

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА БРИЗЕРОВ В СПИРАЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ МАГНЕТИКОВ

*В. В. Киселев**, *А. А. Расковалов*

*Институт физики металлов Уральского отделения Российской академии наук
620990, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 9 июля 2015 г.

В рамках модели синус-Гордон дан анализ строения и свойств пульсирующих солитонов (бризеров) в спиральных структурах магнетиков. Показано, что пульсации ядра бризера сопровождаются локальными сдвигами и колебаниями спиральной структуры с образованием «предвестников» и «хвостов» у движущегося солитона. Обсуждаются возможности наблюдения и возбуждения бризеров в спиральных структурах магнетиков и мультиферроиков.

DOI: 10.7868/S0044451016060158

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследуются пульсирующие солитоны — бризеры — на фоне пространственно-периодичного основного состояния среды. Периодическими несоизмеримыми структурами буквально изобилуют решетки адатомов на поверхностях кристаллов с бороздчатым потенциальным рельефом [1, 2]. Многие магнетики без центра инверсии имеют периодическое основное состояние в виде квазиодномерной геликоидальной структуры [3]. «Закруткой» геликоида можно управлять, меняя внешнее магнитное поле, перпендикулярное оси магнитной спирали. Холестерические жидкие кристаллы также характеризуются спиральным упорядочением вектора-директора [4]. Внешние электрическое и магнитное поля позволяют эффективно управлять этими структурами. Наличие циклоидальной магнитной структуры приводит к появлению эффективной магнито-электрической связи за счет неоднородного магнитоэлектрического эффекта [5]. Теоретическое описание нелинейной динамики перечисленных систем осложнено наличием сильно нелинейного основного состояния среды, неразработанностью методов анализа коллективных возбуждений на неоднородном фоне.

В несоизмеримых (полосовых доменных) структурах условия образования солитонов и возможнос-

ти управления их свойствами посредством внешних электрического и магнитного полей практически не изучены. Конструктивное решение проблемы возможно в рамках упрощенных моделей, которые, с одной стороны, корректно учитывают основные взаимодействия, а с другой, — допускают точные решения.

Во многих магнетиках и мультиферроиках [6–8] образование спиральной структуры связано с наличием линейных по градиентам инвариантов в разложении энергии системы по степеням параметра порядка (вектора ферро- или антиферромагнетизма). Простейшая модель квазиодномерной динамики спиральной структуры имеет типичное выражение для плотности функции Лагранжа [3, 9, 10]:

$$L = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{1}{c^2} (\partial_t \Phi)^2 - (\partial_\xi \Phi)^2 \right] - \kappa [1 - \cos(N\Phi)] - \gamma \partial_\xi \Phi, \quad (1.1)$$

где ξ , t — пространственная координата и время. Для геликоидальных магнетиков с анизотропией типа «легкая плоскость» (плоскость xy) координата $\xi = z$, а угол $\Phi(z, t)$ описывает вращение вектора ферро- или антиферромагнетизма вокруг оси z . Например, в геликоидальных ферромагнетиках нормированный вектор ферромагнетизма имеет вид $\mathbf{n} = (\cos \Phi, \sin \Phi, 0)$. Обменное взаимодействие характеризуется постоянной α , c — максимальная групповая скорость спиновых волн в спиральной структуре. Второй член в уравнении (1.1) описывает модуляцию геликоидальной структуры внешним магнитным полем H ($\kappa \propto H^N$; $N = 1, 2$), перпенди-

* E-mail: kiseliev@imp.uran.ru

кулярным оси геликоида. В антиферромагнетиках магнитное поле приводит к наведенной анизотропии второго порядка $N = 2$ [3, 9, 10]. Второй член может быть также связан с кристаллографической анизотропией в базисной плоскости ($N = 2, 4, 6$). В этом случае параметр κ зависит от температуры. Третий член в (1.1) обусловлен инвариантами Лифшица типа

$$\gamma(n_x \partial_z n_y - n_y \partial_z n_x) \quad (1.2)$$

для магнетиков кристаллических классов C_n , D_n ($n = 2, 4, 6$) и T (соединения $MnSi$, $FeGe$) или индуцирован внешним полем для кристаллов других симметрий [5, 11, 12]. Например, свободная энергия антиферромагнетиков $CoTiO_3$ и $FeTiO_3$ содержит слагаемое (1.2) с $\kappa \sim E$, где E — компонента внешнего электрического поля вдоль тригональной оси (ось z). В этом случае \mathbf{n} — вектор антиферромагнетизма ($\mathbf{n}^2 = 1$). Инварианты Лифшица могут быть также индуцированы магнитным полем и деформацией (например, в соединении $ZnCr_2Se_4$).

Для мультиферроиков с циклоидальной структурой в плоскости yz координата $\xi = y$. Второе слагаемое в (1.1) характеризует анизотропию в легкой плоскости yz . Последнее слагаемое описывает взаимодействия статической поляризации среды (или внешнего электрического поля) с магнитным параметром порядка. В разных системах линейная по градиентам параметра порядка магнитоэлектрическая связь записывается по-разному [12–15]. Однако для одномерных возбуждений циклоидальной структуры все выражения обычно приводят к слагаемому порядка $\partial_y \Phi$ в плотности функции Лагранжа системы. Например, в широко распространенных двухподрешеточных антиферромагнетиках, принадлежащих кристаллографическому классу D_{2h} , электрическое поле E , параллельное оси z , приводит к магнитоэлектрической энергии [12]

$$\gamma(n_2 \partial_y n_3 - n_3 \partial_y n_2) = \gamma \partial_y \Phi,$$

где $\gamma \sim E$, $\mathbf{n} = (0, \cos \Phi, \sin \Phi)$ — нормированный вектор антиферромагнетизма.

С помощью масштабных преобразований

$$\Phi' = N\Phi, \quad \xi' = N\sqrt{\frac{\kappa}{\alpha}}\xi, \quad t' = Nc\sqrt{\frac{\kappa}{\alpha}}t, \quad q = \frac{\gamma}{\sqrt{\kappa}\alpha}$$

приведем функцию Лагранжа (1.1) к виду, удобному для дальнейшего анализа:

$$L' = \frac{1}{2} [(\partial_{t'} \Phi')^2 - (\partial_{\xi'} \Phi')^2] - (1 - \cos \Phi') - q \partial_{\xi'} \Phi'. \quad (1.3)$$

«Штрихи» над новыми переменными далее опускаем.

Плотность энергии системы имеет вид

$$w = \frac{1}{2} [(\partial_t \Phi)^2 + (\partial_\xi \Phi)^2] + (1 - \cos \Phi) + q \partial_\xi \Phi. \quad (1.4)$$

Возможные распределения поля $\Phi(\xi, t)$ являются решениями уравнения синус-Гордон

$$(\partial_t^2 - \partial_\xi^2)\Phi + \sin \Phi = 0. \quad (1.5)$$

При значениях управляющего параметра $q > 4/\pi$ минимуму энергии (1.4) отвечает периодическая спиральная структура [3, 9, 10]

$$\begin{aligned} \varphi_0(\chi) &= \pi - 2 \operatorname{am}(\chi, k) = \\ &= 4 \operatorname{Arctg} \left(\frac{\operatorname{cn}(\chi, k)}{1 + \operatorname{sn}(\chi, k)} \right), \quad \chi = \frac{\xi}{k}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $\operatorname{sn}(\chi, k)$, $\operatorname{cn}(\chi, k)$, $\operatorname{am}(\chi, k)$ — эллиптические функции Якоби с модулем k ($0 \leq k \leq 1$). Параметр k определяется из условия минимума средней энергии (1.4), приходящейся на период структуры: $\pi q k - 4E = 0$, где $E = E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода [16].

С математической точки зрения, формула (1.6) определяет одномерную решетку 2π -кинков поля $\Phi(\xi, t)$ (доменных стенок). Кинки локализованы около точек $\xi = L_0 p$, вблизи которых функция $\varphi_0(\chi)$ аппроксимируется выражением [9, 10]

$$\begin{aligned} \varphi_0(\xi) &\approx 4 \operatorname{Arctg} \exp [-(\xi - L_0 p)/l_0], \\ &\operatorname{mod} (2\pi). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь p — целое число, $l_0 = 2Kk'/\pi$ — ширина кинка, $L_0 = 2Kk$ — период структуры по координате ξ , $K = K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $k' = \sqrt{1 - k^2}$ — дополнительный модуль. В областях между соседними кинками (в доменах) распределение параметра порядка близко к однородному: $\varphi_0 \approx 2\pi s$, где s — целое. В данной работе рассматриваются сильно нелинейные длиннопериодические структуры, в которых $L_0 > l_0$. Это накладывает ограничения на значения k . Например, при $L_0 = 3l_0$ модуль $k = 0.67$. Далее в численных расчетах считаем $L_0 \approx 7l_0$, тогда $k = 0.99$. Наличие малого параметра $k' \ll 1$ упрощает анализ солитонов в спиральной структуре.

Изучение динамики солитонов, распространяющихся в спиральной структуре, которая сама является решеткой из топологических солитонов (кинков) — непростая задача. Ее решение требует специальных методов интегрирования. В работах [17, 18]

для построения солитонных состояний на фоне спиральной структуры привлекались преобразования Дарбу и Бэклунда. В работах [19, 20] сформулирована процедура «одевания» с помощью задачи Римана на торе, пригодная для полного исследования солитонов и диспергирующих волн в спиральной структуре при локализованных начальных возмущениях структуры и заданных краевых условиях на бесконечности. Показано, что образование и движение солитонов всегда сопровождается макроскопическими сдвигами спиральной структуры. Сдвиги в краевых условиях задачи связаны с параметрами, определяющими строение и скорость солитонов. Однако полного исследования внутреннего строения и физических свойств частицеподобных бризерных возбуждений на фоне спиральной структуры осуществлено не было. В данной работе мы восполним этот пробел.

Важно, что бризеры не отделимы от спиральной структуры. Их движение и пульсации вызывают деформации структуры, в том числе с формированием «предвестников» и «хвостов» у движущихся солитонов. Детальное изучение тонкого строения ядра бризера позволяет предложить способы наблюдения и возбуждения бризеров в спиральных структурах магнетиков и мультиферроиков.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Решение, описывающее пульсирующий солитон — бризер в спиральной структуре, — имеет вид [9, 19, 20]

$$\Phi(\chi, t) = \varphi_0(\bar{\chi}) + 4 \operatorname{Arctg} \left[\operatorname{tg} \frac{\tilde{\theta}}{2} \left(\frac{|m_1|^2 - |m_2|^2}{|m_1|^2 + |m_2|^2} \right) \right], \quad (2.1)$$

где $\bar{\chi} = \chi + 2\rho$, $\tilde{\theta} = \operatorname{am}(\mu, k) + \operatorname{am}(\mu^*, k)$; $\mu = -\rho + i\theta$, $0 < \rho < K$, $-2K' < \theta < 2K'$ ($\theta \neq \pm K'$); $K' = K(k')$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k' . Угол $\tilde{\theta}$ определяется выражением

$$\operatorname{tg} \frac{\tilde{\theta}}{2} = \frac{\operatorname{sn}(\rho, k)}{\operatorname{cn}(\rho, k)} \operatorname{dn}(i\theta, k). \quad (2.2)$$

Отношение m_1/m_2 выражается через сигма-функции Вейерштрасса [16] с периодами $[2K, 4iK']$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_1(\bar{\chi}) \exp(y + i\gamma) + b_2(\bar{\chi})}{a_2(\bar{\chi}) - b_1(\bar{\chi}) \exp(y + i\gamma)}, \quad (2.3)$$

$$a_1 = \sigma(\bar{\chi} + \mu) \exp \left[-\frac{\eta_1 \bar{\chi} \mu}{K} \right], \quad a_2 = \sigma(\bar{\chi} - \mu) \exp \frac{\eta_1 \bar{\chi} \mu}{K},$$

$$b_1 = i\sigma(\bar{\chi} + 2iK' + \mu) \exp \left[-\eta_3(\bar{\chi} + iK' + \mu) - \frac{\eta_1 \bar{\chi} \mu}{K} \right],$$

$$b_2 = i\sigma(\bar{\chi} + 2iK' - \mu) \exp \left[-\eta_3(\bar{\chi} + iK' - \mu) + \frac{\eta_1 \bar{\chi} \mu}{K} \right];$$

$$y + i\gamma = -Z(\mu, k) \chi + \frac{it}{k} \operatorname{dn}(\mu, k) + \ln c,$$

где c — комплексная постоянная интегрирования, $Z(\mu, k)$ — дзета-функция Якоби.

С точностью до несущественного переопределения постоянной c выполняется равенство

$$\Phi(\mu \pm 2iK', \chi, t) = \Phi(\mu, \chi, -t). \quad (2.4)$$

Поэтому достаточно обсудить решение (2.1) при значениях $|\theta| < K'$, $0 < \rho < K$. Свойства решения в пределе $\mu \rightarrow -\rho \pm iK'$ требуют специального обсуждения.

Комплексный параметр μ определяет скорость V бризера, ширину l ограничивающих его доменных стенок, волновое число p и частоту ω пульсаций поля Φ в области локализации бризера:

$$l = -\frac{k}{\operatorname{Re} Z(\mu)}, \quad p = \frac{1}{k} \operatorname{Im} Z(\mu), \quad \omega = \frac{1}{k} \operatorname{Re} \operatorname{dn} \mu,$$

$$V = -\frac{\operatorname{Im} \operatorname{dn} \mu}{\operatorname{Re} Z(\mu)}.$$

Явные выражения для скорости движения бризера как целого и его частоты имеют вид [21]

$$V = \frac{k^2 s_\rho c_\rho s'_\theta}{Z(\rho, k) [1 - s_\theta'^2 d_\rho^2] + k^2 s_\rho c_\rho d_\rho s_\theta'^2}, \quad (2.5)$$

$$\omega = \frac{d_\rho c'_\theta d'_\theta}{k(1 - s_\theta'^2 d_\rho^2)}.$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения: $\operatorname{sn}(\rho, k) = s_\rho$, $\operatorname{sn}(\theta, k') = s'_\theta$ и т. д.

Если ввести частоту бризера в сопутствующей ему системе отсчета: $\Omega = \omega - pV$, то на плоскости $V-\Omega$ параметры бризера попадут в энергетическую щель между голдстоуновской и активационной ветвями спектра линейных спин-волновых мод в спиральной структуре [17].

Образование бризера сопровождается макроскопическим сдвигом спиральной структуры на величину $\Delta = 4\rho$ [9, 19, 20]:

$$\begin{aligned} \Phi(\chi, t) &\rightarrow \varphi_0(\chi) \quad \text{при } z \rightarrow +\infty, \\ \Phi(\chi, t) &\rightarrow \varphi_0(\chi + \Delta) \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Специально подчеркнем, что, хотя первое слагаемое в (2.1) формально соответствует некоторой равновесной спирали, оно отличается от верных граничных значений (2.6) однобризерного возбуждения в спиральной структуре.

Внутренние колебания и поступательное движение стабилизируют частицеподобные свойства бризера. На интервале $|\theta| < K'$ его скорость — нечетная функция параметра θ . Поэтому направление движения солитона определяется только знаком θ . Если $\theta = 0$, бризер неподвижен. При заданном сдвиге структуры (при $\rho = \text{const}$) возрастание параметра θ от нуля до K' сопровождается монотонным ростом скорости бризера от нуля до наибольшего значения при $\theta \rightarrow K' - 0$, которое зависит от ρ . Предельная скорость бризера в спиральной структуре не превышает максимальной групповой скорости активационных спиновых волн [17], которая в безразмерных переменных равна единице. При том же изменении параметра θ частота бризера в лабораторной системе координат варьируется от конечных до близких к нулю значений.

Первый член решения (2.1) не зависит от времени, поэтому амплитуда пульсаций бризера определяется вторым слагаемым. Поскольку

$$\frac{|(m_1|^2 - |m_2|^2)|}{|m_1|^2 + |m_2|^2} \leq 1,$$

это слагаемое по величине не превышает

$$4 \text{Arctg} \frac{\tilde{\theta}}{2} = 2\tilde{\theta}.$$

Детальный анализ показывает, что амплитуда A неподвижного бризера (параметр $\theta = 0$) в точности соответствует такой оценке: $A = 2\tilde{\theta} = 4\text{am}\rho$ (см. (2.2)). Амплитуда пульсирующего солитона тем больше, чем больше сопровождающий его образование сдвиг структуры. Отметим, что среди всех бризеров с амплитудой, равной π , максимальную частоту имеет неподвижный бризер.

Взаимодействия между соседними кинками спиральной структуры являются экспоненциально слабыми, а расстояния между ними — большими. Поля бризеров в спиральной структуре также экспоненциально убывают при удалении от их центров. В такой ситуации сильнонелинейные трансформации поля Φ наблюдаются только при встрече ядра бризера с одним из кинков структуры. Сравнительно простое, но достаточно точное выражение для поля Φ , характеризующее процесс взаимодействия бризера с отдельным кинком структуры, можно найти разложением аналитического решения модели по малому параметру $k' \ll 1$.

Решение, описывающее взаимодействие бризера с одной стенкой (кинком) структуры, получим в пределе $k \rightarrow 1$, $\mu = -\rho + i\theta = \text{const}$. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \\ &= 4 \text{Arctg} \left[\frac{e^{\bar{x}} \text{sh } \rho \cos(\gamma + \theta) + \text{ch}(y + \rho) \cos \theta}{e^{\bar{x}} \cos \theta \text{ ch}(y - \rho) + \text{sh } \rho \cos(\gamma - \theta)} \right], \quad (2.7) \\ y &= \frac{z \text{ sh } 2\rho - 2t \sin \theta \text{ sh } \rho}{\text{ch } 2\rho + \cos 2\theta} - y_0, \\ \gamma &= \frac{-z \sin 2\theta + 2t \cos \theta \text{ ch } \rho}{\text{ch } 2\rho + \cos 2\theta} - \gamma_0, \end{aligned}$$

где $\bar{x} = z + 2\rho$; y_0, γ_0 — вещественные параметры. Бризер (2.7) движется со скоростью $V = \sin \theta / \text{ch } \rho$ и пульсирует с частотой $\omega = 2 \cos \theta \text{ ch } \rho [\text{ch } 2\rho + \cos 2\theta]^{-1}$ в лабораторной системе отсчета и с частотой $\Omega = \cos \theta / \text{ch } \rho$ в системе отсчета, связанной с бризером.

Доменная стенка после прохождения через нее бризера сдвигается на величину $\Delta = 4\rho$ в сторону, противоположную направлению движения бризера. Приближение (2.7) хорошо описывает прохождение бризера через доменную стенку лишь при сравнительно небольших значениях параметра: $0 < \rho \leq K/2$, когда можно пренебречь влиянием других стенок структуры.

3. НЕПОДВИЖНЫЕ БРИЗЕРЫ

Решение (2.7), описывающее взаимодействие бризера с одиночным кинком, обладает свойством симметрии:

$$\Phi(\rho, \theta \pm \pi, z, t) = \Phi(\rho, \theta, -t),$$

поэтому ограничимся его анализом при $0 < \rho < \infty$, $|\theta| < \pi/2$. Наиболее удобен для наблюдения неподвижный бризер. В интервале $|\theta| < \pi/2$ его скорость обращается в нуль только при $\theta = 0$. В этом случае параметр y_0 задает положение бризера относительно доменной стенки (2π -кинка поля Φ). В пределе $y_0 \rightarrow \pm\infty$ бризер отодвигается на бесконечность, и формула (2.7) при $\theta = 0$ описывает изолированный кинк:

$$\Phi \approx 4 \arctg e^{-z-4\rho} \quad \text{при } y_0 \rightarrow +\infty, \quad (3.1)$$

$$\Phi \approx 4 \arctg e^{-z} \quad \text{при } y_0 \rightarrow -\infty. \quad (3.2)$$

Когда бризер находится вдали от доменной стенки, его вид находим из (2.7) ($\theta = 0$) при $y = \text{const}$, $|\bar{x}| \gg 1$:

$$\Phi \approx 4 \arctg \left[\frac{\text{sh } \rho \cos \gamma}{\text{ch}(y - \rho)} \right] \quad \text{при } \bar{x} \gg 1, \quad (3.3)$$

$$\Phi \approx 2\pi - 4 \arctg \left[\frac{\text{sh } \rho \cos \gamma}{\text{ch}(y + \rho)} \right] \quad \text{при } \bar{x} \ll -1. \quad (3.4)$$

Формулы (3.1), (3.3) характеризуют состояние, в котором кинк находится слева от бризера в точке $z_k = -4\rho$, а бризер — справа в точке $z_b = (\rho + y_0)/\text{th } \rho \gg 1$. Выражения (3.2), (3.4) отвечают противоположному случаю, когда кинк находится справа в точке $z_k = 0$, а бризер — слева в точке $z_b = (y_0 - \rho)/\text{th } \rho \ll -1$. В обоих случаях расстояние между кинком и бризером велико, и они не взаимодействуют друг с другом. Частота и амплитуда изолированного бризера

$$\omega = \text{ch}^{-1} \rho, \quad A = 4 \text{ arctg sh } \rho,$$

а его ширина (на половине амплитуды):

$$d_b = \frac{2}{\text{th } \rho} \text{ Arcsh } \left(2 \text{ ch}^2 \frac{\rho}{2} \right).$$

В отсутствие движения бризера вдоль структуры его интенсивное взаимодействие с кинком наблюдается, только когда области их локализации сближаются (при $-\rho[1 + 4 \text{ th } \rho] \leq y_0 \leq \rho$). При сближении бризера и кинка их ядра начинают совершать продольные колебания. Кинк отодвигается от бризера, когда глубина пульсаций бризера увеличивается, и приближается к нему с ростом высоты пульсаций. Максимальная амплитуда продольных колебаний кинка — порядка его полуширины. По мере дальнейшего сближения ядер солитонов на удаленном от бризера крае кинка (впереди бризера) зарождаются малые периодические всплески (углубления). Они находятся в противофазе с пульсациями ядра бризера: достигают наибольшей высоты (глубины), когда глубина (высота) бризера возрастает. При дальнейшем сближении ядер солитонов весь первоначальный бризер «перетекает» в образовавшийся зародыш пульсаций, оставляя после себя на противоположном краю кинка противофазные пульсации малой амплитуды. При дальнейшем расхождении ядер бризера и кинка оба объекта приобретают стационарную форму без остаточных колебаний на противоположном по отношению к бризеру краю кинка.

При наличии спиральной структуры указанные свойства солитонов сохраняются лишь отчасти. Даже в длиннопериодических структурах бризер не отделим от спиральной (полосовой доменной) структуры. Сильные взаимодействия модифицируют свойства как структуры, так и солитона. Обсудим изменение характера коллективных колебаний системы в зависимости от значений параметра ρ , отражающего макроскопический сдвиг $\Delta = 4\rho$ структуры из-за образования в ней неподвижного бризера (2.1). Согласно (2.5), в интервале $|\theta| < K'$ бризер

неподвижен только при $\theta = 0$, следовательно, $\mu = -\rho$, $0 < \rho < K$.

При $\rho \leq 0.2K$ бризер представляет собой протяженную область малоамплитудных колебаний поля Φ около равновесных положений слабо деформированной спиральной структуры. Используя тождество

$$i \frac{\sigma(\chi)}{\sigma(\chi + 2iK')} \exp[\eta_3(\chi + iK')] = \frac{k \text{ sn } \chi}{1 + \text{dn } \chi} \quad (3.5)$$

и приближение

$$4 \text{ Arctg } \left(\frac{\text{cn}(\bar{\chi}, k)}{1 + \text{sn}(\bar{\chi}, k)} \right) + 4\rho \text{ dn } \chi \text{ th } y \approx \\ \approx 4(1 - 2\rho \text{ th } y \partial_{\bar{\chi}}) \varphi_0(\bar{\chi}) \approx \varphi_0(\bar{\chi} - 2\rho \text{ th } y),$$

для поля Φ получаем выражение

$$\Phi(\chi, t) \approx \varphi_0(\chi + 2\rho[1 - \text{th } y]) + \frac{4\rho k}{\text{ch } y} \text{ sn } \chi \cos \gamma. \quad (3.6)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{t}{k} - \gamma_0, \quad y = \left(1 - \frac{E}{K} \right) \rho \chi - y_0,$$

γ_0, y_0 — вещественные постоянные.

Первое слагаемое в выражении (3.6) характеризует малую неоднородную трансляцию исходной спиральной структуры из-за образования бризера. Второй член описывает слаболокализованные колебания на фоне сдвинутой структуры. Они имеют вид «обрезанной» стоячей малоамплитудной волны. Функция $\text{sn } \chi$ удовлетворяет уравнению Ламе:

$$[\partial_{\chi}^2 + k^2(1 - 2 \text{ sn}^2 \chi) + 1] \text{ sn } \chi = 0,$$

которое определяет активационную линейную моду с нулевым квазиимпульсом и частотой $\omega = 1/k$ на фоне спиральной структуры [22]. В области локализации бризера пучности колебаний поля Φ совпадают с центрами $\chi = (2m + 1)K$ доменов, а узлы — с центрами $\chi = 2Km$ стенок структуры (m — целое число).

При $0.2K < \rho < K$ пульсации бризера локализируются в конечной области — в его ядре. Центр бризера сдвигается вдоль спиральной структуры при изменении параметра $y_0 = \ln |c|$. Наиболее интересен случай, когда область интенсивных колебаний попадает внутрь одного из доменов структуры. Тогда ядро бризера относительно слабо взаимодействует с ближайшими к нему стенками структуры.

Напомним, что образование бризеров всегда сопровождается макроскопическими сдвигами структуры (см. (2.6)). При $\rho = K/2$ неподвижный бризер имеет особенно простой вид, так как приводит

к сдвигу спиральной структуры по переменной χ на период: $\Delta = 2K$. Используя тождество (3.5) и соотношения

$$i \frac{\sigma(u + K + 2iK')}{\sigma(u)} \exp[\eta_2 u - \eta_3(K + iK')] = -r \left[\frac{\text{cn}(v, k)}{\text{sn}(v, k)} + k' \frac{\text{sn}(v, k)}{\text{cn}(v, k)} \right] \Big|_{v=u/2},$$

$$i \frac{\sigma(u + K)}{\sigma(u + 2iK')} \exp[\eta_2 u - \eta_3 iK'] = -r \left[\text{dn}(v, k) - \frac{k'}{\text{dn}(v, k)} \right] \Big|_{v=u/2};$$

$$Z\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{1 - k'}{2},$$

$$2ir = \sigma(K + 2iK') e^{-\eta_3(K + iK')} = \text{const},$$

поле Φ для такого бризера можно выразить через эллиптические функции Якоби:

$$\Phi(\chi, t) = \varphi_0(\chi) + 4 \text{Arctg} \left(\frac{\alpha \cos \gamma - \exp(-y)}{\beta \cos \gamma + \exp y} \right), \quad (3.7)$$

где

$$y = \frac{1 - k'}{2k} z - y_0, \quad \gamma = \frac{\sqrt{k'}}{k} t + \gamma_0,$$

y_0, γ_0 — вещественные постоянные. Коэффициенты в формуле (3.7) имеют вид

$$\alpha = a \sqrt{k'} (1 + k') s_0 \left(\frac{s_0(1 - k')}{1 + d_0} + \frac{d^2 + k'}{d^2 - k'} \right),$$

$$\beta = a (d_0 + k') \left[1 + \frac{s_0(1 + k')^2}{(1 + d_0)(1 - k')} \left(\frac{d^2 - k'}{d^2 + k'} \right) \right],$$

$$a = (k')^{-1/4} [2(1 - k')]^{-1/2} \left(\frac{1 + d_0}{k' + d_0^2} \right) \left(d - \frac{k'}{d} \right).$$

Для сокращения записи введены обозначения $s_0 = \text{sn}(\chi + K/2)$, $s = \text{sn}(\chi/2 + K/4)$ и т. д. Здесь мы преобразовали формулу (2.1) так, чтобы выделить асимптотическое поведение поля Φ (2.6) на бесконечности.

Когда ядро бризера (3.7) находится в одном из доменов структуры, его форма отчасти аппроксимируется решением (3.3), (3.4) на однородном фоне с параметром $\rho = K/2 \approx \ln(2/\sqrt{k'})$. Заметим, что при $k' \ll 1$ величина ρ не является большой. Даже при $k = 0.99$ имеем $K/2 \approx 1.68$.

В то же время, взаимодействие ядра бризера со структурой оказывается важным и проявляется в новых свойствах всей системы. Прежде всего ядро бризера отодвигает от себя ближайшие 2π -кинки

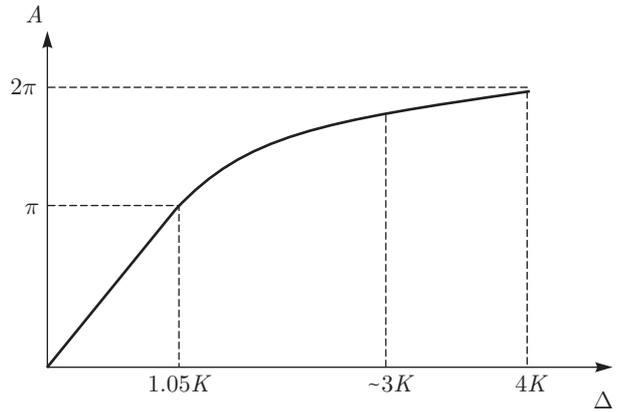


Рис. 1. Амплитуда пульсаций неподвижного бризера как функция сдвига структуры Δ

спиральной структуры. В результате оно колеблется в пределах домена, длина которого в терминах $\chi = z/k$ больше периода $2K$ спиральной структуры и составляет величину порядка $3K$. Именно в этом кроется причина изменения краевых условий задачи (2.6) при образовании бризера в решетке кинков. В отличие от бризера на однородном фоне, ядро бризера в структуре не только пульсирует, но и совершает дополнительные малые колебания между стенками протяженного домена. Протяженный домен играет роль резонатора. Половинки ядра бризера поразному деформируются в ходе колебаний центра бризера вдоль такого резонатора. Продольные колебания ядра бризера передаются ближайшим к нему кинкам структуры.

При $k = 0.99$ для бризера (3.7) сдвиг структуры $\Delta = 2K \approx 6.7$, а амплитуда колебаний ядра бризера вдоль спирали порядка 0.4.

В общем случае с ростом сдвига структуры Δ увеличиваются амплитуда пульсаций бризера, протяженность резонаторного домена, амплитуды продольных осцилляций ядра бризера и стенок структуры. Зависимость амплитуды пульсаций бризера от параметра Δ представлена на рис. 1. При $\Delta \leq 1.05K$ и $3K \leq \Delta \leq 4K$ эта зависимость почти линейна.

В интервале $2K \leq \Delta \leq 3K$ амплитуда продольных колебаний ядра бризера — порядка 0.4–0.6, а при $3K \leq \Delta \leq 4K$ — возрастает от 0.6 до 0.8 и достигает сорока процентов от периода структуры. При этом протяженность резонаторного домена возрастает почти до двух периодов структуры.

Для определения характера продольных колебаний стенок структуры около неподвижного бризера проанализируем асимптотику решения (2.1) при $\theta = 0$, $|y| \gg 1$ (вне ядра бризера).

При $\theta = 0$ коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 вещественны и удовлетворяют соотношениям

$$\frac{a_1}{b_1} = -\frac{ks_-}{1+d_-}, \quad \frac{a_2}{b_2} = -\frac{ks_+}{1+d_+},$$

где $s_{\pm} \equiv \text{sn}(\bar{\chi} \pm \rho, k)$, $d_{\pm} \equiv \text{dn}(\bar{\chi} \pm \rho, k)$, $\bar{\chi} = \chi + 2\rho$. С учетом этого замечания, находим

$$\begin{aligned} \Phi(\chi, t) &\approx \varphi_0(\chi) + 4 \text{Arctg}[R_+ \exp(-y) \cos \gamma], & y \gg 1; \\ \Phi(\chi, t) &\approx \varphi_0(\chi - 4\rho) + 4 \text{Arctg}[R_- \exp y \cos \gamma], & y \ll -1; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$R_+ = \frac{2s_{\rho}ks_1(a_1a_3 + b_1b_3)}{c_{\rho}(a_1^2g_- + b_1^2g_+)|c|},$$

$$R_- = \frac{2s_{\rho}ks_3|c|(a_1a_3 + b_1b_3)}{c_{\rho}(b_3^2h_+ + a_3^2h_-)},$$

$$g_{\pm} = 1 \pm \frac{s_{\rho}^2}{c_{\rho}^2} d_- d_{\theta}, \quad h_{\pm} = 1 \pm \frac{s_{\rho}^2}{c_{\rho}^2} d_+ d_{\theta}.$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения: $\text{sn}(\rho, k) = s_{\rho}$, $\text{sn}(i\theta, k) = s_{\theta}$ и т. д.

Коэффициенты R_{\pm} определяют величину и направление смещения доменных стенок относительно равновесных положений. Коэффициент R_+ обращается в нуль в узловых точках:

$$\chi_n = 2K(1+n) - \rho, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots, \quad \chi_n \gg 1.$$

Аналогично, $R_- = 0$ в точках

$$\chi_m = -3\rho - 2Km, \quad m = 0, 1, 2, 3 \dots, \quad \chi_m \ll -1.$$

Доменные стенки располагаются между узлами (жирные точки на рис. 2). Функции $R_{\pm}(\chi)$ периодичны, знакоопределены в пределах каждого домена, а при переходе от одной стенки к другой меняют знак. Отсюда следует, что все четные (нечетные) стенки структуры колеблются в фазе по отношению друг к другу и в противофазе по отношению к нечетным (четным) стенкам. Это отражено выбором направлений стрелок на рис. 2.

Ядро бризера колеблется между узловыми точками $\chi = -3\rho$ и $\chi = 2K - \rho$. В некоторые моменты времени ядро принимает форму «плато» протяженностью $2K + 2\rho$. «Плато» образует с осью x малый угол α : $\text{tg } \alpha \approx \alpha = -\varphi_0(\rho)/(K + \rho)$.

Ближайшие к ядру бризера доменные стенки (с номером $n = 1$) колеблются в противофазе с ядром. Их колебания имеют амплитуду порядка 0.2–0.4 в зависимости от величины Δ . Амплитуда колебаний последующих кинков (с номерами $n = 2, 3, \dots$) экспоненциально убывают с ростом номера кинка. На

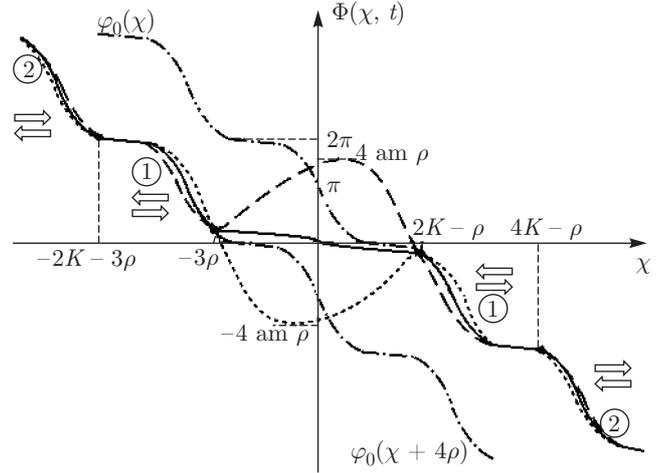


Рис. 2. Неподвижный бризер на фоне спиральной структуры. Сплошной, штриховой и пунктирной линиями отмечены положения бризера в различные моменты времени. В асимптотике при $z \rightarrow \pm\infty$ бризер «выходит» на фоновую структуру, изображенную штрихпунктиром

рис. 2 числа в кружочках нумеруют кинки. Частота предельных колебаний стенок равна частоте бризера.

В пределе $\mu = -K + \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow +0$ бризер (2.1) теряет пространственную локализацию. Его делокализация сопровождается сильными периодически во времени продольными колебаниями кинков структуры. Само ядро бризера колеблется в пределах протяженного домена длиной порядка $4K - 2\varepsilon$, однако вне его образуется протяженная область модулирующей спиральной структуры в форме нелинейной стоячей волны.

Для соединения $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$ зависимость периода спиральной структуры от модуля k хорошо описывается моделью синус-Гордон [23]. Примем за материальные параметры этого соединения значения, использованные в работах [23, 24]. Тогда при $0.2K < \rho < K$ для частоты пульсаций бризера получим оценку $\nu = 10^7\text{--}10^8$ Гц. Отсюда следует, что бризер в спиральной структуре можно обнаружить по поглощению СВЧ-мощности на характерных частотах, которые попадают в энергетическую щель спектра активационных и голдстоуновских стоячих линейных волн на фоне спиральной структуры.

В оптически прозрачных материалах макроскопическую дилатацию одного из доменов спиральной структуры из-за образования бризера можно визуализировать магнитооптическими методами. Движение бризера по структуре можно трактовать так, что содержащий его длинный домен как бы перемещается вдоль структуры со скоростью V (2.5).

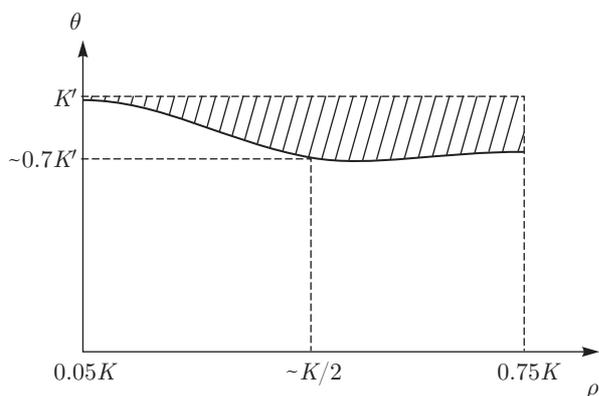


Рис. 3. Линия $V = V_{ph}$ в прямоугольнике $0.05K \leq \rho \leq 0.75K$, $0 \leq \theta \leq K'$. Область, где $V > V_{ph}$, заштрихована

В мультиферроиках с циклоидальной структурой длинный домен с ядром бризера можно обнаружить, фиксируя локальные электрические поля от стенок структуры.

4. ДВИЖУЩИЕСЯ БРИЗЕРЫ

В общем случае (при $0 < \rho < K$, $|\theta| < 2K'$, $\theta \neq \pm K'$) решение (2.1) описывает движение бризера в решетке 2π -кинков поля Φ . Размер ядра бризера порядка $(2K + \Delta/2)$ определяется сдвигом структуры $\Delta = 4\rho$ и слабо зависит от параметра θ . В то же время, структура бризера как целого существенно зависит от параметра θ , а точнее, от соотношения его поступательной скорости V (2.5) и фазовой скорости $V_{ph} = \omega/\rho$ волновых процессов в ядре бризера. При $V < V_{ph}$ деформации спиральной структуры подстраиваются к пульсациям бризера. В ходе движения ядра бризера пульсации его поля «перетекают» из одного домена структуры в соседний подобно тому, как это происходило при сближении неподвижного бризера и кинка на однородном фоне. После прохождения через очередную доменную стенку бризер «опрокидывается», и его ядро пульсирует в области, размер которой практически совпадает с размером бризера.

На рис. 3 критическому значению скорости бризера $V = V_{ph}$ соответствует сплошная линия в прямоугольнике параметров $0.05K \leq \rho \leq 0.75K$, $0 \leq \theta \leq K'$. При $V \approx V_{ph}$ частота колебаний бризера $\Omega \approx 0$ в сопутствующей ему системе отсчета, а размер участка, на котором бризер отклоняется от фона, заметно превышает размер ядра бризера. Так, при $\rho = K/2$, $|\theta| \approx 0.7K'$ ($\Omega \approx 0$) ширина бризера по переменной χ становится порядка $4K$ (это два периода структуры), в то время как ядро име-

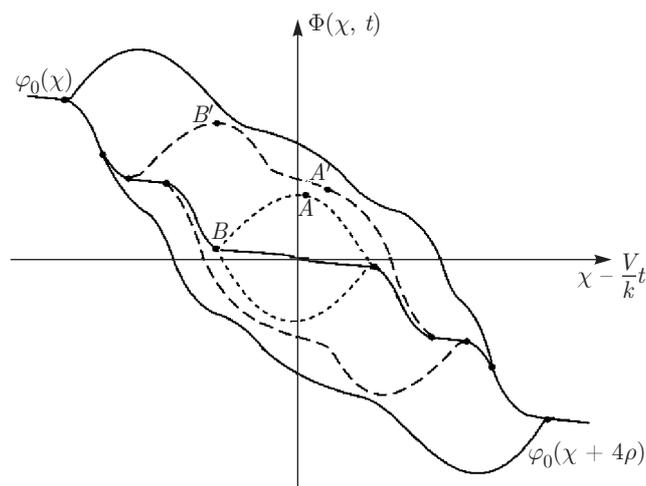


Рис. 4. Эволюция бризерного решения (2.1) при $V > V_{ph}$

ет размер $3K$. При дальнейшем росте скорости бризера $V > V_{ph}$ ($\rho = K/2$, $|\theta| > 0.7K'$) деформации спиральной структуры из-за их инерционности не успевают следовать за быстрыми изменениями ядра бризера. Это проявляется в том, что к ядру периодически добавляются вытянутые участки сильных квазистатических деформаций структуры, которые возникают альтернативно: либо как «предвестники», либо как «хвосты» движущегося солитона.

Рисунок 4 иллюстрирует колебания бризера в системе отсчета, движущейся со средней скоростью бризера V . При $t \approx 0$ решение ведет себя подобно неподвижному бризеру: его пульсации сосредоточены в ядре и в малой степени передаются соседним стенкам. Как и в случае неподвижного бризера, подберем константу интегрирования c (см. (2.3)) так, чтобы центр бризера в начальный момент времени оказался в середине домена. Тогда при $t = 0$ сформируется плато, ширина которого равна примерно $(2K + \Delta/2)$ и определяет область локализации ядра бризера. Затем в некоторый момент времени центр ядра бризера достигает предельного значения (точка A), после чего левый край ядра (точка B) «отрывается» от фоновой структуры. Начиная с этого момента, левый край бризера ведет себя как центр нового ядра, в то время как центр прежнего ядра становится краем доменной стенки. Новый центр ядра немного замедляется. Поэтому на рис. 4 он начинает «подниматься» вверх по ступенькам структуры. Удаленная от него часть прежнего ядра лишь слегка отодвигается от точки A вверх и вправо. В ходе своего движения центр ядра сначала оказывается на одном уровне с A, формируя плато той же ширины,

что и прежде, а потом продолжает подниматься до максимального значения B' . Таким образом, ядро, немного замедляясь, оставляет перед собой «предвестник», состоящий из сдвинутых доменов и доменных стенок.

Со временем «предвестник» постепенно удаляется от ядра. При $t = T/4$, где $T = 2\pi/\omega$ — период колебаний, ядро бризера и его «предвестник» оказываются в предельных положениях, отмеченных на рис. 4 жирной линией. Затем ядро начинает ускоряться. Поскольку оно проходит все предыдущие стадии в обратной последовательности, «предвестник» сокращается. При $t \approx T/2$ центр ядра бризера вновь попадает в точку A и бризер принимает тот же вид, что и в начальный момент времени. На следующем полупериоде ядро бризера по инерции «проскакивает» равновесное положение и движется вправо, оставляя за собой «хвост» по аналогии с тем, как это было с «предвестником».

Протяженность «хвоста» равна протяженности «предвестника» в соответствующие моменты времени. Их предельная длина монотонно возрастает как с ростом ρ , так и с ростом θ . При $\theta = K' - 0$ решение (2.1) принимает вид

$$\Phi(\chi, t) = \varphi_0(\chi + 2\rho) + 4 \operatorname{Arctg} \left[-\frac{s_\rho}{c_\rho} \times \left(\frac{e^y d_- |a_-|^2 - e^{-y} d_+ |a_+|^2 + 2B}{e^y |a_-|^2 + e^{-y} |a_+|^2 + 2 \operatorname{Im}(a_+ a_-)} \right) \right], \quad (4.1)$$

где

$$B = \operatorname{Re}[a_+ a_- (\zeta_+ + \zeta_- + \tilde{\gamma})], \quad d_\pm \equiv \operatorname{dn}(\bar{\chi} \pm \rho, k),$$

$$\bar{\chi} = \chi + 2\rho, \quad \zeta_\pm \equiv \zeta(\bar{\chi} \pm [\rho - iK']),$$

$$\tilde{\gamma} = \chi \left(\frac{c_\rho}{s_\rho} \right)^2 - \frac{t d_\rho}{k s_\rho^2},$$

$$y = -\chi \operatorname{Re} Z(-\rho + iK') - \frac{t c_\rho}{k s_\rho} + \ln |c|,$$

$$a_\pm = \sigma(\bar{\chi} \pm [\rho - iK']) \exp \left[\frac{\eta_3 \rho}{2} \right] \exp \left[\pm \frac{\eta_1 \bar{\chi} \rho}{K} \right].$$

При получении этого выражения возникает неопределенность. Для ее правильного раскрытия необходимо выбрать $\arg c = 2i\eta_3 \rho$.

Решение (4.1) аperiодично. При $t \ll -1$ передняя часть бризера (4.1) вытянута и охватывает несколько лежащих перед ним доменных стенок. С ростом t вытянутая часть начинает сжиматься и в «срединной» области, где слагаемое $B \approx 0$, она сходит на нет, а весь бризер локализуется в ядре, аналогично рис. 4. После этого задняя часть бризера растягивается, формируя «хвост», длина которого

по мере движения ядра бризера неограниченно возрастает.

Бризеры, движущиеся со сравнительно небольшими скоростями $V \ll V_{ph}$, имеют более простое строение. Их легче обнаружить. При материальных параметрах соединения $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$ [23, 24] для скорости хорошо локализованных бризеров ($K/4 < \rho < 3K/4$) получаем оценки: $0 < V \leq 13\text{--}40$ м/с. Образование и движение таких солитонов должно сопровождаться локальными сдвигами спиральной структуры на расстояния от 0.5 до 1.5 ее периода.

5. ВОЗБУЖДЕНИЕ БРИЗЕРОВ В СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ

Проведенный анализ подсказывает пути возбуждения бризера в спиральной структуре. Необходимо посредством внешних полей удлинить и возмутить один из доменов структуры так, чтобы он стал резонатором для бризера. Это можно сделать посредством модуляций внешнего поля.

Приведенные качественные соображения можно подтвердить расчетом. Воспользуемся результатами работы [19], где предложена схема интегрирования модели (2.1) при локализованных начальных возмущениях структуры и краевых условиях (2.6). Согласно [9, 19], начальные возмущения генерируют солитоны только тогда, когда в формулировке прямой задачи рассеяния один из коэффициентов матрицы перехода обращается в нуль.

Зададим начальное возмущение спиральной структуры в виде ступеньки шириной d и высотой $2f$:

$$\begin{aligned} \Phi(\chi, t = 0) &= \varphi_0(\chi + \Delta), & \chi < \chi_0, \\ \Phi(\chi, t = 0) &= 2f = \text{const}, & \chi_0 < \chi < \chi_1, \\ \Phi(\chi, t = 0) &= \varphi_0(\chi), & \chi > \chi_1, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\chi_0 = r - K$, $\chi_1 = 2K - r$, $\chi_1 - \chi_0 = d = 2(K - r) + \Delta$. Следуя работам [9, 19], находим уравнение для расчета параметра $\mu = -\rho + i\theta$ ($\theta = 0$), задающего структуру бризера:

$$\begin{aligned} \operatorname{cth} \left(\frac{\xi k d}{2} \right) + \frac{k}{\xi} \operatorname{sn}(\rho, k) \operatorname{sn}(r - \rho, k) \cos f &= 0, \\ \xi &= \sqrt{\cos^2 f - \operatorname{cn}^2(\rho, k)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Это и есть упомянутое ранее условие обращения в нуль одного из коэффициентов матрицы перехода.

Величина $K - r$ ($0 \leq r \leq K$) определяет смещение ступеньки относительно спиральной структуры. При $r = K$ ступенька моделирует начальное возмущение одного из доменов структуры длиной $d =$

$= \Delta$. При $0 \leq d \leq 1.8K$ такое возмущение не порождает бризера: фоновые распределения $\varphi_0(\chi)$ и $\varphi_0(\chi + \Delta)$ сближаются, формируя единую структуру $\varphi_0(\chi + \Delta/2)$ на всей области изменения χ . Согласно численному моделированию, ступенька генерирует бризер, начиная с пороговых значений ее высоты $2f \geq 3 \operatorname{am}(\rho, k)$. В случае $4 \operatorname{am} \rho < 2f \leq 6 \operatorname{am} \rho$ начальное возмущение сначала снижает амплитуду до уровня $A = 4 \operatorname{am} \rho$, сбрасывая избыток энергии в виде диспергирующих волн. Затем из него формируется неподвижный бризер, ядро которого располагается в середине резонаторного домена. Когда высота ступеньки $2f \geq 6 \operatorname{am} \rho$, она распадается на два бризера, движущихся в противоположных направлениях.

Аналитический расчет (5.2) дает близкие результаты. А именно, если задать ступеньку высоты $2f \sim 4 \operatorname{am} \rho$, то уравнение (5.2) будет иметь решения $\mu = -\rho$, когда параметр ρ лежит в интервале $1.8K \leq \rho \leq 2.5K$. При этом $\Delta = 4\rho = d$.

Интересно и важно, что в мультиферроиках с циклоидальной структурой посредством комбинации внешних электрического и магнитного полей можно создавать условия, благоприятные для наблюдения солитонов, и эффективно управлять возможностями их генерирования. Мультиферроики с циклоидальной структурой образуют богатый класс материалов. Без анализа солитонных режимов в этих материалах невозможна успешная интерпретация экспериментальных данных, конструирование новых магнитоэлектрических приборов и устройств, работающих без потерь энергии из-за протекания токов.

Авторы выражают благодарность С. В. Баталову за помощь в проведении численных расчетов.

Работа выполнена в рамках государственного задания ФАНО России (тема «Квант», № 01201463332) и поддержана Стипендией Президента РФ для молодых ученых (СП-6342.2013.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Покровский, А. П. Талапов, ЖЭТФ **78**, 269 (1980).
2. Н. Ф. Люксютов, А. Г. Наумовец, В. Л. Покровский, *Двумерные кристаллы*, Наукова думка, Киев (1988).
3. Ю. А. Изюмов, *Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах*, Энергоатомиздат, Москва (1987).
4. П. Де Жен, *Физика жидких кристаллов*, Мир, Москва (1977).
5. В. Г. Барьяхтар, В. А. Львов, Д. А. Яблонский, Письма в ЖЭТФ **37**, 565 (1983).
6. А. П. Пятаков, А. К. Звездин, УФН **182**, 593 (2012).
7. Т. Kimura, Ann. Rev. Mat. Res. **37**, 387 (2007).
8. S.-W. Cheng and M. Mostovoy, Nature Mater. **6**, 13 (2007).
9. А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Квазиодномерные магнитные солитоны*, Физматлит, Москва (2014).
10. А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, т. 2. *Топологические солитоны, двумерные и трехмерные узоры*, УрО РАН, Екатеринбург (2011).
11. И. М. Витебский, ЖЭТФ **82**, 357 (1982).
12. В. Г. Барьяхтар, Д. А. Яблонский, ФТТ **24**, 2522 (1982).
13. М. Mostovoy, Phys. Rev. Lett. **96**, 06760 (2006).
14. I. Dzyaloshinskii, Europhys. Lett. **83**, 67001 (2008).
15. A. Sparavigna, A. Stzigazzi, and A. Zvezdin, Phys. Rev. B **50**, 2953 (1994).
16. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матъе*, Наука, Москва (1967).
17. А. С. Ковалев, И. В. Герасимчук, ЖЭТФ **122**, 1116 (2002).
18. А. В. Borisov, J. Kishine, Y. G. Bostrem, and A. S. Ovchinnikov, Phys. Rev. B **79**, 134436 (2009).
19. В. В. Киселев, А. А. Расковалов, ТМФ **173**, 268 (2012).
20. В. В. Киселев, А. А. Расковалов, ФММ **113**, 1180 (2012).
21. P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer-Verlag (1971).
22. В. Л. Покровский, А. П. Талапов, ЖЭТФ **75**, 1151 (1978).
23. Y. Togawa, T. Koyama, K. Takayangi et al., Phys. Rev. Lett. **108**, 107202 (2012).
24. В. В. Киселев, А. А. Расковалов, ЖЭТФ **143**, 313 (2013).