеет вид

$$\text{tr} \left[\left(A^*\Sigma'^{-1}_\nu A\right)^{-1}A^*\Sigma'^{-1}_\nu \Sigma_\nu(f) \times \right. \\ \left. \times \Sigma'^{-1}_\nu A \left(A^*\Sigma'^{-1}_\nu A\right)^{-1} \right]. \quad (47)$$

2. Оценка f определяется как решение уравнения

$$f = \left(A^*\Sigma_\nu^{(k)}(f)^{-1}A\right)^{-1}A^*\Sigma_\nu^{(k)}(f)^{-1}\xi \quad (48)$$

относительно f , которое получается из (44) и (39) или (40) при подстановке в (39) или (40) вместо f самой оценки.

Заметим, что для ковариационного оператора шума (40) среднеквадратичные погрешности (45) и (47) обратно пропорциональны величине k , а оценки (44), (46) и (48) не зависят от k .

8. КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Разработанный нами алгоритм осуществляет восстановление изображения, сформированного пуассоновским или субпуассоновским световым потоком и поступающего на вход динамической строки сенсоров. Алгоритм позволяет задать: количество пикселей сигнала, которые интегрируются одним сенсором, число позиций системы датчиков, при которых происходит измерение, количество датчиков в сенсорной строке. Эти параметры полностью определяют вид матрицы A измерительного прибора при указанных в начале предыдущего раздела предположениях.

В компьютерном тестировании в качестве входного сигнала мы рассмотрели изображение, задаваемое 100-мерным вектором, т.е. состоявшее из ста пикселей. Измерительная система состояла из сенсоров, размер каждого из которых был равен 10 пикселям. Уравнение (48) решалось итерационно с использованием (46) в качестве начального приближения.

На рис. 11а представлен подаваемый на вход сигнал с низкой контрастностью (штриховая линия) и результаты восстановления для когерентного света методами (44) (сплошная ломаная), (46) (пунктирная) и (48) (штрихпунктирная). На рис. 11б изображены аналогичные результаты для субпуассоновского света с подавлением дисперсии квантовых флуктуаций в 10 раз. На рис. 12 проиллюстрированы аналогичные результаты для сигнала средней контрастности, а на рис. 13 — для контрастного сигнала.

Судя по полученным восстановленным изображениям для разных с точки зрения пространственной контрастности типов входных сигналов, использование подавления квантовых флуктуаций является наиболее эффективным при восстановлении менее контрастных, практически прозрачных изображений. Для интерпретации таких изображений, сформированных обычным когерентным светом, оценка редукции имеет существенную ошибку и поэтому возникает необходимость в уменьшении шумов за пределами измерительного и вычислительного преобразователей, что достигается при формировании изображений субпуассоновским светом.

Для использованных способов оценивания на рис. 14 изображена зависимость среднеквадратичной погрешности оценки для сигнала средней контрастности (см. рис. 12) в зависимости от степени подавления квантового шума. Из этого графика видно, что депрессия флуктуаций приводит к значи-

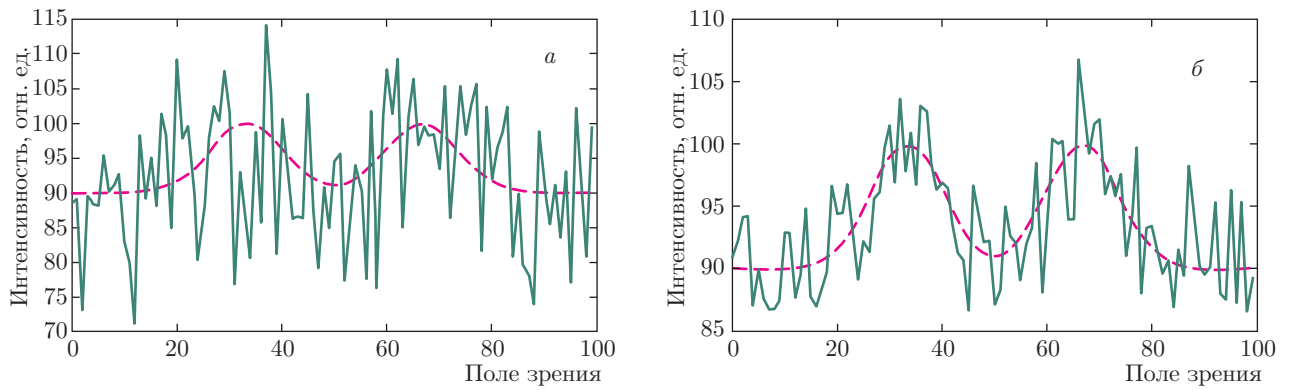


Рис. 11. Малоконтрастный «пологий» сигнал (плавные штриховые линии), поступающий на вход ИВС, и его оценки по данным измерений, полученные методами (44), (46) и (48) (сплошные негладкие линии, причем по всем трем методам кривые практически совпадают) в случаях освещения объекта когерентным светом (а) и светом с десятикратным подавлением флуктуаций (б)

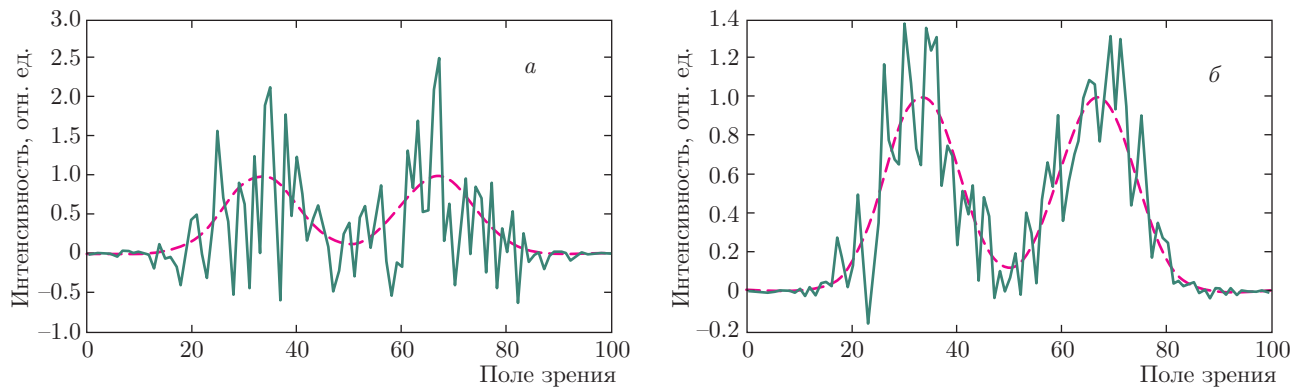


Рис. 12. Среднеконтрастный сигнал (плавные штриховые линии), поступающий на вход ИВС, и его оценки по данным измерений, полученные методами (44), (46) и (48) (сплошные негладкие линии, причем по всем трем методам кривые практически совпадают) в случаях освещения объекта когерентным светом (а) и светом с десятикратным подавлением флуктуаций (б)

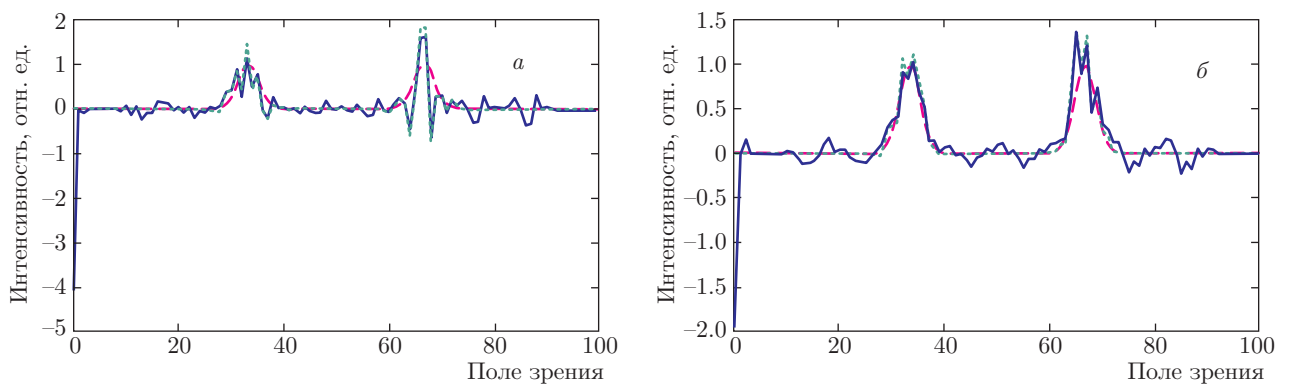


Рис. 13. Контрастный сигнал (плавные штриховые линии), поступающий на вход ИВС, и его оценки по данным измерений, полученные методами (44) (сплошные линии), (46) (точечные) и (48) (штрихпунктирные) в случаях освещения объекта когерентным светом (а) и светом с десятикратным подавлением флуктуаций (б)

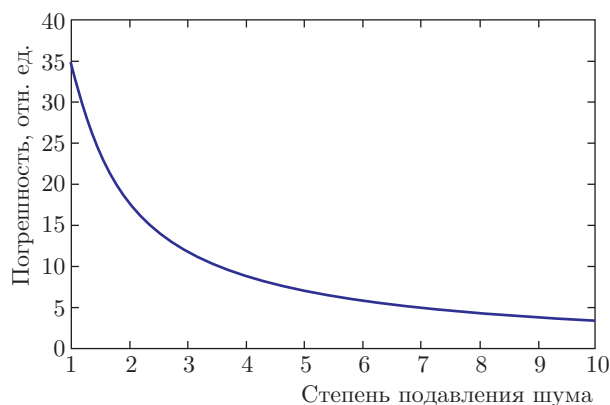


Рис. 14. График зависимости среднеквадратичной погрешности оценки редукиции от степени подавления квантовых флуктуаций

тельному уменьшению ошибки редукиции, которая, как и ожидалось, обратно пропорциональна степени депрессии.

Заметим, что уменьшение ошибки редукиции может быть достигнуто и увеличением количества измерений (например, увеличением числа позиций, в которых проводится измерение), но применимость такого способа существенно зависит от характерного времени изменения исследуемого объекта — необходимо успеть за это время провести необходимое количество измерений.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы многолучевые интерферометры, заполненные керровской нелинейной средой, в которой происходит фазовая самомодуляция. Мы провели уточнение существующей квантовой теории таких устройств и разработали методику их расчета на основании описания элементарных пяти- и трехмодовых пространственно-временных структур. Провели оптимизацию параметров интерферометров, исходя из критерия максимальной информационной емкости формируемого ими многомодового в пространстве и во времени света. При этом исследовали случаи стабилизации внутреннего и внешнего полей интерферометра для двух типов сред: самофокусирующей и самодефокусирующей. Во всех четырех оптимальных вариантах получены субпуассоновские состояния, для которых характерны разные эффективности подавления фотонных шумов. Наиболее перспективным в практическом смысле формировании квантовых изображений представляется случай стабилизации внеш-

него поля при самофокусирующей нелинейности. В этом случае возможно подавление квантовых флуктуаций интенсивности примерно на порядок по сравнению с когерентным состоянием, т. е. получение света с глубокой субпуассоновской статистикой. Однако такое подавление фотонных флуктуаций достигается лишь в отдельных узких областях пространственного фурье-спектра. Для расширения этих областей предложена схема, которая позволяет реализовать подавление фотонных флуктуаций за счет смещения выходящего из нелинейного многолучевого интерферометра пучка со специально пространственно-сформированным когерентным опорным пучком гомодина. Компьютерная оптимизация параметров системы дала зависимости, описывающие форму осесимметричного прозрачного фазового элемента, формирующего необходимую для депрессии флуктуаций фазовую задержку. В результате удалось получить подавление фотонных шумов при фиксированной частоте модуляции в сравнительно широкой области пространственно-частотного спектра, достаточной для формирования сверхмалозумящих квантовых изображений.

Но мало получить хорошее изображение, его надо еще интерпретировать с минимальными информационными потерями. Для получения сверхразрешения мы использовали сканирующую матрицу фотодетекторов и последующую компьютерную обработку снимаемого с них сигнала. Численный эксперимент показал, что погрешность метода редукиции напрямую зависит от величины флуктуаций, поэтому применение света, обладающего субпуассоновской статистикой фотоотсчетов, является целесообразным, особенно для изображений слабоосвещенных объектов. Однако эффективность метода использования такого света с точки зрения соотношения затрат на реализацию и достижение сверхразрешения определяется формой исследуемого сигнала. Компьютерный алгоритм продемонстрировал результативность данной техники депрессии квантового шума для менее контрастных практически прозрачных изображений по сравнению с более резкими по очертаниям. Для интерпретации мало контрастных изображений, сформированных светом в обычном, когерентном, состоянии, даже оптимальная оценка, полученная методом математической редукиции, имеет существенную погрешность, и поэтому возникает необходимость в уменьшении шумов физическими, а не математическими средствами. Это и осуществляется при формировании изображений субпуассоновским светом.

Предлагаемый алгоритм восстановления одномерных сигналов легко адаптировать для изображений более высокой размерности, однако в этом случае потребуется провести значительно больший объем компьютерных расчетов и поэтому целесообразно распараллеливание вычислений, в частности, с использованием вычислений на GPU. Но и в одномерном случае можно исследовать двумерные изображения, проводя сканирование по интересующему нас наиболее информативному направлению в плоскости изображения.

Мы благодарны Е. С. Маркиной, Т. М. Тарасовой, А. С. Чиркину и А. И. Чуличкову за плодотворные обсуждения и критические замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-07-00938 А).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Квантовые изображения*, под ред. М. И. Колобова, Физматлит, Москва (2009).
2. А. И. Чуличков, *Основы теории измерительно-вычислительных систем сверхвысокого разрешения. Линейные стохастические измерительно-вычислительные системы*, ТГГУ, Тамбов (2000).
3. А. И. Чуличков, Б. Юань, Вестник МГУ, сер. 3, № 3, 15 (2014).
4. Ю. П. Пытьев, *Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем*, Физматлит, Москва (2012).
5. А. И. Чуличков, Б. Юань, Машинное обучение и анализ данных № 9, 1246 (2014).
6. С. А. Ахманов, А. В. Белинский, А. С. Чиркин, в кн. *Новые физические принципы оптической обработки информации*, Наука, Москва (1990), гл. 3, с. 83–194.
7. А. В. Белинский, *Квантовые измерения*, БИНОМ. Лаборатория знаний, Москва (2012).
8. Y. Yamamoto, S. Machida, I. Imoto, M. Kitogawa, and G. Bjork, *J. Opt. Soc. Amer. B* **4**, 1645 (1987).
9. С. А. Ахманов, А. В. Белинский, А. С. Чиркин, КЭ **15**, 873 (1988).
10. М. И. Колобов, И. В. Соколов, ЖЭТФ **96**, 1945 (1989).
11. S. Renaud and E. Giacobino, *J. Phys. (Fr.)* **49**(6), C2-477 (1988).
12. А. В. Белинский, А. С. Чиркин, Опт. и спектр. **66**, 1190 (1989).
13. А. В. Белинский, Н. Н. Розанов, Опт. и спектр. **73**, 153 (1992).
14. А. В. Белинский, Е. С. Маркина, Опт. и спектр. **118**, 459 (2015).
15. А. В. Белинский, Е. С. Маркина, Мир измерений № 11, 43 (2014).
16. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).
17. Ю. А. Ананьев, *Оптические резонаторы и лазерные пучки*, Наука, Москва (1990).
18. U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997).
19. Х. М. Гиббс, *Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света*, Мир, Москва (1988).
20. А. М. Григорьева, Ю. П. Пытьев, *Динамическая модель повышения геометрической разрешающей способности системы регистрации изображений. Математические методы распознавания образов ММРО-15*, Макс Пресс, Москва (2011), с. 471.