

ВЫЧИТАТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ АНОМАЛЬНОГО МАГНИТНОГО МОМЕНТА ЭЛЕКТРОНА В КЭД И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО СЧЕТА НА ТРЕХПЕТЛЕВОМ УРОВНЕ

С. А. Волков*

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119234, Москва, Россия

Поступила в редакцию 30 июня 2015 г.

Представлена новая вычитательная процедура для устранения ультрафиолетовых и инфракрасных расходимостей в фейнмановских интегралах, разработанная для вычисления поправок КЭД к аномальному магнитному моменту электрона. Процедура сформулирована в виде лесной формулы с линейными операторами, применяющимися к фейнмановским амплитудам УФ-расходящихся подграфов, и позволяет представить вклад каждого графа Фейнмана, содержащего лишь пропагаторы электронов и фотонов, в виде сходящегося интеграла по фейнмановским параметрам. Описано использование разработанного метода для численного расчета двухпетлевых и трехпетлевых вкладов.

DOI: 10.7868/S0044451016060079

1. ВВЕДЕНИЕ

Устранение расходимостей в фейнмановских интегралах является важной задачей квантовой теории поля. Теорема Боголюбова–Парасюка [1, 2] дает конструктивное определение процедуры (R-операции), устраняющей все ультрафиолетовые (УФ) расходимости в любом графе Фейнмана. Доказательство этой теоремы в работах [1, 2] дает представление фейнмановской амплитуды, полученной после применения R-операции и снятия УФ-регуляризации, в форме сходящегося интеграла по швингеровским параметрам, при фиксированной мнимой добавке $i\epsilon$ ($\epsilon > 0$) к знаменателям пропагаторов. Таким образом, R-операция устраняет УФ-расходимость поточечно, под знаком интеграла. В работах [3, 4] приводится явная формула для R-операции:

$$\mathcal{R} = (1 - M_1)(1 - M_2) \dots (1 - M_n), \quad (1)$$

где M_j — оператор, переводящий фейнмановскую амплитуду j -го расходящегося подграфа в сумму

нужного числа членов ее разложения в ряд Тэйлора в окрестности нулевых импульсов, при этом нужно раскрыть скобки и удалить все слагаемые, содержащие M_j и M_l , соответствующие частично перекрывающимся¹⁾ подграфам. В этих же работах указано, как на основе данной формулы вычислить значение фейнмановской амплитуды, полученной с помощью данной процедуры, в пределе снятой УФ-регуляризации, в форме сходящегося интеграла по швингеровским параметрам при фиксированном $\epsilon > 0$. Позже эта формула в импульсном представлении была независимо выведена Циммерманом [5], см. также [6, 7].

R-операция, однако, не устраняет инфракрасные (ИК) расходимости. В КЭД, например, если рассматривать внешние импульсы в графах Фейнмана на массовой поверхности, то полученная R-операцией фейнмановская амплитуда, вообще говоря, не будет сходиться к обобщенной функции при $\epsilon \rightarrow 0$. Кроме того, при осуществлении реальных вычислений операторы M_j в (1) должны быть заменены на связанные с физической перенормировкой, которые

¹⁾ Подграфы называются частично перекрывающимися, если их множества линий пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого.

* E-mail: volkoff_serгей@mail.ru

порождают дополнительные ИК-расходимости²⁾.

В данной работе развитие идеи R-операции рассматривается в приложении к задаче вычисления поправок КЭД к аномальному магнитному моменту (АММ) электрона.

АММ электрона на данный момент известен с очень высокой точностью — в эксперименте [13] было измерено значение

$$a_e = 0.00115965218073(28)$$

(в единицах дираковского момента), и поэтому максимально возможная точность требуется от теоретических предсказаний. Для высокоточных вычислений необходим учет графов Фейнмана с большим числом независимых петель, что требует больших вычислительных ресурсов. В связи с этим особенно значимой представляется возможность поточечного устранения расходимостей, в том числе инфракрасных, под знаком интеграла. Вообще говоря, АММ электрона в КЭД инфракрасно конечен в каждом порядке теории возмущений — ИК-расходимость соответствующей перенормированной амплитуды устраняется перенормировкой на массовой поверхности³⁾. Однако графы Фейнмана, рассматриваемые по отдельности, остаются ИК-расходящимися. К сожалению, структура инфракрасных и ультрафиолетовых расходимостей в отдельных графах довольно сложна, и расходимости разных типов могут в определенном смысле «перепутываться» друг с другом. На данный момент для КЭД не существует универсального метода устранения ИК-расходимостей в графах Фейнмана, аналогичного R-операции.

²⁾ Например, вклады графов 19, 20, 21 из рис. 3 в аномальный магнитный момент электрона, вычисленные напрямую с помощью вычитания на массовой поверхности, содержат ИК-расходимости [8]. Но если использовать вычитание при нулевых импульсах (1), то результаты будут конечными: данные графы получаются из однопетлевого вставкой фотонного собственно-энергетического подграфа в фотонную линию; данный подграф приносит множитель $O((k^2)^2)$ в подынтегральное выражение, где k — импульс внутренней фотонной линии, этот множитель не дает образоваться ИК-расходимостям (см. [9, 10]). См. также явную однопетлевою формулу для константы перенормировки (119, 7а) в книге [11] в гл. XII (Радиационные поправки), § 119 (Вычисление массового оператора). Кроме того, в [12] описаны некоторые свойства «контрчленных» ИК-расходимостей, в том числе выходящие за рамки теории возмущений. См. также разд. 6.3.

³⁾ В частности, если вместо перенормировки на массовой поверхности использовать вычитание при нулевых импульсах (1) и сложить вклады всех графов Фейнмана, то полученный таким образом «нефизический» результат будет содержать ИК-расходимости аналогично тому, как разобрано в [9, 10].

В наиболее точном на данный момент теоретическом вычислении АММ электрона [14, 15] использовалось представление

$$a_e = a_e(\text{QED}) + a_e(\text{hadronic}) + a_e(\text{electroweak}),$$

$$a_e(\text{QED}) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n a_e^{2n},$$

$$a_e^{2n} = A_1^{(2n)} + A_2^{(2n)}(m_e/m_\mu) + A_2^{(2n)}(m_e/m_\tau) + A_3^{(2n)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau),$$

где m_e , m_μ , m_τ — массы соответственно электрона, мюона, тау-лептона. Значение $A_1^{(2)}$ было вычислено аналитически Швингером в 1948 г. [16, 17]. Значение $A_1^{(4)}$ было вычислено сначала в работе [18] смешанным численно-аналитическим методом, но в вычислении была допущена ошибка, которая была исправлена аналитически в [19, 20]. Полученное после исправления значение было подтверждено другим методом в работе [21]:

$$A_1^{(4)} = -0.328478965579193\dots \quad (2)$$

Значение $A_1^{(6)}$ вычисляли в первой половине 1970-х гг. численно с использованием ЭВМ три группы ученых (см. [22–25]). Наиболее точное для того периода времени значение $A_1^{(6)} = 1.195 \pm 0.026$ было получено Киношitou и Цвитановичем [25] (неточность связана со статистической погрешностью интегрирования методом Монте-Карло), к 1995 г. это значение было уточнено [26]: $A_1^{(6)} = 1.181259(40)$. Основой метода во всех трех случаях были вычислительные процедуры для поточечного устранения УФ- и ИК-расходимостей под знаком интеграла, разработанные специально для трехпетлевого вычисления АММ. Однако во всех трех случаях после применения вычислительной процедуры требовалась дополнительная конечная перенормировка по некоторым правилам, специально разработанным для трехпетлевого случая, и из этих правил не вытекает автоматическая процедура для произвольного порядка теории возмущений. Параллельно, примерно в конце 1960-х гг. началась работа по аналитическому вычислению $A_1^{(6)}$, которая проводилась с использованием систем аналитического вычисления на ЭВМ (см. [8, 27–37] и др.). Эта работа была закончена в 1996 г. — в [37] было получено значение

$$A_1^{(6)} = 1.181241456\dots \quad (3)$$

Первые численные значения для $A_1^{(8)}$ были получены Киношitou и Линдквистом в начале 1980-х гг.

(см. [38]), с тех пор группой Киношиты продолжается работа по увеличению точности. Численное значение для $A_1^{(10)}$ впервые было получено Киношитой и его коллегами в 2012 г. [14], для этого была разработана новая процедура поточечного устранения расходимостей, которая является полностью автоматической вплоть до $A_1^{(8)}$, однако некоторые графы для $A_1^{(10)}$ требуют отдельного рассмотрения [39]. В работе [15] представлены результаты вычисления

$$A_1^{(8)} = -1.91298(84), \quad A_1^{(10)} = 7.795(336),$$

при подстановке значения постоянной тонкой структуры $\alpha^{-1} = 137.035999049(90)$, полученного из недавних экспериментов с атомами рубидия (см. [40, 41]), было определено теоретическое значение

$$a_e = 0.001159652181643(25)(23)(16)(763),$$

где первая погрешность соответствует $A_1^{(8)}$, вторая — $A_1^{(10)}$, третья — поправкам $a_e(\text{hadronic}) + a_e(\text{electroweak})$, четвертая — неточности постоянной тонкой структуры⁴). При этом до сих пор не существует независимой проверки вычисления $A_1^{(8)}$, $A_1^{(10)}$, т.е. задача вычисления $A_1^{(2n)}$ не теряет актуальности. Несколько членов разложения $A_2^{(2n)}$ и $A_3^{(2n)}$ ($n \leq 4$) по степеням m_e/m_μ , m_e/m_τ и их логарифмов известны аналитически (см. [42, 43]). Кроме того, эти значения и $A_2^{(10)}(m_e/m_\mu)$ посчитаны численно (см. [15]) и результаты для $A_2^{(2n)}$, $A_3^{(2n)}$ ($n \leq 4$) согласуются с аналитическими значениями.

В данной работе представлена вычислительная процедура для вычисления $A_1^{(2n)}$, позволяющая устранять ИК- и УФ-расходимости поточечно, до интегрирования, в духе работ [1–4, 6, 7, 14, 15, 22–25, 44] и др. Отметим преимущества разработанного метода.

- Метод является полностью автоматическим для любого n .

- Метод достаточно прост для реализации.

- Вычитающая операция является модификацией (1), только используются другие операторы и отличается способ их комбинирования. При этом используются операторы очень простого вида, которые тоже преобразуют фейнмановские амплитуды подграфов, могут быть выражены в импульсном представлении, линейны и выдают полиномы, степе-

нь которых не больше индекса УФ-расходимости соответствующего подграфа⁵).

- Вклад каждого конкретного n -петлевого графа Фейнмана в $A_1^{(2n)}$ представляется в виде единого интеграла от фейнмановских параметров, и $A_1^{(2n)}$ представляется просто как сумма таких вкладов, не требуются дополнительные конечные перенормировки, вычисления констант перенормировки, величин меньших порядков или какие-либо иные дополнительные расчеты. Таким образом, вклад каждого конкретного графа получается свободным от инфракрасных и ультрафиолетовых расходимостей.

- Данная вычислительная процедура проверена для двухпетлевых и трехпетлевых графов путем численного интегрирования и, по всей видимости, применима и на более высоких порядках теории возмущений (см. разд. 5, Приложение С).

- Возможно прямое использование фейнмановских параметров, не требуются дополнительные построения для введения фейнмановских параметров на графах с неотрицательным индексом УФ-расходимости, такие как использование квадратов масс в пропагаторах в качестве переменных интегрирования (см. [25, 45]).

Идеи данного метода, возможно, могут быть применены и к другим задачам. Кроме того, сам факт возможности применения подобной вычислительной процедуры дает некоторую дополнительную информацию для понимания природы инфракрасных и ультрафиолетовых расходимостей.

2. ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА

2.1. Предварительные определения и обозначения

Используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$, множитель 4π включен в постоянную тонкой структуры: $\alpha = e^2/4\pi$, тензор $g_{\mu\nu}$ определяется следующим явным образом:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

гамма-матрицы Дирака удовлетворяют условию $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$.

⁴) И поэтому вычисленные коэффициенты разложения АММ электрона по α и измеренное значение используются для уточнения значения α .

⁵) Вычислительные процедуры в работах [14, 22–25] используют операторы, которые работают не с функциями, а с формалами в представлении фейнмановских параметров или в импульсном представлении.

Будем использовать графы Фейнмана с пропагаторами

$$\frac{i(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

(для электронных линий) и

$$\frac{-g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \tag{4}$$

(для фотонных линий). Всегда подразумевается, что граф Фейнмана сильно связный и не имеет нечетных электронных циклов.

Индексом УФ-расходимости графа Фейнмана G в КЭД называется число

$$\omega(G) = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}N_e,$$

где N_γ — число внешних фотонных линий, N_e — электронных. Если для какого-то подграфа⁶⁾ G' графа G выполняется соотношение $\omega(G') \geq 0$, то возможно появление УФ-расходимостей. Если $\omega(G) \geq 0$, то граф G будем называть УФ-расходящимся. В графах Фейнмана КЭД существуют следующие типы УФ-расходящихся подграфов: электронные ($N_e = 2, N_\gamma = 0$) и фотонные ($N_e = 0, N_\gamma = 2$) собственно-энергетические подграфы, вершинные подграфы ($N_e = 2, N_\gamma = 1$), подграфы рассеяния фотона на фотоне⁷⁾ ($N_e = 0, N_\gamma = 4$).

2.2. Аномальный магнитный момент в терминах фейнмановских амплитуд

Лесом подграфов называется такое множество подграфов графа, что любые два из них не являются частично перекрывающимися.

Для вершинного графа G через $\mathfrak{F}[G]$ обозначим множество всех лесов УФ-расходящихся подграфов G , содержащих G , через $\mathfrak{J}[G]$ обозначим множество всех вершинных подграфов G , которые содержат вершину, инцидентную⁸⁾ фотонной внешней линии G (сам граф G тоже считается лежащим в множестве).

Для определения вычитающей операции введем линейные операторы A, U и L , которые применяются к фейнмановским амплитудам УФ-расходящихся подграфов.

⁶⁾ В рамках данной статьи мы рассматриваем только сильно связанные подграфы, содержащие все линии, соединяющие его вершины.

⁷⁾ Подграфы такого типа не вносят УФ-расходимостей, если рассматривать все графы Фейнмана в сумме, однако в отдельных графах такие расходимости присутствуют.

⁸⁾ Будем говорить, что вершина и линия инцидентны, если вершина является одним из концов данной линии.

1. A — проектор аномального магнитного момента для фейнмановской амплитуды некоторого вершинного подграфа. Пусть $\Gamma_\mu(p, q)$ — фейнмановская амплитуда, соответствующая импульсу входящей внешней электронной линии $p - q/2$, выходящей $p + q/2$, фотонной q . Фейнмановская амплитуда Γ_μ может быть выражена через три формфактора:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 \Gamma_\mu(p, q) u_1 &= \\ &= \bar{u}_2 \left(f(q^2) \gamma_\mu - \frac{1}{2m} g(q^2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu + h(q^2) q_\mu \right) u_1 \end{aligned}$$

при

$$\left(\hat{p} - \frac{\hat{q}}{2} - m \right) u_1 = \bar{u}_2 \left(\hat{p} + \frac{\hat{q}}{2} - m \right) = 0,$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$$

(см., например, [11]). Положим

$$A \Gamma_\mu = \gamma_\mu \lim_{q^2 \rightarrow 0} g(q^2). \tag{5}$$

2. Оператор U действует в зависимости от того, к фейнмановской амплитуде расходящегося подграфа какого типа он применяется.

- Если через Π обозначается фейнмановская амплитуда, соответствующая фотонному собственно-энергетическому подграфу или подграфу рассеяния фотона на фотоне, то $U\Pi$ есть сумма членов разложения Π в ряд Тэйлора в окрестности нуля, степени которых не больше индекса УФ-расходимости данного подграфа.

- Если через $\Sigma(p)$ обозначается фейнмановская амплитуда, соответствующая электронному собственно-энергетическому подграфу,

$$\Sigma(p) = a(p^2) + b(p^2)\hat{p}, \tag{6}$$

то

$$U\Sigma(p) = a(m^2) + b(m^2)\hat{p}$$

(заметим, что это отличается от обычной перенормировки на массовой поверхности).

- Если через $\Gamma_\mu(p, q)$ обозначается фейнмановская амплитуда, соответствующая вершинному подграфу,

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(p, 0) &= a(p^2) \gamma_\mu + b(p^2) p_\mu + c(p^2) \hat{p} p_\mu + \\ &+ d(p^2) (\hat{p} \gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{p}), \end{aligned} \tag{7}$$

то

$$U \Gamma_\mu = a(m^2) \gamma_\mu. \tag{8}$$

3. L — оператор, используемый при перенормировке на массовой поверхности и применяемый к фейнмановским амплитудам вершинных подграфов $\Gamma_\mu(p, q)$: если

$$\Gamma_\mu(p, 0) = a(p^2)\gamma_\mu + b(p^2)p_\mu + c(p^2)\hat{p}p_\mu + d(p^2)(\hat{p}\gamma_\mu - \gamma_\mu\hat{p}),$$

то

$$L\Gamma_\mu = [a(m^2) + mb(m^2) + m^2c(m^2)]\gamma_\mu. \quad (9)$$

В дальнейшем также будут использоваться операторы \bar{A}, \bar{U} (для фейнмановских амплитуд вершинных подграфов) и \bar{L} , определяемые точно так же, как и A, U, L , только без умножения на γ_μ соответственно в (5), (8), (9).

Пусть f_G — неперенормированная фейнмановская амплитуда, соответствующая вершинному графу G . Будем использовать условное обозначение

$$\tilde{f}_G = \mathcal{R}_G^{new} f_G, \quad (10)$$

где

$$\mathcal{R}_G^{new} = \sum_{\substack{F=\{G_1, \dots, G_n\} \in \mathfrak{F}[G] \\ G' \in \mathfrak{I}[G] \cap F}} (-1)^{n-1} M_{G_1}^{G'} M_{G_2}^{G'} \dots M_{G_n}^{G'}, \quad (11)$$

$$M_{G''}^{G'} = \begin{cases} A_{G'}, & \text{если } G' = G'', \\ U_{G''}, & \text{если } G'' \notin \mathfrak{I}[G] \text{ или } G'' \subseteq G', \\ & G'' \neq G', \\ L_{G''}, & \text{если } G'' \in \mathfrak{I}[G], \\ & G' \subseteq G'', \quad G'' \neq G, G'' \neq G', \\ (L_{G''} - U_{G''}), & \text{если } G'' = G, \quad G' \neq G. \end{cases} \quad (12)$$

В этих обозначениях индекс у символа оператора — это подграф, к фейнмановской амплитуде которого он применяется. Коэффициент перед γ_μ в \tilde{f}_G будем обозначать $\tilde{a}_{e,1}^{new}$, он и будет вкладом графа G в аномальный магнитный момент:

$$\tilde{a}_{e,1}^{new} = \sum_G \tilde{f}_G,$$

где суммирование проводится по всем вершинным графам Фейнмана. Просуммировав только по графам, имеющим заданное число вершин, можно получить заданный член разложения по степеням α .

В качестве иллюстрации рассмотрим граф Фейнмана G , представленный на рис. 1. Здесь мы имеем

$$\mathfrak{I}[G] = \{G_c, G_e, G\},$$

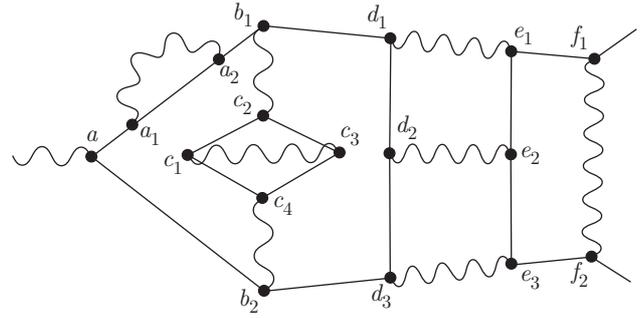


Рис. 1. Сложный граф Фейнмана (пример)

где

$$G_c = aa_1a_2b_1b_2c_1c_2c_3c_4,$$

$$G_e = aa_1a_2b_1b_2c_1c_2c_3c_4d_1d_2d_3e_1e_2e_3$$

(подграфы задаются перечислением вершин). Кроме перечисленных, есть следующие УФ-расходящиеся подграфы: a_1a_2 (электронный собственно-энергетический), $c_1c_2c_3$, $c_1c_3c_4$ (вершинные, частично перекрываются), $c_1c_2c_3c_4$ (фотонный собственно-энергетический), $G_d = aa_1a_2b_1b_2c_1c_2c_3c_4d_1d_2d_3$ (рассеяние фотона на фотоне). На основе формул (10)–(12) можно получить

$$\tilde{f}_G = [A_G(1 - U_{G_e})(1 - U_{G_d})(1 - U_{G_c}) - (L_G - U_G)A_{G_e}(1 - U_{G_d})(1 - U_{G_c}) - (L_G - U_G)(1 - L_{G_e})(1 - U_{G_d})A_{G_c}] \times (1 - U_{c_1c_2c_3c_4})(1 - U_{c_1c_2c_3} - U_{c_1c_3c_4})(1 - U_{a_1a_2})f_G.$$

Операторные выражения для двухпетлевых графов Фейнмана приведены в табл. 2 (см. ниже), в ней символом G обозначается весь граф.

Общие соображения о том, каким образом разработанная вычислительная процедура устраняет расходимости в двухпетлевых графах Фейнмана, приведены в разд. 3.

2.3. Переход к параметрическому представлению

Рассмотрим переход к представлению фейнмановских параметров, которое допускает снятие регуляризации и, следовательно, может быть непосредственно использовано для численного расчета.

Будем использовать формулу

$$\frac{1}{x + i\varepsilon} = \frac{1}{i} \int_0^\infty \exp\{iz(x + i\varepsilon)\} dz.$$

Для вычисления вклада вершинного графа G в $a_{e,1}^{new}$ требуется выполнить следующие шаги.

1. Каждой внутренней линии G ставим в соответствие некоторую переменную z_j .
2. Предположим, что у нас зафиксированы некоторые значения $z_j > 0$. Для электронных и фотонных линий введем следующие пропагаторы специального вида:

$$(\hat{p}+m) \exp \{i z_j(p^2 - m^2 + i\varepsilon)\}, \quad i g_{\mu\nu} \exp \{i z_j(p^2 + i\varepsilon)\}.$$

После этого вычислим \check{f}_G по описанным выше правилам, но только с новыми пропагаторами. Полученное значение обозначим $\check{f}_G(\underline{z}, \varepsilon)$, где $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots)$. Вычисление $\check{f}_G(\underline{z}, \varepsilon)$ делается с использованием явных формул для интегралов многомерных гауссовых функций, умноженных на полиномы (см. [6, 7]). После аналитического вычисления интеграла такого рода получится фейнмановская амплитуда вида

$$\Pi_1 R_1 + \Pi_2 R_2 + \dots + \Pi_N R_N. \quad (13)$$

Здесь каждое Π_l есть произведение выражений вида $\hat{p}_j, p_{j\mu}, \gamma_\mu, (p_{j'} p_{j''})$ (p_1, p_2, \dots — импульсы внешних линий, j, j', j'' — индексы импульсов внешних линий, μ — тензорный индекс, связанный с внешней фотонной линией), а каждое R_l имеет вид

$$\frac{Y(\underline{z})}{T(\underline{z})} \exp \left[i \frac{H(\underline{p}, \underline{z})}{T(\underline{z})} - \varepsilon \sum z_j \right],$$

где $\underline{p} = (p_1, p_2, \dots)$ — набор импульсов внешних линий графа, Y, T, H — однородные полиномы по z , T имеет положительные коэффициенты⁹⁾, H — вещественные, степень H по z на единицу больше степени T , элементы \underline{p} входят в H только в виде скалярных произведений $(p_{j'} p_{j''})$, и в каждом члене H содержится не более одного такого скалярного произведения (см. [6, 7, 46]).

Отметим, что это справедливо и в том случае, когда операторы A, U, L применяются к некоторым подграфам графа Фейнмана, не совпадающим с целым графом. Это можно доказать индукцией по числу внутренних линий графа. Для этого нужно заметить, во-первых, что произведение выражений вида (13) для непересекающихся наборов z_j тоже имеет такой вид, во-вторых, что операторы A, U, L всегда выдают полиномы по импульсам внешних линий, и, в-третьих, что результат применения операторов A, U, L к выражениям вида (13) тоже можно представить в таком виде.

⁹⁾ См. разд. 5.

Последнее следует разъяснить чуть подробнее. Например, для оператора A справедливо следующее соотношение:

$$A[\Pi_1 R_1 + \dots + \Pi_N R_N] = R_1 A \Pi_1 + \dots + R_N A \Pi_N. \quad (14)$$

Оно следует из того, что результат применения A к фейнмановской амплитуде $\Gamma_\mu(p, q)$ выражается через значения при $p^2 = m^2, q = 0$ и первые производные в этих точках вдоль направлений (p', q') , удовлетворяющих условию $pp' = pq' = 0$ (см. явную формулу в [47]). Это означает, что производная R_j в этих точках по этим направлениям будет равна нулю, в связи с равенством нулю таковой от скалярных произведений внешних импульсов.

3. Положив

$$I(z_1, \dots, z_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty \lambda^{n-1} \check{f}_G(z_1 \lambda, \dots, z_n \lambda, \varepsilon) d\lambda, \quad (15)$$

сводим задачу к вычислению

$$\int_{z_1, \dots, z_n > 0} I(z_1, \dots, z_n) \delta(z_1 + \dots + z_n - 1) \times dz_1 \dots dz_n. \quad (16)$$

Интеграл (15) считается аналитически с использованием формулы

$$\int_0^\infty \lambda^{D-1} \exp \{ \lambda(ik - \varepsilon) \} d\lambda = \frac{(D-1)!}{(\varepsilon - ik)^D}.$$

Отметим, что в выражениях такого рода всегда будет иметь место $D > 0$, это связано с тем, что слагаемые с $D = 0$ будут обнуляться оператором A , примененным к некоторому подграфу, потому что соответствующая наименьшему D фейнмановская амплитуда пропорциональна γ_μ (см. явные рецепты построения полиномов Y, T, H в [6, 7, 45]), а также их краткую формулировку в разд. 5).

4. Численно рассчитываем интеграл (16).

Пример рассмотрен в разд. 6.

3. ОБОСНОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ ДАННОГО МЕТОДА

Обоснование корректности состоит из двух частей: доказательства равенства $a_{e,1}^{new} = a_{e,1}$, где $a_{e,1} = \sum_{n \geq 1} (\alpha/\pi)^n A_1^{(2n)}$, и демонстрации, что данный

Таблица 1. Операторные выражения для вкладов графов Фейнмана из рис. 2 в АММ электрона, вычисляемых прямым вычитанием на массовой поверхности, а также разности между ними и выражениями из табл. 2

№	Операторное выражение	Разность
1	$A_G - A_G L_{abc}$	$(L_G - U_G)A_{abc} - A_G(L_{abc} - U_{abc})$
2	A_G	0
3	$A_G - A_G L_{bcd}$	$A_G(U_{bcd} - L_{bcd})$
4	$A_G - A_G L_{bcd}$	$A_G(U_{bcd} - L_{bcd})$
5	$A_G - A_G B_{bc}$	$A_G(U_{bc} - B_{bc})$
6	$A_G - A_G B_{bc}$	$A_G(U_{bc} - B_{bc})$
7	$A_G - A_G U_{de}$	0

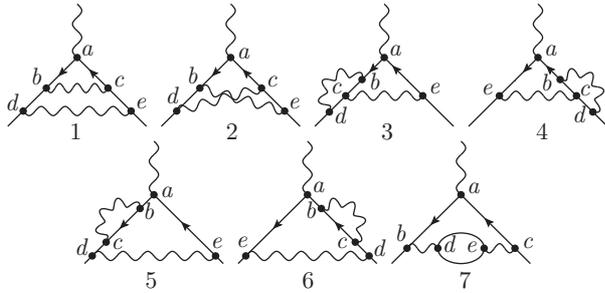


Рис. 2. Двухпетлевые графы Фейнмана для АММ электрона

метод устраняет все расходимости в каждом конкретном графе Фейнмана.

Первую часть рассмотрим на двухпетлевом примере. Двухпетлевые графы Фейнмана для АММ изображены на рис. 2. Требуется доказать, что применение описанной вычитательной процедуры эквивалентно перенормировке на массовой поверхности. Перенормировка на массовой поверхности может быть представлена в форме, аналогичной той, которая использовалась в разд. 2.2, см. табл. 1. Здесь B — оператор, применяемый к фейнмановским амплитудам электронных собственно-энергетических подграфов при перенормировке на массовой поверхности, определяемый равенством

$$B\Sigma(p) = \Sigma(m) + (\hat{p} - m)(b(m^2) + 2a'(m^2) + 2mb'(m^2)) \quad (17)$$

(если выполнено (6)¹⁰).

Из табл. 1 видно, что вклад графа 1 в разность $a_{e,1} - a_{e,1}^{new}$ равен нулю. Теперь рассмотрим суммарный вклад графов 3–6 в эту разность. Заметим, что если для некоторых функций $\Sigma(p)$ и $\Gamma_\mu(p, q)$ возможны представления (6) и (7), а также при любом p имеет место тождество Уорда

$$\Gamma_\mu(p, 0) = -\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu}$$

и выполнено $U\Gamma_\mu = C\gamma_\mu$, то будет справедливо равенство

$$U\Sigma(p) = \Sigma(m) - C(\hat{p} - m).$$

Если при этих же предположениях выполнено $(U - L)\Gamma_\mu = C_1\gamma_\mu$, то имеет место $(U - B)\Sigma(p) = -C_1(\hat{p} - m)$. Из этого следует, что вклад графов 3–6 в $a_{e,1} - a_{e,1}^{new}$ равен нулю¹¹). Полное доказательство равенства $a_{e,1}^{new} = a_{e,1}$ для любого порядка теории возмущений дано в Приложении В.

Теперь рассмотрим устранение расходимостей в двухпетлевых графах Фейнмана. Отметим, что УФ-расходимость, связанная с целым графом Фейнмана, устраняется оператором A (см. [48]), в связи с этим в графе 2 никаких расходимостей нет, в графе 7 все УФ-расходимости устраняются очевидным образом. Кроме того, некоторые подграфы могут порождать ИК-расходимости (см. [48]). Вершина, инцидентная внешней фотонной линии, является подобным подграфом в графах 1–6. Однако порождаемая ею ИК-расходимость устраняется оператором A (см. [48]). В каждом из графов 3–6 есть единственный УФ-расходящийся подграф, не совпадающий с целым графом, соответствующая ему УФ-расходимость устраняется контрчленом с оператором U , при этом оператор U не порождает дополнительных ИК-расходимостей (в отличие от операторов L и B), это связано с тем, что все ИК-расходимости в фейнмановских амплитудах вида (7) пропорциональны p_μ и $\hat{p}p_\mu$, а в (17) все ИК-расходимости содержатся в слагаемых, содержащих $a'(m^2)$ или $b'(m^2)$. В графе 1 подграф abc порождает одновременно УФ- и ИК-расходимость. УФ-расходимость, соответствующая abc , вычитается контрчленом $A_G U_{abc}$, при этом не порождается дополнительных ИК-расходимостей; ИК-расходимость, соответствующая этому подграфу, вычитается контрчленом $(L_G - U_G)A_{abc} f_G$, при этом не

¹⁰) Здесь по определению $\Sigma(m) = a(m^2) + mb(m^2)$.

¹¹) Данное рассмотрение не претендует на уровень строгого доказательства, при работе с бесконечными величинами подразумевается, но специально не определяется регуляризация, сохраняющая калибровочную инвариантность.

порождается дополнительной УФ-расходимости¹²⁾. Граф 1 детально рассмотрен в разд. 6. Поточечное устранение расходимостей в графах, подобных 1, рассматривается в разд. 5. В Приложении С рассмотрен случай произвольного количества вложенных друг в друга ИК-расходящихся подграфов.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ОПИСАННОГО МЕТОДА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ $A_1^{(4)}$ И $A_1^{(6)}$

Данный метод вычитания расходимостей был применен для вычисления двухпетлевых и трехпетлевых поправок к АММ электрона. Целью вычисления была проверка разработанной вычислительной процедуры. Использовался язык программирования D [49], код, вычисляющий подынтегральные функции, автоматически генерировался на языке C. При вычислении использовалась калибровка Фейнмана (4). Для интегрирования применялся адаптивный метод Монте-Карло. Для каждого графа Фейнмана интеграл считался отдельно. Графы, получающиеся друг из друга изменением направления электронных линий, считались раздельно. При вычислении вкладов графов в $A_1^{(4)}$ и $A_1^{(6)}$ область интегрирования была разбита соответственно на 620 и 5100 областей. Точки, на которых вычислялось значение подынтегральной функции для метода Монте-Карло, выбирались по вероятностному закону с плотностью распределения

$$C_j(\underline{z}) \frac{\min(z_1, \dots, z_n)^s}{z_1 \dots z_n},$$

где $s \approx 0.74$, $j(\underline{z})$ — номер области, в которую попадает вектор $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n)$, коэффициенты C_j подстраивались динамически. Разбиение на области проводится следующим образом: для каждого набора \underline{z} определяется такое разбиение множества индексов \underline{z} на два непустых множества A и B , что $(\min_B z_l)/(\max_A z_l)$ максимально, таким образом, вся область разбивается на $2^n - 2$ областей, далее каждая из этих областей разбивается еще на 10 частей, в зависимости от того, к какому из интервалов

$$[0; 1], (1; 2], (2; 3], (3, 5], (5, 7],$$

¹²⁾ Как отмечено выше, применение данной вычислительной процедуры для графа 1 эквивалентно прямому вычитанию на массовой поверхности. Однако эта эквивалентность не является поточечной в представлении фейнмановских параметров, и применение вычитания на массовой поверхности к графу 1 не приводит к сходящемуся интегралу; см. разд. 6.3.

$$(7, 10], (10, 14], (14, 18], (18, 22], (22, +\infty)$$

принадлежит значение $\ln((\min_B z_l)/(\max_A z_l))$. Целью вычисления была проверка вычислительной процедуры (не получение новых численных результатов), какие-либо известные применявшиеся ранее пакеты для интегрирования методом Монте-Карло не использовались (их использование планируется в дальнейшем). Разработанный метод интегрирования достаточно прост для реализации и одновременно позволяет решить проблему интегрируемых сингулярностей (выбор параметра s , $s > 0$, достаточно малым позволяет «обработать» любые интегрируемые сингулярности дробно-рациональной функции, коэффициенты знаменателя которой положительны, на границе области интегрирования).

Поскольку подынтегральная функция получается как разность функций, интегралы от которых могут расходиться, в том числе степенным образом, существенную погрешность могут вносить ошибки округления, в том числе приводить к численной расходимости (в случаях, когда относительно небольшое значение получается как разность очень больших чисел). В случаях, когда было недостаточно 64-битной точности, использовалась 320-битная точность (библиотека SCSLib [50]) — такая ситуация при интегрировании методом Монте-Карло возникает с вероятностью примерно $1/2000$. Ситуации, когда недостаточно 320-битной точности, возникают с вероятностью менее 10^{-9} и не вносят какого-либо существенного вклада (такие точки отбрасываются). После примерно трех дней счета на персональном компьютере были получены значения

$$A_1^{(4)} = -0.328513(87), \quad A_1^{(6)} = 1.1802(85)$$

(все интервалы даются с доверительной вероятностью 90%). Эти результаты согласуются со значениями (2), (3). Неточность связана со статистической погрешностью метода Монте-Карло.

Семь графов, дающих вклад в $A_1^{(4)}$, изображены на рис. 2, вычисленные вклады каждого графа в $A_1^{(4)}$ представлены в табл. 2. В данной таблице и последующих N_{call} — это количество вызовов функции, вычисляющей значение в точке, которые были проведены при численном интегрировании. Вычисленные вклады графов 1, 2 и 7 хорошо согласуются с известными значениями, полученными из аналитических выражений, см. [18, 19, 21]. Для сравнения в этой же таблице представлены значения из работы [19] (здесь λ — масса фотона). Можно видеть, что вклады графов 3, 4, 5, 6, вычисленные напрямую, имеют инфракрасные расходимости, при этом вкла-

Таблица 2. Вклады графов из рис. 2 в $A_1^{(4)}$; операторные выражения, из которых эти вклады получаются; значения для сравнения из [19]

№	Значение	N_{call}	Операторное выражение	Значение из [19]
1	0.777455(52)	$5 \cdot 10^9$	$A_G - A_G U_{abc} - (L_G - U_G) A_{abc}$	0.778
2	-0.467626(44)	$4 \cdot 10^9$	A_G	-0.467
3	-0.032023(29)	$2 \cdot 10^9$	$A_G - A_G U_{bcd}$	$-0.282 - \frac{1}{4} \log \frac{\lambda^2}{m^2}$
4	-0.032033(29)	$2 \cdot 10^9$	$A_G - A_G U_{bcd}$	$-0.282 - \frac{1}{4} \log \frac{\lambda^2}{m^2}$
5	-0.294978(25)	$2 \cdot 10^9$	$A_G - A_G U_{bc}$	$-0.045 + \frac{1}{4} \log \frac{\lambda^2}{m^2}$
6	-0.294998(24)	$2 \cdot 10^9$	$A_G - A_G U_{bc}$	$-0.045 + \frac{1}{4} \log \frac{\lambda^2}{m^2}$
7	0.0156895(25)	$2 \cdot 10^9$	$A_G - A_G U_{de}$	0.016

ды, вычисленные с помощью разработанного метода, конечны для каждого графа, и эти значения для графов 3, 4, 5, 6 не совпадают с конечными частями значений из [19] (но при этом сумма совпадает).

72 графа Фейнмана, дающие вклад в $A_1^{(6)}$, изображены на рис. 3, вычисленные вклады каждого графа в $A_1^{(6)}$ представлены в табл. 3. В табл. 4 приведены данные для сравнения с известными аналитическими результатами по некоторым множествам графов, в которых суммы чисто теоретически должны совпадать со значениями, вычисленными напрямую в фейнмановской калибровке. Если все вычисления проводить с 64-битной точностью, а точки, где этой точности недостаточно, просто отбрасывать, то возникает дополнительная погрешность более 0.1 % в графах 28, 35–36, 45–46, 70–71.

5. УСТРАНЕНИЕ РАСХОДИМОСТЕЙ: ДЕТАЛЬНОЕ РАССМОТРЕНИЕ

5.1. Общие соображения

Рассмотрим поточечное устранение расходимостей в представлении фейнмановских параметров на примере класса вершинных графов, типичный представитель которого G изображен на рис. 4. Данное рассмотрение носит иллюстративный характер и не претендует на уровень строгого доказательства. Граф G имеет единственный не совпадающий с G УФ-расходящийся подграф G' . Этот подграф является вершинным и содержит вершину, инцидентную внешней фотонной линии G . Путь из внут-

ренних электронных линий, соединяющий внешние электронные линии G , проходит через G' , часть этого пути от входящей внешней линии G до G' будем обозначать P_1 , от G' до выходящей — P_2 . Импульсы входящих и выходящих внешних электронных линий G обозначены соответственно p_1 и p_2 . К вершинам $P_1 \cup P_2$, не лежащим в G' , произвольным образом прицеплены фотонные линии, все они и начинаются, и заканчиваются на вершинах $P_1 \cup P_2$, не лежащих в G' .

Вклад графа G в $a_{e,1}$ равен¹³⁾

$$[\bar{A}_G - \bar{A}_G U_{G'} - (\bar{L}_G - \bar{U}_G) A_{G'}] f_G. \quad (18)$$

Соответствующая G' ультрафиолетовая расходимость вычитается контрчленом $\bar{A}_G U_{G'}$, при этом не порождается дополнительная ИК-расходимость (см. Приложение С).

Перед рассмотрением инфракрасных расходимостей, соответствующих графу G , напомним, как строится выражение для подынтегральной функции $I(z_1, \dots, z_n)$, соответствующей неперенормированной амплитуде $\bar{A}_G f_G$ после выполнения интегрирования (15) (см. [6, 7, 45]).

• Можно выбрать произвольное множество непесекающихся пар внутренних электронных линий. Каждому такому выбору соответствует слагаемое в сумме (см. ниже). Линии, лежащие в парах, будем

¹³⁾ Напомним, что операторы $\bar{A}, \bar{U}, \bar{L}$ определяются так же, как A, U, L , только без умножения на γ_μ в (5), (8), (9), см. разд. 2.2.

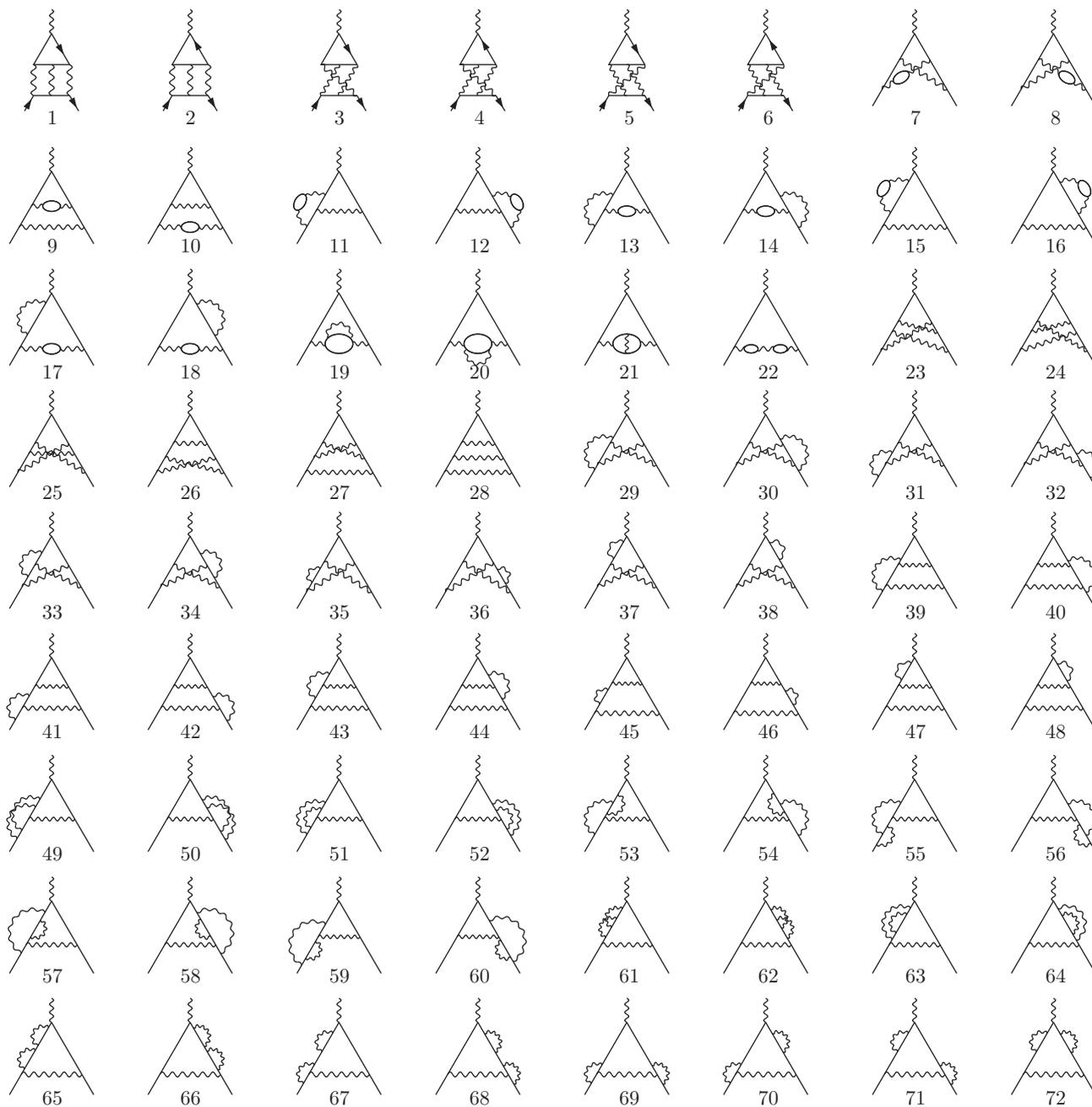


Рис. 3. Трехпетлевые графы Фейнмана для АММ электрона, рисунки скопированы из работы [51]

называть спаренными, остальные внутренние электронные линии — неспаренными¹⁴⁾.

¹⁴⁾ Суммирование по спариваниям получается из формулы для N -кратного дифференцирования $\exp(P(\xi))$, где P — полином второй степени, спаривания соответствуют вторым производным P , неспаренные множители — первым производным (см. [6, 7], а также [45]).

• Значение $I(z_1, \dots, z_n)$ представляется в виде суммы¹⁵⁾

$$\sum_{K \geq 1} \frac{C_K F_K}{(W/V)^K}.$$

¹⁵⁾ Напоминаем, что данное выражение получается из (13) применением оператора \bar{A} , интегрированием по $\lambda = z_1 + \dots + z_n$ и предельным переходом $\varepsilon \rightarrow +0$.

Таблица 3. Вклады графов из рис. 3 в $A_1^{(6)}$

№	Значение	N_{call}	№	Значение	N_{call}
1	-0.17836(43)	$9 \cdot 10^7$	37	0.15782(86)	10^8
2	-0.17862(43)	$9 \cdot 10^7$	38	0.15674(86)	$2 \cdot 10^8$
3	0.18220(61)	10^8	39	-0.16718(67)	10^8
4	0.18217(61)	10^8	40	-0.16750(67)	10^8
5	0.18155(61)	10^8	41	-1.6283(17)	$3 \cdot 10^8$
6	0.18188(62)	10^8	42	-1.6283(17)	$3 \cdot 10^8$
7	-0.042127(73)	$7 \cdot 10^7$	43	0.3054(10)	$2 \cdot 10^8$
8	-0.042245(74)	$7 \cdot 10^7$	44	0.3058(10)	$2 \cdot 10^8$
9	0.11513(16)	$8 \cdot 10^7$	45	2.2553(19)	$4 \cdot 10^8$
10	0.019128(59)	$7 \cdot 10^7$	46	2.2569(18)	$4 \cdot 10^8$
11	0.028301(50)	$7 \cdot 10^7$	47	-1.1357(11)	$2 \cdot 10^8$
12	0.028278(51)	$7 \cdot 10^7$	48	-1.1341(11)	$2 \cdot 10^8$
13	-0.015016(72)	$7 \cdot 10^7$	49	0.10755(42)	10^8
14	-0.015153(72)	$7 \cdot 10^7$	50	0.10718(41)	10^8
15	-0.072255(92)	$7 \cdot 10^7$	51	-0.01470(38)	$9 \cdot 10^7$
16	-0.072144(93)	$7 \cdot 10^7$	52	-0.01421(38)	$9 \cdot 10^7$
17	-0.041038(94)	$7 \cdot 10^7$	53	0.07232(57)	10^8
18	-0.041091(93)	$7 \cdot 10^7$	54	0.07212(56)	10^8
19	0.019872(72)	$7 \cdot 10^7$	55	-0.8390(10)	$2 \cdot 10^8$
20	0.019857(71)	$7 \cdot 10^7$	56	-0.8394(10)	$2 \cdot 10^8$
21	0.013153(88)	$7 \cdot 10^7$	57	0.40154(69)	10^8
22	0.002548(20)	$6 \cdot 10^7$	58	0.40295(69)	10^8
23	0.9311(10)	$2 \cdot 10^8$	59	0.41612(82)	10^8
24	0.9318(10)	$2 \cdot 10^8$	60	0.41581(81)	10^8
25	-0.02688(47)	10^8	61	1.2625(11)	$2 \cdot 10^8$
26	-0.9458(11)	$2 \cdot 10^8$	62	1.2620(11)	$2 \cdot 10^8$
27	-2.2306(19)	$4 \cdot 10^8$	63	-0.02913(63)	10^8
28	1.7888(19)	$4 \cdot 10^8$	64	-0.02911(62)	10^8
29	-0.87900(74)	10^8	65	-1.0614(10)	$2 \cdot 10^8$
30	-0.87894(74)	10^8	66	-1.0620(10)	$2 \cdot 10^8$
31	2.5206(17)	$3 \cdot 10^8$	67	-0.04893(73)	10^8
32	2.5207(17)	$3 \cdot 10^8$	68	-0.04831(72)	10^8
33	0.07018(50)	10^8	69	-2.9084(20)	$4 \cdot 10^8$
34	0.07017(50)	10^8	70	3.2668(21)	$5 \cdot 10^8$
35	-1.7479(16)	$3 \cdot 10^8$	71	3.2652(21)	$4 \cdot 10^8$
36	-1.7498(16)	$3 \cdot 10^8$	72	-3.2047(20)	$4 \cdot 10^8$

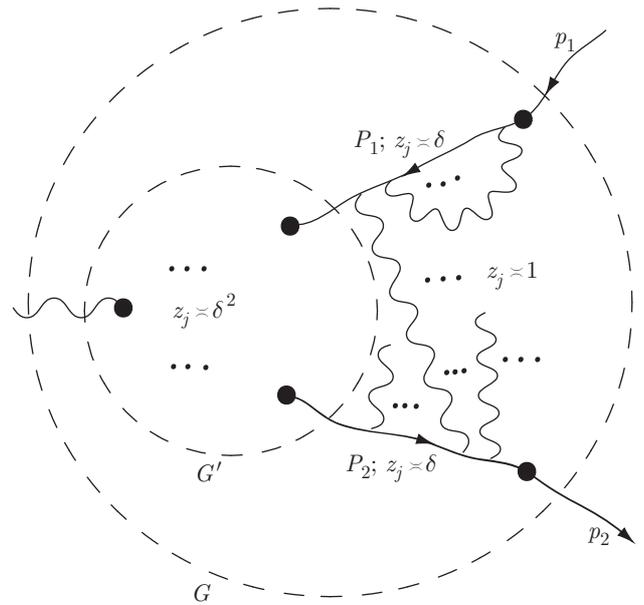


Рис. 4. Граф Фейнмана с подграфом, порождающим ИК-расходимость

Здесь C_K — некоторые постоянные коэффициенты, K соответствует выборам пар, при которых ровно $2K$ внутренних электронных линий являются неспаренными (см. ниже), V — сумма по всем 1-деревьям T графа G произведений z_l по всем хордам T (1-дерево — это связный подграф G , содержащий все вершины G и не имеющий циклов, хорда — это линия, не принадлежащая данному объекту),

$$W = S - V z_e,$$

где S — сумма по всем 2-деревьям, для которых вершины, инцидентные электронным внешним линиям G , лежат в разных компонентах связности, произведений z_l по хордам данных 2-деревьев, z_e есть сумма z_l по всем электронным линиям G (2-дерево — это подграф G , содержащий все вершины G , не имеющий циклов и имеющий ровно две компоненты связности).

- Слагаемое в F_K , соответствующее заданному выбору пар, получается применением оператора A к произведению сомножителей, описанных ниже (здесь важно то, что (W/V) -часть можно вынести за скобки — это доказывается аналогично равенству (14)). Порядок, в котором перемножаются сомножители, соответствует правилам Фейнмана, от произведений по электронным циклам берется след, и они умножаются на (-1) .

- Каждой вершине соответствует множитель γ_ν , где ν — тензорный индекс, соответствующий инци-

дентной данной вершине фотонной линии. В этих выражениях подразумевается, что по парам одноименных тензорных индексов проводится свертка, например,

$$x_\nu y_\nu = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

- Каждой спаренной линии соответствует множитель γ_ν , где ν — тензорный индекс, соответствующий данной паре. Всей паре дополнительно ставится в соответствие множитель $B_{j_1 j_2}/2V$, где j_1 и j_2 — линии данной пары, $B_{j_1 j_2}$ — сумма произведений z_l по хордам деревьев с циклом, цикл которых проходит через j_1 и j_2 , причем если линии по циклу идут в одном направлении, перед произведением ставится знак плюс, а если в противоположном, то минус. Дерево с циклом — это подграф G , содержащий все вершины G , имеющий цикл и превращающийся в дерево при удалении любой линии этого цикла.

- Каждой неспаренной электронной линии l ставится в соответствие множитель $(m + \hat{Q}_l/V)$, где \hat{Q}_l — сумма по всем содержащим l 1-деревьям T графа G произведений $\hat{p}_{l,T}$ и z_j по хордам T . Здесь $p_{l,T}$ — суммарный выходящий импульс внешних линий, инцидентных вершинам, лежащим в той компоненте связности 2-дерева, получающегося из T удалением l , в сторону которой направлена линия l (под выходящим импульсом внешней линии подразумевается ее импульс, взятый с нужным знаком — плюсом для выходящих, минусом для входящих).

- Все произведение дополнительно умножается на C^i/V^2 , где C — некоторая константа, i — число независимых петель в графе.

5.2. Инфракрасное поведение основного члена

Удобно использовать следующий признак сходимости интегралов от дробно-рациональных функций, который будет применяться к разным интегралам на протяжении всего рассмотрения.

Утверждение 1. Пусть $I(z_1, \dots, z_n)$ есть частное двух полиномов, знаменатель которого имеет положительные коэффициенты. Тогда если для любого вектора из неотрицательных чисел $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, такого что $\beta_1 + \dots + \beta_n > 0$, и для функций $z_1(\delta), \dots, z_n(\delta)$, определенных при $\delta > 0$ и принимающих значения на $(0; 1]$, таких что

$$z_1 \asymp \delta^{\beta_1}, \dots, z_n \asymp \delta^{\beta_n} \tag{19}$$

при $\delta \rightarrow 0^{16}$, имеет место соотношение

$$I(z_1(\delta), \dots, z_n(\delta)) z_1(\delta) \dots z_n(\delta) \rightarrow 0, \tag{20}$$

то интеграл

$$\int_0^1 |I(z_1, \dots, z_n)| dz_1 \dots dz_n$$

конечен.

Доказательство этого утверждения дано в Приложении А.

Нас в рамках этой статьи будут интересовать интегралы вида (16), можно заметить, что абсолютная сходимость такого интеграла эквивалентна абсолютной сходимости интеграла

$$\int_0^1 I(\underline{z}/(z_1 + \dots + z_n)) dz_1 \dots dz_n,$$

поэтому данный признак можно использовать и для этих интегралов, с оговоркой, что одно из чисел β_q обязательно должно быть равно нулю.

В рамках данной статьи мы не будем доказывать, что соотношение (20) выполняется всегда для любых $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ для любого графа Фейнмана (это представляется очень трудоемким), вместо этого будет рассмотрено несколько важных частных случаев, на примере которых будет видно, каким образом представленная вычислительная процедура устраняет расходимости.

Инфракрасной расходимости соответствуют значения $\beta_j = 2$ для линий из G' , $\beta_j = 1$ для линий из P_1 и P_2 , $\beta_j = 0$ для остальных линий (см. [48]). При этом инфракрасно расходятся слагаемые, в которых все линии из P_1 и P_2 не спарены. Действительно, можно проверить, что

$$\sum_j \beta_j = N_G + 2N_{G'} - 3,$$

где N_G и $N_{G'}$ — количества вершин соответственно в G и G' ,

$$V \asymp \delta^{N_{G'} - 1}$$

(доминирующее по степени δ дерево состоит из P_1 , P_2 и любого 1-дерева G'),

$$B_{j_1 j_2}/V \asymp 1/\delta^2, \quad j_1, j_2 \in G',$$

$$B_{j_1 j_2}/V = O(1), \quad j_1 \notin G' \text{ или } j_2 \notin G',$$

¹⁶⁾ В рамках этой статьи $f(\delta) \asymp g(\delta)$ означает, что $0 < C_1 < |f(\delta)/g(\delta)| < C_2$ в некоторой окрестности предельного значения δ , $f \sim g$ означает $\lim f/g = 1$.

Таблица 4. Сравнение вкладов в $A_1^{(6)}$ некоторых множеств графов из рис. 3 с известными аналитическими значениями

№	Значение	Аналитич. знач.	Ссылка
1–6	0.3708(14)	0.3710052921	[35]
7–10	0.04989(20)	0.05015	[29, 30]*
11–12, 15–16	–0.08782(15)	–0.0879847	[27, 29]
13–14, 17–18	–0.11230(17)	–0.112336	[28, 29]
19–21	0.05288(13)	0.05287	[8]
22	0.002548(20)	0.0025585	[8]
23–24	1.8629(14)	1.861907872591	[36]
25	–0.02688(47)	–0.026799490	[37]
26–27	–3.1764(22)	–3.17668477	[33]
28	1.7888(19)	1.79027778	[33]
29–30	–1.7579(10)	–1.757936342	[37]
31–32, 37–38	5.3559(27)	5.35763265	[33, 34]
33–34, 37–38	0.4549(14)	0.45545185	[33, 36]
31–32, 35–36	1.5436(34)	1.541649	[32, 34]
33–36	–3.3573(24)	–3.360532	[32, 36]
39–40	–0.33468(95)	–0.334695103723	[36]
41–48	–0.4030(41)	–0.4029	[31, 32]
49–72	0.9529(53)	0.9541	[31–34, 36, 37]

*Имеет место несовпадение значений на множествах 7–8 и 9–10 по отдельности со значениями в указанных статьях. Причину несовпадения выяснить не удалось, однако сумма по 7–10 сходится с высокой точностью — погрешность менее 0.6%.

$$K = \frac{N' - 1}{2} - s,$$

где s — количество выбранных пар электронных линий,

$$\hat{Q}_l/V \sim \hat{p}_1, \quad l \in P_1, \quad \hat{Q}_l/V \sim \hat{p}_2, \quad l \in P_2,$$

$$W/V \asymp \delta^2$$

(см. также [48]).

Последнее соотношение рассмотрим подробнее. Выражение Vz_e можно представить как $\sum_{(T;l)} z_T z_l$, где суммирование ведется по всем парам, T — 1-дерево, l — электронная линия в G , z_T — произведение z_j на хордах T . Ясно, что для любого 2-дерева, для которого электронные внешние линии G инцидентны вершинам в разных компонентах связности,

можно найти линию из электронного пути, соединяющего электронные внешние линии G , которое будет соединять компоненты связности данного 2-дерева. Поставим в соответствие этому 2-дереву пару $(T;l)$, где l — данная линия, T — дерево, получающееся добавлением l к 2-дереву. $z_T z_l$ будет равно произведению z_j по хордам 2-дерева, разным 2-деревам будут сопоставлены разные $(T;l)$. Таким образом, расписав выражение для $S - Vz_e$, можно сократить все слагаемые из S и часть слагаемых из Vz_e ; доминирующее по степени δ слагаемое из оставшихся и будет определять асимптотическое поведение $S - Vz_e$. Ясно, что все вклады пар $(T;l)$ для доминирующих по степени δ деревьев T в выражении для V сократятся, поэтому z_T для оставшихся пар

будут по порядку не больше δV , при этом z_l тоже по порядку не больше δ (потому что l — электронная линия), из чего следует, что $S - Vz_e$ по порядку не превосходит $\delta^2 V$. Остается привести пример пары $(T; l)$, для которой значение не меньше $\delta^2 V$, это можно сделать для любого G . Отметим также, что данное рассуждение доказывает, что все коэффициенты полинома $S - Vz_e$ отрицательны, это обосновывает возможность использования Утверждения 1 (ниже будет приведен более простой способ получения данной асимптотики, но он не даст возможности доказать знакопостоянность коэффициентов).

Мы получаем порядок роста функции $I(z_1, \dots, z_n)$, в точности равный $\delta^{-\beta_1 - \dots - \beta_n}$, если все спаривания внутри G' , что соответствует логарифмической ИК-расходимости, если же спарена хотя бы одна линия вне G' , то при данных β_j расходимости нет.

5.3. ИК-поведение контрчлена и сокращение расходимости

Теперь рассмотрим, как ведет себя функция, соответствующая инфракрасному контрчлену $(\bar{L}_G - \bar{U}_G)A_{G'}f_G$ в (18). Для получения соответствующей ему функции $I'(z_1, \dots, z_n)$ вычисляем $f_{G'}(\underline{z}, \varepsilon)$, $f_{G/G'}(\underline{z}, \varepsilon)$ подобно тому, как описано в разд. 2.3¹⁷⁾, применяем к ним соответствующие проекционные операторы, перемножаем их, выполняем предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ и интегрирование (15), после чего у нас получается

$$\sum_{K_1 \geq 1} \sum_{K_2 \geq 0} \frac{C_{K_1+K_2} F_{K_1}^{G'} F_{K_2}^{G/G'}}{(W^{G'}/V^{G'} + W^{G/G'}/V^{G/G'})^{K_1+K_2}},$$

при этом величины $F_{K_1}^{G'}$, $F_{K_2}^{G/G'}$, $W^{G'}$, $W^{G/G'}$, $V^{G'}$, $V^{G/G'}$ строятся по правилам, аналогичным описанным выше для построения F_K , W , V . Компенсировать инфракрасные расходимости будут слагаемые с $K_2 = (N_{G/G'} - 1)/2$, т. е. соответствующие случаю, когда все электронные линии в G/G' не спарены.

Занумеруем некоторым образом фотонные линии, инцидентные вершинам $P_1 \cup P_2$, не лежащим в G' . Пусть l_1, \dots, l_n — номера фотонных линий, инцидентных вершинам пути P_1 , не лежащим в G' , в порядке следования по пути, j_1, \dots, j_n — аналогичные номера в порядке следования по P_2 . Ключевым

¹⁷⁾ Через G/G' здесь и далее обозначается граф, получающийся из G заменой подграфа G' на вершину; если G' не является подграфом G , то полагается $G/G' = G$. В данном конкретном случае подразумевается, что линии графа G делятся на линии подграфа G' и все остальные — линии G/G' .

для устранения инфракрасных расходимостей является следующее утверждение.

Утверждение 2. Если $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ — некоторая произвольная функция, представляемая в виде линейной комбинации произведений $\hat{p}_1, \hat{p}_2, p_{1\mu}, p_{2\mu}, \gamma_\mu$, в которых ровно один множитель с μ , с коэффициентами, являющимися функциями от $p_1^2, p_2^2, p_1 p_2$ (здесь p_1, p_2 означают импульсы входящих и выходящих внешних электронных линий, в отличие от используемого ранее обозначения), то имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \bar{A} [\gamma_{\nu_{j_n}}(\hat{p}_2 + m) \dots \gamma_{\nu_{j_1}}(\hat{p}_2 + m) \times \\ & \times \Gamma_\mu(p_1, p_2)(\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_n}} \dots (\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_1}}] = \\ & = \bar{A} [\Gamma_\mu(p_1, p_2)] \times \\ & \times \bar{L} [\gamma_{\nu_{j_n}}(\hat{p}_2 + m) \dots \gamma_{\nu_{j_1}}(\hat{p}_2 + m) \times \\ & \times \gamma_\mu(\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_n}} \dots (\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_1}}], \end{aligned} \quad (21)$$

где по парам одноименных тензорных индексов проводится свертка.

Доказательство. Заметим, что значение $\bar{A}[\dots]$ в (21) зависит только от значений при $p_1^2 = p_2^2 = m^2$ в биспинорных обкладках $\bar{u}_2 \dots u_1$, удовлетворяющих условиям

$$(\hat{p}_1 - m)u_1 = 0, \quad \bar{u}_2(\hat{p}_2 - m) = 0,$$

поэтому умножение аргумента \bar{A} на $(\hat{p}_2 - m)$ слева или $(\hat{p}_1 - m)$ справа приводит к нулевому результату, а умножение на $(\hat{p}_2 + m)$ слева или $(\hat{p}_1 + m)$ справа эквивалентно умножению на $2m$. Рассмотрим вычисление значения $\bar{A}[\dots]$ в (21). Воспользуемся равенством

$$\gamma_{\nu_{j_n}}(\hat{p}_2 + m) = (m - \hat{p}_2)\gamma_{\nu_{j_n}} + 2p_{2\nu_{j_n}},$$

первое слагаемое, согласно сделанному замечанию, можно отбросить, второе можно сразу свернуть с каким-то γ с одноименным тензорным индексом, это будет эквивалентно вставке \hat{p}_2 где-то вместо $\gamma \dots$. Если вставка будет слева от Γ_μ , то воспользуемся равенством

$$(\hat{p}_2 + m)\hat{p}_2(\hat{p}_2 + m) = 2m^2(\hat{p}_2 + m),$$

и задача вычисления $\bar{A}[\dots]$ в (21) сведется к таковой для $n - 1$ фотонных линий (если \hat{p}_2 попадает на край выражения, то напрямую применить равенство невозможно, но можно воспользоваться умножением слева на $(\hat{p}_2 + m)$, которое эквивалентно умножению на $2m$). Если вставка \hat{p}_2 происходит справа от Γ_μ , то воспользуемся равенством

$$(\hat{p}_1 + m)\hat{p}_2(\hat{p}_1 + m) = (\hat{p}_1 + m)(2p_1 p_2),$$

при этом можно заменить $2p_1p_2$ на $2m^2$ (это доказывается аналогично равенству (14)) и вставка \hat{p}_2 будет эквивалентна вставке \hat{p}_1 , можно повторить рассуждения для вставки в левую часть. Таким образом,

$$\begin{aligned} & \bar{A} [\gamma_{\nu_{j_n}}(\hat{p}_2 + m) \dots \gamma_{\nu_{j_1}}(\hat{p}_2 + m) \times \\ & \times \Gamma_\mu(p_1, p_2)(\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_n}} \dots (\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_1}}] = \\ & = (4m^2)^n \bar{A} [\Gamma_\mu(p_1, p_2)]. \end{aligned}$$

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что

$$\begin{aligned} & \bar{L} [\gamma_{\nu_{j_n}}(\hat{p}_2 + m) \dots \gamma_{\nu_{j_1}}(\hat{p}_2 + m) \times \\ & \times \gamma_\mu(\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_n}} \dots (\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_1}}] = (4m^2)^n. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Отметим также, что

$$\begin{aligned} & \bar{U} [\gamma_{\nu_{j_n}}(\hat{p}_2 + m) \dots \gamma_{\nu_{j_1}}(\hat{p}_2 + m) \times \\ & \times \gamma_\mu(\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_n}} \dots (\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_1}}] = 0. \quad (22) \end{aligned}$$

Действительно, поскольку \bar{U} использует значения только на массовой поверхности, можно сразу заменить \hat{p}_1 и \hat{p}_2 на \hat{p} , $p^2 = m^2$, из равенства

$$(\hat{p} + m)\gamma_\mu(\hat{p} + m) = 2(\hat{p} + m)p_\mu$$

вытекает, что выражение в квадратных скобках можно представить как $p_\mu f$ (поскольку p_μ со всем коммутирует), где f — линейная комбинация 1 и \hat{p} .

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \bar{A} [\gamma_{\nu_{j_n}}(\hat{p}_2 + m) \dots \gamma_{\nu_{j_1}}(\hat{p}_2 + m) \times \\ & \times \Gamma_\mu(p_1, p_2)(\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_n}} \dots (\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_1}}] = \\ & = \bar{A} [\Gamma_\mu(p_1, p_2)] \times \\ & \times (\bar{L} - \bar{U}) [\gamma_{\nu_{j_n}}(\hat{p}_2 + m) \dots \gamma_{\nu_{j_1}}(\hat{p}_2 + m) \times \\ & \times \gamma_\mu(\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_n}} \dots (\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_1}}]. \quad (23) \end{aligned}$$

Слагаемые в $I'(\underline{z})$, соответствующие заданному выбору пар электронных линий в G' , имеют в точности такое же асимптотическое поведение при $\delta \rightarrow 0$, как и соответствующие слагаемые в $I(\underline{z})$, поэтому разность $I(\underline{z}) - I'(\underline{z})$ удовлетворяет условиям утверждения 1 для рассматриваемых значений β_j . Совпадение асимптотики вытекает из (23) и следующих асимптотических равенств (см. также [48]):

$$V^{G'} V^{G/G'} \sim V,$$

$$\frac{B_{j_1 j_2}^{G'}}{V^{G'}} \sim \frac{B_{j_1 j_2}}{V}, \quad j_1, j_2 \in G',$$

$$\frac{\hat{Q}_l^{G'}}{V^{G'}} \sim \frac{\hat{Q}_l}{V}, \quad l \in G',$$

$$\frac{\hat{Q}_l}{V} \sim \hat{p}_1, \quad l \in P_1, \quad \frac{\hat{Q}_l}{V} \sim \hat{p}_2, \quad l \in P_2, \quad (24)$$

$$\frac{W}{V} \sim \frac{W^{G'}}{V^{G'}} + \frac{W^{G/G'}}{V^{G/G'}}. \quad (25)$$

Основная идея здесь в том, что если все величины $B_{\dots}, V_{\dots}, \hat{Q}_{\dots}$ расписать в виде суммы произведений, оставить только доминирующие по степени δ слагаемые, то мы получим точные равенства.

Для доказательства (25), однако, нужны более сложные комбинаторные рассуждения, но мы применим другой метод, который более нагляден и без труда обобщается на случай вложенных друг в друга ИК-расходящихся подграфов (см. Приложение С). Будем использовать аналогию с электрическими цепями (см. [52]): S/V равно сопротивлению электрической цепи, состоящей из резисторов с сопротивлениями z_j , измеренному между электронными внешними линиями, при этом z_e равно сопротивлению аналогичной цепи, в которой проводимости фотонных резисторов $g_j = z_j^{-1}$ заменены на нулевые, т. е. W/V — это величина, на которую изменится сопротивление цепи, если проводимости фотонных резисторов заменить на нуль. Будем использовать следующий факт:

$$\frac{\partial R}{\partial g_j} = -(\mathcal{U}_j)^2, \quad (26)$$

где R — сопротивление цепи, \mathcal{U}_j — разность потенциалов между концами резистора j при условии, что через цепь пропускается единичный ток, входящий и выходящий через внешние электронные линии. Этот факт можно доказать, устранив из цепи промежуточные точки и расписав левую и правую части явно через сопротивления оставшихся шести резисторов, соединяющих четыре точки. Рассмотрим электрическую цепь, в которой проводимости фотонных резисторов заменены нулями. Если заменить проводимости фотонных резисторов из G' на их правильные значения z_j^{-1} , то сопротивление цепи изменится на $-W^{G'}/V^{G'}$. Далее, будем плавно изменять проводимости оставшихся фотонных резисторов, доводя их до правильных значений z_j^{-1} , изменение общего сопротивления цепи получится через интегрирование соответствующих производных, выраженных через (26). Заметим, что на любом этапе данного процесса значение \mathcal{U}_j для фотонного резистора из G/G' будет асимптотически равно сумме z_l по электронным линиям в G/G' на электронном пути между концами j при $\delta \rightarrow 0$ (и сходимость будет равномерная). То же самое можно сказать про

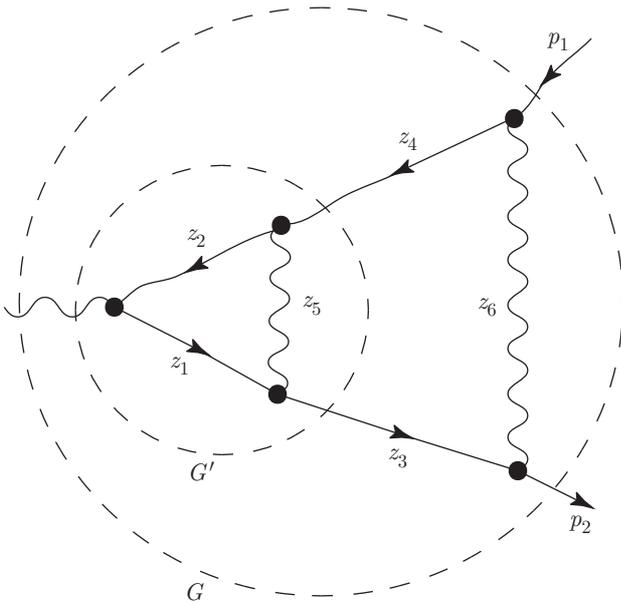


Рис. 5. Двухпетлевой «лестничной» граф Фейнмана

аналогичный процесс для цепи \$G/G'\$, откуда вытекает (25).

6. ПРИМЕР УСТРАНЕНИЯ ИНФРАКРАСНЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ

6.1. Построение выражения для подынтегральной функции

Рассмотрим двухпетлевой граф Фейнмана, представленный на рис. 5.

Ему соответствует операторное выражение

$$A_G - A_G U_{G'} - (L_G - U_G) A_{G'}.$$

Здесь первое слагаемое будем называть \$A\$-слагаемым, второе — \$U\$-слагаемым, третье — \$I\$-слагаемым.

Данному графу соответствует неперенормированная фейнмановская амплитуда¹⁸⁾

$$\Gamma_\mu^{\{4\}}(p_1, p_2; \varepsilon) = \int \frac{1}{(k_1^2 + i\varepsilon)(k_2^2 + i\varepsilon)} \times \times \gamma_{\mu_6} \frac{i(\hat{p}_2 + \hat{k}_1 + m)}{(p_2 + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} \times$$

$$\times \gamma_{\mu_5} \frac{i(\hat{p}_2 + \hat{k}_1 + \hat{k}_2 + m)}{(p_2 + k_1 + k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon} \times \times \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + \hat{k}_2 + m)}{(p_1 + k_1 + k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon} \times \times \gamma_{\mu_5} \frac{i(\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m)}{(p_1 + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^{\mu_6} d^4 k_1 d^4 k_2$$

(постоянный коэффициент опущен для простоты). Переход к швингеровским параметрам для данной амплитуды дает (с точностью до постоянного множителя)

$$\Gamma_\mu^{[4]}(\underline{z}; p_1, p_2; \varepsilon) = [\Gamma_\mu^{[4,2]}(\underline{z}; p_1, p_2) + + \Gamma_\mu^{[4,1]}(\underline{z}; p_1, p_2) + \Gamma_\mu^{[4,0]}(\underline{z}; p_1, p_2)] \times \times \exp(iX^{[4]}(\underline{z}; p_1, p_2; \varepsilon)),$$

где \$\underline{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)\$,

$$\Gamma_\mu^{[4,2]}(\underline{z}; p_1, p_2) = \frac{1}{(V^{[4]})^2} \gamma_{\mu_6} \left(\frac{\hat{Q}_3}{V^{[4]}} + m \right) \times \times \gamma_{\mu_5} \left(\frac{\hat{Q}_1}{V^{[4]}} + m \right) \gamma_\mu \left(\frac{\hat{Q}_2}{V^{[4]}} + m \right) \times \times \gamma_{\mu_5} \left(\frac{\hat{Q}_4}{V^{[4]}} + m \right) \gamma^{\mu_6}, \quad (27)$$

$$\Gamma_\mu^{[4,1]}(\underline{z}; p_1, p_2) = \frac{iB_{12}}{2(V^{[4]})^3} \gamma_{\mu_6} \left(\frac{\hat{Q}_3}{V^{[4]}} + m \right) \times \times \gamma_{\mu_5} \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^{\mu_5} \left(\frac{\hat{Q}_4}{V^{[4]}} + m \right) \gamma^{\mu_6} + + \frac{iB_{13}}{2(V^{[4]})^3} \gamma_{\mu_6} \gamma_\nu \gamma_{\mu_5} \gamma^\nu \gamma_\mu \left(\frac{\hat{Q}_2}{V^{[4]}} + m \right) \times \times \gamma_{\mu_5} \left(\frac{\hat{Q}_4}{V^{[4]}} + m \right) \gamma^{\mu_6} + \frac{iB_{14}}{2(V^{[4]})^3} \gamma_{\mu_6} \left(\frac{\hat{Q}_3}{V^{[4]}} + m \right) \times \times \gamma_{\mu_5} \gamma_\nu \gamma_\mu \left(\frac{\hat{Q}_2}{V^{[4]}} + m \right) \gamma^{\mu_5} \gamma^\nu \gamma^{\mu_6} + + \frac{iB_{23}}{2(V^{[4]})^3} \gamma_{\mu_6} \gamma_\nu \gamma_{\mu_5} \left(\frac{\hat{Q}_1}{V^{[4]}} + m \right) \times \times \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^{\mu_5} \left(\frac{\hat{Q}_4}{V^{[4]}} + m \right) \gamma^{\mu_6} + \frac{iB_{24}}{2(V^{[4]})^3} \times \times \gamma_{\mu_6} \left(\frac{\hat{Q}_3}{V^{[4]}} + m \right) \gamma_{\mu_5} \left(\frac{\hat{Q}_1}{V^{[4]}} + m \right) \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^{\mu_5} \gamma^\nu \gamma^{\mu_6} +$$

¹⁸⁾ В данной статье расходящиеся интегралы в импульсном представлении рассматриваются чисто формально, не затрагивается вопрос об их корректном математическом определении, регуляризации.

$$+ \frac{iB_{34}}{2(V^{[4]})^3} \gamma_{\mu_6} \gamma_{\nu} \gamma_{\mu_5} \left(\frac{\hat{Q}_1}{V^{[4]}} + m \right) \times \\ \times \gamma_{\mu} \left(\frac{\hat{Q}_2}{V^{[4]}} + m \right) \gamma^{\mu_5} \gamma^{\nu} \gamma^{\mu_6}, \quad (28)$$

$$\Gamma_{\mu}^{[4,0]}(\underline{z}; p_1, p_2) = \\ = - \frac{B_{12}B_{34}}{4(V^{[4]})^4} \gamma_{\mu_6} \gamma_{\xi} \gamma_{\mu_5} \gamma_{\nu} \gamma_{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\mu_5} \gamma^{\xi} \gamma^{\mu_6} - \\ - \frac{B_{13}B_{24}}{4(V^{[4]})^4} \gamma_{\mu_6} \gamma_{\nu} \gamma_{\mu_5} \gamma^{\nu} \gamma_{\mu} \gamma_{\xi} \gamma^{\mu_5} \gamma^{\xi} \gamma^{\mu_6} - \\ - \frac{B_{14}B_{23}}{4(V^{[4]})^4} \gamma_{\mu_6} \gamma_{\xi} \gamma_{\mu_5} \gamma_{\nu} \gamma_{\mu} \gamma^{\xi} \gamma^{\mu_5} \gamma^{\nu} \gamma^{\mu_6},$$

$$V^{[4]} = (z_1 + z_2 + z_5)(z_3 + z_4 + z_6) + z_5(z_1 + z_2), \quad (29)$$

$$\hat{Q}_j = Q_j^{(1)} \hat{p}_1 + Q_j^{(2)} \hat{p}_2, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$Q_1^{(1)} = -z_2(z_3 + z_4 + z_5 + z_6) - z_4 z_5,$$

$$Q_1^{(2)} = z_5(z_2 + z_4 + z_6) + z_2(z_3 + z_4 + z_6),$$

$$Q_2^{(1)} = z_5(z_1 + z_3 + z_6) + z_1(z_3 + z_4 + z_6),$$

$$Q_2^{(2)} = -z_5(z_1 + z_3) - z_1(z_3 + z_4 + z_6),$$

$$Q_3^{(1)} = -z_5(z_2 + z_4) - z_4(z_1 + z_2),$$

$$Q_3^{(2)} = z_5(z_2 + z_4 + z_6) + (z_1 + z_2)(z_4 + z_6),$$

$$Q_4^{(1)} = z_5(z_1 + z_3 + z_6) + (z_1 + z_2)(z_3 + z_6),$$

$$Q_4^{(2)} = -z_5(z_1 + z_3) - z_3(z_1 + z_2),$$

$$B_{12} = z_3 + z_4 + z_5 + z_6, \quad B_{13} = z_5, \quad B_{14} = z_5,$$

$$B_{23} = z_5, \quad B_{24} = z_5, \quad B_{34} = z_1 + z_2 + z_5,$$

$$X^{[4]}(\underline{z}; p_1, p_2; \varepsilon) = \frac{(p_1 - p_2)^2}{V^{[4]}} [z_1 z_2 (z_3 + z_4 + z_5 + z_6) + \\ + z_3 z_4 (z_1 + z_2 + z_5) + z_5 (z_1 z_4 + z_2 z_3)] + \\ + \frac{p_1^2}{V^{[4]}} [z_4 z_6 (z_1 + z_2 + z_5) + z_2 z_5 z_6] + \\ + \frac{p_2^2}{V^{[4]}} [z_3 z_6 (z_1 + z_2 + z_5) + z_1 z_5 z_6] - \\ - m^2 (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + \\ + i\varepsilon (z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6). \quad (30)$$

Здесь $\Gamma_{\mu}^{[4,j]}(\underline{z}; p_1, p_2)$ соответствует $2-j$ спариваниям электронных линий¹⁹⁾.

¹⁹⁾ Заметим, что правила построения выражений немного отличаются от описанных в разд. 5.1, поскольку в этих выражениях еще не выполнены интегрирование и предельный переход (15).

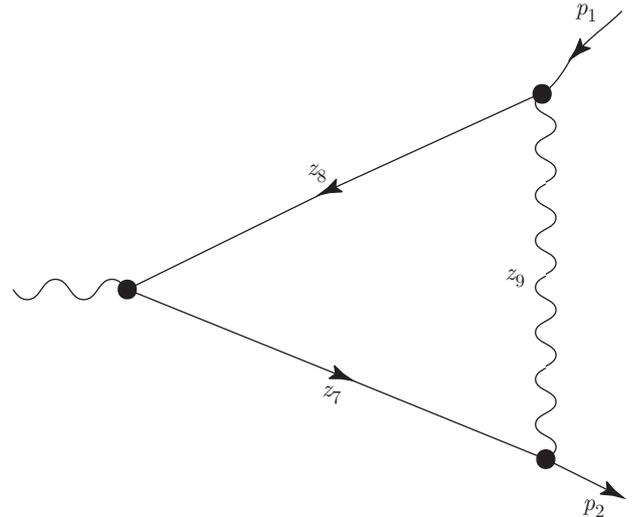


Рис. 6. Однопетлевой граф Фейнмана

A -слагаемое равно $\overline{A}\Gamma^{[4]}$ (с точностью до постоянного множителя), в швингеровском представлении ему соответствует

$$\check{f}_G^{A-term}(\underline{z}; \varepsilon) = \overline{A}\Gamma^{[4]}(\underline{z}; \varepsilon) = \\ = \left[\overline{A}\Gamma^{[4,2]}(\underline{z}) + \overline{A}\Gamma^{[4,1]}(\underline{z}) + \overline{A}\Gamma^{[4,0]}(\underline{z}) \right] \times \\ \times \exp\left(i\overline{X}^{[4]}(\underline{z}; \varepsilon)\right) = \left[\overline{A}\Gamma^{[4,2]}(\underline{z}) + \overline{A}\Gamma^{[4,1]}(\underline{z}) \right] \times \\ \times \exp\left(i\overline{X}^{[4]}(\underline{z}; \varepsilon)\right),$$

где

$$\overline{X}^{[4]}(\underline{z}; \varepsilon) = X^{[4]}(\underline{z}; p_1, p_2; \varepsilon) \Big|_{p_1=p_2, p_1^2=m^2} \quad (31)$$

(здесь мы опускаем индекс μ и аргументы p_1 и p_2 у $\Gamma^{[4,\dots]}$, поскольку оператор \overline{A} их устраняет). В связи с громоздкостью не будем выписывать выражения для $\overline{A}\Gamma^{[4,1]}$ и $\overline{A}\Gamma^{[4,2]}$.

Чтобы выписать соответствующие выражения для U -слагаемого и I -слагаемого, потребуется перенормированная фейнмановская амплитуда, соответствующая однопетлевому графу из рис. 6:

$$\Gamma_{\mu}^{\{2\}}(p_1, p_2; \varepsilon) = \int \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \gamma_{\mu_9} \frac{i(\hat{p}_2 + \hat{k} + m)}{(p_2 + k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \times \\ \times \gamma_{\mu} \frac{i(\hat{p}_1 + \hat{k} + m)}{(p_1 + k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^{\mu_9} d^4 k.$$

Переход к швингеровским параметрам для данной фейнмановской амплитуды дает

$$\Gamma_\mu^{[2]}(z_7, z_8, z_9; p_1, p_2; \varepsilon) = \left[\Gamma_\mu^{[2,1]}(z_7, z_8, z_9; p_1, p_2) + \Gamma_\mu^{[2,0]}(z_7, z_8, z_9; p_1, p_2) \right] \times \exp \left(iX^{[2]}(z_7, z_8, z_9; p_1, p_2; \varepsilon) \right),$$

где

$$\Gamma_\mu^{[2,1]}(z_7, z_8, z_9; p_1, p_2) = \frac{1}{(V^{[2]})^2} \gamma_{\mu_9} \left(\frac{\hat{Q}_7}{V^{[2]}} + m \right) \times \gamma_\mu \left(\frac{\hat{Q}_8}{V^{[2]}} + m \right) \gamma^{\mu_9} = \frac{1}{(V^{[2]})^2} \times \left(-2m^2 \gamma_\mu + 4m(Q_7^{(1)} + Q_8^{(1)})p_{1\mu} + 4m(Q_7^{(2)} + Q_8^{(2)})p_{2\mu} + Q_7^{(1)}Q_8^{(1)}(-4p_{1\mu}\hat{p}_1 + 2p_1^2\gamma_\mu) + Q_7^{(2)}Q_8^{(2)}(-4p_{2\mu}\hat{p}_2) + 2p_2^2\gamma_\mu - 2Q_7^{(1)}Q_8^{(2)}\hat{p}_2\gamma_\mu\hat{p}_1 - 2Q_7^{(2)}Q_8^{(1)}\hat{p}_1\gamma_\mu\hat{p}_2 \right),$$

$$\Gamma_\mu^{[2,0]}(z_7, z_8, z_9; p_1, p_2) = \frac{iB_{78}}{2(V^{[2]})^3} (\gamma_{\mu_9}\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu_9}) = \frac{2iB_{78}}{(V^{[2]})^3} \gamma_\mu,$$

$$V^{[2]}(z_7, z_8, z_9) = z_7 + z_8 + z_9, \quad (32)$$

$$\hat{Q}_j = Q_j^{(1)}\hat{p}_1 + Q_j^{(2)}\hat{p}_2, \quad j = 7, 8,$$

$$Q_7^{(1)}(z_7, z_8, z_9) = -z_8, \quad Q_7^{(2)}(z_7, z_8, z_9) = z_8 + z_9,$$

$$Q_8^{(1)}(z_7, z_8, z_9) = z_7 + z_9, \quad Q_8^{(2)}(z_7, z_8, z_9) = -z_7,$$

$$B_{78} = 1,$$

$$X^{[2]}(z_7, z_8, z_9; p_1, p_2; \varepsilon) = \frac{z_7z_8(p_1 - p_2)^2 + z_7z_9p_1^2 + z_8z_9p_2^2}{V^{[2]}(z_7, z_8, z_9)} - m^2(z_7 + z_8) + i\varepsilon(z_7 + z_8 + z_9).$$

Здесь $\Gamma_\mu^{[2,j]}(z_7, z_8, z_9; p_1, p_2)$ соответствует $1 - j$ спариваниям электронных линий.

U -слагаемое равно $-(\overline{A}\Gamma^{\{2\}})(\overline{U}\Gamma^{\{2\}})$, в швингеровском представлении оно равно

$$\check{f}_G^{U-term}(\underline{z}; \varepsilon) = -\overline{A}\Gamma^{[2]}(z_3, z_4, z_6; \varepsilon)\overline{U}\Gamma^{[2]}(z_1, z_2, z_5; \varepsilon) = -\overline{A}\Gamma^{[2,1]}(z_3, z_4, z_6)(\overline{U}\Gamma^{[2,1]}(z_1, z_2, z_5) + \overline{U}\Gamma^{[2,0]}(z_1, z_2, z_5)) \exp \left(i\overline{X}^{[4,c-term]}(\underline{z}; \varepsilon) \right),$$

где

$$\overline{X}^{[4,c-term]}(\underline{z}; \varepsilon) = \overline{X}^{[2]}(z_1, z_2, z_5; \varepsilon) + \overline{X}^{[2]}(z_3, z_4, z_6; \varepsilon),$$

$$\overline{X}^{[2]}(z_7, z_8, z_9; \varepsilon) = X^{[2]}(z_7, z_8, z_9; p_1, p_2; \varepsilon) \Big|_{p_1=p_2, p_1^2=m^2}.$$

Аналогично, I -слагаемое равно $-(\overline{L} - \overline{U})\Gamma^{\{2\}} \times (\overline{A}\Gamma^{\{2\}})$, представление швингеровских параметров для него имеет вид

$$\check{f}_G^{I-term}(\underline{z}; \varepsilon) = -\overline{A}\Gamma^{[2]}(z_1, z_2, z_5; \varepsilon) \cdot (\overline{L} - \overline{U})\Gamma^{[2]}(z_3, z_4, z_6; \varepsilon) = -\overline{A}\Gamma^{[2,1]}(z_1, z_2, z_5) \cdot (\overline{L} - \overline{U})\Gamma^{[2,1]}(z_3, z_4, z_6) \times \exp \left(i\overline{X}^{[4,c-term]}(\underline{z}; \varepsilon) \right),$$

при этом

$$\overline{U}\Gamma^{[2,0]}(z_7, z_8, z_9) = \overline{L}\Gamma^{[2,0]}(z_7, z_8, z_9) = \frac{2iB_{78}}{(V^{[2]})^3},$$

$$\overline{U}\Gamma^{[2,1]}(z_7, z_8, z_9) = \frac{m^2}{(V^{[2]})^2} \left(-2 + \frac{2Q_7^{(1)}Q_8^{(1)}}{(V^{[2]})^2} + \frac{2Q_7^{(2)}Q_8^{(2)}}{(V^{[2]})^2} + \frac{2Q_7^{(1)}Q_8^{(2)}}{(V^{[2]})^2} + \frac{2Q_7^{(2)}Q_8^{(1)}}{(V^{[2]})^2} \right), \quad (33)$$

$$\overline{L}\Gamma^{[2,1]}(z_7, z_8, z_9) = \frac{m^2}{(V^{[2]})^2} \left(-2 - \frac{2Q_7^{(1)}Q_8^{(1)}}{(V^{[2]})^2} - \frac{2Q_7^{(2)}Q_8^{(2)}}{(V^{[2]})^2} - \frac{2Q_7^{(1)}Q_8^{(2)}}{(V^{[2]})^2} - \frac{2Q_7^{(2)}Q_8^{(1)}}{(V^{[2]})^2} + \frac{4Q_7^{(1)}}{V^{[2]}} + \frac{4Q_7^{(2)}}{V^{[2]}} + \frac{4Q_8^{(1)}}{V^{[2]}} + \frac{4Q_8^{(2)}}{V^{[2]}} \right), \quad (34)$$

$$\overline{A}\Gamma^{[2,1]}(z_7, z_8, z_9) = \frac{m^2}{(V^{[2]})^2} \left(\frac{4Q_7^{(1)}Q_8^{(1)}}{(V^{[2]})^2} + \frac{4Q_7^{(2)}Q_8^{(2)}}{(V^{[2]})^2} + \frac{8Q_7^{(2)}Q_8^{(1)}}{(V^{[2]})^2} - \frac{4Q_7^{(1)}}{V^{[2]}} - \frac{4Q_7^{(2)}}{V^{[2]}} - \frac{4Q_8^{(1)}}{V^{[2]}} - \frac{4Q_8^{(2)}}{V^{[2]}} \right). \quad (35)$$

Заметим, что, поскольку $(\overline{L} - \overline{U})\Gamma^{[2,0]} = 0$, I -слагаемое не содержит УФ-расходимостей.

Для перехода от швингеровских параметров к фейнмановским применяем интегрирование и предельный переход (15) к

$$\check{f}_G(\underline{z}; \varepsilon) = \check{f}_G^{A-term}(\underline{z}; \varepsilon) + \check{f}_G^{U-term}(\underline{z}; \varepsilon) + \check{f}_G^{I-term}(\underline{z}; \varepsilon),$$

получаем функцию

$$I(\underline{z}) = I^{A-term}(\underline{z}) + I^{U-term}(\underline{z}) + I^{I-term}(\underline{z}),$$

где

$$I^{A-term}(\underline{z}) = I^{A-term,1}(\underline{z}) + I^{A-term,2}(\underline{z}),$$

$$I^{A-term,1}(\underline{z}) = \frac{i\bar{A}\Gamma^{[4,1]}(\underline{z})}{\tilde{X}^{[4]}(\underline{z})},$$

$$I^{A-term,2}(\underline{z}) = -\frac{2\bar{A}\Gamma^{[4,2]}(\underline{z})}{(\tilde{X}^{[4]}(\underline{z}))^2},$$

$$I^{U-term}(\underline{z}) = I^{U-term,1}(\underline{z}) + I^{U-term,2}(\underline{z}),$$

$$I^{U-term,1}(\underline{z}) = -\frac{i\bar{A}\Gamma^{[2,1]}(z_3, z_4, z_6)\bar{U}\Gamma^{[2,0]}(z_1, z_2, z_5)}{\tilde{X}^{[4,c-term]}(\underline{z})},$$

$$I^{U-term,2}(\underline{z}) = \frac{2\bar{A}\Gamma^{[2,1]}(z_3, z_4, z_6)\bar{U}\Gamma^{[2,1]}(z_1, z_2, z_5)}{(\tilde{X}^{[4,c-term]}(\underline{z}))^2},$$

$$I^{I-term}(\underline{z}) = \frac{2\bar{A}\Gamma^{[2,1]}(z_1, z_2, z_5)(\bar{L} - \bar{U})\Gamma^{[2,1]}(z_3, z_4, z_6)}{(\tilde{X}^{[4,c-term]}(\underline{z}))^2}, \quad (36)$$

$$\tilde{X}^{[4]}(\underline{z}) = \bar{X}^{[4]}(\underline{z}; 0), \quad (37)$$

$$\tilde{X}^{[4,c-term]}(\underline{z}) = \bar{X}^{[4,c-term]}(\underline{z}; 0).$$

6.2. Исследование инфракрасных расходимостей

Как было отмечено в работе [48] и разд. 5, если рассуждать в терминах фейнмановских параметров, инфракрасная расходимость наблюдается из-за быстрого роста $|I^{A-term}(\underline{z})|$ при

$$z_1, z_2, z_5 \asymp \delta^2, \quad z_3, z_4 \asymp \delta, \quad z_6 \asymp 1, \quad \delta \rightarrow 0 \quad (38)$$

(см. утверждение 1 из разд. 5.2). В этом случае мы имеем

$$V^{[4]} \asymp \delta^2,$$

$$Q_1^{(1)} \asymp \delta^2, \quad Q_1^{(2)} \asymp \delta^2, \quad Q_2^{(1)} \asymp \delta^2, \quad Q_2^{(2)} \asymp \delta^2,$$

$$Q_3^{(1)} \asymp \delta^3, \quad Q_3^{(2)} \asymp \delta^2, \quad Q_4^{(1)} \asymp \delta^2, \quad Q_4^{(2)} \asymp \delta^3,$$

$$B_{12} \asymp 1, \quad B_{13}, B_{14}, B_{23}, B_{24}, B_{34} \asymp \delta^2,$$

кроме того с учетом (29)–(31), (37) имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{[4]} &= \frac{m^2}{V^{[4]}} [z_5(z_1 + z_2)(z_3 + z_4 + z_6) + \\ &\quad + z_6(z_3 + z_4)(z_1 + z_2 + z_5) - z_5(z_1 + z_2)(z_3 + z_4)] - \\ &\quad - m^2(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) = \\ &= \frac{m^2}{V^{[4]}} (z_3 + z_4 + z_6)[z_5(z_1 + z_2) - (z_1 + z_2)(z_1 + z_2 + z_5)] + \\ &\quad + \frac{m^2}{V^{[4]}} (z_1 + z_2 + z_5)[z_6(z_3 + z_4) - (z_3 + z_4)(z_3 + z_4 + z_6)] - \\ &\quad - \frac{m^2}{V^{[4]}} z_5(z_1 + z_2)(z_3 + z_4) - \\ &\quad - \frac{m^2}{V^{[4]}} z_5(z_1 + z_2)(z_1 + z_2 + z_3 + z_4), \quad (39) \end{aligned}$$

здесь все слагаемые отрицательны, последние два имеют порядок $O(\delta^3)$, первые два $-\delta^2$, поэтому

$$\tilde{X}^{[4]} \asymp \delta^2.$$

Таким образом²⁰,

$$\Gamma_\mu^{[4,1]} \asymp 1/\delta^6, \quad \Gamma_\mu^{[4,2]} \asymp 1/\delta^4,$$

откуда следует, что некоторые слагаемые в $I^{A-term,1}$ и $I^{A-term,2}$ имеют порядок роста $1/\delta^8$, что соответствует расходимости логарифмического характера (см. утверждение 1 из разд. 5.2). Аналогичные слагаемые имеются в I^{U-term} и I^{I-term} .

Для исследования поведения данных функций при $\delta \rightarrow 0$ удобно ввести функции

$$V^{[4,IR]}(\underline{z}) = V^{[2]}(z_1, z_2, z_5)V^{[2]}(z_3, z_4, z_6), \quad (40)$$

$$Q_1^{(j,IR)}(\underline{z}) = Q_7^{(j)}(z_1, z_2, z_5)V^{[2]}(z_3, z_4, z_6), \quad j = 1, 2,$$

$$Q_2^{(j,IR)}(\underline{z}) = Q_8^{(j)}(z_1, z_2, z_5)V^{[2]}(z_3, z_4, z_6), \quad j = 1, 2,$$

$$Q_3^{(1,IR)}(\underline{z}) = Q_4^{(2,IR)}(\underline{z}) = 0,$$

$$Q_3^{(2,IR)}(\underline{z}) = Q_4^{(1,IR)}(\underline{z}) = V^{[4,IR]}(\underline{z}),$$

$$B_{12}^{IR}(\underline{z}) = B_{78}(z_1, z_2, z_5)V^{[2]}(z_3, z_4, z_6) = V^{[2]}(z_3, z_4, z_6),$$

$$B_{13}^{IR} = B_{14}^{IR} = B_{23}^{IR} = B_{24}^{IR} = B_{34}^{IR} = 0,$$

$$\tilde{X}^{[4,IR]}(\underline{z}) = \tilde{X}^{[4,c-term]}(\underline{z}).$$

Можно проверить, что если какая-то из функций V^{\dots} , Q^{\dots} , B^{\dots} , \tilde{X}^{\dots} присутствует в $I(\underline{z})$ в слагаемых порядка $1/\delta^8$, то соответствующая IR -версия

²⁰ Во избежание громоздких выкладок мы не исследуем вопрос о том, сокращаются ли старшие по порядку роста члены в рассматриваемых выражениях. Предполагается, что они не сокращаются.

асимптотически эквивалентна²¹⁾ данной функции при $\delta \rightarrow 0$, в противном случае IR -версия равна нулю. Для $\tilde{X}^{[4]}$ это вытекает из (39):

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{[4]} &\sim \frac{m^2}{V^{[4,IR]}}(z_3 + z_4 + z_6) \times \\ &\times [z_5(z_1 + z_2) - (z_1 + z_2)(z_1 + z_2 + z_5)] + \\ &+ \frac{m^2}{V^{[4,IR]}}(z_1 + z_2 + z_5)[z_6(z_3 + z_4) - (z_3 + z_4)(z_3 + z_4 + z_6)] - \\ &- \frac{m^2 z_5}{V^{[4,IR]}}(z_1 + z_2)(z_3 + z_4) - \\ &- \frac{m^2}{V^{[4,IR]}}z_5(z_1 + z_2)(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) = \\ &= \tilde{X}^{[2]}(z_1, z_2, z_5) + \tilde{X}^{[2]}(z_3, z_4, z_6) + O(\delta^3) + O(\delta^3). \end{aligned}$$

Это означает, что если определить $\Gamma_\mu^{[4,1,IR]}$, $\Gamma_\mu^{[4,2,IR]}$ точно так же, как в (28), (27), только используя IR -версии функций $V\cdots$, $Q\cdots$, $B\cdots$ вместо исходных вариантов, положить

$$\begin{aligned} I^{A-term,IR}(\underline{z}) &= I^{A-term,1,IR}(\underline{z}) + I^{A-term,2,IR}(\underline{z}), \\ I^{A-term,1,IR}(\underline{z}) &= \frac{i\bar{A}\Gamma^{[4,1,IR]}(\underline{z})}{\tilde{X}^{[4,IR]}(\underline{z})}, \\ I^{A-term,2,IR}(\underline{z}) &= -\frac{2\bar{A}\Gamma^{[4,2,IR]}(\underline{z})}{(\tilde{X}^{[4,IR]}(\underline{z}))^2}, \end{aligned} \quad (41)$$

то будет иметь место соотношение

$$I^{A-term,IR}(\underline{z}) - I^{A-term}(\underline{z}) = o(1/\delta^8).$$

Таким образом, для определения поведения $I(\underline{z})$ при $\delta \rightarrow 0$ достаточно изучить поведение суммы

$$I^{A-term,IR}(\underline{z}) + I^{U-term}(\underline{z}) + I^{I-term}(\underline{z}).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \bar{A}\Gamma^{[4,1,IR]}(\underline{z}) &= \frac{iB_{12}^{IR}}{2(V^{[4,IR]})^3} \times \\ &\times \bar{A}[\gamma_{\mu_6}(\hat{p}_2 + m)\gamma_{\mu_5}\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu_5}(\hat{p}_1 + m)\gamma^{\mu_6}] = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$I^{A-term,1,IR}(\underline{z}) = 0.$$

Далее, поскольку

$$Q_7^{(2)}(z_3, z_4, z_6) \sim Q_8^{(1)}(z_3, z_4, z_6) \sim V^{[2]}(z_3, z_4, z_6),$$

при учете (35) имеет место

$$\bar{A}\Gamma^{[2,1]}(z_3, z_4, z_6) = o(1).$$

²¹⁾ Функции f и g асимптотически эквивалентны, если $f \sim \sim g$.

Следовательно,

$$I^{U-term}(\underline{z}) = o(1/\delta^8).$$

Иными словами, U -слагаемое не имеет инфракрасной расходимости рассматриваемого типа. Осталось доказать, что расходимости, соответствующие $I^{A-term,2,IR}$ и I^{I-term} , сокращаются друг с другом. С помощью громоздких выкладок или утверждения 2 можно получить, что

$$\begin{aligned} \bar{A}\Gamma^{[4,2,IR]}(\underline{z}) &= \frac{1}{(V^{[4,IR]})^2} \times \\ &\times \bar{A} \left[\gamma_{\mu_6}(\hat{p}_2 + m)\gamma_{\mu_5} \left(\frac{\hat{Q}_7(z_1, z_2, z_5)}{V^{[2]}(z_1, z_2, z_5)} + m \right) \times \right. \\ &\times \left. \gamma_{\mu} \left(\frac{\hat{Q}_8(z_1, z_2, z_5)}{V^{[2]}(z_1, z_2, z_5)} + m \right) \gamma^{\mu_5}(\hat{p}_1 + m)\gamma^{\mu_6} \right] = \\ &= \frac{16m^4}{(V^{[4,IR]})^2} \left(\frac{Q_7^{(1)}Q_8^{(1)}}{(V^{[2]})^2} + \frac{Q_7^{(2)}Q_8^{(2)}}{(V^{[2]})^2} + \frac{2Q_7^{(2)}Q_8^{(1)}}{(V^{[2]})^2} - \right. \\ &\left. - \frac{Q_7^{(1)}}{V^{[2]}} - \frac{Q_7^{(2)}}{V^{[2]}} - \frac{Q_8^{(1)}}{V^{[2]}} - \frac{Q_8^{(2)}}{V^{[2]}} \right) \end{aligned}$$

(в последнем выражении опущены аргументы (z_1, z_2, z_5) у функций). Учитывая это, а также (35), (36), (40), (41), легко видеть, что выражение для $-I^{I-term}(\underline{z})$ отличается от выражения для $I^{A-term,2,IR}(\underline{z})$ только тем, что $(\bar{L} - \bar{U})\Gamma^{[2,1]}(z_3, z_4, z_6)$ заменено на $4m^2/(V^{[2]}(z_3, z_4, z_6))^2$. Из (32)–(34) следует, что данные функции асимптотически эквивалентны при $\delta \rightarrow 0$, откуда и вытекает равенство

$$I^{I-term}(\underline{z}) + I^{A-term,2,IR}(\underline{z}) = o(1/\delta^8).$$

6.3. Демонстрация невозможности прямого применения вычитания на массовой поверхности

Если вместо разработанной вычислительной процедуры применить прямой подход, то будем иметь подынтегральную функцию

$$I(\underline{z}) = I^{A-term}(\underline{z}) + I^{L-term}(\underline{z}),$$

где

$$I^{L-term}(\underline{z}) = I^{L-term,1}(\underline{z}) + I^{L-term,2}(\underline{z}),$$

$$I^{L-term,1}(\underline{z}) = -\frac{i\bar{A}\Gamma^{[2,1]}(z_3, z_4, z_6)\bar{L}\Gamma^{[2,0]}(z_1, z_2, z_5)}{\tilde{X}^{[4,c-term]}(\underline{z})},$$

$$I^{L-term,2}(\underline{z}) = \frac{2\bar{A}\Gamma^{[2,1]}(z_3, z_4, z_6)\bar{L}\Gamma^{[2,1]}(z_1, z_2, z_5)}{(\tilde{X}^{[4,c-term]}(\underline{z}))^2}$$

(I^{L-term} определяется точно так же, как I^{U-term} , только вместо оператора \bar{U} используется \bar{L}).

В этом случае при выполнении (38) будем иметь

$$I^{L-term}(\underline{z}) = o(1/\delta^8),$$

это доказывается точно так же, как аналогичное соотношение для I^{U-term} . Таким образом, при использовании прямого подхода контрчлен не сокращает расходимость, соответствующую (38).

Более того, контрчлен имеет дополнительную ИК-расходимость, соответствующую

$$z_1, z_2 \asymp \delta, \quad z_5 \asymp 1, \quad z_3, z_4, z_6 \asymp \delta^2, \quad \delta \rightarrow 0,$$

в связи с тем, что в этом случае выполняется соотношение

$$I^{L-term,2}(\underline{z}) \asymp 1/\delta^8.$$

Это соотношение вытекает из следующих:

$$\begin{aligned} V^{[2]}(z_1, z_2, z_5) &\asymp 1, & V^{[2]}(z_3, z_4, z_6) &\asymp \delta^2, \\ \tilde{X}^{[2]}(z_1, z_2, z_5) &\asymp \delta^2, & \tilde{X}^{[2]}(z_3, z_4, z_6) &\asymp \delta^2, \\ \bar{A}\Gamma^{[2,1]}(z_3, z_4, z_6) &\asymp 1/\delta^4, \\ \bar{L}\Gamma^{[2,1]}(z_1, z_2, z_5) &\asymp 1. \end{aligned}$$

Данная расходимость не сокращается. Заметим, что I^{U-term} не имеет данной расходимости, поскольку

$$\bar{U}\Gamma^{[2,1]}(z_1, z_2, z_5) = o(1).$$

В этом главное преимущество оператора U перед оператором L .

7. ОБСУЖДЕНИЕ

В разд. 5 рассмотрено устранение расходимостей в представлении фейнмановских параметров для случая, когда в графе Фейнмана есть единственный подграф, не совпадающий с целым графом и порождающий ИК-расходимость (и одновременно УФ-расходимость), в Приложении С рассмотрен случай произвольного количества вложенных друг в друга подобных подграфов. Однако вопрос о строгом математическом обосновании того, что данная вычитательная процедура устраняет все расходимости в любом графе Фейнмана для АММ электрона, остается открытым²²⁾. В частности, даже для упомянутых выше ситуаций рассмотрены только конкретные значения β_j из утверждения 1, которые, по всей

²²⁾ И поэтому остается «шанс», что данная процедура неприменима, начиная с некоторого порядка теории возмущений.

видимости, соответствуют ИК-расходимостям, возникающим на промежуточных этапах, при этом вопрос о выполнении условий этого утверждения для произвольных β_j остается не рассмотренным. Кроме того, аккуратного рассмотрения требуют широко обсуждавшиеся [14, 15, 53, 54] ИК-расходимости степенного характера, связанные с электронными собственными-энергетическими подграфами. По всей видимости, такие расходимости устраняются, поскольку операторы U выделяют массовые части $\Sigma(m) = a(m^2) + b(m^2)m$ в (6) полностью, и это подтверждается проведенными двухпетлевым и трехпетлевым вычислениями.

Отметим, что в высоких порядках теории возмущений может возникнуть еще одна проблема — фиктивные инфракрасные расходимости. Фиктивная ИК-расходимость появляется при наличии подграфа в $\mathcal{J}[G]$, не связанного непосредственно с ИК-расходимостью в f_G (в смысле рассмотрения, например, в работе [48]). Такая ситуация имеет место в уже упомянутом примере на рис. 1, в подграфе $aa_1a_2b_1b_2c_1c_2c_3c_4$, в связи с тем, что электронный путь, соединяющий электронные внешние линии всего графа, не проходит через данный подграф. Необходимость вычитания в том числе и фиктивных расходимостей может увеличить время счета, и мы не можем изменить определение $\mathcal{J}[G]$ так, чтобы такие подграфы не включались в множество, поскольку в таком случае не будут работать рассуждения из Приложения В. Кроме того, гипотетическая проблема может возникнуть, когда к таким подграфам применяется оператор L (который может породить дополнительную ИК-расходимость) либо оператор A применяется к подграфам, в которых данный подграф соответствует реальной ИК-расходимости (нефиктивной). Гипотетически могла бы возникнуть ситуация, когда порожденная ИК-расходимость не была бы ничем скомпенсирована в связи с фиктивностью соответствующей расходимости в f_G . В упомянутом примере такой ситуации возникнуть не может. Минимальный граф, в котором такое может случиться, изображен на рис. 7 (он имеет пять независимых петель).

Здесь подграфы G_1 и G_2 соответствуют фиктивным ИК-расходимостям. Однако легко видеть, что проблемы не возникает, потому что такие расходимости сокращаются друг с другом. Например, в сумме слагаемых (11) для данного примера, которые имеют ИК-расходимости, связанные с G_1 или G_2 , можно вынести за скобки $A_{G_2} - L_{G_2}A_{G_1}$.

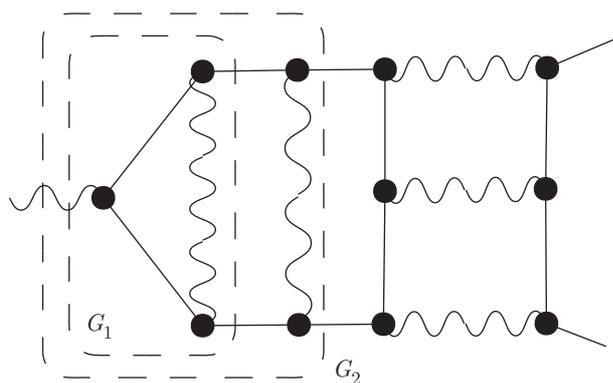


Рис. 7. Минимальный граф Фейнмана с «опасными» фиктивными ИК-расходимостями

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод для численного расчета $A_1^{(2n)}$. Метод основан на поточечном вычитании ИК- и УФ-расходимостей в представлении фейнмановских параметров и является полностью автоматическим. Данный метод применен для вычисления $A_1^{(4)}$ и $A_1^{(6)}$ с использованием интегрирования методом Монте-Карло, результаты вычисления согласуются с известными значениями этих величин. По всей видимости, возможно применение метода для вычисления вкладов более высоких порядков, однако вопрос о строгом математическом обосновании этого факта остается открытым, как и вопрос компьютерной проверки метода для $n \geq 4$.

Автор считает своим долгом выразить благодарность А. Л. Катаеву за полезное обсуждение, ценные рекомендации, критические замечания и помощь в решении организационных вопросов, О. В. Теряеву за полезное обсуждение и помощь в решении организационных вопросов, а также Л. В. Калиновской за помощь в решении организационных вопросов. Кроме того, отдельную благодарность автор выражает рецензенту за внимательное изучение работы, ряд ценных замечаний и рекомендаций.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Доказательство признака сходимости интегралов от дробно-рациональных функций (утверждения 1)

Сделаем замену переменных $z_q = \exp(-y_q)$, тогда рассматриваемый интеграл можно переписать в форме

$$\int_0^\infty \frac{|C_1 \exp(L_1 \underline{y}) + \dots + C_h \exp(L_h \underline{y})|}{D_1 \exp(\underline{s}_1 \underline{y}) + \dots + D_p \exp(\underline{s}_p \underline{y})} dy_1 \dots dy_n,$$

где L_1, \dots, L_h — различные векторы, $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_p$ — тоже различные векторы, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $C_1, \dots, C_h \neq 0$, $D_1, \dots, D_p > 0$. Положим

$$\Phi_j = \{ \underline{y} = (y_1, \dots, y_n) : y_1, \dots, y_n \geq 0, (\forall q \neq j) \underline{s}_j \underline{y} \geq \underline{s}_q \underline{y} \}.$$

Предположим, что рассматриваемый интеграл расходуется, тогда он расходится и на одном из невырожденных множеств Φ_j . В этом случае расходится и интеграл

$$\int_{\Phi_j} |C_1 \exp((L_1 - \underline{s}_j) \underline{y}) + \dots + C_h \exp((L_h - \underline{s}_j) \underline{y})| dy_1 \dots dy_n.$$

Тогда, очевидно, множество Φ_j содержит некоторый луч с направлением \underline{r} , таким что для некоторого q : $(L_q - \underline{s}_j) \underline{r} \geq 0$. Далее, выберем все q , для которых произведение $(L_q - \underline{s}_j) \underline{r}$ максимально, пусть для определенности, это $1, 2, \dots, H$. Выберем такое \underline{y}^0 , что

$$C_1 \exp((L_1 - \underline{s}_j) \underline{y}^0) + \dots + C_H \exp((L_H - \underline{s}_j) \underline{y}^0) \neq 0$$

(такое значение существует, так как все L_1, \dots, L_H различны, а Φ_j невырождено). Если переместить выбранный луч в начало \underline{y}^0 , то новый луч будет целиком лежать в Φ_j , поскольку Φ_j выпукло и замкнуто. Очевидно, что вдоль этого луча

$$C_1 \exp((L_1 - \underline{s}_j) \underline{y}) + \dots + C_h \exp((L_h - \underline{s}_j) \underline{y})$$

не будет стремиться к нулю при $\delta \rightarrow 0$, поэтому можно положить $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n) = \underline{r}$, $z_q(\delta) = \exp(-y_q^0) \delta^{r_q}$ и получить противоречие с условием утверждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Доказательство равенства $a_{e,1}^{new} = a_{e,1}$

Здесь мы будем иметь дело с величинами, которые, вообще говоря, бесконечны, поэтому они должны быть подходящим образом регуляризованы²³⁾.

²³⁾ Данное рассмотрение не претендует на уровень строгого доказательства, какие-либо конкретные процедуры регуляризации бесконечностей не применяются. Однако «комбинаторная часть» рассматриваемого в данном разделе равенства доказывается полностью.

Кроме того, с целью избежания громоздких выкладок будем рассматривать суммы рядов теории возмущений, при этом такие суммы следует понимать чисто формально как набор коэффициентов, не изучая поведение данных рядов в асимптотическом пределе — в каждом конкретном случае каждый коэффициент будет представляться в виде конечной суммы. Например, если

$$a = \sum_{n \geq 0} a_n \alpha^n, \quad b = \sum_{n \geq 0} b_n \alpha^n,$$

то

$$ab = \sum_{n \geq 0} c_n \alpha^n, \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0,$$

при этом если $a_0 = 1$, то

$$\frac{1}{a} = \sum_{l \geq 0} \left(- \sum_{n \geq 1} a_n \alpha^n \right)^l,$$

и в каждый коэффициент разложения $1/a$ по степеням α будет давать вклад лишь конечное число членов этого ряда.

Для вершинного графа²⁴⁾ или графа борновского приближения²⁵⁾ G через $\mathfrak{F}'[G]$ обозначим множество всех лесов УФ-расходящихся подграфов G (включая пустой), через $\mathfrak{F}^*[G]$ — множество всех лесов не лежащих в $\mathfrak{I}[G]$ УФ-расходящихся подграфов G .

Положим для вершинного графа или графа борновского приближения G

$$f'_G = \sum_{F=\{G_1, \dots, G_n\} \in \mathfrak{F}'[G]} (-1)^n U_{G_1} \dots U_{G_n} f_G,$$

где слагаемым является в том числе соответствующее $F = \emptyset$ (произведение пустого множества множителей считается равным единице).

Положим

$$a'_e = \overline{A} \left[\sum_G f'_G \right], \quad Z_1^{-1} = \overline{L} \left[\sum_G f'_G \right].$$

Здесь и далее в этом разделе суммирование проводится по всем вершинным графам G и графу борновского приближения. Для удобства будем считать, что фейнмановские амплитуды нормированы

²⁴⁾ Напоминаем, что к вершинным графам относим только УФ-расходящиеся, т.е. имеющие более одной внутренней вершины.

²⁵⁾ Под графом борновского приближения здесь понимаем граф, имеющий одну внутреннюю вершину, две внешние электронные линии, одну внешнюю фотонную линию.

таким образом, что графу борновского приближения соответствует амплитуда γ_μ .

В разд. 3 описано свойство (которым обладает оператор U), связанное с тождеством Уорда, из него следует, что фейнмановская амплитуда $\sum_G f'_G$ будет соответствовать некоторой промежуточной перенормировке волновой функции электрона, т.е.

$$a_{e,1} = Z_1 a'_e.$$

Пусть

$$f_G^* = \sum_{F=\{G_1, \dots, G_n\} \in \mathfrak{F}^*[G]} (-1)^n U_{G_1} \dots U_{G_n} f_G,$$

$$(Z_1^*)^{-1} = \overline{U} \left[\sum_G f_G^* \right].$$

Утверждение 3. Имеет место следующее равенство:

$$\sum_G f'_G = \left(\sum_G f_G^* \right) Z_1^*. \quad (42)$$

Доказательство. Рассматривая слагаемое

$$(-1)^n U_{G_1} \dots U_{G_n} f_G \quad (43)$$

в $\sum_G f'_G$, обозначим через G'_1, \dots, G'_r все элементы $\{G_1, \dots, G_n\}$, лежащие в $\mathfrak{I}[G]$, $G'_1 \subset G'_2 \subset \dots \subset G'_r \subseteq G$, и положим

$$F' = \{G_1, \dots, G_n\} \setminus \{G'_1, \dots, G'_r\}.$$

Кроме того, для удобства введем обозначение $G'_{r+1} = G$. Заметим, что элементы $\mathfrak{I}[G]$ не могут частично перекрываться с какими-либо УФ-расходящимися подграфами (вообще говоря, вершинные подграфы могут частично перекрываться с другими вершинными и подграфами рассеяния фотона на фотоне, но, поскольку мы рассматриваем только те, которые содержат инцидентную фотонной внешней линии G вершину, такое перекрытие обязательно породит либо мост²⁶⁾ в G , либо мост в подграфе, либо подграф, имеющий три фотонные внешние линии и никаких других, и, следовательно, нечетный электронный цикл). Таким образом, если зафиксировать r и рассматривать только слагаемые (43) с заданным r , то процесс выбора слагаемого можно представить следующим образом. Сначала выбирается G'_1 и элементы F' , содержащиеся в G'_1 . Затем последовательно для каждого $l = 1, \dots, r$ выбирается G'_{l+1} , содержащий G'_l , и элементы F ,

²⁶⁾ Мостом называется линия в связанном графе, удаление которой делает его несвязным.

содержащиеся в G'_{l+1} , но не содержащиеся в G'_l . Этот выбор для данного l эквивалентен выбору $G' = G'_{l+1}/G'_l$ и некоторых G''/G'_l , где G'' — соответствующие элементы F' , т.е. эквивалентен либо выбору вершинного графа (для $l < r$), либо вершинного графа или графа борновского приближения (для $l = r$) G' , а также некоторого леса из $\mathfrak{F}^*[G']$. Выборы для разных l делаются независимо, и их вклады перемножаются, т.е. вклад заданного r в $\sum_G f'_G$ равен

$$\left(\sum_G f_G^*\right) (1 - (Z_1^*)^{-1})^r$$

(здесь при $r \geq 1$ первый множитель соответствует $l = r$, остальные r одинаковых множителей — $l < r$, а также выбору G'_1 и элементов F' из G'_1 , случай $r = 0$ разбирается отдельно и тривиален). Просуммировав это выражение по $r = 0, 1, 2, \dots$, получим (42).

Утверждение 4. Справедливо следующее равенство

$$a_{e,1}^{new} = a'_e Z_1.$$

Доказательство. Идея доказательства аналогична доказательству утверждения 3. Рассматривая слагаемое в $a_{e,1}^{new}$, соответствующее

$$(-1)^{n-1} M_{G_1}^{G'} \dots M_{G_n}^{G'}$$

в (11), $F = \{G_1, \dots, G_n\}$, через G'_1, \dots, G'_r обозначим элементы F , лежащие в $\mathcal{I}[G]$, и положим $F' = F \setminus \{G'_1, \dots, G'_r\}$. Если зафиксировать r и рассматривать только слагаемые с заданным r , то процесс выбора слагаемого можно представить следующим образом.

- Сначала выбирается $G' = G'_1$ и все элементы F' , которые в нем содержатся. Это эквивалентно выбору вершинного графа (G') и леса подграфов G' , не содержащего G' . Поскольку для любой фейнмановской амплитуды Γ_μ имеет место равенство $AU\Gamma_\mu = 0$, ограничение, что лес подграфов не должен содержать G' , можно отбросить, и это не повлияет на вклад. Этот вклад будет равен a'_e .

- Затем для каждого $l = 2, \dots, r$ последовательно выбирается граф G'_l и все элементы F' , содержащиеся в G'_l и не содержащиеся в G'_{l-1} . Это эквивалентно выбору вершинного графа $G'' = G'_l/G'_{l-1}$ и некоторого леса из $\mathfrak{F}^*[G'']$. Суммарный вклад этого выбора будет для $l < r$ равен

$$\begin{aligned} \bar{L} \sum_{N_G \geq 3} f_G^* &= \bar{L} \sum_G f_G^* - 1 = \\ &= (Z_1^*)^{-1} \bar{L} \sum_G f'_G - 1 = Z_1^{-1} (Z_1^*)^{-1} - 1, \end{aligned}$$

N_G — количество вершин графа, второе равенство следует из утверждения 3. Для $l = r$ вклад будет равен

$$\begin{aligned} (\bar{L} - \bar{U}) \sum_{N_G \geq 3} f_G^* &= (\bar{L} - \bar{U}) \sum_G f_G^* = \\ &= (Z_1^*)^{-1} (\bar{L} - \bar{U}) \sum_G f'_G = (Z_1^*)^{-1} (Z_1^{-1} - 1), \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из того, что $\bar{U}U\Gamma_\mu = \bar{U}\Gamma_\mu$, в связи с чем в $\bar{U} \sum_G f'_G$ сокращаются все слагаемые, кроме соответствующего графу борновского приближения. Общий вклад с учетом знака будет равен a'_e при $r = 1$ и

$$a'_e (Z_1^*)^{-1} (1 - Z_1^{-1}) (1 - Z_1^{-1} (Z_1^*)^{-1})^{r-2}$$

при $r \geq 2$. Суммируя ряд по $r = 1, 2, \dots$, получаем $a'_e Z_1$. Утверждение доказано.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Устранение расходимостей: случай вложенных ИК-расходящихся подграфов

Рассмотрим вершинный граф G , содержащий вершинные подграфы

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n \subset G,$$

содержащие вершину, инцидентную фотонной внешней линии G , и пересекающиеся с электронным путем G , который соединяет электронные внешние линии G , см. рис. 8. Для удобства обозначим $G_{n+1} = G$, G_0 — подграф из одной вершины, инцидентной внешней фотонной линии G (будем считать, что G_0 тоже лежит на электронном пути, соединяющем внешние линии G , но это не принципиально). Через P'_j обозначим участок электронного пути, соединяющего внешние линии G , состоящий из всех линий, находящихся на пути между G_0 и входящей внешней линией G , лежащих в G_{j+1} , но не лежащих в G_j , через P''_j — аналогичный участок между G_0 и выходящей внешней линией G . Считаем, что никаких других УФ-расходящихся подграфов в G нет, каждая внутренняя фотонная линия соединяет вершины $P'_j \cup P''_j$, не лежащие в G_j , для некоторого j . Данное рассмотрение не претендует на уровень строгого доказательства.

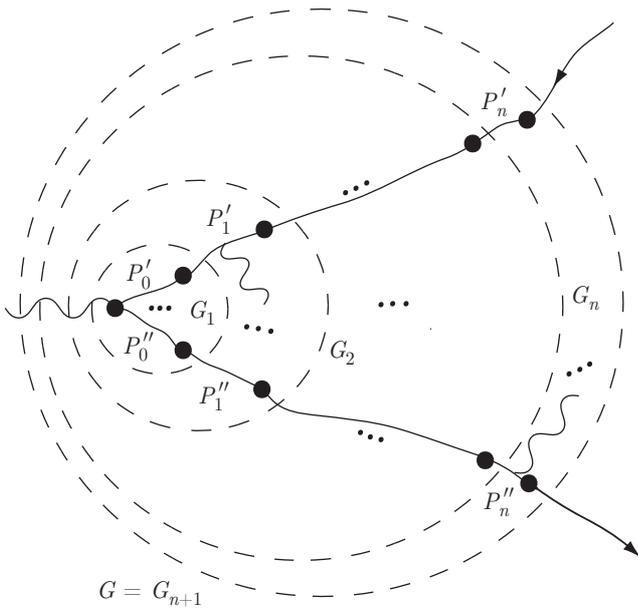


Рис. 8. Граф Фейнмана с вложенными друг в друга подграфами, порождающими ИК-расходимости

Вклад графа G в $a_{e,1}$ равен

$$\begin{aligned} & \bar{A}_G(1 - U_{G_n}) \dots (1 - U_{G_1}) f_G - \\ & - (\bar{L}_G - \bar{U}_G) A_{G_n} (1 - U_{G_{n-1}}) \dots (1 - U_{G_1}) f_G - \\ & - (\bar{L}_G - \bar{U}_G) (1 - L_{G_n}) A_{G_{n-1}} (1 - U_{G_{n-2}}) \dots \times \\ & \times \dots (1 - U_{G_1}) f_G - \dots - (\bar{L}_G - \bar{U}_G) (1 - L_{G_n}) \dots \times \\ & \times \dots (1 - L_{G_2}) A_{G_1} f_G. \end{aligned} \quad (44)$$

Отметим, что каждое слагаемое этой суммы свободно от УФ-расходимостей, потому что подграфу G_j , породившему УФ-расходимость, будет соответствовать фейнмановская амплитуда, УФ-расходящаяся часть которой пропорциональна γ_μ (потому что это соответствует случаю, когда все электронные линии спарены), и она будет обнулена соответствующим оператором:

$$\begin{aligned} (L - U)\gamma_\mu = 0, \quad (1 - L)\gamma_\mu = 0, \quad A\gamma_\mu = 0, \\ (1 - U)\gamma_\mu = 0. \end{aligned}$$

С этого момента мы не рассматриваем ультрафиолетовые расходимости.

Наблюдения показывают, что инфракрасным расходимостям в слагаемых (44) соответствуют значения $\underline{\beta}$ из утверждения 1, описываемые векторами расходимостей

$$[v_0, \dots, v_n; w_0, \dots, w_n],$$

$v_i \geq w_i \geq 0, 2v_0 - w_0 = 2v_1 - w_1 = \dots = 2v_n - w_n > 0$, существует такое i , что $w_i = 0$:

$$\beta_j = \begin{cases} v_l, & \text{если } j \in P'_l \cup P''_l, \\ w_l, & \text{если } j \in G_{l+1}/G_l, \quad j \notin P'_l \cup P''_l. \end{cases} \quad (45)$$

При этом расходиться могут только слагаемые, соответствующие спариваниям, удовлетворяющим следующему условию: если линия из $P'_{l_1} \cup P''_{l_1}$ спарена с линией из $P'_{l_2} \cup P''_{l_2}$, $l_1 \leq l_2$, то

$$v_{l_1} = v_{l_1+1} = \dots = v_{l_2} = w_{l_1} = w_{l_1+1} = \dots = w_{l_2}.$$

Отметим, что контрчлены

$$\begin{aligned} & (\bar{L}_G - \bar{U}_G) M_n \dots M_{j+1} \times \\ & \times A_{G_j} (1 - U_{G_{j-1}}) \dots (1 - U_{G_1}) f_G, \end{aligned} \quad (46)$$

$M_l \in \{1, L_{G_l}\}$, могут не только поглощать расходимости основного члена

$$\bar{A}_G (1 - U_{G_n}) \dots (1 - U_{G_1}) f_G, \quad (47)$$

но и порождать дополнительные инфракрасные расходимости.

Индекс j , $1 \leq j \leq n$, будем называть индексом перехода для вектора расходимости $[v; w]$, если $v_j > v_{j-1}$. Соответственно, индекс j , $1 \leq j \leq n$, называется индексом обратного перехода, если $v_j < v_{j-1}$. Индекс j в выражениях вида (46) или (47) называется разделяющим, если в выражении присутствует множитель A_{G_j} или L_{G_j} . Вектор расходимостей $[v; w]$ называется допустимым для выражения вида (46) или (47), если $v_0 = w_0$ и все индексы перехода в $[v; w]$ являются разделяющими в выражении. Расходимость типа $[v; w]$ может встречаться только в выражениях, для которых $[v; w]$ является допустимым.

• Если для какого-то индекса перехода j в $[v; w]$ вообще нет операторного множителя A_{G_j} , L_{G_j} или U_{G_j} в выражении, то

$$V_{G_{j_1}}, V_{G_{j_2}/G_{j_1}}, \dots, V_{G_{j_r}/G_{j_{r-1}}}, V_{G/G_{j_r}},$$

где $j_1 < \dots < j_r$ — индексы подграфов G_j , к фейнмановским амплитудам которых применяются операторы (нетождественные) в данном произведении, не будут иметь нужной асимптотики для образования расходимости:

$$\begin{aligned} & V_{G_{j_1}} V_{G_{j_2}/G_{j_1}} \dots V_{G_{j_r}/G_{j_{r-1}}} V_{G/G_{j_r}} = \\ & = o\left(\delta^{(1/2) \sum_{j=0}^n w_j (N_{G_{j+1}} - N_{G_j})}\right) \end{aligned}$$

(потому что в этом случае электронный путь, соединяющий внешние линии, не будет доминирующим 1-деревом по степени δ).

• Если для какого-то индекса перехода j в $[v; w]$ в выражении есть множитель U_{G_j} , то расходящаяся часть будет равна нулю благодаря равенству

$$\bar{U} [\gamma_{\nu_{j_n}}(\hat{p}_2 + m) \dots \gamma_{\nu_{j_1}}(\hat{p}_2 + m) \times \Gamma_\mu(p_1, p_2)(\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_n}} \dots (\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_1}}] = 0. \quad (48)$$

Это равенство выполняется, потому что Γ_μ на массовой поверхности при $p_1 = p_2 = p$ представляется в виде линейной комбинации $\gamma_\mu, p_\mu, \hat{p}p_\mu, (\hat{p}\gamma_\mu - \gamma_\mu\hat{p})$, случай γ_μ разобран — см. (22), случай $\hat{p}\gamma_\mu - \gamma_\mu\hat{p}$ разбирается аналогично, с использованием равенства

$$(\hat{p} + m)(\hat{p}\gamma_\mu - \gamma_\mu\hat{p})(\hat{p} + m) = 0,$$

в остальных случаях p_μ выносится сразу, без применения каких-либо преобразований.

• Если $v_0 > w_0$, то расходящаяся часть будет равна нулю благодаря (22) или равенству

$$\bar{A} [\gamma_{\nu_{j_n}}(\hat{p}_2 + m) \dots \gamma_{\nu_{j_1}}(\hat{p}_2 + m) \times \gamma_\mu(\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_n}} \dots (\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_1}}] = 0, \quad (49)$$

которое сразу вытекает из (21). Здесь играет роль самый внутренний подграф, к которому применяется какой-либо оператор (асимптотические равенства, аналогичные (24), будут иметь место для всех электронных линий этого подграфа).

Для доказательства того, что расходимость, соответствующая вектору $[v; w]$, сокращается, потребуются асимптотические равенства, аналогичные рассмотренным в разд. 5, выполняющиеся при $z_j \asymp \delta^{\beta_j}$, где β определяется через (45). Например, если индексы $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_r = n + 1$ и $0 = j_0 < j_1 < \dots < j_l = n + 1$ таковы, что все индексы перехода в $[v; w]$ входят как в $\{i_0, \dots, i_r\}$, так и в $\{j_0, \dots, j_l\}$, и все индексы s , которые входят ровно в одно из множеств $\{i_0, \dots, i_r\}, \{j_0, \dots, j_l\}$, являются индексами обратного перехода в $[v; w]$, то

$$V^{G_{i_1}/G_{i_0}} \dots V^{G_{i_r}/G_{i_{r-1}}} \sim V^{G_{j_1}/G_{j_0}} \dots V^{G_{j_l}/G_{j_{l-1}}} \asymp \delta^{(1/2) \sum_{j=0}^n w_j (N_{G_{j+1}} - N_{G_j})},$$

$$\frac{\hat{Q}_l^{G_{i_j}/G_{i_{j-1}}}}{V^{G_{i_j}/G_{i_{j-1}}}} \sim \hat{p}_1, l \in P'_s, \quad \frac{\hat{Q}_l^{G_{i_j}/G_{i_{j-1}}}}{V^{G_{i_j}/G_{i_{j-1}}}} \sim \hat{p}_2, \\ l \in P''_s, \quad v_s > w_s,$$

$$\frac{W^{G_{i_1}/G_{i_0}}}{V^{G_{i_1}/G_{i_0}}} + \dots + \frac{W^{G_{i_r}/G_{i_{r-1}}}}{V^{G_{i_r}/G_{i_{r-1}}}} \sim \\ \sim \frac{W^{G_{j_1}/G_{j_0}}}{V^{G_{j_1}/G_{j_0}}} + \dots + \frac{W^{G_{j_l}/G_{j_{l-1}}}}{V^{G_{j_l}/G_{j_{l-1}}}} \asymp \delta^{2v_0 - w_0}.$$

Последнее равенство доказывается с помощью метода, описанного в разд. 5, при этом можно плавно увеличивать проводимости фотонных резисторов последовательно, сначала для лежащих в G_1 , потом для лежащих в G_2/G_1 и т. д.

Для того чтобы показать отсутствие расходимости типа $[v; w]$ в (44), положим H равным некоторому индексу обратного перехода в $[v; w]$, представим (44) в следующем виде:

$$- \sum_{1 \leq l < H} ((\bar{L}_G - \bar{U}_G)(1 - L_{G_n}) \dots (1 - L_{G_{l+1}}) A_{G_l} \times \\ \times (1 - U_{G_{l-1}}) \dots (1 - U_{G_1}) f_G) + \\ + \sum_{H < l \leq n} ((\bar{L}_G - \bar{U}_G)(1 - L_{G_n}) \dots (1 - L_{G_{l+1}}) \times \\ \times [L_{G_l} A_{G_H} - A_{G_l}(1 - U_{G_{l-1}}) \dots (1 - U_{G_H})] \times \\ \times (1 - U_{G_{H-1}}) \dots (1 - U_{G_1}) f_G) + \\ + [\bar{A}_G(1 - U_{G_n}) \dots (1 - U_{G_H}) - (\bar{L}_G - \bar{U}_G) A_{G_H}] \times \\ \times (1 - U_{G_{H-1}}) \dots (1 - U_{G_1}) f_G. \quad (50)$$

Рассмотрим первое слагаемое в (50). Раскроем в нем все скобки вида $(1 - L_{G_r})$ при $r \neq H$, слагаемое будет представлено в виде суммы выражений, каждое из которых будет либо разностью двух выражений, для которых $[v; w]$ не является допустимым, либо свободно от расходимости $[v; w]$ благодаря множителю $(1 - L_{G_H})$. То, что этот множитель устранил данную расходимость, можно показать с использованием равенства

$$(\bar{L} - \xi \bar{U}) [\gamma_{\nu_{j_n}}(\hat{p}_2 + m) \dots \gamma_{\nu_{j_1}}(\hat{p}_2 + m) \times \\ \times \Gamma_\mu(p_1, p_2)(\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_n}} \dots (\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_1}}] = \\ = \bar{L} [\Gamma_\mu(p_1, p_2)] (\bar{L} - \xi \bar{U}) [\gamma_{\nu_{j_n}}(\hat{p}_2 + m) \dots \times \\ \times \dots \gamma_{\nu_{j_1}}(\hat{p}_2 + m)\gamma_\mu(\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_n}} \dots (\hat{p}_1 + m)\gamma_{\nu_{i_1}}],$$

где $\xi \in \{0, 1\}$, которое доказывается полностью аналогично равенству (21), с использованием (48).

Теперь рассмотрим второе слагаемое в (50). В нем раскроем все скобки вида $(1 - L_{G_r})$, после чего получится сумма выражений; каждое из них либо является разностью двух выражений, для которых $[v; w]$ не допустимо, либо свободно от расходимости $[v; w]$ благодаря множителю

$$L_{G_l} A_{G_H} - A_{G_l}(1 - U_{G_{l-1}}) \dots (1 - U_{G_H}). \quad (51)$$

Здесь, во-первых, нужно заметить, что слагаемые, содержащие хотя бы один из операторов $U_{G_H}, U_{G_{H+1}}, \dots$, свободны от расходимости $[v; w]$ в связи

с равенством (49), поэтому достаточно рассмотреть множитель

$$L_{G_I} A_{G_H} - A_{G_I}$$

вместо (51). Этот множитель устранил расходимость $[v; w]$ в связи с равенством (21). Третье слагаемое в (50) рассматривается полностью аналогично второму, только нужно использовать равенство (23) вместо (21).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, О. С. Парасюк, Изв. АН СССР **20**, 585 (1956).
2. К. Нерр, Comm. Math. Phys. **2**, 301 (1966).
3. В. А. Щербина, Каталог депонированных работ ВИНТИ, 38–64 (1964).
4. О. И. Завьялов, Б. М. Степанов, ЯФ **1**, 922 (1965).
5. W. Zimmermann, Comm. Math. Phys. **15**, 208 (1969).
6. О. И. Завьялов, *Перенормированные диаграммы Фейнмана*, Наука, Москва (1979).
7. В. А. Смирнов, *Перенормировка и асимптотические разложения фейнмановских амплитуд*, Изд-во МГУ, Москва (1990).
8. J. Mignaco and E. Remiddi, Nuovo Cim. A **60**, 519 (1969).
9. S. Weinberg, Phys. Rev. **140**, B516 (1965).
10. D. Yennie, S. Frautschi, and H. Suura, Ann. Phys. **13**, 379 (1961).
11. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).
12. P. DeCelles, Phys. Rev. **121**, 304 (1960).
13. D. Hanneke, S. Fogwell Hoogerheide, and G. Gabrielse, Phys. Rev. A **83**, 052122 (2011).
14. T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita et al., Phys. Rev. Lett. **109**, 111807 (2012).
15. T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita et al., Phys. Rev. D **91**, 033006 (2015).
16. J. Schwinger, Phys. Rev. **73**, 416 (1948).
17. J. Schwinger, Phys. Rev. **76**, 790 (1949).
18. R. Karplus and N. Kroll, Phys. Rev. **77**, 536 (1950).
19. A. Petermann, Helvetica Physica Acta **30**, 407 (1957).
20. C. Sommerfield, Phys. Rev. **107**, 328 (1957).
21. М. В. Терентьев, ЖЭТФ **43**, 619 (1962).
22. M. Levine and J. Wright, Phys. Rev. D **8**, 3171 (1973).
23. R. Carroll and Y.-P. Yao, Phys. Lett. B **48**, 125 (1974).
24. R. Carroll, Phys. Rev. D **12**, 2344 (1975).
25. P. Cvitanović and T. Kinoshita, Phys. Rev. D **10**, 4007 (1974).
26. T. Kinoshita, Phys. Rev. Lett. **75**, 4728 (1995).
27. R. Barbieri, M. Caffo, and E. Remiddi, Lett. Nuovo Cim. **5**, 769 (1972).
28. D. Billi, M. Caffo, and E. Remiddi, Lett. Nuovo Cim. **4**, 657 (1972).
29. R. Barbieri and E. Remiddi, Phys. Lett. **49B**, 468 (1974).
30. R. Barbieri, M. Caffo, and E. Remiddi, Ref.TH. 1802-CERN (1974).
31. M. Levine and R. Roskies, Phys. Rev. D **9**, 421 (1974).
32. M. Levine, R. Perisho, and R. Roskies, Phys. Rev. D **13**, 997 (1976).
33. R. Barbieri, M. Caffo, E. Remiddi et al., Nucl. Phys. B **144**, 329 (1978).
34. M. Levine, E. Remiddi, and R. Roskies, Phys. Rev. D **20**, 2068 (1979).
35. S. Laporta and E. Remiddi, Phys. Lett. B **265**, 182 (1991).
36. S. Laporta, Phys. Lett. B **343**, 421 (1995).
37. S. Laporta and E. Remiddi, Phys. Lett. B **379**, 283 (1996).
38. T. Kinoshita and W. Lindquist, Phys. Rev. Lett. **47**, 1573 (1981).
39. T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita et al., Phys. Rev. D **78**, 053005 (2008).
40. R. Bouchendir, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa et al., Phys. Rev. Lett. **106**, 080801 (2011).
41. P. Mohr, B. Taylor, and D. Newell, Rev. Mod. Phys. **84**, 1527 (2012).
42. A. L. Kataev, Phys. Rev. D **86**, 013010 (2012).

43. A. Kurz, T. Liu, P. Marquard et al., Nucl. Phys. B **879**, 1 (2014).
44. L. Ts. Adzhemyan and M. V. Kompaniets, J. Phys.: Conf. Ser. V **523**, 012049 (2014).
45. P. Cvitanović and T. Kinoshita, Phys. Rev. D **10**, 3978 (1974).
46. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1984).
47. T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita et al., Nucl. Phys. B **740**, 138 (2006).
48. P. Cvitanović and T. Kinoshita, Phys. Rev. D **10**, 3991 (1974).
49. А. Александреску, *Язык программирования D*, Символ-Плюс, Санкт-Петербург (2012).
50. D. Defour and F. Dinechin, Proc. First Int. Congress of Mathematical Software, Beijing, China (2002).
51. F. Jegerlehner and A. Nyffeler, Phys. Rep. **477**, 1 (2009).
52. Дж. Бьеркен, С. Дрелл, *Релятивистская квантовая теория*, т. 2, *Релятивистские квантовые поля*, Наука, Москва (1978).
53. T. Kinoshita and W. Lindquist, Phys. Rev. D **42**, 636 (1990).
54. T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita et al., Phys. Rev. D **77**, 053012 (2008).