

ЛЕВИТИРУЮЩИЙ СОЛИТОН КОНДЕНСАТА БОЗЕ – ЭЙНШТЕЙНА

Н. В. Высотина^a, Н. Н. Розанов^{a,b,c}*

^a Государственный оптический институт им. С. И. Вавилова
199053, Санкт-Петербург, Россия

^b Университет ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Россия

^c Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе
194021, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 27 октября 2015 г.

Для описания динамики осциллона — солитоноподобного сгустка атомного конденсата Бозе – Эйнштейна (случай притяжения атомов), помещенного над осциллирующим атомным зеркалом в присутствии однородного гравитационного поля, — предложена механическая модель, отвечающая уравнению Ньютона. Модель описывает стохастическое ускорение Ферми, периодические, квазипериодические и хаотические движения центра осциллона, а также гистерезисные явления при медленном изменении частоты осциллирующей зеркала в хорошем согласии с результатами на основе уравнения Гросса – Питаевского.

DOI: 10.7868/S0044451016070075

1. ВВЕДЕНИЕ

Солитоны — волны, локализованные за счет нелинейных механизмов, — обычно разделяются на два класса. Первый представлен консервативными солитонами в системах с пренебрежимо слабыми диссипативными факторами. Второй — диссипативные солитоны — реализуется в системах с существенными и сбалансированными притоком и оттоком энергии и/или материи. Свойства солитонов этих двух классов кардинально различаются. При фиксированных параметрах системы консервативные солитоны образуют семейства с произвольными в определенных пределах характеристиками, например шириной солитона, тогда как диссипативные солитоны возможны только при дискретном наборе их ширин. Это обстоятельство вызывает качественное различие характера устойчивости этих классов солитонов, приводя к гораздо большей устойчивости диссипативных солитонов.

В то же время в системах с динамической (периодически изменяющейся со временем) конфигурацией возможен и другой класс локализованных структур, промежуточный между консервативными

и диссипативными солитонами. Примерами служат обнаруженные Фарадеем [1] локализованные структуры гранулярного материала (песка), помещенного на платформе, колеблющейся в вертикальном (вдоль силы тяжести) направлении. В работе [2] такие структуры названы осциллонами. Здесь имеет место сохранение числа частиц (признак консервативности) при наличии энергообмена с осциллирующей платформой (признак диссипативности).

Отметим, что подобные схемы с периодически меняющейся конфигурацией представляют значительный интерес и применительно к так называемым волнам материи — конденсату Бозе – Эйнштейна сверххолодных атомов [3], помещенному в ловушку с осциллирующими стенками (барьерами). Такие стенки — атомные зеркала — могут практически идеально отражать атомы, не приводя к уменьшению их числа в ловушке (консервативность). Но при отражении атомов от движущихся стенок происходит изменение их энергии, так что схемы принадлежат к числу открытых (незамкнутых) и в этом смысле диссипативных. Атомные зеркала для сверххолодных атомов могут быть реализованы, например, при использовании лазерного излучения [4, 5]. Ловушка для таких атомов может осциллировать как целое, т. е. состоять в простейшем случае из двух параллельных осциллирующих зеркал при обеспече-

* E-mail: nnrosanov@mail.ru

нии поперечной фокусировки [6] или же только из одного осциллирующего зеркала, расположенного горизонтально, при учете гравитации [7]. Для двухзеркальной динамической схемы нелинейная (с учетом межатомного взаимодействия) динамика атомного конденсата рассматривалась в работах [8–13], а для одного осциллирующего зеркала в присутствии гравитации — в [14, 15]. Отметим также, что квантовые состояния в гравитационном поле над зеркалом представляют интерес для объектов различной природы, в том числе для ультрахолодных нейтронов [16].

Цель данной работы — анализ динамики осциллона конденсата Бозе – Эйнштейна в однородном поле гравитации над осциллирующим атомным зеркалом. Схема близка к рассмотренной в недавних работах [14, 15] со следующими отличиями. Будем считать зеркало идеальным, непроницаемым для атомов, тогда как в [14, 15] зеркало моделировалось дельта-потенциалом с конечной площадью и, соответственно, с частичным просачиванием атомов через зеркало. Хотя постановка задачи в работах [14] и [15] совпадает, их результаты различаются. Например, в [15] утверждается отсутствие режимов динамического хаоса, а в [14] такие режимы демонстрируются. Кроме того, только в [14] в ряде приближений найден эффект бистабильности с различными амплитудами колебаний солитона при одних и тех же параметрах в зависимости от предыстории. Однако такая возможность требует подтверждения, поскольку в отсутствие диссипативных факторов нельзя отделить вынужденные колебания от незатухающих свободных, что подразумевалось в [14] при выводе о наличии гистерезиса. В разд. 2 настоящей работы представлены модель и исходные уравнения, включая приближенное уравнение ньютоновского типа для описания динамики центра осциллона. При его формулировке мы используем развитый ранее [9, 11, 12] подход, в котором граничное условие на идеальном зеркале удовлетворяется сведением задачи об осциллоне над зеркалом к задаче о взаимодействии осциллона с его противофазным зеркальным отражением. В разд. 3 рассматривается движение осциллона над неподвижным зеркалом, тогда как случай осциллирующего зеркала анализируется в разд. 4 и 5, причем последний посвящен гистерезисным эффектам. Общие выводы приведены в последнем разд. 6.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Конденсат Бозе – Эйнштейна газа атомов с низкой концентрацией при нулевой температуре в од-

номерной (сигарообразной) ловушке, ориентированной вертикально в однородном поле тяжести, описывается уравнением Гросса – Питаевского для макроскопической волновой функции $\psi(z, t)$ [3]:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_p} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + U_0 |\psi|^2 \psi + m_p g z \psi. \quad (1)$$

Здесь t — время, m_p — масса атома, z — вертикальная координата, g — ускорение свободного падения. Параметр U_0 зависит от внешнего магнитного поля и может быть как положительным (отталкивание атомов), так и отрицательным (их притяжение). Дно рассматриваемой ловушки — атомное зеркало с координатой $z_m(t)$ — отвечает непроницаемому для атомов зеркалу, осциллирующему в вертикальном направлении:

$$\psi(z = z_m(t), t) = 0. \quad (2)$$

Естественно требование достаточно быстрого убывания концентрации атомов при $z \rightarrow \infty$. Из уравнения (1) с указанными граничными условиями следует сохранение числа атомов в области над зеркалом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_m(t)}^{\infty} |\psi(z, t)|^2 dz = 0. \quad (3)$$

Этим свойством рассматриваемая здесь система отличается от проанализированной в работах [14, 15], где число атомов в конденсате со временем убывает из-за их просачивания через зеркало.

В безразмерных переменных

$$z' = z/Z_1, \quad t' = t/T_1, \quad \psi' = \psi/\Psi_1,$$

где

$$Z_1 = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{2m_p^2 g}}, \quad T_1 = \frac{\hbar}{m_p g Z_1}, \quad \frac{T_1}{\hbar} |U_0| \Psi_1^2 = 1,$$

уравнение (1) приводится к виду

$$i \frac{\partial \psi'}{\partial t'} = -\frac{\partial^2 \psi'}{\partial z'^2} + \text{sign } U_0 |\psi'|^2 \psi' + z' \psi'. \quad (4)$$

Для атомов ${}^7\text{Li}$ имеем $Z_1 = 1.56$ мкм и $T_1 = 0.56$ мс. Далее в (4) выбираем случай притяжения атомов ($U_0 < 0$) и опускаем штрихи.

Для ловушки неограниченной протяженности ($z_m(t) \rightarrow -\infty$) в отсутствие силы тяжести (опускается последнее слагаемое в правой части уравнения (4)) это стандартное нелинейное уравнение Шредингера, решаемое методом обратной задачи рассеяния

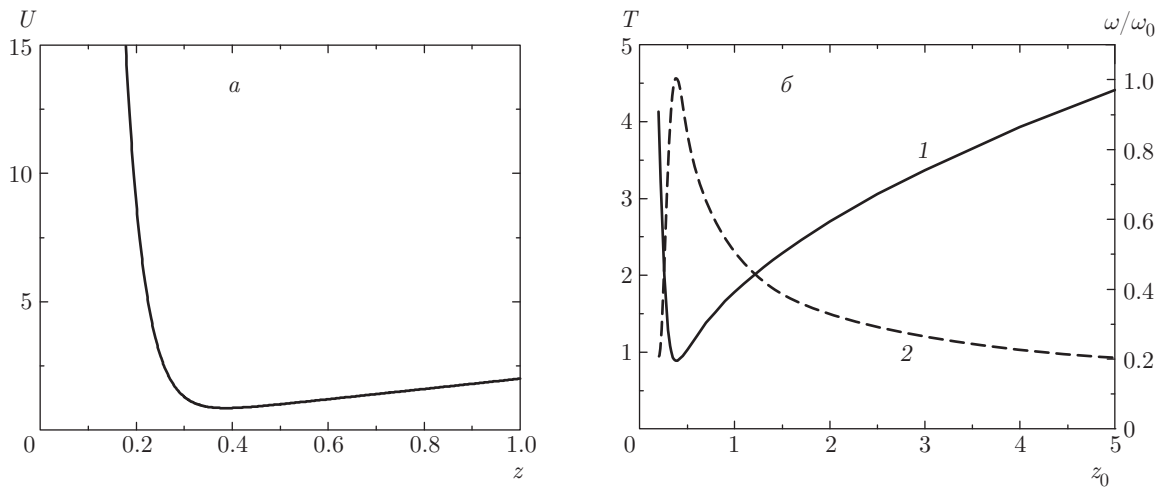


Рис. 1. а) Потенциал U и б) зависимости периода T движения (сплошная кривая 1) и основной частоты $\omega = 2\pi/T$ (штриховая кривая 2) от экстремальной высоты солитона z_0 , $w = 0.08$, $z_m = 0$

[17] и, в том числе, описывающее семейство одиночных солитонов с профилем, определяемым гиперболическим секансом. При неподвижном зеркале ($z_m(t) \equiv 0$) граничное условие непроницаемости (2) можно удовлетворить приемом «зеркального отражения» [9, 11, 12], когда исходная задача с границей заменяется двухсолитонной задачей взаимодействия в неограниченной среде солитона и его противофазного зеркального отражения. Если ускорение движения зеркала невелико и основное время солитон проводит на расстояниях от него, превышающих ширину солитона w («узкий солитон» перекрывается со своим изображением экспоненциально убывающими «хвостами»), то движение солитона (далее $z(t)$ обозначает безразмерную координату центра солитона) с высокой точностью описывается уравнением движения ньютоновского типа

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{16}{w^3} \exp\left[-\frac{2}{w}(z - z_m(t))\right] - 2. \quad (5)$$

При замене $X(t) = \exp[-(2/w)z(t)]$ форма нелинейности упрощается:

$$X \frac{d^2 X}{dt^2} - \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \frac{2}{w} X^2 \left\{ \frac{16}{w^3} X \exp\left[\frac{2}{w} z_m(t)\right] - 2 \right\} = 0. \quad (6)$$

3. НЕПОДВИЖНОЕ ЗЕРКАЛО

При неподвижном зеркале $z_m = \text{const}$. В этом случае уравнение (5) можно интерпретировать как

уравнение движения классической частицы в потенциале

$$U = \frac{8}{w^2} \exp\left[-\frac{2}{w}(z - z_m)\right] + 2(z - z_m). \quad (7)$$

Потенциал имеет минимум (рис. 1а) при

$$\frac{z_{\min} - z_m}{w} = \frac{3}{2} \ln \frac{2}{w}. \quad (8)$$

Согласно уравнению (5), при любых начальных условиях движение является периодическим (рис. 2). Малые колебания около положения равновесия (8) — гармонические с частотой $\omega_0 = 2/\sqrt{w}$. Период монотонно возрастает с ростом отклонений от положения равновесия (в сторону как больших, так и меньших значений z_0 , см. рис. 1б). Отсюда следует, что основной резонансный отклик на внешние воздействия будет реализоваться при частотах воздействия, равных или меньших ω_0 .

Наши расчеты подтвердили, что описание динамики солитона в рамках ньютоновского уравнения (5) хорошо согласуется с расчетами по уравнению Гросса–Питаевского (4).

4. ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЕ ЗЕРКАЛО

Будем считать, что зеркало осциллирует гармонически с частотой Ω , так что его координата

$$z_m(t) = \mu \cos(\Omega t + \varphi_0),$$

где μ — глубина модуляции, $\mu^2 \ll 1$ (используются безразмерные величины; там, где иное не оговорено,

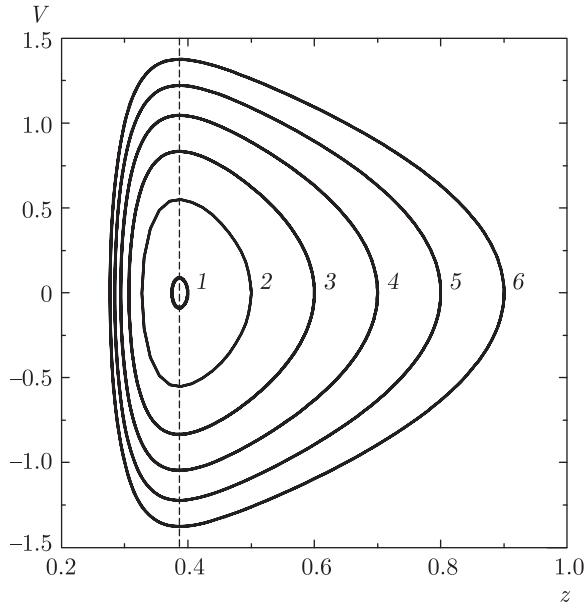


Рис. 2. Зависимости скорости движения солитона от его положения z при нулевой начальной скорости для разных значений его начального положения $z_0 = 0.4$ (1), 0.5 (2), 0.6 (3), 0.7 (4), 0.8 (5) и 0.9 (6). Вертикальная штриховая линия — положение равновесия; $z_m = 0$

$\varphi_0 = 0$). Если частота осцилляций зеркала значительно превышает частоту малых колебаний солитона около положения равновесия, $\Omega \gg \omega_0 = 2/\sqrt{w}$, то медленные движения солитона описываются уравнением (5), усредненным по периоду осцилляций зеркала. Для усредненного (за период осцилляций зеркала) отклонения от среднего положения зеркала $y = 2\langle z_c \rangle/w$ получим

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Ae^{-y} - 2, \quad (9)$$

где

$$A = \frac{8}{w^2} I_0 \left(\frac{2\mu}{w} \right),$$

I_0 — функция Бесселя от мнимого аргумента. Выражение (9) также является уравнением движения частицы в модифицированном, по сравнению с (7), потенциале

$$U = - \int^y (Ae^{-y} - 2) dy = Ae^{-y} + 2y. \quad (10)$$

Соответственно, имеются лишь периодические движения и точка покоя $y = \ln(A/2)$. Таким образом, при быстрых осцилляциях зеркала имеются только количественные отличия от случая неподвижного зеркала. С учетом быстрых осцилляций траектории

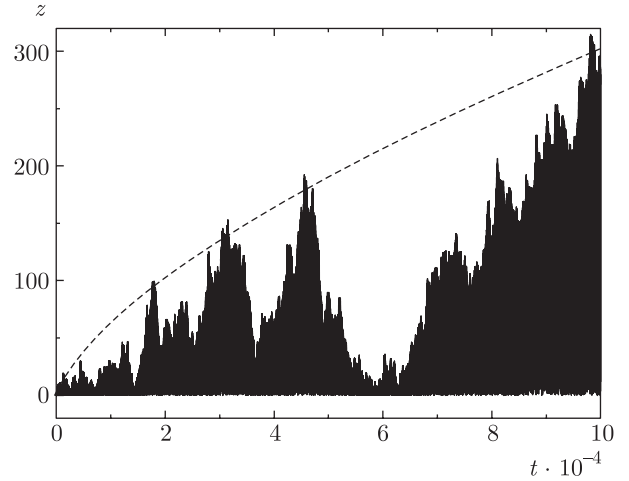


Рис. 3. Временная зависимость высоты подъема солитона при его начальной высоте $z_0 = 0.4$; $\Omega = 2\omega_0$, $\mu = 0.015$. Штриховая линия — аппроксимация $z = Ct^{2/3}$

солитона с несоизмеримыми частотами помимо периодических здесь возникают и квазипериодические движения. Пределом медленных осцилляций служит случай неподвижного зеркала; при этом также реализуются только периодические и квазипериодические движения. Поэтому наибольшего разнообразия динамических режимов следует ожидать, когда частота осцилляций атомного зеркала и собственная частота малых колебаний солитона около положения равновесия — величины одного порядка.

Действительно, в общем случае уравнение (5) описывает разнообразные периодические, квазипериодические и хаотические (динамический хаос) движения, сложность которых возрастает с ростом глубины модуляции μ . Наши расчеты подтверждают возможность ускорения Ферми солитона осциллирующим зеркалом (см. также работу [15]). На рис. 3 показана динамика такого ускорения в случае, когда частота осцилляций зеркала вдвое превышает собственную частоту малых колебаний солитона (условие параметрического резонанса). Видно, что его энергия из-за столкновений с осциллирующим зеркалом возрастает на много порядков по сравнению с первоначальной. Следующая из задачи ускорения Ферми классической частицы на осциллирующей платформе аппроксимация максимального подъема степенной функцией $z_{max} = Ct^{2/3}$ [18] для рассматриваемых солитонов является, по-видимому, недостаточно точной.

Наиболее сильное воздействие на солитон оказывает зеркало, колеблющееся с резонансной частотой ω_0 или с частотой ее гармоники или субгармо-

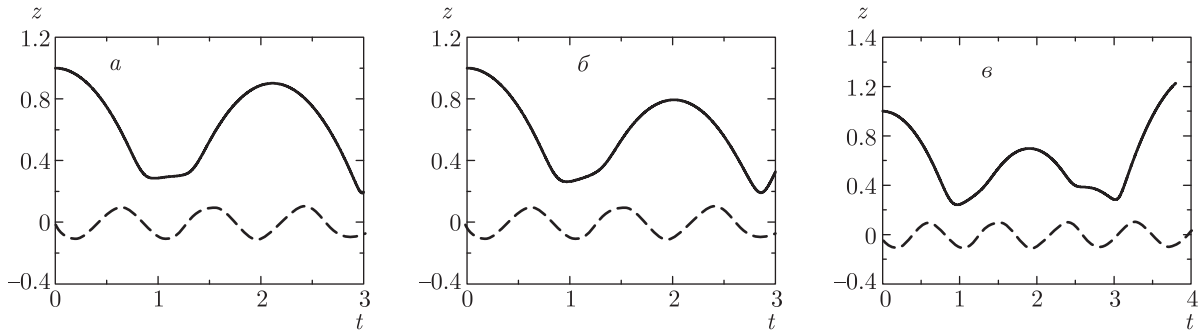


Рис. 4. Временные зависимости координаты зеркала (штриховые кривые) и координаты центра солитона (сплошные кривые) при $\varphi_0/\pi = 0.56$ (а), 0.60 (б), 0.64 (в); $z_0 = 1, \mu = 0.1, \Omega = \omega_0$

ники. Прежде всего отметим возможность нескольких отражений солитона от зеркала за один период колебаний зеркала. Такой сценарий характерен для значительных глубин модуляции μ и значительных начальных отклонений солитона от равновесного положения. Чувствительность к начальной фазе φ_0 колебаний зеркала в момент, когда неподвижный солитон находился на высоте $z_0 = 1$, видна из рис. 4. Эффект родственен «эффекту прилипания» классической частицы, сталкивающейся с осциллирующим зеркалом [19].

На рис. 5 иллюстрируется изменение динамики солитона при изменении глубины модуляции μ зеркала и фиксированных прочих параметрах (начальная высота $z_0 = 0.4, \Omega = \omega_0$, ширина солитона $w = 0.08$). Строго периодические режимы реализуются лишь при специально заданных условиях, рис. 5 (3, 4), тогда как при небольших отклонениях от них режим становится квазипериодическим, рис. 5 (1, 2, 5, 6), а при значительных отклонениях — хаотическим, рис. 5 (7, 8). Более явно такая картина показана на рис. 6, где варьируется именно начальное положение солитона z_0 при нулевой начальной скорости.

5. ГИСТЕРЕЗИС

Нелинейность и неавтономность (периодическая модуляция) «ньютоновского» уравнения (5) делают возможными гистерезисные эффекты, как это имеет место, например, для уравнения Дюффинга [20]. Особенность заключается в том, что в уравнение (5) не включены диссипативные факторы («трение»). Поэтому даже при малых отклонениях от положения равновесия, когда (5) можно заменить линейным (по этим отклонениям) уравнением, «свободные» колебания не затухают, что может смазы-

вать гистерезисные эффекты. Ниже мы представим два варианта обхода этой трудности. Во-первых, при анализе гистерезиса естественно рассматривать не гармонически колеблющееся зеркало, а зеркало с медленно меняющейся мгновенной частотой. Во-вторых, мы качественно учтем, в рамках ньютоновского уравнения, эффективное трение, вызванное торможением движущегося солитона атомного конденсата в присутствии неконденсированных частиц.

В первом варианте временная зависимость координаты атомного зеркала задается в виде

$$z_m(t) = \mu \cos(\varphi(t)),$$

$$\varphi(t) = -\Omega_{max} \frac{T_s}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{T_s} t\right), \quad 0 \leq t \leq T_s. \quad (11)$$

Соответственно, мгновенная частота колебаний зеркала

$$\Omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \Omega_{max} \sin\left(\frac{\pi}{T_s} t\right). \quad (12)$$

Гистерезисные явления естественно ожидать при частотных резонансах, когда частота Ω осцилляций зеркала меняется вблизи частоты ω_0 основного резонанса, частоты гармоники $2\omega_0$ или субгармоники $\omega_0/2$. На рис. 7а показана динамика солитона в случае сканирования частоты при сравнительно небольших величинах Ω_{max} . Для приближения к квазистационарности здесь мы выбрали значение $T_s = 10^4$. Как показывает сравнение рис. 7а и 7б, имеется чрезвычайно хорошее согласие результатов расчетов на основе ньютоновского уравнения и уравнения Гросса – Питаевского. Если же увеличить диапазон изменения частоты до вдвое большей величины, то при увеличении мгновенной частоты динамика становится хаотической, а при последующем уменьшении мгновенной частоты происходит

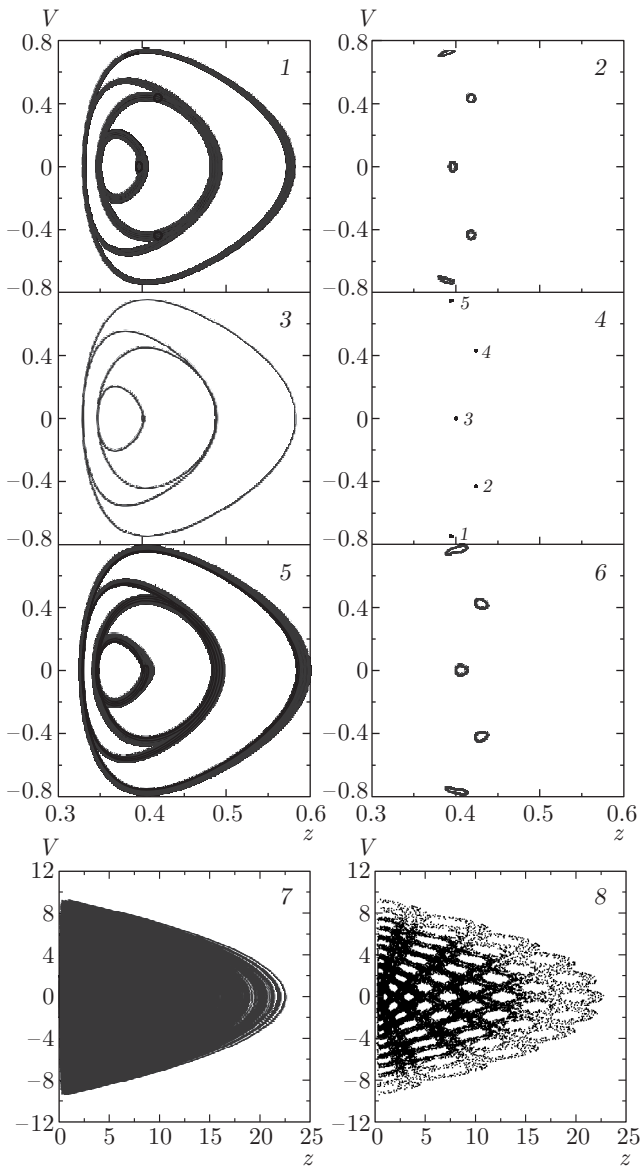


Рис. 5. Динамика солитона при изменении глубины модуляции зеркала μ . Левый ряд — фазовые плоскости (V, z) , правый ряд — сечения Пуанкаре, т. е. данные левого ряда, отображенные в моменты времени, отличающиеся на период осцилляций зеркала. Глубина модуляции $\mu = 0.0194$ (1, 2), 0.0196 (3, 4), 0.0198 (5, 6), 0.01988 (7, 8). Цифры у точек на рис. 5 (4) показывают последовательность по времени смены характеристик периодического движения солитона

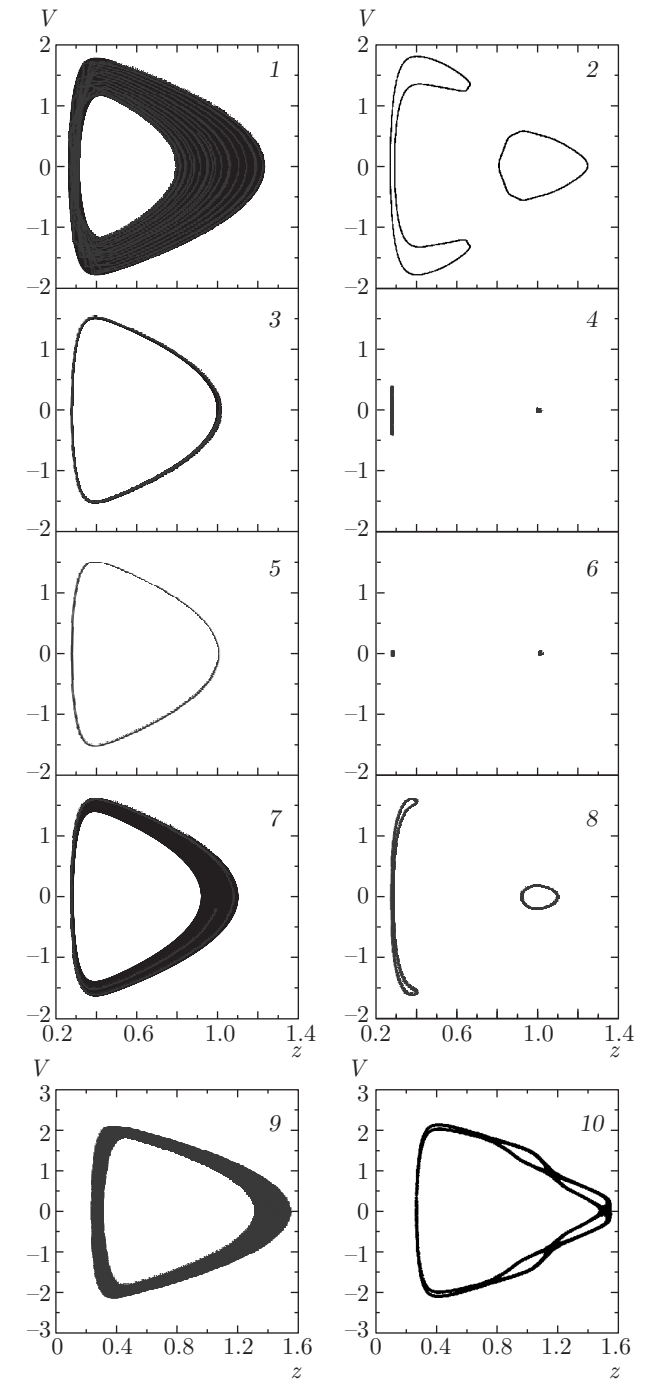


Рис. 6. То же, что на рис. 5, при $\mu = 0.01$ и различных значениях начального положения солитона $z_0 = 0.8$ (1, 2), 1.0 (3, 4), 1.01 (5, 6), 1.1 (7, 8), 1.5 (9, 10)

возврат к квазипериодической динамике в соответствии с более высокой ветвью на рис. 7а,б. Резонансы на субгармонике здесь не просматриваются.

Роль скорости сканирования мгновенной частоты видна из рис. 8, на котором варьируется величина T_s . Этот же рисунок позволяет прояснить ха-

рактер ветвей гистерезисной зависимости. Отметим, что практически общая для всех использованных значений T_s ветвь плавного увеличения z_{max} при уменьшении мгновенной частоты Ω совпадает с обратной зависимостью $\omega(z_0)$, приведенной на рис. 16

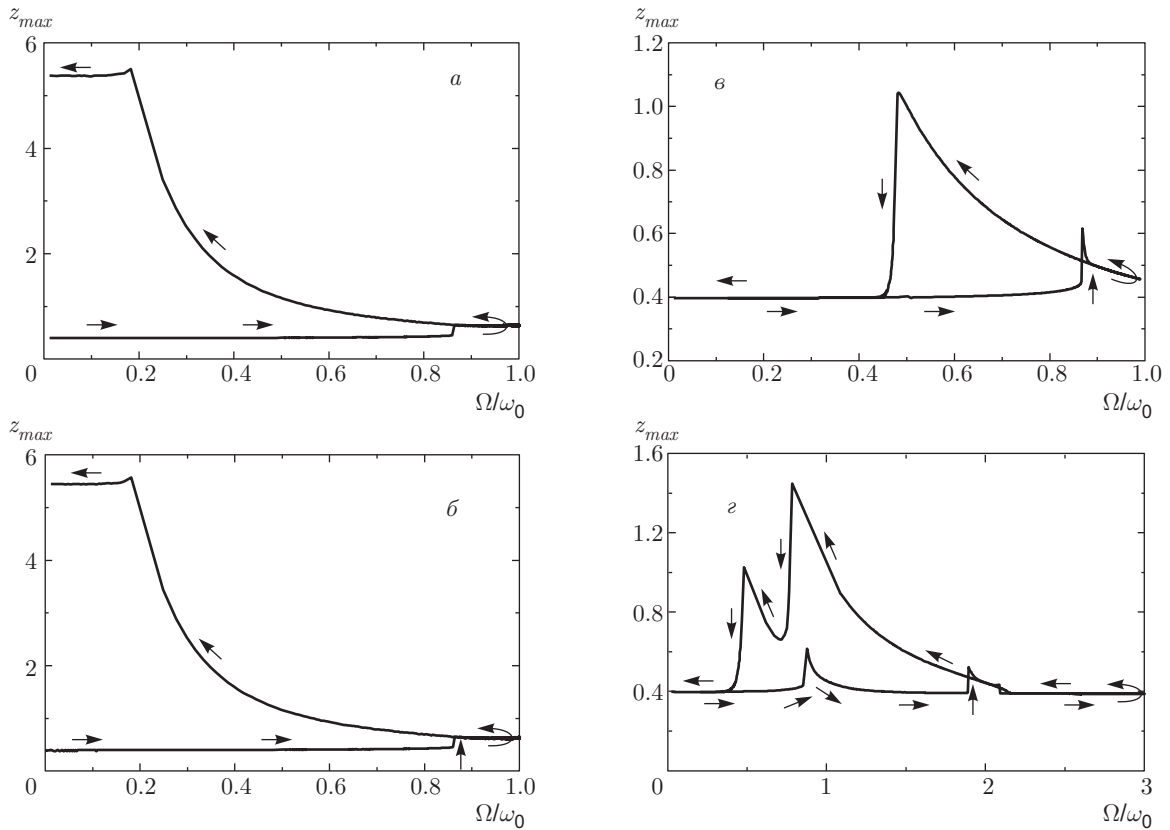


Рис. 7. Зависимости максимальной высоты солитона от мгновенной частоты колебаний зеркала при ее возрастании от нуля до Ω_{max} и последующем убывании до нуля. Стрелки показывают возрастание или убывание мгновенной частоты, $\mu = 0.01$: *a, б* — $\gamma = 0$, $\Omega_{max} = \omega_0$, на рис. 7*б* представлен расчет по уравнению Гросса–Питаевского; *в* — $\gamma = 0.01\omega_0$, $\Omega_{max} = \omega_0$; *г* — $\gamma = 0.01\omega_0$, $\Omega_{max} = 3\omega_0$

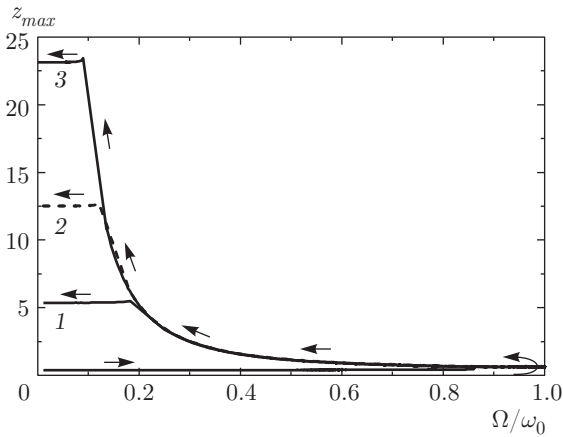


Рис. 8. То же, что на рис. 7*a*, при $T_s = 10^4$ (кривая 1), $5 \cdot 10^4$ (2) и $2 \cdot 10^5$ (3)

(штриховая линия). Эта ветвь отвечает захвату рассмотренных в разд. 3 собственных ангармонических колебаний солитона «внешней силой» с частотой

Ω . Подчеркнем, что при таком сканировании частоты осцилляций зеркала уверенно реализуется вариант ускорения Ферми. При дальнейшем уменьшении мгновенной частоты режим захвата срывается (сканирование оказывается недостаточно медленным) и максимальная амплитуда колебаний солитона стабилизируется на уровне собственных колебаний, почти не зависящем от «внешней силы» (приблизительно горизонтальные участки кривых с наивысшим уровнем максимальной амплитуды). Низшие ветви на рис. 7*a, б* и 8 также не отвечают режиму квазистационарного захвата частоты. Их можно интерпретировать как собственные колебания солитона при неподвижном зеркале, слабо возмущенные «внешней силой» с медленно меняющейся мгновенной частотой. Заметим, что при вариации скорости сканирования частоты с меньшим, чем на рис. 7, шагом, обнаруживается «тонкая структура» с различающимися значениями амплитуды «почти свободных» колебаний на последнем этапе. Из-за указанных обстоятельств квазистационарное рассмотрение

гистерезиса в отсутствие диссипативных факторов [14] не описывает динамику этого процесса корректно.

Теперь обратимся ко второму варианту с введением эффективного трения. Ньютоновское уравнение (5) заменяется на следующее:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\gamma \frac{dz}{dt} + \frac{16}{w^3} \exp\left[-\frac{2}{w}(z - z_m(t))\right] - 2. \quad (13)$$

Результаты показаны на рис. 7*б,г*. Здесь уже при достаточно малых скоростях сканирования мгновенной частоты имеет место установление квазистационарных режимов и четко видны гистерезисные скачки не только на основном резонансе ($\Omega \approx \omega_0$), но и для второй гармоники ($\Omega \approx 2\omega_0$, рис. 7*б*) и субгармоники ($\Omega \approx \omega_0/2$, рис. 7*в,г*). Сравнение рис. 7*в* и 7*г* показывает, что в зависимости от значения Ω_{max} гистерезисный скачок при уменьшении мгновенной частоты происходит на различные ветви (при наличии «трения» выделяются три ветви). Тем самым, подобные эксперименты могли бы выявить наличие «трения» для движущихся солитонов и, в общем случае, нарушение галилеевской инвариантности из-за присутствия неконденсированных атомов, даже если они не ведут к разрушению конденсата.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Таким образом, осциллоны (солитоны) атомного конденсата на колеблющемся атомном зеркале в присутствии гравитационного поля не разрушаются при столкновениях с зеркалом и обладают сложной динамикой. С высокой степенью точности взаимодействие осциллона с зеркалом можно заменить двухчастичным взаимодействием осциллона с его противофазным зеркальным отражением. В сочетании с экспоненциальным характером изменения волновой функции осциллона на его периферии и существенностью дальнего взаимодействия осциллона и его изображения это приводит к «механическому» уравнению Ньютона. Как и для классической частицы, для осциллона достижим режим стохастического ускорения Ферми, когда со временем он достигает все большей высоты подъема. Динамика осциллона, в зависимости от условий задачи, может быть периодической, квазипериодической и хаотической (динамический хаос). При медленном изменении частоты колебаний зеркала происходят гистерезисные скачки между режимами с различной амплитудой колебаний осциллона. И в этом случае результаты, основанные на уравнении Ньютона, находятся в хорошем согласии со

следующими из уравнения Гросса–Питаевского. В отсутствие диссипативных факторов принципиален учет конечной скорости сканирования мгновенной частоты осцилляций атомного зеркала. При этом на этапе медленного уменьшения мгновенной частоты осцилляций зеркала достигается режим ускорения Ферми. Более четко гистерезисные эффекты проявляются при наличии эффективного «трения» осциллона, которое можно было бы связать с торможением осциллона, движущегося в окружении неконденсированных частиц. Отметим, что помимо естественного приложения атомного конденсата Бозе–Эйнштейна для прецизионных гравиметрических измерений, эксперименты по анализу движения солитона в условиях гистерезиса могут предоставить уникальную возможность обнаружения эффективного трения солитонов и исследования его физики.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-12-00894).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Faraday, Phil. Trans. Roy. Soc. London **121**, 299 (1831).
2. P. Unbanhowar, F. Melo, and H. L. Swinney, Nature **382**, 793 (1996).
3. Л. П. Питаевский, УФН **168**, 641 (1998).
4. K. Bongs, S. Burger, G. Birki et al., Phys. Rev. Lett. **83**, 3577 (1999).
5. V. Savalli, D. Stevens, J. Esteve et al., Phys. Rev. Lett. **88**, 250404 (2002).
6. M. M. Dos Santos, T. Oniga, A. S. McLeman et al., J. Plasma Phys. **79**, 437 (2013).
7. F. Saif and I. Rehman, Phys. Rev. A **75**, 043610 (2007).
8. N. N. Rosanov, Phys. Rev. A **88**, 063616 (2013).
9. Н. Н. Розанов, Н. В. Высотина, Письма в ЖЭТФ **100**, 566 (2014).
10. N. N. Rosanov, G. B. Sochilin, V. D. Vinokurova, and N. V. Vysotina, Phil. Trans. Roy. Soc. London A **372**, 20140012 (2014).
11. N. N. Rosanov, Phys. Rev. A **91**, 013622 (2015).
12. N. N. Rosanov and N. V. Vysotina, J. Opt. Soc. Amer. B **32**, B20 (2015).

13. Н. Н. Розанов, Н. А. Веретенев, Н. В. Высотина и др., *Опт. спектр.* **119**, 388 (2015).
14. Kh. P. Khamrakulov, *Int. J. Mod. Phys. B* **28**, 1450198 (2014).
15. A. Benseghir, W. A. T. Wan Abdullah, B. B. Baizakov, and F. Kh. Abdullaev, *Phys. Rev. A* **90**, 023607 (2014).
16. В. В. Несвижевский, *УФН* **180**, 673 (2010).
17. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
18. Г. М. Заславский, *Стохастичность динамических систем*, Наука, Москва (1984).
19. В. Д. Винокурова, Н. Н. Розанов, *Письма ЖТФ* **40**, 21 (2014).
20. И. Г. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гос. изд. техн.-теор. лит., Москва (1956).