

ЛИНЕЙНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ КУЭТТА И ПУАЗЕЙЛЯ

С. Г. Чефранов^{a*}, А. Г. Чефранов^{b**}

^a *Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук
119017, Москва, Россия*

^b *Восточно-средиземноморский университет, Фамагуста, Северный Кипр*

Поступила в редакцию 29 сентября 2015 г.

Показана возможность линейной неустойчивости плоского течения Куэтта уже при числах Рейнольдса $Re > Re_{eth} \approx 139$, что согласуется с полученной в эксперименте величиной $Re_{eth} \approx 150 \pm 5$ [16, 17]. Этот новый результат линейной теории гидродинамической устойчивости получен на основе отказа от традиционно используемого предположения о продольной периодичности возмущений вдоль направления движения жидкости. Установлено, что ранее существовавшее представление о линейной устойчивости этого течения при любых сколь угодно больших числах Рейнольдса непосредственно связано именно с использованием в линейной теории предположения о разделении пространственных переменных поля возмущений и их продольной периодичности. При отказе от указанных предположений также и для плоского течения Пуазейля получена новая величина порогового числа Рейнольдса $Re_{eth} \approx 1035$, которая с точностью около 4 % согласуется с экспериментом, в отличие от более чем 500-процентного различия для ранее известной оценки $Re_{eth} \approx 5772$, полученной также в рамках линейной теории, но при использовании «нормальной» формы для возмущений [2].

DOI: 10.7868/S0044451016050151

1. ВВЕДЕНИЕ

До настоящего времени существует проблема понимания механизма потери устойчивости ламинарного режима, в результате которого происходит, в конечном счете, переход к новому турбулентному режиму течения среды. Действительно, в линейной теории гидродинамической устойчивости для течения Хагена–Пуазейля (ХП) в круглой трубе переход от ламинарного режима к любому иному режиму течения не может происходить ни при каком конечном пороговом числе Рейнольдса Re_{eth} , что не согласуется с экспериментальными данными. Аналогичный вывод линейной теории имеется до сих пор и для плоского течения Куэтта (ПК) [1]. Для плоского течения Пуазейля (ПП) известная оценка порогового числа Рейнольдса, сделанная на основе линейной теории, более чем в пять раз превышает наблюдаемое в эксперименте значение [1–3].

В результате, указанный переход между ламинарным и турбулентным режимами для течений ХП, ПК и ПП описывают пока лишь на основе нелинейной теории конечно-амплитудных возмущений [1]. При этом, однако, до сих пор не является доказанным сам факт того, что такой переход всегда должен соответствовать именно жесткому конечно-амплитудному механизму потери устойчивости для течений ХП, ПК и ПП, а не мягкому механизму, описываемому линейной теорией для предельно малых по амплитуде возмущений.

В настоящей работе показано, что линейная неустойчивость течения ПК для конечных чисел Рейнольдса $Re > Re_{eth}$ все же возможна, но лишь при условии отказа от использования традиционной «нормальной» формы возмущений (в которой предполагаются периодические изменения поля возмущений вдоль направления основного потока при наличии разделения переменных, описывающих пространственные изменения). Ранее аналогичный вывод для течения ХП был уже получен именно при этом условии отказа от предположения о разделении пространственных переменных [4–6]. В рамках новой теории линейной гидродинамической устой-

* E-mail: schefranov@mail.ru

** E-mail: Alexander.chefranov@emu.edu.tr

чивости получено условие линейной неустойчивости для течения ПП, которое гораздо лучше соответствует количественно данным экспериментальных наблюдений, чем известная ранее оценка [2]. Для течения ПК получено условие линейной неустойчивости, которое также неплохо согласуется с данными экспериментов [7, 8], касающихся именно пороговых условий перехода от ламинарного к вихревому, но еще не турбулентному режиму течения.

В развиваемой здесь линейной теории рассматривается возможность квазипериодических продольных (вдоль направления основного потока) изменений, когда не разделяются продольные и поперечные (ортогональные к твердым границам течения) пространственные переменные в описании поля возмущений. Использован энергетический метод, учитывающий существование различных периодов продольных изменений для различных поперечных мод, соответствующих эволюции предельно малых (поперечных и к направлению потока, и к нормали к твердым границам) возмущений поля скорости и нулевым граничным условиям на твердых граничных поверхностях для течений ПК и ПП.

В настоящей работе, как и в [4–6] для течения ХП, показано, что для течений ПК и ПП допустимым механизмом линейной неустойчивости этих течений может являться механизм реализации диссипативной неустойчивости. В свою очередь, механизм этой неустойчивости характерен для многих физических систем, для которых важную роль играют возмущения с отрицательной энергией [9–11]. Этот механизм ранее связывался с понятием «вековой» неустойчивости [7].

Работа состоит из пяти разделов. В разд. 2 дана новая постановка задачи о линейной устойчивости течений ПП и ПК, основанная на использовании новой формы представления пространственной зависимости поля возмущений (без привлечения традиционного рассмотрения чисто периодических полей с разделяющимися переменными). В разд. 3 энергетический метод применен для течения ПП и для течения ПК. В разд. 4 обсуждается сравнение полученных теоретических выводов с данными экспериментов, а в разд. 5 приведены выводы и их обсуждение.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим обычные представления [1] для течений ПП и ПК вязкой несжимаемой жидкости, огра-

ниченной по оси z двумя плоскими параллельными твердыми поверхностями, находящимися друг от друга на расстоянии H .

Для течения ПП (рис. 1а), распространяющегося вдоль положительного направления оси x , начало координат выбрано в середине слоя (где скорость течения имеет максимум), а неподвижные граничные поверхности имеют координаты $z = H/2$, $z = -H/2$. Для течения ПК (рис. 1б) начало координат также выберем в середине слоя и будем считать, что жидкость в середине слоя при $z = 0$ имеет нулевую скорость. При этом, как и в работе [3], предполагаем, что твердая граница, имеющая координату $z = -H/2$, движется со скоростью $-V_{max}$, а другая твердая граница (находящаяся при $z = H/2$) имеет скорость V_{max} , ориентированную вдоль положительного направления оси x .

Линейная устойчивость этих течений исследуется в простейшем случае, когда существуют только предельно малые возмущения поперечной (к направлению потока и к нормали к твердым границам), направленной вдоль оси y компоненты поля скорости. Пусть при этом поле скорости и давления возмущения не зависят от координаты y . Будем вместо «нормальной» формы рассматривать квазипериодические возмущения, для которых переменные не разделяются при описании пространственных изменений поля возмущений в зависимости от координат x и z (см. рис. 1).

В безразмерном виде имеем для поля возмущений уравнение

$$\frac{\partial V_y}{\partial \tau} + U(z) \operatorname{Re} \frac{\partial V_y}{\partial x} = \Delta V_y, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (1)$$

и граничные условия

$$V_y(z = \pm 1) = 0,$$

$$U(z) = 1 - z^2 \quad \text{для ПП,}$$

$$U(z) = z \quad \text{для ПК.}$$

Здесь V_y — безразмерная скорость при нормировке размерной величины скорости возмущения на V_{max} , пространственные координаты приведены к безразмерному виду с помощью величины $H/2$, а временная переменная $\tau = 4t\nu/H^2$, где t — размерное время, ν — коэффициент кинематической вязкости, $\operatorname{Re} = V_{max}H/2\nu$ — число Рейнольдса для течений ПП и ПК (определение числа Рейнольдса при этом совпадает с используемым в работах [2, 3]). В данной постановке задачи отсутствуют остальные компоненты возмущения поля скорости, предполагаемые, для простоты, равными нулю. Отметим, что

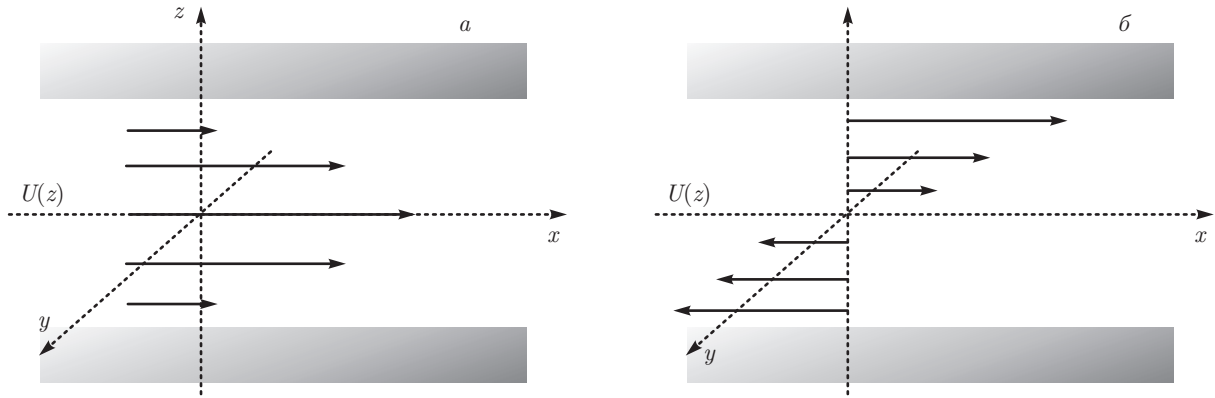


Рис. 1. Профили основного потока $U(z)$, нормированного на величину V_{max} , для течений ПП, $U(z) = 1 - z^2$ (а) и ПК, $U(z) = z$ (б). Показаны твердые границы при $z = \pm 1$ (в единицах величины полутолщины слоя $H/2$)

в работах [2, 3] рассматривается другая поперечная компонента возмущения — не V_y , как здесь, а V_z . Это приводит к необходимости вместо относительно простого уравнения (1) решать [2, 3] гораздо более сложное уравнение Орра–Зоммерфельда. Последнее утверждение очевидно в силу невозможности исключить зависимость V_z от z (без нарушения требования нулевого граничного условия) и следующей из уравнения неразрывности необходимости рассмотрения ненулевой хотя бы еще одной компоненты поля скорости возмущения.

Представим решение линейного уравнения (1) в следующей комплексной форме, удовлетворяющей тождественно нулевому граничному условию по z на твердых границах:

$$V_y = e^{\lambda\tau} V, \tag{2}$$

где

$$V = \sum_{n=0}^N A_n(x) \sin(\pi z n) + B_n(x) \cos \frac{\pi z(2n-1)}{2},$$

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \quad V = V_1 + iV_2, \quad A_n(x) = A_n(x + T_n), \\ B_n(x) = B_n(x + T_n), \quad T_n = 1/\alpha_n, \quad \max T_n = 1/\alpha_0, \\ \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_N.$$

Здесь определены новые периодические граничные условия по x , которые устанавливаются индивидуально для каждой моды с номером n ($n = 0, 1, 2, \dots, N$). Значения величин продольных периодов T_n могут быть представлены и в более общей форме, когда $T_n = q_n/k_n\alpha_n$, где q_n, k_n — произвольные натуральные числа.

Таким образом, вместо традиционного «нормального» представления возмущений (с единым

для всех мод периодическим граничным условием, когда $T_n = T = \text{const}$ для всех n) мы вводим N периодических граничных условий вдоль оси x , которые определяются индивидуально для каждой поперечной моды с номером n .

Указанная новая постановка задачи теории линейной гидродинамической устойчивости в форме (1), (2) для продольных квазипериодических возмущений отличается от ранее использованной и может лучше соответствовать экспериментальным данным (где реально наблюдается только квазипериодическая, а не чисто периодическая пространственная изменчивость амплитуды возмущений вдоль направления движения жидкости между твердыми плоскостями [1, 3]).

3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Рассмотрим на основе выражений (1), (2) эволюцию средней энергии (на единицу массы):

$$E = \frac{1}{2} \langle V_y V_y^* \rangle = \frac{e^{2\lambda_1\tau}}{2} \langle V V^* \rangle, \\ I_0 = \langle V V^* \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz \frac{1}{T_{max}} \int_0^{T_{max}} dx V V^*, \tag{3}$$

где можно, например, положить $T_{max} = 1/\alpha_0$.

3.1. Устойчивость течения ПП

Из выражений (1) для течения ПП можно получить уравнение для показателя экспоненты λ_1 , определяющего рост (в случае $\lambda_1 > 0$) или убывание (при $\lambda_1 < 0$) энергии со временем (для простоты в

случае течения ПП можно положить $B_n = 0$ и проводить суммирование по n , начиная с $n = 1$ во всех суммах):

$$2\lambda_1 I_0 = I_1 \operatorname{Re} - I_2, \quad (4)$$

где

$$I_1 = - \left\langle U(z) \frac{\partial(VV^*)}{\partial x} \right\rangle = - \frac{1}{T_{max}} \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N q_{nm} \times \\ \times [A_n(T_{max})A_n^*(T_{max}) - A_n(0)A_n^*(0)], \\ q_{nm} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz (1-z^2) \sin(\pi z n) \sin(\pi z m) = \\ = \frac{4(-1)^{n+m+1}nm}{\pi^2(n^2-m^2)^2}, \quad \text{если } n \neq m,$$

$$I_2 = - \langle V^* \Delta V + V \Delta V^* \rangle > 0.$$

Для вывода уравнения (4) необходимо, используя уравнение (1) (и получаемое из него уравнение для комплексно-сопряженной функции V_y^*), записать эволюционное уравнение для энергии E с учетом определения (3) и подставить в него решение в виде (2).

Рассмотрим, для простоты, случай, когда в (2)–(4) $A_n(x) = A_{0n} \exp(2i\pi\alpha_n x)$. При этом из (4) получаем

$$I_2 = 2 \sum_{n=1}^N (n^2 + 4\alpha_n^2) \pi^2 A_{0n}^2, \quad I_0 = \sum_{n=1}^N A_{0n}^2, \quad (5)$$

$$I_1 = 2\alpha_1 \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N q_{nm} A_{0n} A_{0m} \sin^2(\pi(p_n - p_m)), \quad (6)$$

где $p_n = \alpha_n/\alpha_1$. Пусть при этом

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \alpha_2/\alpha_1 \equiv p, \quad p_3 = \alpha_3/\alpha_1 \dots, \\ p_N = \alpha_N/\alpha_1.$$

В указанном представлении для параметров p и p_n , $n \geq 3$ величина параметра α_1 считается фиксированной и, для простоты, положим ее равной единице, что соответствует периоду возмущения моды с номером 1, совпадающему с базовым продольным (вдоль оси x) периодом, определяемым величиной полутолщины $H/2$ слоя жидкости. При этом, например, величине $p = 2$ соответствует продольный период возмущения $H/4$, а для параметра $p = 0.5$ продольный период возмущения имеет уже величину H . Сходимость суммы в выражении (5) в пределе $N \rightarrow \infty$ выполняется при следующем ограничении на начальную амплитуду:

$$A_{0n} \leq 1/n^{(3+k)/2}, \quad k > 0.$$

Из (4) можно получить следующий критерий линейной неустойчивости течения ПП:

$$\operatorname{Re} > \operatorname{Re}_{th} = I_2/I_1. \quad (7)$$

С учетом выражений (5), (6) проведем минимизацию правой части соотношения (7) по параметру α_1 (при этом определенные выше параметры p_n , как уже было отмечено, считаются фиксированными и не учитывается их зависимость от параметра α_1). Нетрудно показать, что величина правой части выражения (7) достигает минимума при $\alpha_1 = \alpha_{1min} = \sqrt{a/b}$. В результате для минимального по α_1 порогового числа Рейнольдса получаем

$$\operatorname{Re}_{thmin} = \frac{\pi^4 \sqrt{ab}}{2c}, \quad (8)$$

где

$$a = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1+k}}, \quad b = 4 \sum_{n=1}^N \frac{p_n^2}{n^{3+k}}, \\ c = - \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N (-1)^{n+m} \frac{\sin^2(\pi(p_n - p_m))}{(n^2 - m^2)^2 (nm)^{(1+k)/2}}. \quad (9)$$

Выражение (8) в общем случае нужно минимизировать по свободным, непрерывно изменяющимся параметрам k, p, p_3, \dots, p_N .

Для простоты ограничимся здесь случаем, когда минимизацию в (8) надо проводить только по первым двум параметрам, k и p , а остальные параметры будем предполагать фиксированными достаточно медленно возрастающими (для сходимости ряда в (9) в выражении для b пусть $p_n = n^{k/8}$ при $n \geq 3$) функциями от соответствующего порядкового номера $n = 3, 4, \dots, N$.

Результат расчетов на основе выражений (8), (9) для течения ПП приведен на рис. 2а. Минимальное пороговое число Рейнольдса при этом равно $\operatorname{Re}_{thmin} = 1035.3$, и оно достигается в случае $N = 100$ при $k = 0.675$ и $p = 0.506$.

3.2. Устойчивость течения ПК

Рассмотрим теперь уравнение (1) для случая ПК. При этом важно, чтобы в представлении решения уравнения (1) в виде (2) были отличными от

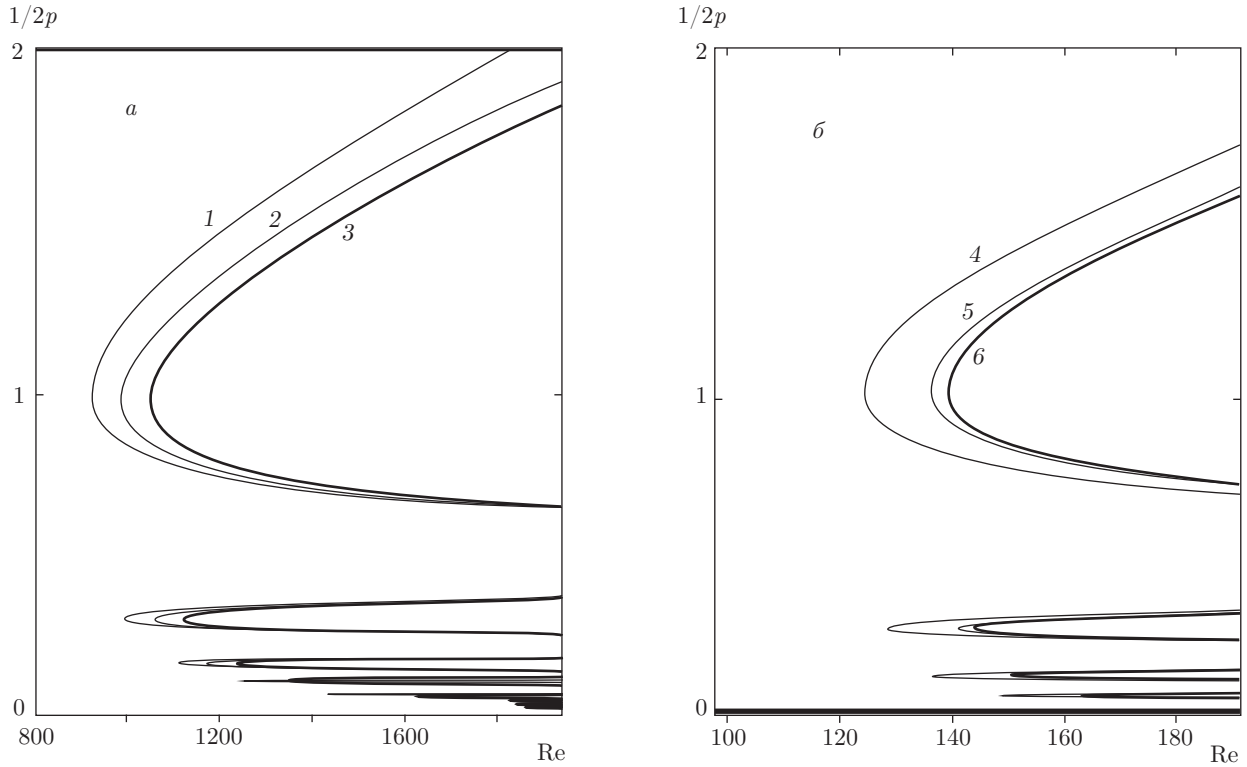


Рис. 2. Кривые нейтральной устойчивости для течений ПП, $k = 0.675$ (а) и ПК, $k = 1.7037$ (б): кривая 1 — $N = 2$, $Re_{th\ min} = 906.35$, $1/2p = 1.008$; 2 — $N = 10$, $Re_{th\ min} = 972.825$, $1/2p = 0.988$; 3 — $N = 100$, $Re_{th\ min} = 1035.11$, $1/2p = 0.988$; 4 — $N = 2$, $Re_{th\ min} = 124.273$, $1/2p = 1.029$; 5 — $N = 10$, $Re_{th\ min} = 136.475$, $1/2p = 1.029$; 6 — $N = 100$, $Re_{th\ min} = 139.077$, $1/2p = 1.029$

нуля коэффициенты B_n . Например, в случае $A_n = B_n$ имеем

$$\begin{aligned}
 I_0 &= 2 \sum_{n=0}^N A_{0n}^2, \quad I_2 = 2\pi^2 \sum_{n=0}^N A_{0n}^2 \times \\
 &\times \left[4\alpha_0^2 p_n^2 + \frac{1}{2} \left(n^2 + \frac{(2n-1)^2}{4} \right) \right], \\
 p_n &= \frac{\alpha_n}{\alpha_0}, \quad p_0 = 1, \quad p_1 = p, \\
 p_n &= n^{k/8}, \quad n > 1, \\
 I_1 &= 8\alpha_0 \times \\
 &\times \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^N \frac{(-1)^{n+m} A_{0n} A_{0m} \sin^2(\pi(p_n - p_m))}{\pi^2} \times \\
 &\times \left\{ \frac{n(m-1/2)}{[n^2 - (m-1/2)^2]^2} + \frac{m(n-1/2)}{[m^2 - (n-1/2)^2]^2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Используя выражения (10) и (7), можно найти порог устойчивости для течения ПК.

Так, минимизируя правую часть (7) по параметру α_0 , получаем опять формулу (8), но в которой

уже имеем (например, при $A_{0n} = A_0/(1+n)^{(3+k)/2}$)

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \frac{n^2 + (2n-1)^2/4}{(1+n)^{3+k}}, \\
 b &= 4 \sum_{n=0}^N \frac{p_n^2}{(1+n)^{3+k}}, \\
 c &= \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^N \frac{(-1)^{n+m}}{[(1+n)(1+m)]^{(3+k)/2}} \times \\
 &\times \sin^2(p_n - p_m) \left\{ \frac{n(m-1/2)}{[n^2 - (m-1/2)^2]^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m(n-1/2)}{[m^2 - (n-1/2)^2]^2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Результат расчета минимального порогового числа Рейнольдса для течения ПК, проведенный на основе выражений (8), (11), приведен на рис. 2б. При этом минимальное пороговое число $Re_{th\ min} \approx 139.077$ получено при $N = 100$, $k = 1.7037$ и $p = 0.4859$.

Отметим, что, благодаря рассмотрению в (1) только поперечной компоненты возмущения поля

скорости, сохраняется поток массы для суперпозиции основного течения и поля возмущения. Спонтанное возникновение таких возмущений, конечно, не исключено, но становится маловероятным при увеличении степени гладкости граничной поверхности. С другой стороны, при лабораторном моделировании течений ПП и ПК такие возмущения могут быть вполне искусственно созданы [7, 8].

В масштабированном виде фрагменты нейтральной кривой, соответствующей условиям (7)–(9) (см. рис. 2а), приведены в форме зависимости величины $1/2p$ от Re для течения ПП. На рис. 2б кривые нейтральной устойчивости приведены для течения ПК, где использован критерий неустойчивости (7), (8) при учете (10) и (11).

4. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

4.1. Течение ПП

Для течения ПП известны, например, результаты экспериментов [12]. В работе [12], в отличие от настоящей работы и [3], величина числа Рейнольдса Re_D определена через среднюю по сечению скорость потока $V_a = 2V_{max}/3$ и через полную толщину H слоя. При этом в [12] минимальная пороговая величина числа Рейнольдса оказывается равной

$$Re_D = V_a H / \nu = Re_{Dth} \approx 1440.$$

Связь с определением числа Рейнольдса Re в настоящей работе имеет вид $Re_D = 4 Re / 3$. С учетом этого получаем, что порог устойчивости течения ПП в [12] соответствует величина $Re > Re_{th} \approx 1080$, что количественно менее чем на 4% отличается от полученной в настоящей работе оценки $Re_{minth} \approx 1035$.

4.2. Течение ПК

Для течения ПК в работах [7, 8] представлены результаты экспериментов, в которых анализ устойчивости проводится на основе искусственно создаваемых возмущений течения ПК, возникающих за счет внесения в поток тонкой нити радиуса ρ ($0.0036 \leq \rho/h \leq 0.1714$, $h = H/2$ [7, 8]). Нить в этих экспериментах натягивалась вдоль оси y (см. рис. 1б), и создаваемые ею возмущения явно имели ненулевую компоненту V_y поля скорости возмущения, эволюция которой рассматривается в настоящей работе на основе уравнения (1). В работах [7, 8] течение ПК точно соответствует схеме, изображенной на рис. 1б и очень незначительно модифицируется наличием

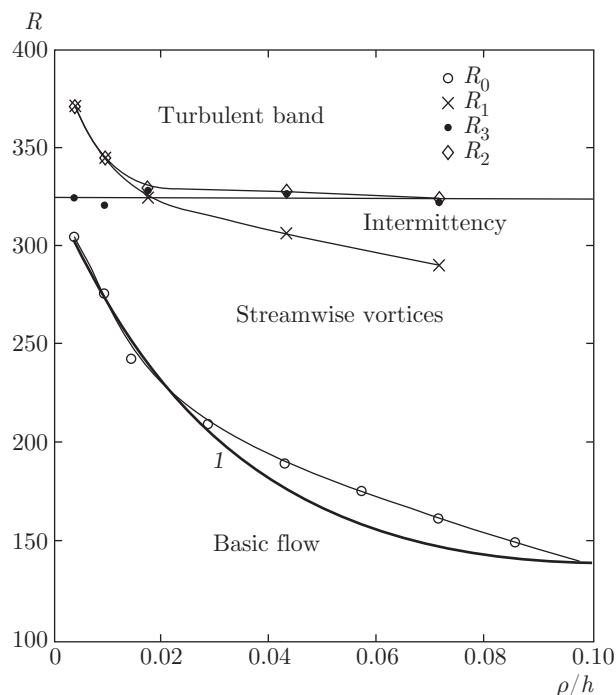


Рис. 3. Рисунок 12 из работы [8] с наложенным на него графиком (кривая 1) фрагмента кривой 6 с рис. 2б. При этом величина $1/2p$ изменяется вдоль оси абсцисс в пределах от 0.67 (что соответствует $\rho/h = 0.005$) до 1.029 (что соответствует $\rho/h = 0.1$)

обтекаемой нити. Точность определения порогового числа Рейнольдса (число Рейнольдса при этом совпадает с введенным в настоящей работе) в этих экспериментах составляет от 2.5 до 4%.

В работах [7, рис. 2] и [8, рис. 12] представлены диаграммы перехода от базового ламинарного течения ПК к вихревому относительно регулярному (еще не турбулентному) режиму, когда число Рейнольдса превышает первое пороговое значение $Re > R_0(\rho/h)$, зависящее от толщины нити (рис. 3).

Для сравнения результатов настоящей работы с экспериментом [7, 8] на рис. 3 воспроизведен рис. 12 из [8] и на нем приведен фрагмент кривой нейтральной устойчивости (кривая с номером 6 на рис. 2б). При этом область, находящаяся выше кривой 1 на рис. 3 соответствует линейной (экспоненциальной) неустойчивости течения ПК. Таким образом, ограниченная кривой 1 область линейной неустойчивости для течения ПК очень близко (иногда совпадая в пределах точности эксперимента) подходит к экспериментальной кривой, описывающей границу перехода при $Re > R_0$ от наблюдаемого ламинарного режима к вихревому режиму, который предшеству-

ет возникновению турбулентных пятен в потоке. При этом турбулентные пятна в потоке наблюдаются [7, 8] уже при числах Рейнольдса $Re > R_2 \approx 325$.

Таким образом, из рис. 2б и 3 видно, что пороговое число Рейнольдса чувствительно к изменению параметра p . Например, пороговое число Рейнольдса при $1/2p = 0.5$ становится бесконечно большим, но $Re_{th} \approx 305$ уже при $1/2p = 0.67$ и $Re_{th} \approx 139$ при $1/2p = 1.029$. Это характеризует важное влияние параметра p , связанного с частотно-волновыми свойствами поля возмущений, не зависящими от их амплитуды. Отметим, что и полученная в экспериментах [7, 8] чувствительность порогового числа Рейнольдса к изменению толщины нити может характеризовать влияние на величину R_0 не амплитуды возмущения, а именно отношения длин волн исходных возмущений. Отметим, что диапазон изменения параметра $1/2p$ на рис. 3 соответствует уменьшению $1/2p$ в 1.536 раз от 1.029 до 0.67. При этом, действительно, в работе [8, рис. 13а] отмечено (близкое к 1.5) изменение примерно в 1.375 раз длины волны наблюдаемых вихревых возмущений при изменении параметра ρ/h от 0.01 до 0.085. Поэтому экспериментальная кривая на рис. 3 (и на рис. 12 в [8]) для R_0 не изменилась бы при замене на оси абсцисс параметра ρ/h на соответствующую длину волны возмущений, выраженную (как и параметр $1/p$ настоящей работы) в единицах $h = H/2$. Отметим также возможность связи величины характерных продольных периодов исходных возмущений и наблюдаемых поперечных периодов (вдоль оси y на рис. 1б) вихревых возмущений при $Re > R_0$ в [7, 8].

При этом из приведенных (см. рис. 3, где $R = Re$) данных [7, 8] следует отсутствие зависимости второго порогового числа Рейнольдса $R_2 \approx 325$ (характеризующего переход к турбулентному режиму при $Re > R_2$) при изменении параметра ρ/h от 0.02 до 0.1, но имеется возрастание R_2 до 375 при уменьшении ρ/h от 0.02 до 0.005. Очевидно, что переход от вихревого к турбулентному режиму уже должен описываться нелинейными процессами, не рассмотренными в настоящей работе. Отметим, что после работ [7, 8] экспериментальные исследования, видимо, не были направлены на уточнение механизма перехода от ламинарного режима течения ПК к вихревому (нетурбулентному) режиму течения при $Re \geq R_0$. Основной целью экспериментов пока является лишь выяснение особенностей сосуществования турбулентных пятен и ламинарных областей в течении ПК при числах Рейнольдса, превышающих R_2 [13]. В этом смысле результаты настоящей работы могут стимулировать восполнение пробела в обла-

сти экспериментального исследования именно перехода от ламинарного к неламинарному режиму течения.

5. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Полученное в настоящей работе заключение о возможности линейной неустойчивости течений ПК и ПП выведено из уравнения (1) для эволюции поперечной компоненты возмущения поля скорости при условии, что правая часть уравнения не равна нулю из-за конечности коэффициента кинематической вязкости. При этом для возможности реализации неустойчивости важна не сама по себе правая часть уравнения (1) (и соответствующий ей интеграл I_2 в уравнении (4)), а следующее из нее при любом значении $\nu > 0$ нулевое граничное условие, которое уже учитывается в представлении возмущения в виде (2).

Ранее аналогичный механизм гидродинамической диссипативной неустойчивости был рассмотрен Л. Прандтлем (1921-22) при исследовании устойчивости ламинарного пограничного слоя и В. Гейзенбергом (1924), а также С. С. Линем (1944-45) при установлении линейной неустойчивости плоского течения Пуазейля. В работе [10] приведен пример диссипативной неустойчивости линейного двумерного осциллятора (также с линейным по скорости трением) во вращающейся системе координат, который ранее был рассмотрен как пример вековой неустойчивости [9]. В работе [10] при этом еще дополнительно (в [9] на это не обращено внимание) установлена связь указанной диссипативно-центробежной неустойчивости с нарушением киральной симметрии, определяющей механизм наблюдаемой циклон-антициклонной асимметрии в атмосферах быстро вращающихся планет. Понимание феномена диссипативной неустойчивости для течений около твердой граничной поверхности может также быть получено с помощью метода Ландау [19], примененного им для оценки критической скорости движения сверхтекучей жидкости в капилляре, на основе рассмотрения вихревых возмущений (ротоннов), имеющих отрицательную энергию.

Полученные здесь и в работах [4–6] (где установлены условия линейной неустойчивости для течения ХП по трубе с круглым поперечным сечением) выводы позволяют заполнить известный пробел в нелинейной теории [1], когда вместо затравочной линейной экспоненциальной неустойчивости до настоящего времени в этой теории рассматривают лишь статистику алгебраической неустойчивости.

Отметим также, что представляет интерес изучить приложения рассмотренной линейной неустойчивости к течению ПК, например, в связи с проблемой возникновения в океане волн-убийц, часто наблюдающихся именно в районах с достаточно сильными течениями (Курисио, Гольфстрим и т. д.), характеризуемых относительно большими сдвигами скорости [14]. При этом, действительно, ранее не рассматривался в качестве возможного механизма возбуждения таких волн, связанный с гидродинамической неустойчивостью соответствующих сдвиговых течений именно относительно предельно малых по амплитуде возмущений. Эти возмущения поля скорости, согласно рассмотренной выше теории, могут иметь компоненту, поперечную как горизонтальному направлению скорости течения, так и горизонтальному направлению, в котором эта скорость течения изменяется. Ясно, что компонента V_y скорости возмущения для рассмотренного в (1) течения ПК при этом может описывать вертикальные движения жидкости, которые, достигая поверхности воды, могут вызывать возникновение на ней аномальных по амплитуде волн.

Хотя известный механизм модуляционной неустойчивости [14–16] и основан на линейной теории, он содержит все же пороговое условие для амплитуды возмущения, когда неустойчивость реализуется при выполнении неравенства

$$A_0 > A_{0th} = \Delta\Omega/\sqrt{2}\omega_0k_0$$

(в работе [14] это условие записано в ином виде: $\varepsilon N > 1/\sqrt{2}$, $\varepsilon = k_0A_0$, $N = \omega_0/\Delta\Omega$), где A_0 , k_0 , ω_0 , $\Delta\Omega$ — соответственно начальная амплитуда, волновое число, частота волнового возмущения и частота модуляции. При этом важно, что в рассмотренном в настоящей статье механизме, связанном с линейной неустойчивостью течения ПК, полностью отсутствуют какие-либо условия для амплитуды возмущения.

Представляет интерес в дальнейшем рассмотреть применение развитого выше энергетического подхода в изложенной выше версии к оценке минимального порогового числа Рейнольдса для кругового течения Куэтта, для которого отсутствует проблема линейной устойчивости, характерная для течений ПК и ХП. Кроме того, желательны и прямые численные расчеты устойчивости течений ПК и ХП, аналогичные проведенным в работах [17, 18], для уточнения границ применимости энергетического метода.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-17-00806).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, т. 1, Гидрометеоздат, Санкт-Петербург (1992).
2. S. A. Orszag, J. Fluid Mech. **50**, 689 (1971).
3. S. A. Orszag and L. C. Kells, J. Fluid Mech. **96**, 159 (1980).
4. S. G. Chefranov and A. G. Chefranov, arXiv:1007.1097v1[physics.flu-dyn].
5. С. Г. Чефранов, А. Г. Чефранов, ЖЭТФ **146**, 373 (2014).
6. С. Г. Чефранов, А. Г. Чефранов, ДАН **463**, 290 (2015).
7. S. Bottin, O. Dauchot, and F. Daviaud, Phys. Rev. Lett. **79**, 4377 (1997).
8. S. Bottin, O. Dauchot, F. Daviaud, and P. Manneville, Phys. Fluids **10**, 2597 (1998).
9. Г. Ламб, *Гидродинамика*, ОГИЗ, Москва–Ленинград (1947).
10. С. Г. Чефранов, Письма в ЖЭТФ **73**, 311 (2001).
11. S. G. Chefranov, Phys. Rev. Lett. **93**, 254801 (2004).
12. S. J. Davies and C. M. White, Proc. Roy. Soc. London A **119**, 92 (1928).
13. M. Couliou and R. Monchaux, Phys. Fluids **27**, 034101 (2015).
14. M. Onorato and D. Proment, Phys. Rev. Lett. **107**, 184502 (2011).
15. V. Zakharov, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **9**, 190 (1968).
16. Т. В. Бенджамин и Ж. Е. Феир, J. Fluid Mech. **27**, 417 (1967).
17. J. Rolland, arXiv:1401.3586v1[physics.flu-dyn].
18. S. Zammert and B. Eckhardt, arXiv:1312.6783v1[physics.flu-dyn].
19. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **11**, 592 (1941).