

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЛАЗЕРНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ: СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ ПРОЦЕССА

Р. Я. Ильенков^{a,b*}, *О. Н. Прудников*^{a,b}, *А. В. Тайченачев*^{a,b}, *В. И. Юдин*^{a,b,c**}

^a *Институт лазерной физики Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

^b *Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия*

^c *Новосибирский государственный технический университет
630073, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 21 сентября 2015 г.

Проводится исследование времени установления стационарного распределения по поступательным степеням свободы двухуровневых атомов в поле одномерной стоячей световой волны. Получены зависимости этого времени от параметров задачи: интенсивности световой волны, отстройки и массы атома. Расчеты проведены на основе квантового кинетического уравнения для атомной матрицы плотности с полным учетом эффектов отдачи и пространственной локализации в световом поле произвольной интенсивности.

DOI: 10.7868/S0044451016070014

1. ВВЕДЕНИЕ

Идея использования света для механического воздействия на вещество возникла давно, но лишь с изобретением лазеров появилось мощное и точное средство для эффективного управления поступательными степенями свободы атомов: ускорения, замедления, отклонения, коллимирования и локализации. В настоящее время лазерное охлаждение является хорошо развитой областью науки на стыке лазерной физики и атомной оптики, открывшей множество различных перспектив и применений (см., например, [1–5]). В частности, следует отметить такие важные направления, как получение и исследование конденсата Бозе – Эйнштейна [6], квантовая информатика, атомная нанолитография и интерферометрия [7]. Кроме того, комбинация лазерного охлаждения и современных методов прецизионной спектроскопии позволяет создавать стандарты частоты и времени [8], точность и стабильность которых достигает величин порядка 10^{-17} – 10^{-18} [9, 10].

Были разработаны различные методы локализации и охлаждения атомов (магнито-оптические и

дипольные ловушки, оптические решетки и т.д.), ставшие неотъемлемой частью современной фундаментальной и прикладной науки. Естественно, что такой мощный прогресс не был бы возможен без теоретического анализа и рассмотрения процессов, возникающих при взаимодействии атомов с электромагнитным полем. Однако полное описание с учетом реальной многоуровневой структуры атома, спонтанного распада, эффекта отдачи и влияния поляризации поля представляет собой крайне сложную задачу. Начало ее решению было положено в 1970–80-х гг. исследованием самой простой системы — двухуровневого атома в резонансном световом поле [1, 2, 11–13]. Аналитическое исследование данной модели с помощью квазиклассического подхода (см., например, [14]), рассматривающего охлаждение в терминах светоиндуцированных сил и их флуктуации (диффузии в пространстве импульсов), позволило наглядно понять многие механизмы охлаждения. Но, несмотря на все достоинства, квазиклассический подход имеет свои серьезные ограничения, поскольку описывает лишь те случаи, когда однофотонная частота отдачи мала по сравнению с естественной шириной линии охлаждающего перехода, и не пригоден для рассмотрения сильно запрещенных переходов, таких, например, как интеркомбинационный переход в атоме стронция, который используется в экспериментах для лазерного

* E-mail: ilenkov.roman@gmail.com

** E-mail: viyudin@mail.ru

охлаждения [15]. Не лишены ограничений и используемые квантовые подходы. В частности, для описания охлаждения и локализации атомов в оптическом потенциале используется секулярное приближение [16]. Данное приближение предполагает, что расстояние между энергетическими зонами в оптическом потенциале больше их ширины, обусловленной оптической накачкой и туннелированием. При этом световой сдвиг определяет глубину оптического потенциала. Для фиксированной глубины оптического потенциала данное приближение справедливо в пределе больших отстроек. И наоборот, при заданной отстройке оно нарушается в глубоком оптическом потенциале. Более того, даже при выполнении этих условий секулярное приближение хорошо выполняется лишь для нижних колебательных уровней оптического потенциала и нарушается для более высоких, где расстояние между колебательными уровнями становится меньшим вследствие эффектов ангармонизма, а также для атомов, совершающих надбарьерное движение.

Ранее нами был разработан быстрый и эффективный метод расчета [17] стационарных импульсных и пространственных распределений атомов в поле стоячей световой волны с полным учетом эффектов отдачи и локализации без решения динамической задачи. Однако для практического применения важно иметь представление так же о том, за какое время атомы будут охлаждены до необходимой температуры и локализованы в оптическом потенциале. Прямое динамическое решение задачи об охлаждении атомов в поле резонансного монохроматического излучения, включающей полный учет эффектов отдачи и локализации атомов, например, методом Монте-Карло [18], обладает рядом существенных недостатков. Во-первых, добавление временной сетки приводит к значительному увеличению требуемых расчетных ресурсов и затрачиваемого машинного времени. Во-вторых, в любом численном расчете постоянно накапливается ошибка, следовательно, точность решения будет ограничена этой ошибкой, а ее накопление (без должного контроля и корректировки), даже в задачах без учета локализации, может привести к недостоверным результатам. Поэтому поиск методов, позволяющих получать информацию о временных характеристиках процесса охлаждения атомов без прямого решения динамической задачи, является актуальным. В работе [19] было показано существование метода, рассматривающего не траектории отдельных частиц, а усредненные по ансамблю характеристики, однако изучался лишь предельный случай сильной локализации, когда влия-

ние отдачи подавлено за счет эффекта Лэмба – Дикке. Поэтому важным является разработка более общего подхода, применимого к широкому кругу задач лазерного охлаждения, что и является основной целью данной работы. Помимо общих формулировок в качестве конкретного примера было детально исследовано охлаждение двухуровневого атома в поле стоячей волны. Получены зависимости времени охлаждения от энергии отдачи, частоты Раби и отстройки светового поля от охлаждающего перехода.

2. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Рассмотрим сначала общую постановку задачи. Пусть имеется линейная система дифференциальных уравнений для атомной матрицы плотности $\hat{\rho}(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = \hat{\mathcal{L}}\{\hat{\rho}(t)\}, \quad \text{Tr}[\hat{\rho}(t)] = 1, \quad (1)$$

где $\hat{\mathcal{L}}\{\dots\}$ — линейный операторный функционал, который не зависит от времени и описывает как взаимодействие с внешними полями, так и релаксационные процессы различной природы (спонтанные, столкновительные, пролетные и т. д.). Второе уравнение описывает сохранение нормировки. Предположим, что система уравнений для матрицы плотности (1) имеет единственное стационарное решение $\hat{\rho}_{st}$:

$$\hat{\mathcal{L}}\{\hat{\rho}_{st}\} = 0, \quad \text{Tr}[\hat{\rho}_{st}] = 1. \quad (2)$$

Представим общее решение уравнения (1) в следующем виде:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_{st} + \hat{\rho}_{dyn}(t), \quad (3)$$

где $\hat{\rho}_{dyn}(t)$ — динамическая добавка, удовлетворяющая асимптотическому условию $\hat{\rho}_{dyn}(+\infty) \rightarrow 0$. Подставляя (3) в (1) и учитывая нормировку из (2), имеем уравнение для динамической добавки:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_{dyn}(t) = \hat{\mathcal{L}}\{\hat{\rho}_{dyn}(t)\}, \quad \text{Tr}[\hat{\rho}_{dyn}(t)] = 0. \quad (4)$$

Проинтегрировав (4) по времени, получим

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \hat{\rho}_{dyn}(t)}{\partial t} dt = \hat{\rho}_{st} - \hat{\rho}(0) = \hat{\mathcal{L}} \left\{ \int_0^{\infty} \hat{\rho}_{dyn}(t) dt \right\}. \quad (5)$$

Введя обозначение $\hat{\tau} = \int_0^{\infty} \hat{\rho}_{dyn}(t) dt$, окончательно запишем

$$\hat{\mathcal{L}}\{\hat{\tau}\} = \hat{\rho}_{st} - \hat{\rho}(0), \quad \text{Tr}[\hat{\tau}] = 0. \quad (6)$$

В матрице временных характеристик $\hat{\tau}$ содержится большое количество различной информации о временах и динамике установления стационарного решения для матрицы плотности. При этом не требуется решать динамическое уравнение (1), а достаточно знать стационарное решение $\hat{\rho}_{st}$ и начальные условия $\hat{\rho}(0)$. Выберем нормировку, которая позволит получить информацию о времени установления среднего квадрата импульса (средней кинетической энергии):

$$T = \frac{\langle p^2 \hat{\tau} \rangle}{\langle p^2 \rangle(0) - \langle p^2 \rangle_{st}}, \quad (7)$$

где $\langle p^2 \rangle(0)$ — средний квадрат импульса начального распределения, $\langle p^2 \rangle_{st}$ — средний квадрат импульса стационарного распределения. Данная нормировка разумна с точки зрения размерности и должна давать положительно определенное значение времени охлаждения T вне зависимости от соотношения начального и конечного распределений при монотонном законе, описывающем переходный процесс. Для простейших случаев линейного и экспоненциального законов данная нормировка дает адекватные физической постановке задачи результаты, а именно: время полного установления стационарного распределения и время, соответствующее уменьшению разности между средним квадратом импульса начального распределения атомов и средним квадратом импульса стационарного распределения в e раз. Однако, если процесс охлаждения является немонотонным, т. е. в нем имеются осцилляции, то оценка времени, полученная таким способом, может значительно отличаться от истинного времени охлаждения, а в некоторых случаях оказаться даже нефизической (отрицательной). Такие режимы охлаждения представляют отдельный физический интерес, однако в этой статье мы их не рассматриваем. В разд. 3.4 будет показан вывод данной нормировки применительно к задаче об охлаждении медленных атомов. Предложенный подход следует идеям статистического анализа динамических характеристик, который появился в 1930-х гг. [20, 21]. В свое время данный метод получил широкое распространение в радиофизике при рассмотрении широкого спектра колебательных систем, таких, например, как автоколебательные контуры.

Рассмотрим, к примеру, динамику двухуровневых атомов с оптическим переходом $J_g \rightarrow J_e$, где J_g и J_e — полные угловые моменты основного и возбужденного состояний, вырожденных по проекции углового момента $\mu_j = -J_j \dots J_j$ ($j = g, e$), в монохроматическом поле с произвольной пространственной конфигурацией

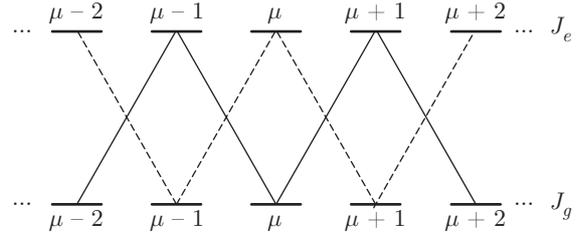


Рис. 1. Двухуровневая модель атома с вырождением энергетических уровней

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \dots, \quad \nabla \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0, \quad (8)$$

где $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ — медленно меняющиеся амплитуды, ω — частота электромагнитной волны, c — скорость света в вакууме.

Схема светоиндуцированных переходов при выборе оси квантования вдоль волнового вектора \mathbf{k} показана на рис. 1.

Одноатомную матрицу плотности $\hat{\rho}$ в дискретном базисе зеемановских состояний по внутренним степеням свободы $|J, \mu\rangle$ и непрерывном базисе координатных состояний по внешним степеням свободы $|\mathbf{r}\rangle$ удобно представить в блочном виде:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{gg} + \hat{\rho}_{ee} + \hat{\rho}_{eg} + \hat{\rho}_{ge}. \quad (9)$$

Диагональные матричные блоки $\hat{\rho}_{gg}$ и $\hat{\rho}_{ee}$ описывают населенности и низкочастотные (зеемановские) когерентности, а недиагональные матричные блоки $\hat{\rho}_{eg}$ и $\hat{\rho}_{ge}$ соответствуют оптическим когерентностям. Каждый из блоков записывается как

$$\hat{\rho}_{ab} = \sum_{\mu_a \mu_b} \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \rho_{\mu_a \mu_b}^{a,b}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \times \\ \times |J_a, \mu_a\rangle |\mathbf{r}_1\rangle \langle \mathbf{r}_2| \langle J_b, \mu_b|, \quad (a, b) = (e, g), \quad (10)$$

где $\rho_{\mu_a \mu_b}^{a,b}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — двухточечные матричные элементы.

В описанном выше представлении условие нормировки имеет вид

$$\text{Tr}[\hat{\rho}] = \sum_{\mu} \int \rho_{\mu\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1. \quad (11)$$

Состояние атомов, взаимодействующих с электромагнитным полем с учетом влияния отдачи, в электродипольном приближении описывается квантовым кинетическим уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} + \hat{\Gamma} \{ \hat{\rho} \} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0, \hat{\rho}] - \frac{i}{\hbar} [E_{kin}, \hat{\rho}] - \\ - \frac{i}{\hbar} [-\hat{V}, \hat{\rho}], \quad (12)$$

где \hat{H}_0 — гамильтониан невозмущенного атома в резонансном приближении, \hat{E}_{kin} — оператор кинетической энергии, \hat{V} — оператор взаимодействия с полем, $\hat{\Gamma}\{\dots\}$ — оператор, описывающий релаксационные процессы (спонтанные, столкновительные и т. д.). Соответствующие операторы имеют вид

$$\hat{H}_0 = -\hbar\delta \sum_{\mu_e} |J_e, \mu_e\rangle \langle J_e, \mu_e|, \quad (13)$$

где $\delta = \omega - \omega_{eg}$ — отстройка от частоты перехода;

$$\hat{E}_{kin} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \delta_D(r) d\mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle \Delta_{\mathbf{r}} \langle \mathbf{r}| \times \left(\sum_{\mu_g} |J_g, \mu_g\rangle \langle J_e, \mu_e| + \sum_{\mu_e} |J_g, \mu_g\rangle \langle J_e, \mu_e| \right), \quad (14)$$

где $\delta_D(r)$ — дельта-функция Дирака;

$$\hat{V} = \hat{\mathbf{d}}_{eg} \tilde{\mathbf{E}}, \quad (\hat{\mathbf{d}}_{eg})_{\beta} = \langle J_e | \hat{d} | J_g \rangle \hat{D}_{\beta},$$

где $\langle J_e | \hat{d} | J_g \rangle$ — приведенный матричный элемент дипольного момента, а ковариантные компоненты векторного оператора дипольного момента $\hat{\mathbf{d}}$ выражаются через коэффициенты Клебша–Гордана $C_{J_g \mu_g 1 q}^{J_e \mu_e}$ [22]:

$$\hat{D}_{\beta} = \sum_{\mu_g, \mu_e} |J_e, \mu_e\rangle C_{J_g \mu_g 1 \beta}^{J_e \mu_e} \langle J_g, \mu_g|. \quad (15)$$

Определим двухточечный по пространственным переменным матричный блок как

$$\hat{\rho}_{ab}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mu_a \mu_b} \rho_{\mu_a \mu_b}^{a b}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) |J_a, \mu_a\rangle \langle J_b, \mu_b|. \quad (16)$$

Принимая во внимание только спонтанную релаксацию верхнего уровня J_e , из (12) с учетом (11) в резонансном приближении получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m} (\Delta_{\mathbf{r}_1} - \Delta_{\mathbf{r}_2}) + \frac{\gamma}{2} - i\delta \right) \times \\ & \quad \times \hat{\rho}_{eg}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \\ & = \frac{i}{\hbar} \left[\hat{V}(\mathbf{r}_1) \hat{\rho}_{gg}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \hat{\rho}_{ee}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{V}(\mathbf{r}_2) \right], \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m} (\Delta_{\mathbf{r}_1} - \Delta_{\mathbf{r}_2}) + \frac{\gamma}{2} + i\delta \right) \times \\ & \quad \times \hat{\rho}_{ge}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \\ & = \frac{i}{\hbar} \left[\hat{V}^{\dagger}(\mathbf{r}_1) \hat{\rho}_{ee}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \hat{\rho}_{gg}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{V}^{\dagger}(\mathbf{r}_2) \right], \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m} (\Delta_{\mathbf{r}_1} - \Delta_{\mathbf{r}_2}) + \gamma \right) \times \\ & \quad \times \hat{\rho}_{ee}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \\ & = \frac{i}{\hbar} \left[\hat{V}(\mathbf{r}_1) \hat{\rho}_{ge}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \hat{\rho}_{eg}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{V}^{\dagger}(\mathbf{r}_2) \right], \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m} (\Delta_{\mathbf{r}_1} - \Delta_{\mathbf{r}_2}) \right) \times \\ & \quad \times \hat{\rho}_{gg}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{\rho}_{ee} = \\ & = \frac{i}{\hbar} \left[\hat{V}(\mathbf{r}_1)^{\dagger} \hat{\rho}_{eg}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \hat{\rho}_{ge}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{V}(\mathbf{r}_2) \right], \\ & \text{Tr} [\hat{\rho}_{ee}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] + \text{Tr} [\hat{\rho}_{gg}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] = 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражение для оператора прихода имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_{aa'}^{bb'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \gamma \{ q_0(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \times \\ & \quad \times \sum_{\beta=0, \pm 1} \langle J_e, \mu_b | (\mathbf{r}_1) \hat{D}_{\beta} | J_g, \mu_a \rangle (\mathbf{r}_1)^{\dagger} \times \\ & \quad \times \langle J_e, \mu_{b'} | (\mathbf{r}_2) \hat{D}_{\beta} | J_g, \mu_{a'} \rangle (\mathbf{r}_2) + \\ & \quad + q_2(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \langle J_e, \mu_b | (\mathbf{r}_1) \hat{n}_{12} | J_g, \mu_a \rangle (\mathbf{r}_1)^{\dagger} \times \\ & \quad \times \langle J_e, \mu_{b'} | (\mathbf{r}_2) \hat{n}_{12} | J_g, \mu_{a'} \rangle (\mathbf{r}_2) \}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\hat{n}_{12} = \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_{12}$, $\mathbf{n}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 / |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Функции

$$\begin{aligned} q_0(x) &= \frac{3}{4} \left(1 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \frac{\sin x}{x} = g_0(x) - \frac{1}{2} g_2(x), \\ q_2 &= \frac{3}{4} \left(1 + 3 \frac{d^2}{dx^2} \right) \frac{\sin x}{x} = \frac{3}{2} g_2(x) \end{aligned} \quad (19)$$

выражаются через сферические функции Бесселя $g_l(x)$ нулевого и второго рангов и описывают спонтанный эффект отдачи. Систему уравнений (17) можно представить в операторной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = \hat{\mathcal{L}}(\tilde{\mathbf{E}}) \{ \hat{\rho} \}, \quad \hat{\rho} = \hat{\rho}_{gg} + \hat{\rho}_{ee} + \hat{\rho}_{eg} + \hat{\rho}_{ge}, \quad (20)$$

где $\hat{\mathcal{L}}(\tilde{\mathbf{E}}) \{ \hat{\rho} \}$ — линейный функциональный оператор, зависящий от вектора $\tilde{\mathbf{E}}$.

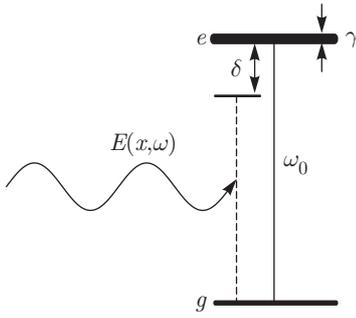


Рис. 2. Двухуровневый атом в поле стоячей световой волны, отстроенной в «красную» сторону

3. ДВУХУРОВНЕВЫЙ АТОМ В СТОЯЧЕЙ ВОЛНЕ

Применим общий метод к конкретной задаче о двухуровневом атоме в поле стоячей волны, описывающей переход $0 \rightarrow 1$ при произвольной поляризации светового поля, конкретизируя форму основных операторов теории и метод решения возникающих уравнений.

Поле стоячей монохроматической волны имеет вид

$$E(x, t) = 2E_0 \cos(kx) \cos(\omega t), \quad (21)$$

где E_0 — амплитуда светового поля, ω — частота светового поля, k — волновой вектор. Взаимодействие двухуровневого атома с полем данной конфигурации (см. рис. 2) рассматривается на основе квантового кинетического уравнения для матрицы плотности в координатном представлении. Использование матрицы плотности в координатном представлении $\hat{\rho}(x_1, x_2, t)$ продиктовано удобством численных расчетов по сравнению с вignerовским $\hat{\rho}(x, p, t)$ или импульсным $\hat{\rho}(p_1, p_2, t)$ представлениями, поскольку в последних двух случаях уравнения имеют нелокальный вид из-за эффекта отдачи (импульсные переменные приобретают сдвиг $\pm \hbar k$, вызванный отдачей от поглощения/испускания фотона). В дальнейших выкладках удобно от координат x_1 и x_2 перейти к новым координатам $x = (x_1 + x_2)/2$ и $q = x_1 - x_2$, что приведет к преобразованию

$$\Delta_{r_1} - \Delta_{r_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q}. \quad (22)$$

Исходя из этого система (17) имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\gamma}{2} - i\delta \right) \rho_{eg}(x, q) &= \\ &= \frac{i}{\hbar} [V(x + q/2) \rho_{gg}(x, q) - \\ &\quad - \rho_{ee}(x, q) V(x - q/2)], \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\gamma}{2} + i\delta \right) \rho_{ge}(x, q) &= \\ &= \frac{i}{\hbar} [V^\dagger(x + q/2) \rho_{ee}(x, q) - \\ &\quad - \rho_{gg}(x, q) V^\dagger(x - q/2)], \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \right) \rho_{ee}(x, q) &= \\ &= \frac{i}{\hbar} [V(x + q/2) \rho_{ge}(x, q) - \\ &\quad - \rho_{eg}(x, q) V^\dagger(x - q/2)], \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho_{gg}(x, q) - \gamma f(q) \rho_{ee}(x, q) &= \\ &= \frac{i}{\hbar} [V^\dagger(x + q/2) \rho_{eg}(x, q) - \\ &\quad - \rho_{ge}(x, q) V(x - q/2)], \\ \text{Tr} [\rho_{ee}(x, q)] + \text{Tr} [\rho_{gg}(x, q)] &= 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$V(x \pm q/2) = -\hbar\Omega \left(e^{i(x \pm q/2)} + e^{-i(x \mp q/2)} \right),$$

$$\Omega = dE_0/\hbar,$$

$$f(q) = \frac{3}{2} \left(\frac{\cos q}{q^2} - \frac{\sin q}{q^3} + \frac{\sin q}{q} \right), \quad f(0) = 1.$$

Система уравнений (23) линейна по $\hat{\rho}$ и ее можно записать в символическом виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\rho}(x, q) = \hat{\mathcal{L}} \left(x, q, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial q} \right) \vec{\rho}(x, q), \quad (24)$$

где $\vec{\rho}(x, q)$ — вектор, содержащий элементы матрицы плотности $\hat{\rho}(x, q)$, записанные в определенном порядке, а $\hat{\mathcal{L}}(x, q, \partial/\partial x, \partial/\partial q)$ — матричный оператор, элементы которого задаются уравнением (23), а их расположение определяется конкретным способом перехода $\hat{\rho}(x, q) \rightarrow \vec{\rho}(x, q)$.

Решение (24) имеет вид матричной экспоненты:

$$\vec{\rho} = \exp \left\{ -\hat{\mathcal{L}} \left(x, q, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial q} \right) t \right\} \vec{\rho}(0),$$

где $\vec{\rho}(0)$ — начальное распределение атомов, например, тепловое. Однако расчет матричной экспоненты является чрезвычайно ресурсоемкой задачей. Применим к (24) ранее описанный статистический подход (6) и получим матричное уравнение:

$$\hat{\mathcal{L}} \vec{\tau} = \vec{\rho}_{st} - \vec{\rho}(0), \quad (25)$$

где $\vec{\rho}_{st}$ — стационарное распределение атомов. Решение данного уравнения будет содержать информацию о времени лазерного охлаждения ансамбля двухуровневых атомов в стоячей световой волне.

4. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

В настоящей работе мы обобщим метод цепных дробей для поиска стационарного состояния атомной матрицы плотности атомов с вырожденными по проекции углового момента уровнями с учетом эффектов отдачи, возникающих при взаимодействии атома с полем.

Стационарное решение системы уравнений (23) является периодическим по координате x , поэтому матрицу плотности будем искать в виде ряда

$$\hat{\rho}(x, q) = \sum_n \hat{\rho}^{(n)}(q) e^{inkx}. \quad (26)$$

Уравнение для матричных фурье-гармоник $\hat{\rho}^{(n)}$ может быть представлено как трехчленное рекуррентное соотношение:

$$-n \frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial q} \hat{\rho}^{(n)} = \mathcal{L}_0 \{ \hat{\rho}^{(n)} \} + \mathcal{L}_+ \{ \hat{\rho}^{(n-1)} \} + \mathcal{L}_- \{ \hat{\rho}^{(n+1)} \}, \quad (27)$$

где m — масса атома, а операторы \mathcal{L} можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ \{ \hat{\rho} \} &= -\frac{i}{\hbar} \left(\widehat{W}_1 \hat{\rho} e^{ikq/2} - \hat{\rho} \widehat{W}_1 e^{-ikq/2} \right), \\ \mathcal{L}_- \{ \hat{\rho} \} &= -\frac{i}{\hbar} \left(\widehat{W}_2 \hat{\rho} e^{-ikq/2} - \hat{\rho} \widehat{W}_2 e^{ikq/2} \right), \\ \mathcal{L}_0 \{ \hat{\rho} \} &= -\frac{i}{\hbar} \left(\widehat{H}_0 \hat{\rho} - \hat{\rho} \widehat{H}_0 \right) - \widehat{\Gamma} \{ \hat{\rho} \}, \end{aligned} \quad (28)$$

с матричными коэффициентами

$$\widehat{W}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{V}_1 \\ \widehat{V}_2^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{W}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{V}_2 \\ \widehat{V}_1^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Рекурсия (27) может быть решена методом цепных дробей. Отметим, что метод цепных дробей часто использовался для анализа оптического уравнения Блоха в различных спектроскопических задачах [23–25], а также для поиска силы, действующей на атомы в световых полях (см., например, [26, 27]). Основное отличие нашего метода заключается в том, что уравнение (27) полностью учитывает эффекты отдачи и пространственной локализации, поскольку содержит все возможные фурье-гармоники. Ранее задача поиска стационарной матрицы плотности

с учетом эффектов отдачи, но без учета пространственной локализации в рамках простейшей модели двухуровневого атома была рассмотрена в работе [28].

Гармоники матрицы плотности зависят от переменной q , определяющей корреляцию атомных состояний в двух пространственных точках $x_1 = x + q/2$ и $x_2 = x - q/2$. В силу того, что эта корреляция должна затухать с ростом q , выберем большой, но конечный интервал изменения переменной q от $-q_{max}$ до $+q_{max}$ и разобьем его сеткой с дискретными значениями q_i . Для дискретных индексов q_i производная $(\partial/\partial q)\hat{\rho}(q)$ в уравнении (23) может быть аппроксимирована конечно-разностной схемой:

$$\frac{\partial}{\partial q} \hat{\rho}_{q_i} \simeq \frac{1}{2\Delta q} (\hat{\rho}_{q_{i+1}} - \hat{\rho}_{q_{i-1}}), \quad (30)$$

где Δq — шаг сетки.

Далее перейдем от матричной записи для матрицы плотности $\hat{\rho}$ к векторной $\vec{\rho}$, когда матричные компоненты $\rho_{q_i}^{\mu_e, \mu_g}$, согласно выбранному правилу, записываются в виде вектора-столбца с индексами $\rho^{\{\mu_e, \mu_g, q_i\}}$. В данном представлении действие операторов $\mathcal{L}_{0,\pm} \{ \hat{\rho}^{(n)} \}$ на гармоники матрицы плотности (27) может быть записано в виде умножения соответствующих им матриц $\widehat{\mathcal{L}}_{0,\pm}$ на вектор-столбец $\vec{\rho}^{(n)}$.

Отметим, что вектор-столбец $\vec{\rho}^{(n)}$ для атомов с переходом $j_g \rightarrow j_e$ содержит в общем случае $N_q \times ((2j_e + 1) + (2j_g + 1))^2$ элементов, где N_q — число точек в разбиении по параметру q . И, соответственно, $\widehat{\mathcal{L}}_{0,\pm}$ — квадратные матрицы данной размерности. Однако матрица плотности содержит достаточно много нулевых элементов и поэтому размерность системы может быть значительно уменьшена при исключении строк и столбцов матриц $\widehat{\mathcal{L}}_{0,\pm}$, соответствующих этим нулевым элементам. Так, например, для атомов с переходом $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$ вектор-столбец $\vec{\rho}^{(n)}$ содержит $18 \times N_q$ ненулевых элементов, а для атомов с переходом $j_g = 1 \rightarrow j_e = 2 - 34 \times N_q$ ненулевых элементов.

Соответствующее уравнение для стационарных гармоник $\vec{\rho}^{(n)}$ будет записано в виде

$$\widehat{\mathcal{L}}_+ \vec{\rho}^{(n-1)} + \left(\widehat{\mathcal{L}}_0 - \frac{ni}{m} \widehat{G}_{kin} \right) \vec{\rho}^{(n)} + \widehat{\mathcal{L}}_- \vec{\rho}^{(n+1)} = 0, \quad (31)$$

где \widehat{G}_{kin} — соответствующее матричное представление разностной схемы (30) для векторной записи матрицы плотности $\vec{\rho}$. Данное рекуррентное уравнение может быть решено методом цепных дробей. Для начала рассмотрим положительные гармоники

$n \geq 1$ и найдем матрицы $\widehat{P}_+^{(n)}$ со следующими свойствами:

$$\vec{\rho}^{(n)} = \widehat{P}_+^{(n)} \vec{\rho}^{(n-1)}. \quad (32)$$

Тогда эти матрицы должны удовлетворять уравнению

$$\left(\widehat{\mathcal{L}}_+ + \left(\widehat{\mathcal{L}}_0 - \frac{in}{m} \widehat{G}_{kin} \right) \widehat{P}_+^{(n)} + \widehat{\mathcal{L}}_- \widehat{P}_+^{(n+1)} \widehat{P}_+^{(n)} \right) \times \\ \times \vec{\rho}^{(n-1)} = 0, \quad (33)$$

что приводит к рекуррентному соотношению для матриц $\widehat{P}_+^{(n)}$:

$$\widehat{P}_+^{(n)} = \\ = - \left[\left(\widehat{\mathcal{L}}_0 - \frac{in}{m} \widehat{G}_{kin} \right) + \widehat{\mathcal{L}}_- \widehat{S}_+^{(n+1)} \right]^{-1} \widehat{\mathcal{L}}_+. \quad (34)$$

Аналогично для отрицательных гармоник $n \leq -1$ можно найти последовательность матриц $\widehat{P}_-^{(n)}$, таких что

$$\vec{\rho}^{(n)} = \widehat{P}_-^{(n)} \vec{\rho}^{(n+1)},$$

удовлетворяющих рекуррентному соотношению

$$\widehat{P}_-^{(n)} = \\ = - \left[\left(\widehat{\mathcal{L}}_0 - \frac{in}{m} \widehat{G}_{kin} \right) + \widehat{\mathcal{L}}_+ \widehat{P}_-^{(n-1)} \right]^{-1} \widehat{\mathcal{L}}_-. \quad (35)$$

Выберем достаточно большое значение N , при котором гармоники атомной матрицы плотности исчезают, т. е. для всех $n \geq N$ полагаем $\widehat{P}_+^{(n)} = 0$ и $\widehat{P}_-^{(-n)} = 0$. Используя рекуррентные соотношения (34) и (35), найдем ненулевые $\widehat{P}_+^{(n)}$ и $\widehat{P}_-^{(-n)}$ для $1 \leq n < N$.

Используя найденные матрицы $\widehat{P}_+^{(1)}$ и $\widehat{P}_-^{(-1)}$, запишем уравнение для нулевой гармоники $\vec{\rho}^{(0)}$:

$$\left[\widehat{\mathcal{L}}_+ \widehat{P}_-^{(-1)} + \widehat{\mathcal{L}}_0 + \widehat{\mathcal{L}}_- \widehat{P}_+^{(1)} \right] \vec{\rho}^{(0)} = 0. \quad (36)$$

Данное уравнение должно быть дополнено условием нормировки $\text{Tr}\{\vec{\rho}^{(0)}(q=0)\} = 1$, поскольку определитель выражения в квадратных скобках в (36) равен нулю. Отметим, что число пространственных гармоник, удерживаемых в расчетах, определяется сходимостью уравнения (27) и зависит от параметров светового поля. Обычно в наших вычислениях достаточно было учесть 30 гармоник.

5. МЕТОД ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ ДЛЯ МАТРИЦЫ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Подобно тому, как метод цепных дробей позволяет решить стационарную задачу для матрицы плот-

ности, он может быть применен для получения матрицы временных характеристик. Функция $\vec{\tau}$ является периодической по x , так как $\vec{\rho}_{st}$ — единственная и периодическая функция, а $\vec{\rho}^{(0)}$ — периодическая (в частном случае — однородная), поэтому будем искать решение в виде пространственного разложения в ряд Фурье:

$$\vec{\tau}(x, q) = \sum_n e^{inkx} \vec{\tau}^{(n)}(q). \quad (37)$$

Для реализации численного расчета по переменной q вводится дискретизация — разбиение на малые интервалы и ограничение некоторым максимальным значением q_0 , определяемым затуханием функции $\vec{\tau}$ в q -пространстве. Эти манипуляции окончательно превращают все операции над векторами $\vec{\rho}$ и $\vec{\tau}$ в матричные операции. С учетом сказанного выше рекуррентное соотношение между гармониками $\vec{\tau}$ будет иметь вид

$$\widehat{\mathcal{L}}_- \vec{\tau}^{(n+1)} + \left(\widehat{\mathcal{L}}_0 - \frac{ni}{m} \widehat{G}_{kin} \right) \vec{\tau}^{(n)} + \\ + \widehat{\mathcal{L}}_+ \vec{\tau}^{(n-1)} = \vec{s}^{(n)}, \quad (38)$$

где \widehat{G}_{kin} — матричное представление разностной схемы, $\vec{s}^{(n)} = \vec{\rho}_{st}^{(n)} - \vec{\rho}^{(0)(n)}$ — вектор-источник, т. е. разность между n -й гармоникой стационарного распределения и n -й гармоникой начального распределения. Полагаем, что соседние гармоники связаны двучленным рекуррентным соотношением. Для случая положительных гармоник $n > 0$ оно будет иметь вид

$$\vec{\tau}^{(n+1)} = \widehat{\kappa}_+^{(n+1)} \vec{\tau}^{(n)} + \vec{X}_+^{(n+1)}. \quad (39)$$

Видно, что гармоники связаны друг с другом с помощью соответствующих матриц связи $\widehat{\kappa}_+^{(n+1)}$ и векторов $\vec{X}_+^{(n+1)}$; отметим, что матрицы $\widehat{\kappa}_+^{(n+1)}$ представляют собой те же матрицы рекуррентной связи гармоник, что и в стационарной задаче. Для получения векторов связи подставим соотношение (39) в уравнение (38) и определим рекуррентные уравнения:

$$\begin{aligned}
 & \left(\widehat{\mathcal{L}}_0 - \frac{ni}{m} \widehat{G}_{kin} \right) \vec{\tau}^{(n)} + \widehat{\mathcal{L}}_- \widehat{\kappa}_+^{(n+1)} \vec{\tau}^{(n)} + \\
 & + \widehat{\mathcal{L}}_- \vec{X}_+^{(n+1)} + \widehat{\mathcal{L}}_+ \vec{\tau}^{(n-1)} = \vec{s}^{(n)}, \\
 & \left(\widehat{\mathcal{L}}_0 - \frac{ni}{m} \widehat{G}_{kin} + \widehat{\mathcal{L}}_- \widehat{\kappa}_+^{(n+1)} \right) \vec{\tau}^{(n)} = \\
 & = -\widehat{\mathcal{L}}_+ \vec{\tau}^{(n-1)} + \vec{s}^{(n)} - \widehat{\mathcal{L}}_- \vec{X}_+^{(n+1)}, \quad (40) \\
 & \vec{\tau}^{(n)} = - \left(\widehat{\mathcal{L}}_0 - \frac{ni}{m} \widehat{G}_{kin} + \widehat{\mathcal{L}}_- \widehat{\kappa}_+^{(n+1)} \right)^{-1} \times \\
 & \times \widehat{\mathcal{L}}_+ \vec{\tau}^{(n-1)} + \left(\widehat{\mathcal{L}}_0 - \frac{ni}{m} \widehat{G}_{kin} + \widehat{\mathcal{L}}_- \widehat{\kappa}_+^{(n+1)} \right)^{-1} \times \\
 & \times \left(\vec{s}^{(n)} - \widehat{\mathcal{L}}_- \vec{X}_+^{(n+1)} \right).
 \end{aligned}$$

Из сравнения (40) и (39) видно, $\widehat{\kappa}_+^{(n)}$ и $\vec{X}_+^{(n)}$ можно представить в виде бесконечных цепных дробей:

$$\widehat{\kappa}_+^{(n)} = - \left(\widehat{\mathcal{L}}_0 - \frac{ni}{m} \widehat{G}_{kin} + \widehat{\mathcal{L}}_- \widehat{\kappa}_+^{(n+1)} \right)^{-1} \widehat{\mathcal{L}}_+, \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{X}_+^{(n)} = & \left(\widehat{\mathcal{L}}_0 - \frac{ni}{m} \widehat{G}_{kin} + \widehat{\mathcal{L}}_- \widehat{\kappa}_+^{(n+1)} \right)^{-1} \times \\
 & \times \left(\vec{s}^{(n)} - \widehat{\mathcal{L}}_- \vec{X}_+^{(n+1)} \right). \quad (42)
 \end{aligned}$$

Аналогично для отрицательных гармоник $n \leq -1$ можно найти последовательность матриц $\widehat{\kappa}_-^{(n)}$ и векторов $\vec{X}_-^{(n)}$, таких что

$$\vec{\tau}^{(n-1)} = \widehat{\kappa}_-^{(n-1)} \vec{\tau}^{(n)} + \vec{X}_-^{(n-1)},$$

удовлетворяющих рекуррентным соотношениям

$$\widehat{\kappa}_-^{(n)} = - \left(\widehat{\mathcal{L}}_0 - \frac{ni}{m} \widehat{G}_{kin} + \widehat{\mathcal{L}}_+ \widehat{\kappa}_-^{(n-1)} \right)^{-1} \widehat{\mathcal{L}}_-, \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{X}_-^{(n)} = & \left(\widehat{\mathcal{L}}_0 - \frac{ni}{m} \widehat{G}_{kin} + \widehat{\mathcal{L}}_+ \widehat{\kappa}_-^{(n-1)} \right)^{-1} \times \\
 & \times \left(\vec{s}^{(n)} - \widehat{\mathcal{L}}_+ \vec{X}_-^{(n-1)} \right). \quad (44)
 \end{aligned}$$

В любом физическом эксперименте интенсивность светового поля конечна, а гармоники являются убывающими, поэтому при численных расчетах разумно положить, что эффективно возбуждаются только N первых пространственных гармоник, а все гармоники более высокого порядка можно считать равными нулю, так как вносимый ими вклад пренебрежительно мал, т. е. $\widehat{\kappa}_{\pm(N+1)} = 0$ и $\vec{X}_{\pm(N+1)} = 0$. Правильность выбора всегда можно проверить, сравнив результаты вычислений для двух разных N , различающихся, например, в два раза. Исходя

из массива обработанных данных, можно сказать, что для исследованных случаев значение $N \approx 30$ является оптимальным. Это позволяет рассчитать все ненулевые гармоники, начиная с наивысшей. Значения крайних ненулевых матриц связи $\widehat{\kappa}_{\pm N}$ и векторов $\vec{X}_{\pm N}$ с учетом соотношений (43) и (44) будут иметь вид

$$\widehat{\kappa}_{\pm N} = - \left(\widehat{\mathcal{L}}_0 - \frac{\pm Ni}{m} \widehat{G}_{kin} \right)^{-1} \widehat{\mathcal{L}}_{\mp}, \quad (45)$$

$$\vec{X}_{\pm N} = \left(\widehat{\mathcal{L}}_0 - \frac{\pm Ni}{m} \widehat{G}_{kin} \right)^{-1} (\vec{s}_{\pm N}). \quad (46)$$

После этого рассчитываются остальные $\widehat{\kappa}_n$ и \vec{X}_n вплоть до $\widehat{\kappa}_{\pm 1}$ и $\vec{X}_{\pm 1}$. После того как получены все матрицы связи, мы можем выразить все гармоники вектора $\vec{\tau}$ через нулевую, которая определяется следующим матричным уравнением:

$$\vec{\tau}^0 = \left(\widehat{\mathcal{L}}_0 + \widehat{\mathcal{L}}_- \widehat{\kappa}_+^1 + \widehat{\mathcal{L}}_+ \widehat{\kappa}_-^1 \right)^{-1} \left(\vec{s}^0 - \vec{X}_-^1 - \vec{X}_+^1 \right). \quad (47)$$

Для получения однозначного решения система дополняется условием нормировки $\text{Tr}(\widehat{\tau}_0(q=0)) = 0$, которое следует из сохранения нормировки $\widehat{\rho}$. Векторизованная матрица $\vec{\tau}$ содержит в себе различную информацию о динамических характеристиках переходного процесса, однако эту информацию нужно как-то извлечь и интерпретировать.

6. ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ОХЛАЖДЕНИЯ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА – ПЛАНКА

В квазиклассическом режиме ($w_r \ll \gamma$, $\delta p \gg \hbar k$, $\gamma t \gg 1$), пренебрегая пространственным распределением атомов, систему уравнений для матрицы плотности (17) можно свести к уравнению типа Фоккера – Планка (далее УФП) для функции распределения в фазовом пространстве $f(p)$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(p) = \left(-\frac{\partial}{\partial p} F(p) + \frac{\partial^2}{\partial p^2} D(p) \right) f(p), \quad (48)$$

где $F(p)$ — светоиндуцированная сила, $D(p)$ — коэффициент диффузии. При этом, применив разработанный метод статистического подхода к динамике лазерного охлаждения к уравнению (48), получим уравнение для функции τ_f , содержащей информацию о времени охлаждения:

$$\begin{aligned}
 \left(-\frac{\partial}{\partial p} F(p) + \frac{\partial^2}{\partial p^2} D(p) \right) \tau_f = & f_{st} - f(0), \quad (49) \\
 \text{Tr}[\tau_f] = & 0,
 \end{aligned}$$

где f_{st} — стационарная функция распределения, $f(0)$ — функция распределения в начальный момент времени. Данное уравнение можно решить с помощью метода разделения переменных и получить следующее выражение для функции τ_f :

$$\begin{aligned} \tau_f(p) = & \int_{-\infty}^p D(p)^{-1} \left(\int_{-\infty}^p (f_{st} - f_0) dp \right) \times \\ & \times \exp \left(\int_{-\infty}^p \frac{-F(p) + D'(p)}{D(p)} dp \right) dp \times \\ & \times \left\{ \exp \left(\int_{-\infty}^p \frac{-F(p) + D'(p)}{D(p)} dp \right) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (50)$$

Хотя найденное решение имеет форму квадратур, в общем виде они не сводятся к известным специальным функциям и полученные интегралы можно взять только численными методами. Кроме того, остается открытым вопрос о корректном извлечении информации о времени установления стационарного распределения. Для выяснения этого обратимся к простейшему случаю — приближению медленных атомов, для которого мы можем заметно упростить задачу. Ограничимся первым порядком силы и нулевым порядком коэффициента диффузии при разложении по импульсам и попробуем оценить время охлаждения:

$$F(p) = \alpha p, \quad D(p) = D_0, \quad (51)$$

где α — коэффициент трения ($\alpha < 0$ соответствует классическому режиму лазерного охлаждения). Запишем уравнение для функции распределения $f(p, t)$ в данном приближении:

$$\left(-\alpha \frac{\partial}{\partial p} p + D_0 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) f(p, t) = \frac{\partial}{\partial t} f(p, t). \quad (52)$$

Решение этого уравнения имеет вид гауссовой функции с меняющейся во времени дисперсией (что с физической точки зрения соответствует среднему квадрату импульса):

$$f(p, t) = \frac{\exp(-p^2/a(t))}{\sqrt{\pi a(t)}}, \quad (53)$$

$$a(t) = a(\infty) + (a_0 - a(\infty)) \exp(-C_1 t),$$

где a_0 — дисперсия начального распределения атомов, $a(\infty)$ — дисперсия стационарного распределения атомов. Подставив (53) в (52) и решив полученное уравнение для $a(t)$, получим

$$a(t) = \left(a_0 + \frac{2D_0}{\alpha} \right) e^{2\alpha t} - \frac{2D_0}{\alpha}. \quad (54)$$

Видно, что эволюция импульсного распределения определяется единственной скоростью, пропорциональной $1/(2\alpha)$. Подойдем к задаче об охлаждении медленных атомов с другой стороны. Уравнение для среднего квадрата импульса в приближении медленных атомов можно получить, домножив (52) на p^2 и проинтегрировав по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle p^2(t) \rangle &= 2\alpha \langle p^2(t) \rangle + 2D_0, \\ \langle p^2(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} p^2 f(p) dp. \end{aligned} \quad (55)$$

Решение этого уравнения также имеет экспоненциальный вид, что соответствует одной-единственной скорости охлаждения, одинаковой для всех атомов:

$$\langle p^2(t) \rangle = e^{2\alpha t} (\langle p^2 \rangle(0) - \langle p^2 \rangle_{st}) + \langle p^2 \rangle_{st}, \quad (56)$$

где $\langle p^2 \rangle(0)$ — средний квадрат импульса начального распределения, $\langle p^2 \rangle_{st} = -D_0/\alpha$ — средний квадрат импульса стационарного распределения. Выделим динамическую добавку

$$\langle p^2(t) \rangle_{din} = e^{2\alpha t} (\langle p^2 \rangle(0) - \langle p^2 \rangle_{st})$$

аналогично тому, как мы поступали ранее (3), и проинтегрируем ее для получения уравнения для времени установления среднего квадрата импульса $\langle p^2 \tau \rangle$:

$$\langle p^2 \tau \rangle = \int_0^{\infty} \langle p^2(t) \rangle - \langle p^2 \rangle_{st} dt = \frac{\langle p^2 \rangle(0) - \langle p^2 \rangle_{st}}{-2\alpha}. \quad (57)$$

Становится очевидно, что удобно ввести нормированное на разницу между начальными распределениями время T , которое в случае приближения медленных атомов обратно пропорционально коэффициенту трения:

$$T = \frac{\langle p^2 \tau \rangle}{\langle p^2 \rangle(0) - \langle p^2 \rangle_{st}} = \frac{1}{-2\alpha}. \quad (58)$$

Запишем время охлаждения для данного приближения в явном виде, используя коэффициент трения α из [2]:

$$\begin{aligned} T_{slow} \gamma &= \frac{\gamma (1+S)^{3/2}}{w_r \delta S (2+S)} \times \\ & \times \left(\frac{\gamma^2}{\delta^2 + \gamma^2/4} - \frac{S^2}{2+S} \frac{1+3(1+S)^{1/2}}{(1+(1+S)^{1/2})^3} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (59)$$

где

$$S = \frac{2(2\Omega)^2}{\delta^2 + \gamma^2/4}$$

— параметр насыщения, $w_r = \hbar k^2/m$ — частота отдачи. В общем случае вне приближения медленных атомов время не будет определяться одной скоростью (исходя, например, из негауссового вида стационарного распределения), однако нормированное описанным выше образом время (58) можно сравнивать с (59). И мы надеемся, что обнаруженные отличия позволят получить интересные физические результаты, которые могут быть полезны для практического применения.

7. РЕЗУЛЬТАТЫ

Подведем итоги. Нами был разработан метод и успешно реализованы соответствующие численные алгоритмы, которые позволяют исследовать стационарные импульсные и пространственные распределения, а также получать информацию о динамических характеристиках установления этих распределений в широком диапазоне изменения параметров задачи, таких как частота отдачи, частота Раби и отстройка светового поля. Параметры задачи приводятся в безразмерных единицах. В начальный момент времени слабозаимодействующие невозбужденные атомы распределены в пространстве равномерно, их импульсное распределение является тепловым (описывается законом Максвелла) и их средняя кинетическая энергия больше стационарной. Проводится сравнение результатов, полученных тремя методами: квантовым методом с полным учетом эффектов отдачи и локализации, методом квазиклассического приближения медленных атомов и методом квазиклассического приближения на основе УФП. Основные полученные результаты удобно сгруппировать исходя из того, какой параметр варьировался в той или иной серии расчетов. Для квантовой задачи нормированное время в пространстве когерентностей можно записать как

$$T_{quant} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial q^2} \text{Tr}\{\hat{\tau}^{(0)}\}(q=0)}{\frac{\partial^2}{\partial q^2} \left(\text{Tr}\{\hat{\rho}^{(0)}(0)\}(q=0) - \text{Tr}\{\hat{\rho}_{st}\}(q=0) \right)}. \quad (60)$$

Для уравнения Фоккера–Планка нормированное время в импульсном пространстве имеет вид

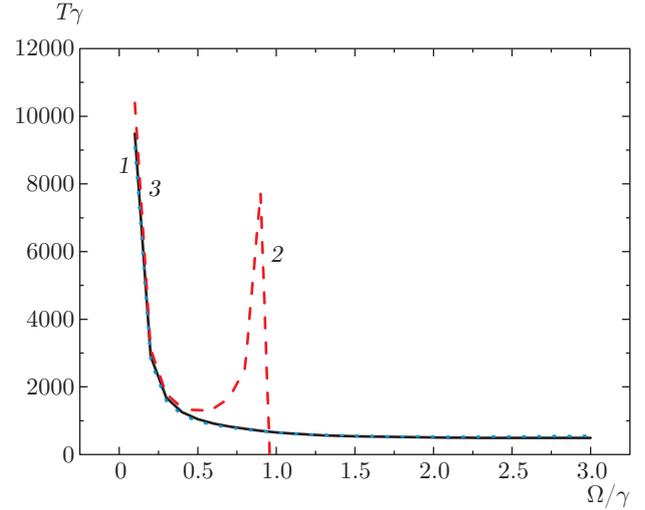


Рис. 3. Зависимости среднего времени установления средней кинетической энергии от частоты Раби. Сравнение с результатами квазиклассической оценки времени: 1 (сплошная линия) — квантовый подход, 2 (штриховая линия) — приближение медленных атомов, 3 (пунктирная линия) — уравнение Фоккера–Планка. Параметры задачи: $w_r = 0.001\gamma$, $\delta = -\gamma$, $q_{0start} = 0.005$

$$T_{cl} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (p^2 \tau^{(0)}(p)) dp}{\int_{-\infty}^{\infty} p^2 f^{(0)}(p)|_{t=0} dp - \int_{-\infty}^{\infty} p^2 f_{st}^{(0)}(p) dp}. \quad (61)$$

7.1. Влияние частоты Раби

График, представленный на рис. 3, показывает зависимость среднего времени установления кинетической энергии от частоты Раби в классическом режиме. Квантовый подход и подход на основе УФП дают очень близкие результаты оценки времени, что полностью соответствует квазиклассическому режиму. Приближение медленных атомов, в свою очередь, дает неверный ответ при $\Omega > 0.65$, так как наклон кривой силы трения с повышением частоты Раби все увеличивается, а при $\Omega > 0.9$ меняет знак, что в линейном приближении приводит к разогреву атомов. В квантовом режиме (рис. 4) наблюдаются совершенно некорректные результаты, даваемые приближением медленных атомов, а время охлаждения атомов, полученное разработанным квантовым методом с учетом эффектов отдачи и локализации, оказывается заметно меньше (для $\Omega = 0.4\gamma$ различие более чем в 1.3 раза) времени, полученного с

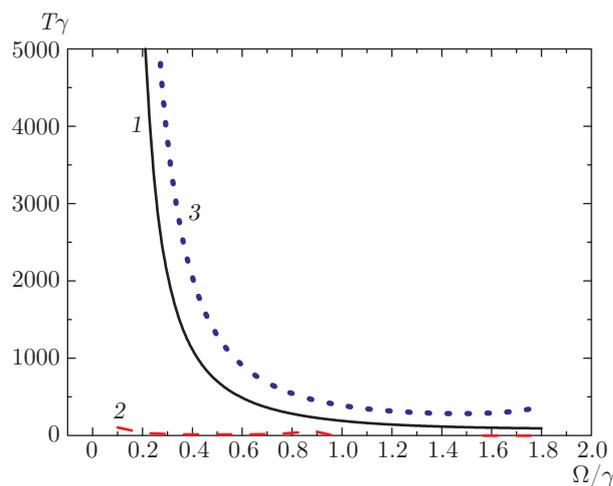


Рис. 4. Зависимости среднего времени установления средней кинетической энергии от частоты Раби в квантовом режиме. Сравнение с результатами квазиклассической оценки времени: 1 — квантовый подход, 2 — приближение медленных атомов, 3 — уравнение Фоккера–Планка. Параметры задачи: $w_r = 0.025\gamma$, $\delta = -\gamma$, $q_{0start} = 0.03$

помощью подхода на основе уравнения Фоккера–Планка.

Кроме того, важно отметить обнаруженный эффект насыщения скорости охлаждения ансамбля атомов с ростом частоты Раби.

7.2. Влияние энергии отдачи

Было проведено исследование зависимости среднего времени установления кинетической энергии (рис. 5) от частоты отдачи, которая, как известно, представляет собой один из основных параметров применимости квазиклассического подхода. Полученные результаты вполне ожидаемы — в области малой частоты отдачи мы наблюдаем прекрасное согласование результатов, а при ее росте появляются заметные различия. Приближение медленных атомов дает заведомо неверную зависимость — время охлаждения уменьшается с ростом частоты отдачи. Время, полученное с помощью квантового и квазиклассического подходов, ведет себя близким образом — на первом этапе уменьшается, а затем достаточно резко возрастает. Однако численные различия, даваемые разными методами, заметны. Это ожидаемый и достаточно важный результат, который необходимо учитывать при экспериментах с атомами, имеющими большую частоту отдачи. При этом интересно то, что квантовый подход дает большую скорость охлаждения, чем квазиклассический.

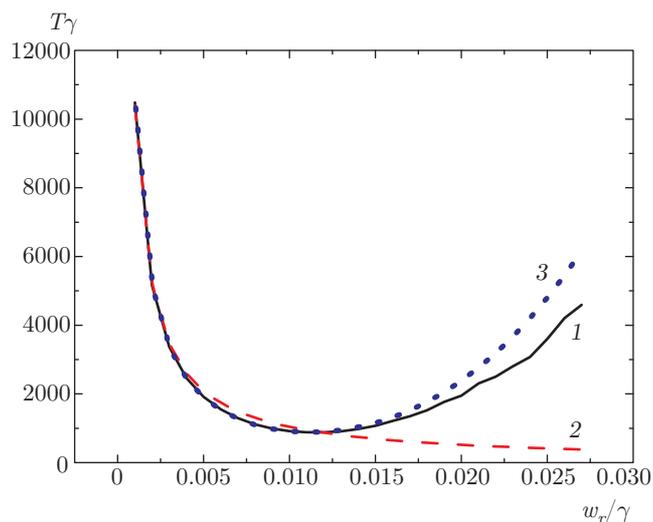


Рис. 5. Зависимости среднего времени установления средней кинетической энергии от энергии отдачи. Сравнение с результатами квазиклассической оценки времени: 1 — квантовый подход, 2 — приближение медленных атомов, 3 — уравнение Фоккера–Планка. Параметры задачи: $\delta = -\gamma$, $\Omega = 0.1\gamma$, $q_{0start} = 0.05$

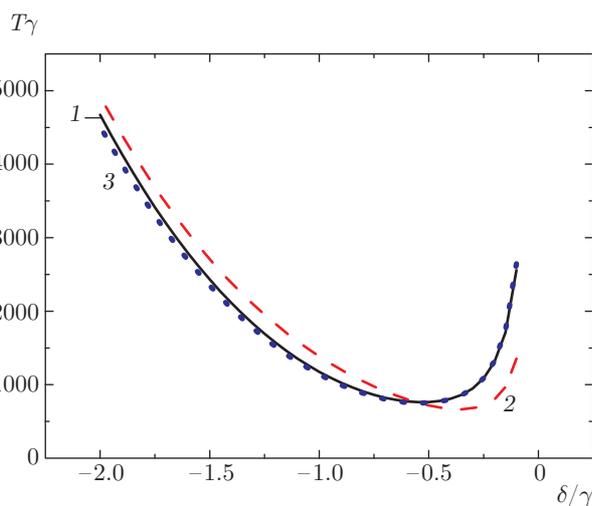


Рис. 6. Зависимости среднего времени установления средней кинетической энергии от отстройки: 1 — квантовый подход, 2 — приближение медленных атомов, 3 — уравнение Фоккера–Планка. Параметры задачи: $w_r = 0.001\gamma$, $\Omega = 0.4\gamma$, $q_{0start} = 0.005$

7.3. Влияние отстройки светового поля

Наконец, было проведено исследование времени установления стационарного импульсного распределения от отстройки светового поля (рис. 6). Рассматривались лишь «красные» отстройки, т. е. те режимы, где существует стационарное решение. Частота Раби относительно мала, $\Omega = 0.4\gamma$. Ранее было

известно [2], что для двухуровневого атома с переходом $0 \rightarrow 1$, существует наиболее эффективная (с точки зрения температуры) отстройка $\delta/\gamma = -1/2$, теперь благодаря развитому статистическому подходу к динамике лазерного охлаждения было показано, что данная отстройка как раз находится в области максимально быстрого охлаждения атомов. Приближение медленных атомов дает заметно менее точный результат, чем квантовый и квазиклассический подходы. В более сильном поле приближение медленных атомов даст нефизический результат по уже описанным выше причинам.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из полученных результатов видно, что разработанный метод полезен для планирования и интерпретации экспериментов, параметры которых далеко не всегда находятся в области, корректно описываемой квазиклассическим приближением медленных атомов. Более того, даже при тех параметрах, которые формально находятся внутри области применимости квазиклассического приближения, может наблюдаться значительное различие времен охлаждения, полученных различными методами. Примером может являться охлаждение атомов стронция, имеющих частоту отдачи $\omega_r = 0.026\gamma \ll 1$, однако, как видно из рис. 5, время охлаждения, полученное квантовым методом с полным учетом эффектов отдачи локализации, будет в 1.3 раза меньше, чем предсказывает квазиклассический подход. Показано, что значение отстройки, при которой атомы охлаждаются максимально эффективно, является частью области наиболее быстрого охлаждения. Показано, что приближение медленных атомов почти всегда дает заметно отличный и часто некорректный результат.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (государственное задание № 2014/139, проект № 825); РФФИ (гранты №№ 14-02-00806, 14-02-00712, 14-02-00939, 15-02-08377, 15-32-20330), Президиума СО РАН, грантами Президента РФ (МК-4680.2014.2 и НШ-4096.2014.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Миногин, В. С. Летохов, *Давление лазерного излучения на атомы*, Наука, Москва (1986).

2. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, В. П. Яковлев, *Механическое действие света на атомы*, Наука, Москва (1991).
3. C. Cohen-Tannoudji, *Atomic Motion in Laser Light*, Elsevier Sci. Publ., Paris (1992).
4. C. S. Adams and E. Riis, *Prog. Quant. Electr.* **21**(1), 1 (1997).
5. H. J. Metcalf and P. van der Straten, *Laser Cooling and Trapping*, Springer-Verlag, New York (2002).
6. S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1215 (2008).
7. J. Fischer and M. Wegener, *Laser Photon. Rev.* **7**, 22 (2013).
8. Ф. Рили, *Стандарты частоты. Принципы и приложения*, Физматлит, Москва (2009).
9. N. Hinkley, J. A. Sherman, N. B. Phillips et al., *Science* **341**, 1215 (2013).
10. T. L. Nicholson, J. R. Williams, S. L. Campbell et al., *Nature* **506**, 71 (2014).
11. J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Amer. B* **2**, 1707 (1985).
12. R. J. Cook, *Phys. Rev. A* **20**, 224 (1979).
13. J. P. Gordon and A. Ashkin, *Phys. Rev. A* **21**, 1606 (1980).
14. В. Г. Миногин, *ЖЭТФ* **79**, 2044 (1980).
15. H. Katori, T. Ido, Y. Isoya, and M. Kuwata-Gonokami, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1116 (1999).
16. A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 826 (1988).
17. О. Н. Прудников, Р. Я. Ильенков, А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *ЖЭТФ* **139**, 1074 (2011).
18. K. Molmer, Y. Castin, and J. Dalibard, *J. Opt. Soc. Amer. B* **10**, 524 (1993).
19. A. V. Taichenachev, A. M. Tumaikin, V. I. Yudin, and L. Hollberg, *Phys. Rev. A* **63**, 033402 (2001).
20. Л. С. Понтрягин, А. А. Андронов, А. А. Витт, *ЖЭТФ* **3**, 165 (1933).
21. А. Н. Колмогоров, М. А. Леонтович, *Phys. Z. Sowjet.* **4**(1), 1 (1993).
22. А. П. Казанцев, В. С. Смирнов, А. М. Тумайкин, И. А. Ягофаров, Препринт № 5, Томск (1982).

23. B. J. Feldman and M. S. Feld, Phys. Rev. A **5**, 899 (1972).
24. S. Stenholm, Phys. Rep. **43**, 151 (1978).
25. S. A. Babin, D. V. Churkin, E. V. Podivilov, V. V. Potapov, and D. A. Shapiro, Phys. Rev. A **67**, 043808 (2003).
26. V. G. Minogin and O. T. Serimaa, Opt. Comm. **3**, 373 (1979).
27. S. M. Tan, J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt. **1**, 424 (1999).
28. S. M. Yoo and J. Javanainen, J. Opt. Soc. Amer. B **8**, 1341 (1991).