

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Д. А. Климачков ^{a*}, А. С. Петросян ^{a,b**}

^a *Институт космических исследований Российской академии наук
117997, Москва, Россия*

^b *Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 18 августа 2015 г.

Рассматриваются вращающиеся магнитогидродинамические течения тонкого слоя астрофизической и космической плазмы со свободной границей в вертикальном внешнем магнитном поле. Используется приближение мелкой воды. Наличие вертикального внешнего магнитного поля существенно изменяет динамику волновых процессов в астрофизической плазме в отличие от нейтральной жидкости и слоя плазмы во внешнем тороидальном магнитном поле. В рассматриваемом случае имеют место трехволновые нелинейные взаимодействия. Асимптотическим методом многомасштабных разложений выведены нелинейные уравнения взаимодействия волновых пакетов: трех волн магнито-Пуанкаре, трех магнитострофических волн, двух волн магнито-Пуанкаре и одной магнитострофической волны, а также двух магнитострофических и одной магнито-Пуанкаре волн. Предсказано существование распадных неустойчивостей и явлений параметрического усиления. Показано, что волна магнито-Пуанкаре распадается на две волны магнито-Пуанкаре, магнитострофическая волна распадается на две магнитострофические волны, волна магнито-Пуанкаре распадается на одну волну магнито-Пуанкаре и одну магнитострофическую, магнитострофическая волна распадается на одну магнитострофическую и одну волну магнито-Пуанкаре. Имеются следующие механизмы параметрического усиления: параметрическое усиление волн магнито-Пуанкаре, параметрическое усиление магнитострофических волн, а также усиление волны магнито-Пуанкаре в поле магнитострофической и усиление магнитострофической волны в поле волны магнито-Пуанкаре. Найдены инкременты неустойчивостей и коэффициенты параметрического усиления для соответствующих процессов.

DOI: 10.7868/S0044451016050060

1. ВВЕДЕНИЕ

Поведение различных звезд и планет описывается магнитной гидродинамикой (МГД) тонких слоев плазмы со свободной границей в поле силы тяжести: например, течения солнечного тахоклина (тонкого слоя внутри Солнца, находящегося над конвективной зоной) [1], динамика атмосфер нейтронных звезд [2], течения аккрецирующей материи в нейтронных звездах [3], захваченные приливами экзопланеты с магнитоактивными атмосферами [4, 5]. Для описания таких течений астрофизической плаз-

мы используется МГД-приближение мелкой воды [6] и квазигеострофическое приближение в МГД [6–8].

Настоящая работа посвящена изучению слабонелинейных волновых взаимодействий в МГД-приближении мелкой воды. Уравнения вращающейся МГД в приближении мелкой воды являются альтернативой МГД-уравнениям тяжелой жидкости со свободной границей в случае, когда исследуется слой малой толщины по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи и вертикальными ускорениями можно пренебречь. Рассматривается слой несжимаемой невязкой жидкости со свободной поверхностью, находящийся в поле сил тяжести в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с плазмой. МГД-уравнения мелкой воды получаются из классических МГД-уравнений

* E-mail: klimachkovdmitry@gmail.com

** E-mail: apetrosy@iki.rssi.ru

для несжимаемой плазмы усреднением по глубине в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи [6, 9–15]. Полученная система играет такую же важную роль в космической и астрофизической плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной жидкости.

В линейном приближении система МГД-уравнений мелкой воды имеет решения, описывающие магнитогравитационные (назовем их волнами магнито-Пуанкаре) волны и магнитострофические волны. В случае гидродинамики нейтральной жидкости в приближении мелкой воды присутствуют только гравитационные волны Пуанкаре. Закон дисперсии волн Пуанкаре и нелинейность в уравнениях мелкой воды нейтральной жидкости в случае слабонелинейных волн конечной амплитуды исключают взаимодействие волн Пуанкаре [16], поскольку в этом случае не выполняются условия синхронизма для таких волн. В случае течений солнечного тахоклина присутствует внешнее тороидальное магнитное поле. Наличие внешнего тороидального поля приводит к возникновению двух типов волн: быстрых магнитогравитационных волн, аналогичных волнам Пуанкаре в нейтральной жидкости, и медленных альфвеновских. В системе с тороидальным магнитным полем закон дисперсии не обеспечивает условий синхронизма для случая слабонелинейных взаимодействий [1, 6, 9].

В настоящей работе мы изучаем МГД-уравнения мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле. Такая конфигурация магнитного поля характерна для нейтронных звезд [2, 17] и экзопланет. В этом случае в МГД-приближении мелкой воды появляются дополнительные слагаемые, описывающие в линейном приближении два типа быстрых волн: магнито-Пуанкаре и магнитострофические волны [2]. Настоящая работа является обобщением линейной теории МГД-течений мелкой воды, развитой в работе [2], на случай волн конечной амплитуды в приближении слабой нелинейности. В нашей работе показано, что закон дисперсии линейных волн во внешнем вертикальном магнитном поле обеспечивает условия синхронизма, необходимые для нелинейных взаимодействий. В отсутствие внешнего вертикального магнитного поля исчезают магнитострофические волны и остаются только гравитационные волны в гидродинамике нейтральной жидкости в поле силы тяжести со свободной границей.

Мы исследуем взаимное влияние волновых пакетов во вращающейся МГД мелкой воды. Анализ ви-

да дисперсионных соотношений для обеих мод показал, что возможны несколько видов трехволновых взаимодействий: трех волн магнито-Пуанкаре и трех магнитострофических волн. Присутствуют также межмодовые взаимодействия: двух волн магнито-Пуанкаре и магнитострофической волны, двух магнитострофических волн и одной волны магнито-Пуанкаре.

Для описания нелинейного взаимодействия волн использован асимптотический метод многомасштабных разложений [18]. Для всех четырех случаев выведены нелинейные уравнения взаимодействия волн. Анализ полученных нелинейных уравнений, описывающих трехволновые взаимодействия, показал существование двух типов неустойчивостей: распадные неустойчивости и параметрическое усиление волн [19, 20]. Найдено, что существуют следующие четыре типа распадных неустойчивостей: волна магнито-Пуанкаре распадается на две волны магнито-Пуанкаре; магнитострофическая волна — на две магнитострофические волны; волна магнито-Пуанкаре — на одну волну магнито-Пуанкаре и одну магнитострофическую; магнитострофическая волна — на одну магнитострофическую и одну волну магнито-Пуанкаре. Получены инкременты найденных распадных неустойчивостей. Исследованы четыре механизма параметрического усиления следующих волн: волн магнито-Пуанкаре, магнитострофических волн, а также волны магнито-Пуанкаре в поле магнитострофической волны и магнитострофической волны в поле волны магнито-Пуанкаре. Для всех видов неустойчивостей найдены коэффициенты параметрического усиления.

В разд. 2 приведена система МГД-уравнений мелкой воды в поле силы тяжести на ровной границе при наличии вращения, воспроизведены линейные решения этой системы в виде, удобном для дальнейшего анализа нелинейных эффектов. Проанализированы дисперсионные кривые и сделаны выводы о наличии синхронизмов, обеспечивающих возможность трехволновых взаимодействий в конечно-амплитудном приближении слабой нелинейности.

В разд. 3 описана процедура асимптотического метода многомасштабных разложений. Получены уравнения медленно меняющихся амплитуд трехволновых взаимодействий волновых пакетов МГД для мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле.

В разд. 4 полученные уравнения трехволновых взаимодействий используются для анализа физических эффектов слабонелинейного взаимодействия волн магнито-Пуанкаре и магнитострофичес-

ких. Проанализированы распадные неустойчивости и явления параметрического усиления. В разд. 5 сформулированы результаты работы.

В Приложении из исходных МГД-уравнений для слоя плазмы со свободной границей в поле силы тяжести получены МГД-уравнения вращающейся мелкой воды над неровной границей во внешнем вертикальном магнитном поле

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

В данном разделе приведена система МГД-уравнений мелкой воды на ровной границе, описывающая течения слоя плазмы со свободной границей в поле силы тяжести при наличии вращения [6], выписаны линейные решения [1] этой системы. Полученные решения используются для качественного анализа дисперсионных кривых линейных волн и определения условий синхронизма, обеспечивающих возможность межволнового взаимодействия.

Запишем систему МГД-уравнений мелкой воды на ровной границе:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h v_x}{\partial x} + \frac{\partial h v_y}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(hv_x)}{\partial t} + \frac{\partial(h(v_x^2 - B_x^2))}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial(h(v_x v_y - B_x B_y))}{\partial y} + B_0 B_x = 2\omega h v_y, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(hv_y)}{\partial t} + \frac{\partial(h(v_x v_y - B_x B_y))}{\partial x} + \frac{\partial(h(v_y^2 - B_y^2))}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} + B_0 B_y = -2\omega h v_x, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(hB_x)}{\partial t} + \frac{\partial(h(B_x v_y - B_y v_x))}{\partial y} + B_0 v_x = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial(hB_y)}{\partial t} + \frac{\partial(h(B_y v_x - B_x v_y))}{\partial x} + B_0 v_y = 0. \quad (2.5)$$

Здесь h — высота свободной поверхности, v_x, v_y — горизонтальные скорости в приближении мелкой воды в плоскости xy , B_x и B_y — горизонтальные компоненты магнитного поля в приближении мелкой воды в направлениях соответственно x и y , B_0 — внешнее магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости xy , ω — угловая скорость вращения магнитной жидкости. Уравнение (2.1) — уравнение

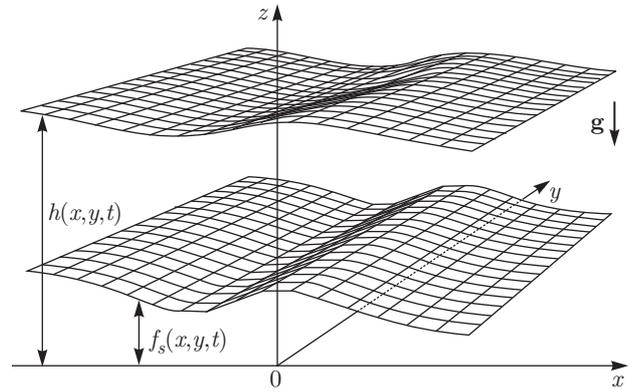


Рис. 1. Тонкий слой плазмы

непрерывности, уравнения (2.2) и (2.3) — закон сохранения импульса, (2.4) и (2.5) — уравнения переноса магнитного поля (рис. 1).

Система МГД-уравнений в приближении мелкой воды над ровной границей получается из полной системы МГД-уравнений, записанной для слоя жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести в системе координат, где ось z направлена вдоль вектора силы тяжести и противоположна ему по направлению. В предположении малости толщины слоя и гидростатичности распределения полного давления (суммы гидродинамического и магнитного) проводится усреднение системы по глубине слоя жидкости. При усреднении пренебрегается квадратами отклонения скоростей и магнитного поля от усредненных по глубине величин [10–12, 15].

Рассмотрим стационарное решение системы (2.1)–(2.5) в виде слоя постоянной высоты h_0 во внешнем вертикальном постоянном поле B_0 с нулевыми значениями горизонтальных скоростей и горизонтальных компонент магнитных полей. Линеаризуя [1] уравнения (2.1)–(2.5) на фоне такого стационарного состояния, получим систему уравнений, описывающую бесконечно малые возмущения:

$$\frac{\partial h_1}{\partial T_0} + h_0 \frac{\partial v_{x1}}{\partial X_0} + h_0 \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_0} = 0, \quad (2.6)$$

$$h_0 \frac{\partial v_{x1}}{\partial T_0} + gh_0 \frac{\partial h_1}{\partial X_0} + B_0 B_{x1} - 2\omega h_0 v_{y1} = 0, \quad (2.7)$$

$$h_0 \frac{\partial v_{y1}}{\partial T_0} + gh_0 \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} + B_0 B_{y1} + 2\omega h_0 v_{x1} = 0, \quad (2.8)$$

$$h_0 \frac{\partial B_{x1}}{\partial T_0} + B_0 v_{x1} = 0, \quad (2.9)$$

$$h_0 \frac{\partial B_{y1}}{\partial T_0} + B_0 v_{y1} = 0. \quad (2.10)$$

Ищем решение однородной системы в виде линейных волн:

$$v_{x1} = \dot{v}_{x1} \exp[i(k_x X_0 + k_y Y_0 - \omega T_0)], \quad (2.11)$$

$$v_{y1} = \dot{v}_{y1} \exp[i(k_x X_0 + k_y Y_0 - \omega T_0)], \quad (2.12)$$

$$h_1 = \dot{h}_1 \exp[i(k_x X_0 + k_y Y_0 - \omega T_0)], \quad (2.13)$$

$$B_{x1} = \dot{B}_{x1} \exp[i(k_x X_0 + k_y Y_0 - \omega T_0)], \quad (2.14)$$

$$B_{y1} = \dot{B}_{y1} \exp[i(k_x X_0 + k_y Y_0 - \omega T_0)]. \quad (2.15)$$

Здесь k_x и k_y — компоненты волнового вектора, а для координат и времени введены обозначения X_0, Y_0 и T_0 , чтобы в дальнейшем отличать их от «медленных» переменных X_1, Y_1 и T_1 . Тогда из (2.6)–(2.10) получим характеристическую систему алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \dot{v}_{x1} \\ \dot{v}_{y1} \\ \dot{h}_1 \\ \dot{B}_{x1} \\ \dot{B}_{y1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} k_x h & k_y h & -\omega & 0 & 0 \\ -i\omega & -f & i g k_x & B_0/h & 0 \\ f & -i\omega & i g k_y & 0 & B_0/h \\ B_0/h & 0 & 0 & i\omega & 0 \\ 0 & B_0/h & 0 & 0 & i\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{v}_{x1} \\ \dot{v}_{y1} \\ \dot{h}_1 \\ \dot{B}_{x1} \\ \dot{B}_{y1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Уравнения (2.16) имеют нетривиальные решения при условии $\det \mathbf{A} = 0$. Отсюда получим дисперсионное уравнение для линейных волн исходной системы МГД-уравнений вращающейся мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле B_0 ,

$$\omega_1 = \pm \sqrt{\frac{ghk^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \left(\frac{B_0}{h}\right)^2 + \frac{1}{2} \sqrt{ghk^2(ghk^2 + 2f^2) + f^2 \left[f^2 + 4\left(\frac{B_0}{h}\right)^2\right]}}, \quad (2.22)$$

в котором решение со знаком «+» соответствует волне, распространяющейся вдоль \mathbf{k} , а решение со знаком «-» описывает волну, распространяющуюся в направлении, противоположном \mathbf{k} . Полученные линейные решения — волны магнито-Пуанкаре.

Второй тип линейных решений описывает магнито-рофические волны, не имеющие аналога в нейтральной жидкости, с дисперсионным соотношением

$$\omega_2 = \pm \sqrt{\frac{ghk^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \left(\frac{B_0}{h}\right)^2 - \frac{1}{2} \sqrt{ghk^2(ghk^2 + 2f^2) + f^2 \left[f^2 + 4\left(\frac{B_0}{h}\right)^2\right]}}, \quad (2.23)$$

$$\omega^5 - \omega^3 \left[ghk^2 + f^2 + 2\left(\frac{B_0}{h}\right)^2\right] + \left(\frac{B_0}{h}\right)^2 \left[ghk^2 + \left(\frac{B_0}{h}\right)^2\right] \omega = 0, \quad (2.17)$$

решение которого имеет вид

$$\omega^2 = \frac{ghk^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \left(\frac{B_0}{h}\right)^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{ghk^2(ghk^2 + 2f^2) + f^2 \left[f^2 + 4\left(\frac{B_0}{h}\right)^2\right]}, \quad (2.18)$$

$$\omega = 0. \quad (2.19)$$

Заметим, что полученные решения линейной задачи в отсутствие внешнего вертикального магнитного поля переходят в линейные решения уравнений мелкой воды для нейтральной жидкости, с дисперсионными соотношениями

$$\omega^2 = \frac{ghk^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(ghk^2)^2 + 2f^2 ghk^2 + f^4} = ghk^2 + f^2, \quad (2.20)$$

$$\omega^2 = \frac{ghk^2}{2} + \frac{f^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(ghk^2)^2 + 2f^2 ghk^2 + f^4} = 0 \quad (2.21)$$

и описывают волны Пуанкаре, так же как и в нейтральной жидкости.

В нашем случае из-за наличия вертикального поля возникают два типа волн. Первый тип волн является обобщением линейных волн Пуанкаре с дисперсионным соотношением

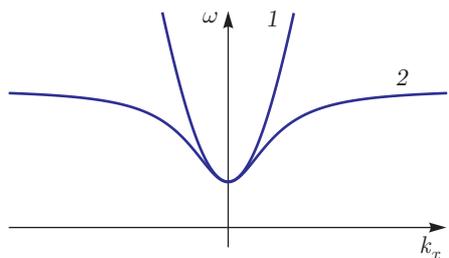


Рис. 2. Дисперсионные кривые: 1 — мода магнито-Пуанкаре; 2 — магнито-строфическая мода

в котором решение со знаком «+» описывает магнито-строфическую волну, распространяющуюся вдоль вектора \mathbf{k} , а решение со знаком «-» — магнито-строфическую волну, распространяющуюся в направлении, противоположном вектору \mathbf{k} . Индексы «1» и «2» соответствуют волнам, распространяющимся вдоль \mathbf{k} , а индексы «3» и «4» — волнам, распространяющимся в направлении, противоположном \mathbf{k} . Общее решение системы представляет собой сумму четырех линейных волн.

Общий вид дисперсионных кривых для случая $\omega > 0$ представлен на рис. 2. Дисперсионное соотношение $\omega(\mathbf{k})$ задает дисперсионную поверхность $\omega(k_x, k_y)$. Эта поверхность есть поверхность вращения, так как дисперсионное соотношение симметрично относительно k_x и k_y . Для $\omega < 0$ (т.е. для решений ω_3 и ω_4) дисперсионная поверхность симметрична относительно плоскости $\omega = 0$.

Для того чтобы оценить возможность межволновых взаимодействий для описанных типов волн, необходимо проанализировать их дисперсионные соотношения, определить асимптотику дисперсионных кривых для обоих типов волн. Условие синхронизма, необходимое для возникновения взаимодействия между волнами с разными волновыми векторами и разными волновыми частотами, в общем случае имеет вид

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2).$$

Изобразим это условие на графиках (рис. 3–6). Первое слагаемое задает точку $(k_1, \omega(k_1))$ на дисперсионной кривой одного из решений, второе слагаемое — точку $(k_2, \omega(k_2))$ на дисперсионной кривой другого решения. Если вторая дисперсионная кривая, смещенная относительно начала координат на $(k_1, \omega(k_1))$, пересечет первую в некоторой точке $(k_3, \omega(k_3))$, то это и будет означать существование такого значения k_2 , при котором условие синхронизма выполнится.

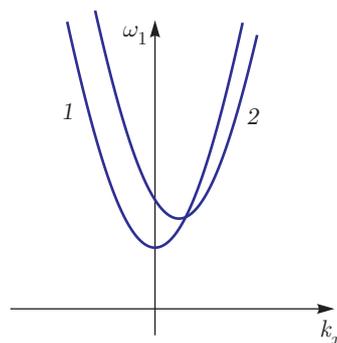


Рис. 3. Условие синхронизма для трех волн магнито-Пуанкаре: 1 — $\omega = \omega_1(k_x)$; 2 — $\omega_1(k_x - k_{x1}) + \omega_1(k_{x1})$

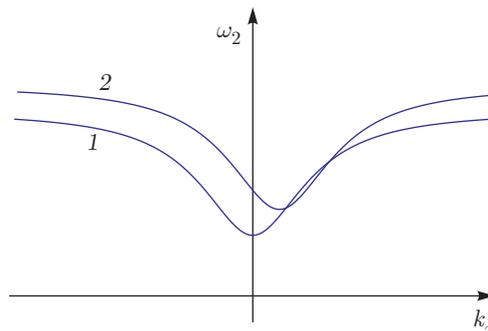


Рис. 4. Условие синхронизма для трех магнито-строфических волн: 1 — $\omega = \omega_2(k_x)$; 2 — $\omega_2(k_x - k_{x1}) + \omega_2(k_{x1})$

Для волн магнито-Пуанкаре условие синхронизма запишется в виде

$$\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2) = \omega_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2),$$

где индекс «1» соответствует прямой волне магнито-Пуанкаре. При малых частотах дисперсионные поверхности для моды магнито-Пуанкаре, построен-

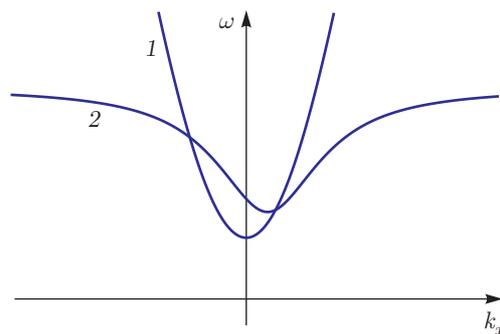


Рис. 5. Две магнито-строфические волны, одна волна магнито-Пуанкаре: 1 — $\omega = \omega_2(k_x)$; 2 — $\omega = \omega_1(k_x - k_{x1}) + \omega_2(k_{x1})$

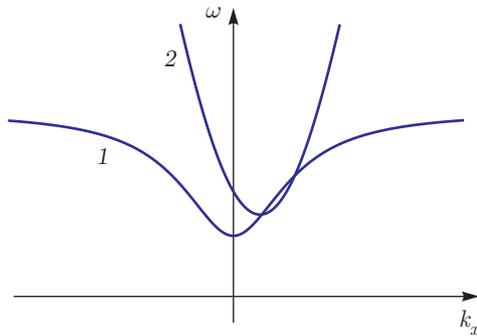


Рис. 6. Две волны магнито-Пуанкаре, одна магнито-строфическая волна: 1 — $\omega = \omega_1(k_x)$; 2 — $\omega = \omega_2(k_x - k_{x1}) + \omega_1(k_{x1})$

ные над плоскостью $k_x k_y$, являются выпуклыми. На рис. 3 показано, что кривые $\omega = \omega_1(k_x)$ и $\omega = \omega_1(k_x - k_{x1}) + \omega_1(k_{x1})$ (второе слагаемое в условии синхронизма) могут пересекаться, а значит, поверхности $\omega_1(\mathbf{k})$ и поверхность $\omega_1(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_1)$ могут пересекаться вдоль некоторой кривой. Точки пересечения отвечают волне магнито-Пуанкаре с частотой, равной сумме частот, и волновым векторам, равным сумме волновых векторов двух первых волн. Это означает, что условие синхронизма выполняется для трех волн магнито-Пуанкаре, поэтому возможно их нелинейное взаимодействие.

Условие синхронизма для трех магнито-строфических волн имеет вид

$$\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) = \omega_2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2).$$

Нижний индекс «2» относится к магнито-строфической моде. Для того чтобы понять, может ли реализоваться такое условие, обратимся к рис. 4, на котором кривая 1 определяет первое слагаемое в условии синхронизма, кривая 2 описывает второе слагаемое, а наличие пересечения говорит о пересечении дисперсионных поверхностей, т. е. существуют такие \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , при которых условие синхронизма выполняется.

В случае взаимодействия одной магнито-строфической и одной волны магнито-Пуанкаре может получиться магнито-строфическая волна с условием синхронизма

$$\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2) = \omega_2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$$

(рис. 5) или магнито-Пуанкаре волна с условием синхронизма

$$\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) = \omega_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$$

(рис. 6). В обоих случаях наличие пересечения поверхностей означает существование таких \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , при которых условия синхронизма будут выполнены и может иметь место трехволновое взаимодействие.

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ТРЕХВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В настоящем разделе асимптотическим методом многомасштабных разложений развита теория слабонелинейных волн, получены уравнения трехволновых взаимодействий.

Перепишем исследуемую систему (2.1)–(2.5) в удобном для дальнейшего анализа виде. Для этого в уравнениях (2.2)–(2.5) раскроем производные произведений и вычтем из этих уравнений уравнение (2.1). Получим

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h v_x}{\partial x} + \frac{\partial h v_y}{\partial y} = 0, \tag{3.1}$$

$$h \frac{\partial v_x}{\partial t} + h(\mathbf{v}\nabla)v_x + gh \frac{\partial h}{\partial x} - h(\mathbf{B}\nabla)B_x + B_0 B_x - hf v_y = 0, \tag{3.2}$$

$$h \frac{\partial v_y}{\partial t} + h(\mathbf{v}\nabla)v_y + gh \frac{\partial h}{\partial y} - h(\mathbf{B}\nabla)B_y + B_0 B_y + hf v_x = 0, \tag{3.3}$$

$$h \frac{\partial B_x}{\partial t} + h(\mathbf{v}\nabla)B_x - h(\mathbf{B}\nabla)v_x + B_0 v_x = 0, \tag{3.4}$$

$$h \frac{\partial B_y}{\partial t} + h(\mathbf{v}\nabla)B_y - h(\mathbf{B}\nabla)v_y + B_0 v_y = 0. \tag{3.5}$$

Запишем систему (3.1)–(3.5) в матричном виде:

$$\tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{B}}^1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \tilde{\mathbf{B}}^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{u} = 0, \tag{3.6}$$

где \mathbf{u} — неизвестный вектор, $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}^1, \tilde{\mathbf{B}}^2, \tilde{\mathbf{C}}$ — матрицы:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} h \\ v_x \\ v_y \\ B_x \\ B_y \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \text{diag} \left(1 \quad h \quad h \quad h \quad h \right), \tag{3.8}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^1 = \begin{pmatrix} v_x & h & 0 & 0 & 0 \\ gh & hv_x & 0 & -hB_x & 0 \\ 0 & 0 & hv_x & 0 & -hB_x \\ 0 & -hB_x & 0 & hv_x & 0 \\ 0 & 0 & -hB_x & 0 & hv_x \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^2 = \begin{pmatrix} v_y & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & hv_y & 0 & -hB_y & 0 \\ gh & 0 & hv_y & 0 & -hB_y \\ 0 & -hB_y & 0 & hv_y & 0 \\ 0 & 0 & -hB_y & 0 & hv_y \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -hf & B_z & 0 \\ 0 & hf & 0 & 0 & B_z \\ 0 & B_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Для решения системы (3.6) используем асимптотический метод многомасштабных разложений [18, 21]. Решение системы представим в виде ряда по малому параметру ϵ :

$$\mathbf{u} = \epsilon \mathbf{u}_0 + \epsilon^2 \mathbf{u}_1 + \dots, \quad (3.12)$$

где \mathbf{u}_0 — решение линеаризованной системы (2.6)–(2.10), \mathbf{u}_1 — слагаемое, описывающее влияние квадратичной нелинейности. Выписывая слагаемые, пропорциональные ϵ^2 , получим систему линейных неоднородных уравнений для \mathbf{u}_1 , содержащую в правой части вековые слагаемые, приводящие к линейно растущим по времени решениям. При этом нарушается условие $\epsilon \mathbf{u}_1 \ll \mathbf{u}_0$ на больших масштабах. Поэтому для получения нелинейной поправки введем зависимость амплитуд линейных волн от «медленного» времени и больших линейных расстояний, что позволит обеспечить отсутствие вековых слагаемых на соответствующих масштабах. Для осуществления такой процедуры перейдем от переменных (t, x, y) к «быстрым» (T_0, X_0, Y_0) и «медленным» (T_1, X_1, Y_1) переменным в соответствии с выражениями

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \frac{\partial}{\partial X_1} + \dots, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y_0} + \frac{\partial}{\partial Y_1} + \dots \quad (3.15)$$

Таким образом найдем условие на медленные амплитуды, при котором вековые слагаемые обращаются в нуль. Это условие, называемое условием совместности, и определяет $\mathbf{u}_0(T_1, X_1, Y_1)$.

Подставим выражения (3.12) и (3.13)–(3.15) в систему (3.6). В первом порядке по малому параметру ϵ получим систему уравнений, эквивалентную линеаризованной системе уравнений мелкой воды (2.6)–(2.10):

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B}^1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{B}^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{C} \mathbf{u} = 0, \quad (3.16)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -hf & B_z & 0 \\ 0 & hf & 0 & 0 & B_z \\ 0 & B_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}^1 = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ gh & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ gh & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда дисперсионное соотношение (2.17) в матричном виде выглядит следующим образом:

$$\det(\mathbf{A}\omega - \mathbf{B}^1 k_x - \mathbf{B}^2 k_y - i\mathbf{C}) \equiv \det \Gamma = 0. \quad (3.19)$$

Запишем общий вид решения линейной задачи, найденного в предыдущем разделе:

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{n=1}^4 \int f(\mathbf{a}_n \exp(i\theta_n) + \text{c.c.}) d_{k_x} d_{k_y}. \quad (3.20)$$

Для анализа уравнений второго приближения по малому параметру ϵ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \epsilon \mathbf{K} &= \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}, & \epsilon \mathbf{L}^1 &= \tilde{\mathbf{B}}^1 - \mathbf{B}^1, \\ \epsilon \mathbf{L}^2 &= \tilde{\mathbf{B}}^2 - \mathbf{B}^2, & \epsilon \mathbf{M} &= \tilde{\mathbf{C}} - \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Тогда система матричных уравнений второго порядка запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{B}^1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} + \mathbf{B}^2 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial y} + \mathbf{C} \mathbf{u}_1 &= \\ = - \left(\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + \mathbf{L}^1 \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x} + \mathbf{L}^2 \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial y} + \mathbf{M} \mathbf{u}_0 \right) - \\ - \left(\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial T} + \mathbf{B}^1 \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X} + \mathbf{B}^2 \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial Y} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

В правой части полученных уравнений (3.22) второго приближения содержатся слагаемые, включающие найденные решения задачи первого приближения, которые могут быть резонансными для линейного оператора левой части. Из условия совместности системы уравнений (3.22), обеспечивающего ортогональность правой части ядру оператора \mathbf{G} , получим далее уравнения для медленно меняющихся

амплитуд линейных волн. Запишем уравнения (3.22) в виде

$$\mathbf{G} \mathbf{u}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0) + \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{z}}, \quad (3.23)$$

и пусть \mathbf{z} — собственный вектор оператора \mathbf{G}^* , сопряженного с оператором \mathbf{G} , тогда

$$\mathbf{z} \cdot (\mathbf{G} \mathbf{u}_1) = (\mathbf{G}^* \mathbf{z}) \cdot \mathbf{u}_1 = 0. \quad (3.24)$$

Отсюда непосредственно следует условие совместности:

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0) + \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{z}} = 0. \quad (3.25)$$

В нашем конкретном случае системы (3.22) оператор \mathbf{G} является действительной матрицей, и, следовательно, $\mathbf{G}^* = \mathbf{G}^T$, где \mathbf{G}^T — транспонированная матрица. Для нахождения собственных векторов транспонированной матрицы следует искать левые собственные векторы матрицы \mathbf{G} . Поскольку собственные числа матричного оператора \mathbf{G} совпадают с собственными числами транспонированной матрицы оператора \mathbf{G}^* , для собственных чисел транспонированной матрицы имеем следующее выражение:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{ghk^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \left(\frac{B_z}{h}\right)^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{ghk^2(ghk^2 + 2f^2) + f^2 \left[f^2 + 4 \left(\frac{B_z}{h}\right)^2 \right]}. \quad (3.26)$$

Будем обозначать левый собственный вектор системы как \mathbf{a}_i :

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i5}), \quad (3.27)$$

где $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда система алгебраических уравнений для первого собственного значения λ_1 и первого собственного вектора \mathbf{a}_1 имеет вид

$$\mathbf{a}_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & -k_x h & -k_y h & 0 & 0 \\ -k_x g h & \lambda_1 h & i h f & -i B_z & 0 \\ -k_y g h & -i h f & \lambda_1 h & 0 & -i B_z \\ 0 & -i B_z & 0 & \lambda_1 h & 0 \\ 0 & 0 & -i B_z & 0 & \lambda_1 h \end{pmatrix} = 0. \quad (3.28)$$

Из последних двух уравнений системы (3.28) следуют соотношения для a_{14} и a_{15} :

$$a_{14} = \frac{i B_z}{\lambda_1 h} a_{12}, \quad (3.29)$$

$$a_{15} = \frac{i B_z}{\lambda_1 h} a_{13}. \quad (3.30)$$

Из первого уравнения системы (3.28) следует соотношение

$$a_{11} = \frac{k_x g h}{\lambda_1} a_{12} + \frac{k_y g h}{\lambda_1} a_{13}. \quad (3.31)$$

Тогда, используя (3.29)–(3.31), второе и третье уравнения системы (3.28) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} -\frac{k_x^2 g h^2}{\lambda_1} a_{12} - \frac{k_x k_y g h^2}{\lambda_1} a_{13} + \\ + \left(\lambda_1 h + \frac{B_z^2}{\lambda_1 h} \right) a_{12} - i h f a_{13} = 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} -\frac{k_x k_y g h^2}{\lambda_1} a_{12} - \frac{k_y^2 g h^2}{\lambda_1} a_{13} + \\ + \left(\lambda_1 h + \frac{B_z^2}{\lambda_1 h} \right) a_{13} + i h f a_{12} = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Выразив a_{13} из (3.32) через a_{12} , запишем все компоненты собственного вектора \mathbf{a}_1 с точностью до константы в следующем виде:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} g \frac{ik_x h f \lambda_1 + k_y \lambda_1^2 h^3 + k_y h B_z^2}{ih f \lambda_1^2 - k_x k_y \lambda_1 g h^3} \\ 1 \\ \frac{\lambda_1^2 h^2 + b_z^2 + k_x^2 g h^3}{ih f \lambda_1 - k_x k_y g h^3} \\ \frac{i B_z}{\lambda_1 h} \\ \frac{i B_z \lambda_1^2 h^2 + i B_z^3 + i k_x^2 g B_z h^3}{ih^2 f \lambda_1 - k_x k_y g h^4} \end{pmatrix} a_{12}. \quad (3.34)$$

Таким образом, окончательное выражение для собственного вектора \mathbf{a}_i имеет вид

$$\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} igk_x h^3 f \lambda_i + gk_y \lambda_i^2 h^4 + gk_y h^2 B_z^2 \\ ih^2 f \lambda_i^2 - k_x k_y \lambda_i g h^4 \\ \lambda_i^3 h^3 + \lambda_i h B_z^2 + k_x^2 g \lambda_i h^4 \\ -B_z h f \lambda_i - ik_x k_y \lambda_i g B_z h^4 \\ i B_z \lambda_i^2 h^2 + i B_z^3 + i k_x^2 g B_z h^3 \end{pmatrix} \alpha, \quad (3.35)$$

где α — произвольная константа.

Рассмотрим далее первый случай межволнового взаимодействия, когда в линейной задаче имеются три волны магнито-Пуанкаре, удовлетворяющие условию синхронизма

$$\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2) = \omega_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \quad (3.36)$$

Запишем решение линейной задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= \alpha \mathbf{a}_1 \exp \{i[\omega_1(\mathbf{k}_1)t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}]\} + \\ &+ \beta \mathbf{a}_1 \exp \{i[\omega_1(\mathbf{k}_2)t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}]\} + \\ &+ \gamma \mathbf{a}_1 \exp \{i[\omega_1(\mathbf{k}_3)t - \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}]\} = \\ &= \mathbf{a}_1 [\alpha \exp(i\theta_1) + \beta \exp(i\theta_2) + \gamma \exp(i\theta_3)]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Обозначим $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$ и $\theta_1 + \theta_2 = \theta_3$. Условие совместности для этого конкретного случая содержит как резонансные, так и нерезонансные слагаемые и позволяет найти условие на медленно меняющиеся амплитуды α, β, γ , исключающее резонанс на соответствующей частоте:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot \left(\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + \mathbf{L}^1 \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x} + \mathbf{L}^2 \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial y} + \mathbf{M} \mathbf{u}_0 + \right. \\ \left. + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial T} + \mathbf{B}^1 \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X} + \mathbf{B}^2 \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial Y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Из всех слагаемых в левой части, будем рассматривать только те, которые дают резонанс с левой частью системы (3.22). Выпишем в качестве примера слагаемые, пропорциональные $\exp(i\theta_3)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{K} \mathbf{a}_1) \alpha \beta i \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial T} + \frac{\partial \theta_1}{\partial T} \right) + \\ + \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{L}^1 \mathbf{a}_1) \alpha \beta i \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial X} + \frac{\partial \theta_1}{\partial X} \right) + \\ + \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{L}^2 \mathbf{a}_1) \alpha \beta i \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial Y} + \frac{\partial \theta_1}{\partial Y} \right) + 2 \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{M} \mathbf{a}_1) \alpha \beta = \\ = -\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{A} \mathbf{a}_1) \frac{\partial \gamma}{\partial T} - \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{B}^1 \mathbf{a}_1) \frac{\partial \gamma}{\partial X} - \\ - \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{B}^2 \mathbf{a}_1) \frac{\partial \gamma}{\partial Y}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_2}{\partial T} + \frac{\partial \theta_1}{\partial T} &= \omega_1(\mathbf{k}_2) + \omega_1(\mathbf{k}_1), \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial X} + \frac{\partial \theta_1}{\partial X} &= k_{x2} + k_{x1}, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial Y} + \frac{\partial \theta_1}{\partial Y} &= k_{y2} + k_{y1}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{K} = \text{diag} \left(0 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_1 \right),$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 f & 0 & 0 \\ 0 & a_1 f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}^1 = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ ga_1 & ha_2 & 0 & -ha_4 & 0 \\ 0 & 0 & ha_2 & 0 & -ha_4 \\ 0 & -ha_4 & 0 & ha_2 & 0 \\ 0 & 0 & -ha_4 & 0 & ha_2 \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}^2 = \begin{pmatrix} a_3 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & ha_3 & 0 & -ha_5 & 0 \\ ga_1 & 0 & ha_3 & 0 & -ha_5 \\ 0 & -ha_5 & 0 & ha_3 & 0 \\ 0 & 0 & -ha_5 & 0 & ha_3 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Заменяя свертки собственного вектора \mathbf{a}_1 с матрицами $\mathbf{K}, \mathbf{M}, \tilde{\mathbf{L}}^1, \tilde{\mathbf{L}}^2$ на коэффициенты k, l^1, l^2, m и используя уравнение (3.39), получим общий вид уравнения для медленно меняющейся амплитуды γ . По такому же принципу получены уравнения для α и β : мы исключили слагаемые, пропорциональные соответственно $\exp(i\theta_1)$ и $\exp(i\theta_2)$ в условиях (3.36).

В результате получаются три уравнения для амплитуд α, β, γ :

$$a \frac{\partial \gamma}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \gamma}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \gamma}{\partial Y} = -i \{k [\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2)] + l^1(k_{x1} + k_{x2}) + l^2(k_{y1} + k_{y2}) + 2m\} \alpha \beta, \quad (3.44)$$

$$a \frac{\partial \alpha}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \alpha}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = -i \{k [\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_2)] + l^1(k_{x3} - k_{x2}) + l^2(k_{y3} - k_{y2}) + 2m\} \gamma \beta, \quad (3.45)$$

$$a \frac{\partial \beta}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \beta}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \beta}{\partial Y} = -i \{k [\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_1)] + l^1(k_{x3} - k_{x1}) + l^2(k_{y3} - k_{y1}) + 2m\} \gamma \alpha. \quad (3.46)$$

Таким образом, мы получили нелинейную систему уравнений (3.44)–(3.46) для трехволновых взаимодействий волн магнито-Пуанкаре, удовлетворяющих условию синхронизма (3.36).

Рассмотрим далее случай, когда условиям синхронизма удовлетворяют три магнитострофические волны:

$$\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) = \omega_2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \quad (3.47)$$

Обозначим $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и $\theta_3 = \theta_2 + \theta_1$. Решение системы ищем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 = & \phi \mathbf{a}_2 \exp \{i [\omega_2(\mathbf{k}_1)t - (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})]\} + \\ & + \psi \mathbf{a}_2 \exp \{i [\omega_2(\mathbf{k}_2)t - (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})]\} + \\ & + \chi \mathbf{a}_2 \exp \{i [\omega_2(\mathbf{k}_3)t - (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r})]\} = \\ = & \mathbf{a}_2 [\phi \exp(i\theta_1) + \psi \exp(i\theta_2) + \chi \exp(i\theta_3)]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Исключим резонансные слагаемые, пропорциональные $\exp(i\theta_1), \exp(i\theta_2)$ и $\exp(i\theta_3)$, в условии совместности для вектора \mathbf{a}_2 , аналогичном (3.38). В результате получим следующую систему уравнений, описывающую взаимодействие медленных амплитуд трех магнитострофических волн, удовлетворяющих (3.47):

$$a \frac{\partial \chi}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \chi}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \chi}{\partial Y} = -i \{k [\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2)] + l^1(k_{x1} + k_{x2}) + l^2(k_{y1} + k_{y2}) + 2m\} \phi \psi, \quad (3.49)$$

$$a \frac{\partial \phi}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \phi}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \phi}{\partial Y} = -i \{k [\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_2)] + l^1(k_{x3} - k_{x2}) + l^2(k_{y3} - k_{y2}) + 2m\} \chi \psi, \quad (3.50)$$

$$a \frac{\partial \psi}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \psi}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \psi}{\partial Y} = -i \{k [\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_1)] + l^1(k_{x3} - k_{x1}) + l^2(k_{y3} - k_{y1}) + 2m\} \chi \phi. \quad (3.51)$$

Эта система отличается от системы (3.44)–(3.46) тем, что берутся дисперсионные соотношения для магнитострофических волн, а также тем, что коэффициенты — это свертки соответствующих матриц с собственным вектором \mathbf{a}_2 . Кроме того, для каждого вида взаимодействия находятся свои \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , удовлетворяющие условиям синхронизма для конкретных волн.

Рассмотрим случай, когда условиям синхронизма удовлетворяют две волны магнито-Пуанкаре и одна магнитострофическая волна:

$$\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2) = \omega_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \quad (3.52)$$

Как и раньше, $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$ и $\theta_1 + \theta_2 = \theta_3$. Решения системы ищем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 = & \phi \mathbf{a}_2 \exp \{i [\omega_2(\mathbf{k}_1)t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}]\} + \\ & + \alpha \mathbf{a}_1 \exp \{i [\omega_1(\mathbf{k}_2)t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}]\} + \\ & + \beta \mathbf{a}_1 \exp \{i [\omega_1(\mathbf{k}_3)t - \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}]\}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

В данном случае исключая резонансные слагаемые, пропорциональные $\exp(i\theta_1), \exp(i\theta_2)$ и $\exp(i\theta_3)$, необходимо для каждого уравнения брать его проекцию на свой собственный вектор: \mathbf{a}_1 для магнито-Пуанкаре волны и \mathbf{a}_2 для магнитострофической волны, аналогично (3.38). Таким образом, с помощью нижних индексов коэффициентов, полученных свертками собственных векторов \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 с матрицами $\mathbf{K}, \mathbf{M}, \tilde{\mathbf{L}}^1, \tilde{\mathbf{L}}^2$, обозначим, с какими векторами сворачивалась матрица. В результате получим систему, описывающую взаимодействие двух волн магнито-Пуанкаре и магнитострофической волны, удовлетворяющих условию (3.52):

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial \beta}{\partial T} + b_{11}^1 \frac{\partial \beta}{\partial X} + b_{11}^2 \frac{\partial \beta}{\partial Y} = \\ = -i \{k_{12} [\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2)] + l_{12}^1(k_{x1} + k_{x2}) + \\ + l_{12}^2(k_{y1} + k_{y2}) + 2m_{12}\} \alpha \phi, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} a_{22} \frac{\partial \phi}{\partial T} + b_{22}^1 \frac{\partial \phi}{\partial X} + b_{22}^2 \frac{\partial \phi}{\partial Y} = \\ = -i \{k_{21} [\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_2)] + l_{21}^1(k_{x3} - k_{x2}) + \\ + l_{21}^2(k_{y3} - k_{y2}) + 2m_{21}\} \beta \alpha, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial \alpha}{\partial T} + b_{11}^1 \frac{\partial \alpha}{\partial X} + b_{11}^2 \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = \\ = -i \{k_{12} [\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_1)] + l_{12}^1(k_{x3} - k_{x1}) + \\ + l_{12}^2(k_{y3} - k_{y1}) + 2m_{12}\} \beta \phi. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Рассмотрим четвертый случай трехволнового взаимодействия: взаимодействие двух магнитострофических волн и одной волны магнито-Пуанкаре:

$$\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) = \omega_2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \quad (3.57)$$

Обозначив $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и $\theta_3 = \theta_2 + \theta_1$, решение системы ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 = & \alpha \mathbf{a}_1 \exp \{i[\omega_1(\mathbf{k}_1)t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}]\} + \\ & + \phi \mathbf{a}_2 \exp \{i[\omega_2(\mathbf{k}_2)t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}]\} + \\ & + \psi \mathbf{a}_2 \exp \{i[\omega_2(\mathbf{k}_3)t - \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}]\}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Исключаем резонансные слагаемые, пропорциональные $\exp(i\theta_1)$, $\exp(i\theta_2)$ и $\exp(i\theta_3)$ в условиях совместности для \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 . В результате получим систему уравнений, описывающую взаимодействие двух магнитострофических и одной магнито-Пуанкаре волн, удовлетворяющих (3.57):

$$\begin{aligned} a_{22} \frac{\partial \psi}{\partial T} + b_{22}^1 \frac{\partial \psi}{\partial X} + b_{22}^2 \frac{\partial \psi}{\partial Y} = \\ = -i \{k_{21} [\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2)] + l_{21}^1 (k_{x1} + k_{x2}) + \\ + l_{21}^2 (k_{y1} + k_{y2}) + 2m_{21}\} \alpha \phi, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial \alpha}{\partial T} + b_{11}^1 \frac{\partial \alpha}{\partial X} + b_{11}^2 \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = \\ = -i \{k_{12} [\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_2)] + l_{12}^1 (k_{x3} - k_{x2}) + \\ + l_{12}^2 (k_{y3} - k_{y2}) + 2m_{12}\} \psi \phi, \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} a_{22} \frac{\partial \phi}{\partial T} + b_{22}^1 \frac{\partial \phi}{\partial X} + b_{22}^2 \frac{\partial \phi}{\partial Y} = \\ = -i \{k_{21} [\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_1)] + l_{21}^1 (k_{x3} - k_{x1}) + \\ + l_{21}^2 (k_{y3} - k_{y1}) + 2m_{21}\} \psi \alpha. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Таким образом, в данном разделе получены системы нелинейных уравнений (3.44)–(3.46), (3.49)–(3.51), (3.54)–(3.56), (3.59)–(3.61) для трехволновых взаимодействий в МГД-течениях вращающейся тяжелой жидкости со свободной границей в приближении мелкой воды.

4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОЛН МАГНИТО-ПУАНКАРЕ И МАГНИТОСТРОФИЧЕСКИХ ВОЛН

В данном разделе мы используем полученные уравнения трехволновых взаимодействий (трех волн магнито-Пуанкаре, трех магнитострофических

волн, двух волн магнито-Пуанкаре и одной магнитострофической волны, двух магнитострофических волн и одной волны магнито-Пуанкаре) для качественного анализа трансформации волн в слабонелинейном приближении [19].

4.1. Распадные неустойчивости

Рассмотрим взаимодействие трех волн магнито-Пуанкаре. Перепишем систему (3.44)–(3.46) в виде

$$a \frac{\partial \gamma}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \gamma}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \gamma}{\partial Y} = f_{13} \alpha \beta, \quad (4.1)$$

$$a \frac{\partial \alpha}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \alpha}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = f_{12} \gamma \beta, \quad (4.2)$$

$$a \frac{\partial \beta}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \beta}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \beta}{\partial Y} = f_{13} \gamma \alpha, \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} f_{11} = & -i \{k [\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2)] + l^1 (k_{x1} + k_{x2}) + \\ & + l^2 (k_{y1} + k_{y2}) + 2m\}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} f_{12} = & -i \{k [\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_2)] + l^1 (k_{x3} - k_{x2}) + \\ & + l^2 (k_{y3} - k_{y2}) + 2m\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} f_{13} = & -i \{k [\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_1)] + l^1 (k_{x3} - k_{x1}) + \\ & + l^2 (k_{y3} - k_{y1}) + 2m\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Будем интересоваться распространением волны магнито-Пуанкаре амплитуды γ и трансформацией этой волны вследствие нелинейности. В начальный момент времени пренебрегаем обратным влиянием волн амплитуд α и β и принимаем амплитуду исходной волны неизменной, $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$. Из (4.1)–(4.3) имеем линейную систему уравнений

$$a \frac{\partial \alpha}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \alpha}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = f_{12} \gamma_0 \beta, \quad (4.7)$$

$$a \frac{\partial \beta}{\partial T} + b^1 \frac{\partial \beta}{\partial X} + b^2 \frac{\partial \beta}{\partial Y} = f_{13} \gamma_0 \alpha. \quad (4.8)$$

В матричном виде система (4.7), (4.8) имеет вид

$$\begin{pmatrix} a \frac{\partial}{\partial T} + b^1 \frac{\partial}{\partial X} + b^2 \frac{\partial}{\partial Y} & -f_{12} \gamma_0 \\ -f_{13} \gamma_0 & a \frac{\partial}{\partial T} + b^1 \frac{\partial}{\partial X} + b^2 \frac{\partial}{\partial Y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0. \quad (4.9)$$

Ищем решение этой системы уравнений в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \exp [i(\Omega T - K_x X - K_y Y)]. \quad (4.10)$$

Здесь Ω и K_x, K_y — частота и компоненты волнового вектора для «медленного» времени T и больших линейных размеров X и Y . В результате получаем характеристическую систему

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ai\Omega - ib^1K_x - ib^2K_y & -f_{12}\gamma_0 \\ -f_{13}\gamma_0 & ai\Omega - ib^1K_x - ib^2K_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.11)$$

которая имеет нетривиальные решения при условии $\det \mathbf{A} = 0$. В этом случае дисперсионное соотношение между Ω и \mathbf{K} ,

$$a\Omega - b^1K_x - b^2K_y = \pm i\sqrt{|f_{12}||f_{13}|\gamma_0}, \quad (4.12)$$

описывает распадную неустойчивость волны магнито-Пуанкаре, распадающуюся на две волны магнито-Пуанкаре с инкрементом

$$\Gamma = \frac{\sqrt{|f_{12}||f_{13}|\gamma_0}}{a}. \quad (4.13)$$

Отсюда следует, что величина Γ зависит от $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, а также от $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$. Если распадается волна с частотой ω_3 и волновым вектором \mathbf{k}_3 , то получившиеся волны имеют из условий синхронизма частоты ω_1 и $\omega_3 - \omega_1$ и волновые векторы \mathbf{k}_1 и $\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1$. Выражение для Γ симметрично относительно ω_1 и ω_2 и относительно \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , поэтому величина Γ достигает максимума, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$, а $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3/2$. Таким образом, инкремент имеет вид

$$\Gamma = \frac{|f_{11}^*|\gamma_0}{a}, \quad (4.14)$$

где

$$f_{11}^* = -i \left\{ k \left[\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_1 \frac{\mathbf{k}_3}{2} \right] + l^1 \frac{k_{x3}}{2} + l^2 \frac{k_{y3}}{2} + 2m \right\}. \quad (4.15)$$

Таким образом, волна магнито-Пуанкаре с частотой ω_3 и волновым вектором \mathbf{k}_3 распадается на две волны магнито-Пуанкаре с частотами $\omega_3/2$ и волновыми векторами $\mathbf{k}_3/2$.

Рассмотрев трехволновое взаимодействие магнито-трофических волн, описываемое системой уравнений (3.49)–(3.51), когда $\chi \gg \phi, \psi$, получим инкремент Γ для амплитуд волн ϕ и ψ :

$$\Gamma = \frac{\sqrt{|f_{22}||f_{23}|\chi_0}}{a}, \quad (4.16)$$

где

$$f_{22} = -i \left\{ k[\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_2)] + l^1(k_{x3} - k_{x2}) + l^2(k_{y3} - k_{y2}) + 2m \right\}, \quad (4.17)$$

$$f_{23} = -i \left\{ k[\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_1)] + l^1(k_{x3} - k_{x1}) + l^2(k_{y3} - k_{y1}) + 2m \right\}. \quad (4.18)$$

Коэффициенты a, k, l^1, l^2, m определяются следующим образом:

$$a = \mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{a}_2), \quad k = \mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{K}\mathbf{a}_2), \quad l^1 = \mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{L}^1\mathbf{a}_2),$$

$$l^2 = \mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{L}^2\mathbf{a}_2), \quad m = \mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{M}\mathbf{a}_2).$$

Поэтому инкремент Γ зависит как от $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, так и от $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$. Из условий синхронизма $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ и $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$, а также с учетом того, что выражение для инкремента Γ симметрично относительно ω_1 и ω_2 и \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , получаем, что Γ достигает максимума, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$ и $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3/2$:

$$\Gamma = \frac{f_{22}^*\chi_0}{a}, \quad (4.19)$$

где

$$f_{22}^* = -i \left\{ k \left[\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_2 \frac{\mathbf{k}_3}{2} \right] + l^1 \frac{k_{x3}}{2} + l^2 \frac{k_{y3}}{2} + 2m \right\}. \quad (4.20)$$

Таким образом, магнито-трофическая волна с частотой ω_3 и волновым вектором \mathbf{k}_3 распадается на две магнито-трофические волны с частотами $\omega_3/2$ и волновыми векторами $\mathbf{k}_3/2$.

Рассматривая теперь взаимодействие двух волн магнито-Пуанкаре и одной магнито-трофической волны, когда $\beta \gg \alpha, \phi$, описываемое системой (3.54)–(3.56), получим инкремент роста для волн с амплитудами α и ϕ :

$$\Gamma = \frac{\sqrt{|f_{32}||f_{33}|\beta_0}}{a}, \quad (4.21)$$

где

$$f_{32} = -i \left\{ k_{21}[\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_2)] + l_{21}^1(k_{x3} - k_{x2}) + l_{21}^2(k_{y3} - k_{y2}) + 2m_{21} \right\}, \quad (4.22)$$

$$f_{33} = -i \left\{ k_{12}[\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_1)] + l_{12}^1(k_{x3} - k_{x1}) + l_{12}^2(k_{y3} - k_{y1}) + 2m_{12} \right\}, \quad (4.23)$$

причем номер собственного вектора, с которым сворачивается матрица, как и выше, обозначен в нижних индексах коэффициентов. Инкремент, как и выше, зависит от $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$. Здесь ω_3 и \mathbf{k}_3 — параметры распадающейся волны — считаются известными, неизвестными примем \mathbf{k}_1 и ω_1 , а параметры \mathbf{k}_2 и ω_2 найдем из условий синхронизма

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1, \quad \omega_2 = \omega_3 - \omega_1. \quad (4.24)$$

Инкремент будет максимальным, когда выполняется следующая система:

$$(\Gamma(k_{x1}, k_{y1}))_{k_{x1}} = 0, \quad (4.25)$$

$$(\Gamma(k_{x1}, k_{y1}))_{k_{y1}} = 0, \quad (4.26)$$

решения которой $k_{x1} = k_{x1}^0$ и $k_{y1} = k_{y1}^0$. Отсюда следует, что инкремент неустойчивости имеет вид

$$\Gamma = \frac{\sqrt{|f_{32}^*| |f_{33}^*|} \beta_0}{a}, \quad (4.27)$$

где

$$f_{32}^* = -i \{ k_{21} [\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1^0)] + l_{21}^1 k_{x1}^0 + l_{21}^2 k_{y1}^0 + 2m_{21} \}, \quad (4.28)$$

$$f_{33}^* = -i \{ k_{12} [\omega_1(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_1^0)] + l_{12}^1 (k_{x3} - k_{x1}^0) + l_{12}^2 (k_{y3} - k_{y1}^0) + 2m_{12} \}. \quad (4.29)$$

Таким образом, волна магнито-Пуанкаре с частотой ω_3 и волновым вектором \mathbf{k}_3 распадается на магнито-Пуанкаревскую волну с частотой ω_1^0 и волновым вектором \mathbf{k}_1^0 и на волну магнито-Пуанкаре с частотой $\omega_3 - \omega_1^0$ и волновым вектором $\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1^0$.

И наконец, рассматривая случай резонанса двух магнито-Пуанкаревских волн и одной волны магнито-Пуанкаре, описываемый системой уравнений (3.59)–(3.61), при условии $\psi \gg \alpha, \phi$, получим, что волна магнито-Пуанкаре с амплитудой α и магнито-Пуанкаревская волна с амплитудой ϕ возрастают с инкрементом

$$\Gamma = \frac{\sqrt{|f_{42}| |f_{43}|} \psi_0}{a}, \quad (4.30)$$

где

$$f_{42} = -i \{ k_{12} [\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_2)] + l_{12}^1 (k_{x3} - k_{x2}) + l_{12}^2 (k_{y3} - k_{y2}) + 2m_{12} \}, \quad (4.31)$$

$$f_{43} = -i \{ k_{21} [\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_1)] + l_{21}^1 (k_{x3} - k_{x1}) + l_{21}^2 (k_{y3} - k_{y1}) + 2m_{21} \}. \quad (4.32)$$

Инкремент Γ зависит от f_{42} и f_{43} , которые, в свою очередь, зависят от параметров взаимодействующих волн: частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и волновых векторов $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$. Аналогично предыдущему случаю, получим инкремент неустойчивости

$$\Gamma = \frac{\sqrt{|f_{42}^*| |f_{43}^*|} \psi_0}{a}, \quad (4.33)$$

где

$$f_{42}^* = -i \{ k_{12} [\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_2(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1^0)] + l_{12}^1 k_{x1}^0 + l_{12}^2 k_{y1}^0 + 2m_{12} \}, \quad (4.34)$$

$$f_{43}^* = -i \{ k_{21} [\omega_2(\mathbf{k}_3) - \omega_1(\mathbf{k}_1^0)] + l_{21}^1 (k_{x3} - k_{x1}^0) + l_{21}^2 (k_{y3} - k_{y1}^0) + 2m_{21} \}. \quad (4.35)$$

Отсюда следует, что магнито-Пуанкаревская волна с частотой ω_3 и волновым вектором \mathbf{k}_3 распадается на волну магнито-Пуанкаре с частотой ω_1^0 и волновым вектором \mathbf{k}_1^0 и на магнито-Пуанкаревскую волну с частотой $\omega_3 - \omega_1^0$ и волновым вектором $\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1^0$.

Заметим, что в случае межмодовых взаимодействий в конфигурациях с двумя магнито-Пуанкаревскими волнами и одной волной магнито-Пуанкаре, а также с двумя волнами магнито-Пуанкаре и одной магнито-Пуанкаревской волной, имеет место передача энергии из магнито-Пуанкаревской моды в моду магнито-Пуанкаре и наоборот, из моды магнито-Пуанкаре в магнито-Пуанкаревскую.

4.2. Параметрическое усиление

Другой вид неустойчивости, который описывается нелинейными системами уравнений, это неустойчивости слияния. Они представляют собой усиление третьей волны в результате нелинейного взаимодействия двух изначально распространяющихся волн.

Рассмотрим снова взаимодействие трех волн магнито-Пуанкаре. Пусть две волны имеют некоторые амплитуды α_0 и β_0 , и эти амплитуды много больше амплитуды третьей волны магнито-Пуанкаре. Будем интересоваться распространением этих двух волн и их взаимодействием вследствие нелинейности. Тогда на больших масштабах в момент, когда нелинейные взаимодействия становятся существенными, влияние волн магнито-Пуанкаре с амплитудами α_0 и β_0 на третью волну описывается первым уравнением нелинейной системы (3.44), которое также можно записать в удобном виде:

$$\mathbf{G}\gamma = f_{11}\alpha\beta. \quad (4.36)$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (4.36) представим в виде

$$\gamma = \gamma_0 \exp[i(\Omega T - K_x X - K_y Y)]. \quad (4.37)$$

Подставляя это решение в уравнение (4.36), получим

$$\Omega = \frac{-if_{11}\alpha_0\beta_0 + b^1K_x + b^2K_y}{a}. \quad (4.38)$$

Таким образом, третья волна, взаимодействующая с двумя другими, экспоненциально возрастает с инкрементом неустойчивости

$$\Gamma = \frac{|f_{11}|\alpha_0\beta_0}{a}, \quad (4.39)$$

где f_{11} определяется в (4.4). Получившаяся волна магнито-Пуанкаре имеет частоту $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ и волновой вектор $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$.

Рассмотрим взаимодействие трех магнитострофических волн. Оно описывается системой (3.49)–(3.51). Покажем, что в результате нелинейного взаимодействия на больших масштабах могут реализоваться такие же типы неустойчивостей, что и в случае трех волн магнито-Пуанкаре. Пусть распространяются две магнитострофические волны с амплитудами ϕ_0 и ψ_0 , причем их амплитуды много больше амплитуды третьей волны χ . Из первого уравнения нелинейной системы (3.49)–(3.51) получим инкремент неустойчивости

$$\Gamma = \frac{|f_{21}|\psi_0\phi_0}{a}, \quad (4.40)$$

где

$$f_{21} = -i \{ k[\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2)] + l^1(k_{x1} + k_{x2}) + l^2(k_{y1} + k_{y2}) + 2m \}. \quad (4.41)$$

Получившаяся магнитострофическая волна имеет частоту $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ и волновой вектор $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$.

Рассмотрим трехволновое взаимодействие, описываемое нелинейной системой (3.54)–(3.56), двух волн магнито-Пуанкаре и одной магнитострофической волны. В этом случае неустойчивость усиления задается условием $\alpha_0, \phi_0 \gg \beta$. Из уравнения для амплитуды β волны магнито-Пуанкаре получим инкремент неустойчивости

$$\Gamma = \frac{|f_{31}|\alpha_0\phi_0}{a}, \quad (4.42)$$

где

$$f_{31} = -i \{ k_{12}[\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2)] + l_{12}^1(k_{x1} + k_{x2}) + l_{12}^2(k_{y1} + k_{y2}) + 2m_{12} \}. \quad (4.43)$$

Получившаяся волна магнито-Пуанкаре — сумма магнитострофической волны с частотой ω_1 и волновым вектором \mathbf{k}_1 и волны магнито-Пуанкаре с частотой ω_2 и волновым вектором \mathbf{k}_2 . Частота получившейся волны $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, ее волновой вектор $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$.

Последний случай трехволнового взаимодействия — две магнитострофические волны и одна волна магнито-Пуанкаре — имеет такие же неустойчивости слияния, что и в предыдущем случае. Приняв амплитуду α волны магнито-Пуанкаре, амплитуду ψ суммарной магнитострофической волны и амплитуду ϕ оставшейся волны, получим аналогичную неустойчивость. Если $\psi \ll \alpha_0, \phi_0$, то инкремент имеет вид

$$\Gamma = \frac{|f_{41}|\phi_0\alpha_0}{a}, \quad (4.44)$$

где

$$f_{41} = -i \{ k_{21}[\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2)] + l_{21}^1(k_{x1} + k_{x2}) + l_{21}^2(k_{y1} + k_{y2}) + 2m_{21} \}. \quad (4.45)$$

Получившаяся магнитострофическая волна — сумма волны магнито-Пуанкаре с частотой ω_1 и волновым вектором \mathbf{k}_1 и магнитострофической волны с частотой ω_2 и волновым вектором \mathbf{k}_2 . Частота получившейся волны $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, волновой вектор этой волны $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развита слабонелинейная теория волновых взаимодействий в крупномасштабных течениях вращающегося слоя плазмы со свободной поверхностью в поле силы тяжести на ровной границе в вертикальном магнитном поле. Мы используем приближение мелкой воды магнитной гидродинамики для получения уравнений взаимодействия волновых пакетов волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн. Наличие вертикального магнитного поля обеспечивает выполнение условий синхронизма: три волны могут взаимодействовать, когда частоты и волновые векторы двух волн таковы, что сумма их частот равна частоте третьей волны и одновременно сумма волновых векторов этих волн равна волновому вектору третьей волны. В результате анализа дисперсионных поверхностей исследуемых волн обнаружено, что такое условие может выполняться для следующих конфигураций трех волн: три волны магнито-Пуанкаре (см. рис. 3), три магнитострофические волны (см. рис. 4), а также две

магнитострофические волны и одна волна магнито-Пуанкаре (см. рис. 5) и две волны магнито-Пуанкаре и одна магнитострофическая волна (см. рис. 6).

Получено слабонелинейное решение задачи асимптотическим методом многомасштабных разложений. Для каждого из обнаруженных видов взаимодействий найдены системы нелинейных уравнений (3.44)–(3.46), (3.49)–(3.51), (3.54)–(3.56), (3.59)–(3.61) для медленно меняющихся амплитуд взаимодействующих волн. Показано, что в слабонелинейном приближении имеются распадные неустойчивости и явления параметрического усиления. Обнаружено существование следующих типов распадных неустойчивостей: волна магнито-Пуанкаре распадается на две волны магнито-Пуанкаре с инкрементом (4.14); магнитострофическая волна — на две магнитострофические волны с инкрементом (4.19); волна магнито-Пуанкаре — на одну волну магнито-Пуанкаре и одну магнитострофическую волну с инкрементом (4.27); магнитострофическая волна — на одну магнитострофическую и одну волну магнито-Пуанкаре с инкрементом (4.33). Существует также четыре типа параметрического усиления волн: волн магнито-Пуанкаре с коэффициентом параметрического усиления (4.39), магнитострофических волн с коэффициентом усиления (4.40), усиление волны магнито-Пуанкаре в поле магнитострофической волны с коэффициентом усиления (4.42); усиление магнитострофической волны в поле волны магнито-Пуанкаре с коэффициентом параметрического усиления (4.44).

Работа выполнена при поддержке Программы № 9 «Экспериментальные и теоретические исследования объектов солнечной системы и звездных планетных систем» Президиума РАН и РФФИ (грант № 14-29-06065). Авторы признательны С. Ю. Добрыхотову за полезные обсуждения асимптотических методов многих масштабов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод уравнений вращающейся тяжелой магнитной жидкости в приближении мелкой воды на неровной поверхности

Здесь мы получим систему уравнений вращающейся мелкой воды на произвольной границе во внешнем магнитном поле для описания течений тяжелой магнитной жидкости со свободной границей. Для этого проинтегрируем в условиях гидростатичности трехмерные МГД-уравнения в поле силы тяжести во вращающейся системе отсчета по верти-

кали, используя граничные условия на нижней и на свободной границах. Из-за малости характерных вертикальных масштабов по сравнению с горизонтальными пренебрегаем интегралами от произведений малых флуктуаций. В результате получим систему уравнений для средних по высоте слоя скоростей и магнитных полей и для высоты слоя.

МГД-уравнения в поле тяжести во вращающейся системе отсчета с круговой частотой ω имеют вид

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{H} - \rho \mathbf{g} - 2\rho[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}], \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{A.3})$$

где ρ — плотность жидкости, \mathbf{v} — скорость жидкости в данной точке, p — давление, \mathbf{H} — магнитное поле, \mathbf{g} — ускорение свободного падения. В системе (A.1)–(A.3) уравнение (A.1) — уравнение изменения импульса, (A.2) — уравнение переноса магнитного поля, (A.3) — уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости. Перепишем уравнение (A.2) в тензорном виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)_\alpha &= [\nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]]_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} e_{\gamma\mu\nu} v_\mu H_\nu = \\ &= (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) \frac{\partial}{\partial x_\beta} v_\mu H_\nu = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\beta} H_\beta v_\alpha - \frac{\partial}{\partial x_\beta} v_\beta H_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Для того чтобы преобразовать слагаемые $\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ и $(\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{H}/4\pi$ из уравнения (A.1), а также слагаемые $\partial(H_\beta v_\alpha)/\partial x_\beta$ и $\partial(v_\beta H_\alpha)/\partial x_\beta$ из уравнения (A.4), воспользуемся известным математическим тождеством, удовлетворяющимся при $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}, \nabla)\mathbf{A} &= A_1 \partial_x \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + A_2 \partial_y \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \\ &+ A_3 \partial_z \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) = \\ &= A_1 \partial_x \begin{pmatrix} A_1^2 \\ A_1 A_2 \\ A_1 A_3 \end{pmatrix} + A_2 \partial_y \begin{pmatrix} A_1 A_2 \\ A_2^2 \\ A_2 A_3 \end{pmatrix} + \\ &+ A_3 \partial_z \begin{pmatrix} A_1 A_3 \\ A_2 A_3 \\ A_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Заменим также

$$H^2 = 4\pi\tilde{B}^2, \quad \tilde{p} = p + \frac{H^2}{8\pi}. \quad (\text{A.6})$$

Применяя тождество (A.5), получим уравнения в матричном виде из уравнений (A.1) и (A.4) при условии (A.3):

$$\begin{aligned} & \partial_t \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho v_1^2 - \tilde{B}_1^2 + \tilde{p} \\ \rho v_1 v_2 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \\ \rho v_1 v_3 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_3 \\ 0 \\ v_1 \tilde{B}_2 - v_2 \tilde{B}_1 \\ v_1 \tilde{B}_3 - v_3 \tilde{B}_1 \end{pmatrix} + \\ & + \partial_y \begin{pmatrix} \rho v_1 v_2 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \\ \rho v_2^2 - \tilde{B}_2^2 + \tilde{p} \\ \rho v_2 v_3 - \tilde{B}_2 \tilde{B}_3 \\ v_2 \tilde{B}_1 - v_1 \tilde{B}_2 \\ 0 \\ v_2 \tilde{B}_3 - v_3 \tilde{B}_2 \end{pmatrix} + \partial_z \begin{pmatrix} \rho v_1 v_3 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_3 \\ \rho v_2 v_3 - \tilde{B}_2 \tilde{B}_3 \\ \rho v_3^2 - \tilde{B}_3^2 + \tilde{p} \\ v_3 \tilde{B}_1 - v_1 \tilde{B}_3 \\ v_3 \tilde{B}_2 - v_2 \tilde{B}_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} -2\rho(\omega_2 v_3 - \omega_3 v_2) \\ -2\rho(\omega_3 v_1 - \omega_1 v_3) \\ -\rho g - 2\rho(\omega_1 v_2 - \omega_2 v_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

Считаем, что жидкость вращается с круговой частотой ω , направленной вдоль z , тогда система (A.7) запишется в виде

$$\begin{aligned} & \partial_t \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho v_1^2 - \tilde{B}_1^2 + \tilde{p} \\ \rho v_1 v_2 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \\ \rho v_1 v_3 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_3 \\ 0 \\ v_1 \tilde{B}_2 - v_2 \tilde{B}_1 \\ v_1 \tilde{B}_3 - v_3 \tilde{B}_1 \end{pmatrix} + \\ & + \partial_y \begin{pmatrix} \rho v_1 v_2 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \\ \rho v_2^2 - \tilde{B}_2^2 + \tilde{p} \\ \rho v_2 v_3 - \tilde{B}_2 \tilde{B}_3 \\ v_2 \tilde{B}_1 - v_1 \tilde{B}_2 \\ 0 \\ v_2 \tilde{B}_3 - v_3 \tilde{B}_2 \end{pmatrix} + \partial_z \begin{pmatrix} \rho v_1 v_3 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_3 \\ \rho v_2 v_3 - \tilde{B}_2 \tilde{B}_3 \\ \rho v_3^2 - \tilde{B}_3^2 + \tilde{p} \\ v_3 \tilde{B}_1 - v_1 \tilde{B}_3 \\ v_3 \tilde{B}_2 - v_2 \tilde{B}_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\rho\omega v_2 \\ -2\rho\omega v_1 \\ -\rho g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Для слоя жидкости в вертикальном внешнем поле $\tilde{\mathbf{B}}_0$ над неровной поверхностью $f_s(x, y)$ граничные условия выглядят следующим образом:

$$v_3|_{z=f_s} = v_1|_{z=f_s} \frac{\partial f_s}{\partial x} + v_2|_{z=f_s} \frac{\partial f_s}{\partial y}, \quad (\text{A.9})$$

$$v_3|_{z=h} = \frac{\partial h}{\partial t} + v_1|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + v_2|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{B}_3|_{z=f_s} = \tilde{B}_1|_{z=f_s} \frac{\partial f_s}{\partial x} + \tilde{B}_2|_{z=f_s} \frac{\partial f_s}{\partial y}, \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{B}_3|_{z=h} = \tilde{B}_0 + \tilde{B}_1|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + \tilde{B}_2|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (\text{A.12})$$

Сделаем замену $\tilde{\mathbf{B}} = \sqrt{\rho}\mathbf{B}$. Тогда третье уравнение системы (A.8) принимает вид

$$\begin{aligned} & \partial_t v_3 + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v_3 - (\mathbf{B} \cdot \nabla)B_3 + \\ & + \frac{\partial_z(p + \rho B^2/2)}{\rho} = -g. \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

Считается, что давление слабо отличается от магнитогидростатического:

$$\partial_z \left(p + \frac{\rho}{2} B^2 \right) = \partial_z \tilde{p} = \rho g. \quad (\text{A.14})$$

Для получения системы уравнений мелкой воды необходимо проинтегрировать систему уравнений (A.8) по вертикали. Учитывая уже введенное магнитогидростатическое приближение (A.14), получаем

$$\begin{aligned}
 & \int_{f_s}^h \partial_t \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ 0 \\ \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \end{pmatrix} dz + \int_{f_s}^h \partial_x \begin{pmatrix} \rho v_1^2 - \tilde{B}_1^2 + \tilde{p} \\ \rho v_1 v_2 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \\ v_1 \tilde{B}_2 - v_2 \tilde{B}_1 \\ v_1 \tilde{B}_3 - v_3 \tilde{B}_1 \end{pmatrix} dz + \\
 & + \int_{f_s}^h \partial_y \begin{pmatrix} \rho v_1 v_2 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \\ \rho v_2^2 - \tilde{B}_2^2 + \tilde{p} \\ 0 \\ v_2 \tilde{B}_1 - v_1 \tilde{B}_2 \\ 0 \\ v_2 \tilde{B}_3 - v_3 \tilde{B}_2 \end{pmatrix} dz + \\
 & + \int_{f_s}^h \partial_z \begin{pmatrix} \rho v_1 v_3 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_3 \\ \rho v_2 v_3 - \tilde{B}_2 \tilde{B}_3 \\ \tilde{p} \\ v_3 \tilde{B}_1 - v_1 \tilde{B}_3 \\ v_3 \tilde{B}_2 - v_2 \tilde{B}_3 \\ 0 \end{pmatrix} dz = \\
 & = \begin{pmatrix} 2\rho\omega v_2(h - \alpha) \\ -2\rho\omega v_1(h - \alpha) \\ -\rho g(h - \alpha) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (A.15)
 \end{aligned}$$

Проинтегрируем также уравнение несжимаемости $\nabla \mathbf{v} = 0$:

$$\int_{f_s}^h \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} dz = 0. \quad (A.16)$$

Для преобразования уравнений системы (A.15) воспользуемся правилом Лейбница дифференцирования функции под знаком интеграла:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x)}^{a(x)} f(x, z) dz &= \int_{b(x)}^{a(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, z) dz + \\
 &+ f|_a \frac{\partial a}{\partial x} - f|_b \frac{\partial b}{\partial x}. \quad (A.17)
 \end{aligned}$$

Тогда уравнение (A.16) преобразуется к следующему:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h v_1 dz - v_1|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + v_1|_{z=f_s} \frac{\partial f_s}{\partial x} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h v_2 dz - v_2|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} + v_2|_{z=f_s} \frac{\partial f_s}{\partial y} + \\
 & + v_3|_{z=h} - v_3|_{z=f_s} = 0. \quad (A.18)
 \end{aligned}$$

Подстановка граничных условий (A.9), (A.10) в (A.18) дает

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h v_1 dz - v_1|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + v_1|_{z=f_s} \frac{\partial f_s}{\partial x} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h v_2 dz - v_2|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} + v_2|_{z=f_s} \frac{\partial f_s}{\partial y} + \\
 & + \frac{\partial h}{\partial t} + v_1|_{z=h} \frac{\partial f_s}{\partial x} + v_2|_{z=h} \frac{\partial f_s}{\partial y} - \\
 & - v_1|_{z=f_s} \frac{\partial f_s}{\partial x} + v_2|_{z=f_s} \frac{\partial f_s}{\partial y} = 0, \quad (A.19)
 \end{aligned}$$

или, после приведения подобных слагаемых,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h v_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h v_2 dz + \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (A.20)$$

На свободной границе давление постоянно и равно $\tilde{p}|_{z=h} = p_0$. Поэтому из третьего уравнения системы (A.15) получим

$$\int_z^h \frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} dz = -\rho g(h - z), \quad (A.21)$$

$$\tilde{p}(z) = p_0 + \rho g(h - z). \quad (A.22)$$

Выпишем первое уравнение системы (A.15)

$$\begin{aligned}
 & \rho \int_{f_s}^h \frac{\partial v_1}{\partial t} dz + \rho \int_{f_s}^h \frac{\partial (v_1^2 - B_1^2)}{\partial x} dz + \int_{f_s}^h \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} dz + \\
 & + \rho \int_{f_s}^h \frac{\partial (v_1 v_2 - B_1 B_2)}{\partial y} dz + \rho \int_{f_s}^h \frac{\partial (v_1 v_3 - B_1 B_3)}{\partial z} dz = \\
 & = 2\rho\omega v_2(h - f_s). \quad (A.23)
 \end{aligned}$$

Третье слагаемое принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h [p_0 + \rho g(h-z)] dz - p_0 \frac{\partial h}{\partial x} + \\ & \quad + [p_0 + \rho g(h-f_s)] \frac{\partial f_s}{\partial x} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[p_0(h-f_s) \rho g h(h-f_s) - \frac{\rho g}{2} h^2 + \frac{\rho g}{2} f_s^2 \right] - \\ & \quad - p_0 \frac{\partial h}{\partial x} + [p_0 + \rho g(h-f_s)] \frac{\partial f_s}{\partial x} = \\ & \quad = \rho g(h-f_s) \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

После подстановки граничных условий и приведения подобных слагаемых получаем

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{f_s}^h v_1 dz + \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h v_1^2 dz - \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h B_1^2 dz + \\ & \quad + \rho g(h-f_s) \frac{\partial h}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h v_1 v_2 dz - \\ & \quad - \rho \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h B_1 B_2 dz - \rho B_0 (B_1|_{z=h} - B_1|_{z=f_s}) = \\ & \quad = 2\rho\omega v_2(h-f_s). \quad (\text{A.25}) \end{aligned}$$

Считаем, что горизонтальные составляющие магнитного поля малы по сравнению с вертикальным полем B_0 . Изменение горизонтальной составляющей вдоль оси z обусловлено, прежде всего, сдвигом в слое. Поэтому выражение для производной горизонтальной составляющей магнитного поля запишем как

$$\frac{\partial B_1}{\partial z} = -\frac{B_1}{h-f_s}, \quad (\text{A.26})$$

$$B_1|_{z=h} - B_1|_{z=f_s} = \frac{\partial B_1}{\partial z} (h-f_s) = -B_1. \quad (\text{A.27})$$

Тогда уравнение (A.25) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{f_s}^h v_1 dz + \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h v_1^2 dz - \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h B_1^2 dz + \\ & \quad + \rho g(h-f_s) \frac{\partial h}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h v_1 v_2 dz - \\ & \quad - \rho \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h B_1 B_2 dz + \rho B_0 B_1 = 2\rho\omega v_2(h-f_s). \quad (\text{A.28}) \end{aligned}$$

Второе уравнение системы (A.15) преобразуется аналогично:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{f_s}^h v_2 dz + \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h v_1 v_2 dz - \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h B_1 B_2 dz + \\ & \quad + \rho g(h-f_s) \frac{\partial h}{\partial y} + \rho \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h v_2^2 dz - \\ & \quad - \rho \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h B_2^2 dz + \rho B_0 B_2 = -2\rho\omega v_1(h-f_s). \quad (\text{A.29}) \end{aligned}$$

Четвертое и пятое уравнения системы (A.15) принимают вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{f_s}^h B_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h v_2 B_1 dz - \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h v_1 B_2 dz + B_0 v_1 = 0, \quad (\text{A.30}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{f_s}^h B_2 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h v_1 B_2 dz - \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h v_2 B_1 dz + B_0 v_2 = 0. \quad (\text{A.31}) \end{aligned}$$

Шестое уравнение обращается в тождество.

Введем средние по высоте слоя скорости \bar{v}_i и магнитные поля \bar{B}_i (обозначим при этом $\hat{h} = h - f_s$):

$$v_i = \bar{v}_i + \acute{v}_i = \frac{1}{\hat{h}} \int_{f_s}^h v_i dz + \acute{v}_i, \quad (\text{A.32})$$

$$B_i = \bar{B}_i + \acute{B}_i = \frac{1}{\hat{h}} \int_{f_s}^h B_i dz + \acute{B}_i, \quad (\text{A.33})$$

где $i = 1, 2$. Пренебрегая проинтегрированными квадратами величин со штрихами, а также перекрестными членами, заменим индексы на x и y и из уравнений (A.20), (A.28)–(A.31) получим систему (2.1)–(2.5), в которой $h = \hat{h}$.

Таким образом, получена система МГД-уравнений с вращением в вертикальном магнитном поле в приближении мелкой воды.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, J. L. Ballester, and B. M. Shergelashvili, *Astron. Astrophys.* **470**, 815 (2007).
2. K. Heng and A. Spitkovsky, *Astrophys. J.* **703**, 1819 (2009).
3. N. A. Inogamov and R. A. Sunyaev, *Astron. Lett.* **36**, 848 (2010).
4. K. Heng and A. P. Showman, *Ann. Rev. Earth and Planetary Sci.* **43**, 509 (2015).
5. K. Heng and J. Workman, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **213**, 27 (2014).
6. P. A. Gilman, *J. Atmosph. Sci.* **24**, 101 (1967).
7. S. M. Tobias, P. H. Diamond, and D. W. Hughes, *Astrophys. J. Lett.* **667**, L113 (2007).
8. A. M. Balk, *Astrophys. J.* **796**, 143 (2014).
9. P. A. Gilman, *Astrophys. J. Lett.* **544**, L79 (2000).
10. К. В. Карельский, А. С. Петросян, С. В. Тарасевич, *ЖЭТФ* **140**, 606 (2011).
11. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and S. V. Tarasevich, *Phys. Scripta* **155**, 014024 (2013).
12. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and S. V. Tarasevich, *ЖЭТФ* **146**, 352 (2014).
13. H. De Sterck, *Phys. Plasmas* **8**, 3293 (2001).
14. P. J. Dellar, *Phys. Plasmas* **10**, 581 (2003).
15. V. Zeitlin, *Nonlin. Proc. in Geophys.* **20**, 893 (2013).
16. G. K. Vallis, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation*, Cambridge Univ. Press (2006).
17. J. Y.-K. Cho, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **366**, 4477 (2008).
18. L. Ostrovsky, *Asymptotic Perturbation Theory of Waves*, World Sci., Singapore (2014).
19. G. Falkovich, *Fluid Mechanics: a Short Course for Physicists*, Cambridge Univ. Press (2011).
20. Е. А. Кузнецов, *Нелинейные волны*, ч. 1, Новосибирский гос. ун-т (2015).
21. Е. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман, Ю. К. Энгельбрехт, *Нелинейные эволюционные уравнения*, Валгус, Таллин (1984).