ЖЭТФ, 2016, том 150, вып. 1 (7), стр. 135–143

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКИ АБРИКОСОВА ПРИ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ κ БЛИЗКИХ К ЕДИНИЦЕ

Ю. Н. Овчинников [a,b*], *И. М. Сигал* [c**]

[a] *Max-Planck Institute for Physics of Complex Systems 01187 Dresden, Germany*

[b] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук 142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

[c] *Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto Ontario M5S 1A1, Canada*

Поступила в редакцию 16 декабря 2015 г.

Исследуется «мягкая» поперечная мода бесщелевых возбуждений, связанная с деформацией треугольной решетки Абрикосова с одним квантом потока в элементарной ячейке при произвольном значении параметра Гинзбурга–Ландау κ. Показано, что в узкой области значений $1 < \kappa < 1.000634$ решетка Абрикосова с углом $\varphi = \pi/3$ между векторами элементарной ячейки неустойчива. Спектр возбуждений рассматриваемой моды при малых значениях импульса $\mathbf{k}$ (в $\mathbf{k}^2$-приближении) изотропен при $\mathbf{k}$, лежащем в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

DOI: 10.7868/S0044451016070129

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе Абрикосова [1] были найдены состояния сверхпроводников второго рода (значения параметра Гинзбурга–Ландау $\kappa > 1$ [2]) в сильных магнитных полях, получившие общепринятое название — решетки Абрикосова. В решениях решеточного типа (с периодическим значением модуля параметра порядка $|\Delta|^2$) магнитный поток квантуется, и среди решеток с одним квантом потока на ячейку минимум свободной энергии при заданном внешнем поле достигается на решетке с углом $\varphi = \pi/3$ между векторами элементарной ячейки.

Наша задача — исследовать спектр возбуждений, возникающий при возмущениях решетки Абрикосова. Мы покажем, что существует «мягкая» мода, связанная с поперечными деформациями треугольной решетки Абрикосова, с малым значением импульса k, имеющая отрицательную энергию при малом отклонении параметра κ от единицы и лежащем в интервале $1 < \kappa < 1.000634$. Существование отрицательной моды означает неустойчивость треугольной решетки Абрикосова в области $1 < \kappa < 1.000634$. Вопрос об основном состоянии в этой области значений параметра κ требует отдельного рассмотрения (см. также [3]).

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Исходным пунктом для исследования спектра возбуждений решетки Абрикосова является функционал Гинзбурга–Ландау F_S. Его мы запишем в виде [2, 3]

$$\mathcal{F}_S - \mathcal{F}_N = \nu \int d\mathbf{r} \left\{ -\tau|\Delta|^2 + \frac{\pi D}{8T}|\partial_- \Delta|^2 + \right. \left. + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2 T^2}|\Delta|^4 \right\} + \frac{1}{8\pi}\int d\mathbf{r} (\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{H}_0)^2, \quad (1)$$

где $\mathbf{H}_0$ — внешнее магнитное поле, $\nu = mp_F/2\pi^2$ — плотность состояний на поверхности Ферми, Δ — параметр порядка, $\partial_- = \partial/\partial\mathbf{r} - 2ie\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, D — эффективный коэффициент диффузии, ζ — дзета-функция Римана. Уравнения Гинзбурга–Ландау могут быть получены варьированием функционала (1) по параметрам $\{\Delta, \Delta^*, \mathbf{A}\}$. Вторая вариация функционала (1) по этим переменным приводит к возникновению самосопряженного оператора $\hat{L}$:

* E-mail: ovc@itp.ac.ru

** I. M. Sigal

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -\tau - \dfrac{\pi D}{8T}\partial_-^2 + \dfrac{7\zeta(3)|\Delta|^2}{4\pi^2T^2}; & \dfrac{7\zeta(3)\Delta^2}{8\pi^2T^2}; & \dfrac{i\pi eD}{4T}\left[2(\partial_-\Delta) + \Delta\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right] \\ \dfrac{7\zeta(3)(\Delta^*)^2}{8\pi^2T^2}; & -\tau - \dfrac{\pi D}{8T}\partial_+^2 + \dfrac{7\zeta(3)|\Delta|^2}{4\pi^2T^2}; & -\dfrac{i\pi eD}{4T}\left[2(\partial_+\Delta^*) + \Delta^*\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right] \\ -\dfrac{i\pi eD}{4T}[(\partial_+\Delta^*) - \Delta^*\partial_-]; & \dfrac{i\pi eD}{4T}[(\partial_-\Delta) - \Delta\partial_+]; & \dfrac{1}{4\pi\nu}\operatorname{rot}\operatorname{rot} + \dfrac{\pi e^2 D}{T}|\Delta|^2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Оператор $\hat{L}$ обладает нулевой калибровочной модой

$$(\Delta; -\Delta^*; \mathbf{k}/2e)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}).$$

Вектор $\mathbf{k}$ лежит в плоскости xy, перпендикулярной направлению магнитного поля $\mathbf{H}_0$. Кроме того, оператор $\hat{L}$ имеет нулевые сдвиговые моды

$$((\mathbf{u}\partial_-\Delta); (\mathbf{u}\partial_+\Delta^*); [\mathbf{H}\times\mathbf{u}]),$$

где $\mathbf{u}$ — двумерный вектор сдвига в плоскости xy. Наличие нулевых мод при $\mathbf{k} = 0$ приводит к появлению возбуждений с энергией $\mathcal{E}(\mathbf{k})$, пропорциональной $\mathbf{k}^2$ при $\mathbf{k}\to 0$. Эти моды можно искать в виде

$$\psi = \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \times \times \{\mathbf{u}\partial_-\Delta + \chi_1,\ \mathbf{u}\partial_+\Delta^* + \chi_2,\ [\mathbf{H}\times\mathbf{u}] + \mathbf{A}_1\}. \quad (3)$$

Используя выражение (3) для собственной функции ψ и формулу (2) для оператора $\hat{L}$, получим

$$\hat{L}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \mathbf{A}_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\pi D}{8T}\mathbf{k}^2(\mathbf{u}\partial_-\Delta + \chi_1) - \dfrac{i\pi D}{4T}(\mathbf{k}\partial_-)((\mathbf{u}\partial_-\Delta) + \chi_1) - \dfrac{\pi eD}{4T}\Delta\mathbf{k}\cdot([\mathbf{H}\times\mathbf{u}] + \mathbf{A}_1) \\ \dfrac{\pi D}{8T}\mathbf{k}^2(\mathbf{u}\partial_+\Delta^* + \chi_2) - \dfrac{i\pi D}{4T}(\mathbf{k}\partial_+)((\mathbf{u}\partial_+\Delta^* + \chi_2) + \dfrac{\pi eD}{4T}\Delta^*\mathbf{k}\cdot([\mathbf{H}\times\mathbf{u}] + \mathbf{A}_1) \\ \dfrac{\pi eD}{4T}\mathbf{k}(\Delta\chi_2 - \Delta^*\chi_1) + \dfrac{1}{4\pi\nu}\left(\mathbf{k}^2\mathbf{A}_1 - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{A}_1) + i\mathbf{k}\operatorname{div}\mathbf{A}_1 + i\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{k}\mathbf{A}_1) - 2i\left(\mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{A}_1\right) + \mathbf{z} \end{pmatrix} = \\ = \mathcal{E}(\mathbf{k})\begin{pmatrix}\mathbf{u}\partial_-\Delta + \chi_1\\ \mathbf{u}\partial_+\Delta^* + \chi_2\\ [\mathbf{H}\times\mathbf{u}] + \mathbf{A}_1\end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{z} = \frac{1}{4\pi\nu}\left\{\mathbf{k}^2[\mathbf{H}\times\mathbf{u}] - \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]) + + i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]) - 2i\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]\right\} + i\mathbf{k}\left\{\frac{i\pi eD}{4T}(\Delta^*(\mathbf{u}\partial_-\Delta) - \Delta(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)) + + \frac{1}{4\pi\nu}\operatorname{div}[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]\right\}. \quad (5)$$

Последний член в формуле (5) равен нулю в силу уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 4\pi\mathbf{j},$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока.

При малых значениях $\mathbf{k}$ систему уравнений (4) можно решить по теории возмущений. Для этого положим

$$\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \mathbf{A}_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\chi_1^{(1)}\\ \chi_2^{(1)}\\ \mathbf{A}_1^{(1)}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\chi_1^{(2)}\\ \chi_2^{(2)}\\ \mathbf{A}_1^{(2)}\end{pmatrix} + \ldots \quad (6)$$

В линейном приближении по параметру k находим

$$\hat{L}\begin{pmatrix}\chi_1^{(1)}\\ \chi_2^{(1)}\\ \mathbf{A}_1^{(1)}\end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} -\dfrac{i\pi D}{4T}(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta) - \dfrac{\pi eD}{4T}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]) \\ -\dfrac{i\pi D}{4T}(\mathbf{k}\partial_+)(\mathbf{k}\partial_+\Delta^*) + \dfrac{\pi eD}{4T}\Delta^*(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]) \\ \dfrac{i}{4\pi\nu}\left(\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]) - 2\left(\mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]\right) \end{pmatrix} = 0. \quad (7)$$

Оператор $\hat{L}$ имеет нулевую моду $(\Delta; -\Delta^*; 0)$, приводящую к условию разрешимости системы уравнений (7):

$$
-\frac{\pi e D}{2T}\langle|\Delta|^2(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}])\rangle+
+\frac{i\pi D}{4T}\langle(\Delta\mathbf{k}\partial_+)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)-
-\Delta^*(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta)\rangle=0. \quad (8)
$$

Ниже будем предполагать также выполненным условие ортогональности поправки первого порядка к нулевой моде $(\Delta;-\Delta^*;0)$:

$$
\langle\chi_1^{(1)}\Delta^*\rangle-\langle\chi_2^{(1)}\Delta\rangle=0. \quad (9)
$$

Используя уравнения (4), (7), находим уравнения второго приближения:

$$
\hat{L}\begin{pmatrix}\chi_1^{(2)}\\ \chi_2^{(2)}\\ \mathbf{A}_1^{(2)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\pi D}{8T}\mathbf{k}^2(\mathbf{u}\partial_-\Delta)-\frac{i\pi D}{4T}(\mathbf{k}\partial_-)\chi_1^{(1)}-\frac{\pi e D}{4T}\Delta(\mathbf{A}_1^{(1)}\mathbf{k})\\ \frac{\pi D}{8T}\mathbf{k}^2(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)-\frac{i\pi D}{4T}(\mathbf{k}\partial_+)\chi_2^{(1)}+\frac{\pi e D}{4T}(\mathbf{A}_1^{(1)}\mathbf{k})\\ \frac{\pi e D}{4T}\mathbf{k}(\Delta\chi_2^{(1)}-\Delta^*\chi_1^{(1)})+\frac{1}{4\pi\nu}(\mathbf{k}^2[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]-\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]))+\mathbf{z}^{(1)}\end{pmatrix}=\mathcal{E}(\mathbf{k})\begin{pmatrix}\mathbf{u}\partial_-\Delta\\ \mathbf{u}\partial_+\Delta^*\\ \mathbf{H}\times\mathbf{u}\end{pmatrix}, \quad (10)
$$

где

$$
\mathbf{z}^{(1)}=\frac{1}{4\pi\nu}\left(i\mathbf{k}\operatorname{div}\mathbf{A}_1^{(1)}+i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\mathbf{k}\mathbf{A}_1^{(1)}\right)-
-2i\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{A}_1^{(1)}\right). \quad (11)
$$

Условие разрешимости уравнения (10) определяет спектр $\mathcal{E}(\mathbf{k})$:

$$
\mathcal{E}\{\mathbf{u}^2\langle\mathbf{H}^2\rangle+2\langle(\mathbf{u}\partial_-\Delta)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)\rangle\}=
=\frac{\pi D}{4T}\mathbf{k}^2\langle(\mathbf{u}\partial_-\Delta)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)\rangle+
+\frac{i\pi D}{4T}\left\{\langle\chi_1^{(1)}(\mathbf{k}\partial_+)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)+\chi_2^{(1)}(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta)\right\}+
+\frac{i}{4\pi\nu}\langle(\mathbf{k}\mathbf{A}_1)(\mathbf{u}\operatorname{rot}\mathbf{H})\rangle+\Big\langle[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]\times
\times\left\{\frac{\pi e D}{4T}\mathbf{k}\left(\Delta\chi_2^{(1)}-\Delta^*\chi_1^{(1)}\right)+
+\frac{1}{4\pi\nu}\left[i\mathbf{k}\operatorname{div}\mathbf{A}_1^{(1)}+i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\mathbf{k}\mathbf{A}_1^{(1)}\right)-2i\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{A}_1^{(1)}\right]+
+\frac{1}{4\pi\nu}\left(\mathbf{k}^2[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]-\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}])\right)\right\}\Big\rangle. \quad (12)
$$

Для получения явного вида функции $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ необходимо решить систему уравнений (3) и найти функции $\left\{\chi_1^{(1)},\chi_2^{(1)},\mathbf{A}_1^{(1)}\right\}$. Запишем для этого решение уравнения Гинзбурга–Ландау для функций $\{\Delta,\mathbf{A}\}$ в виде ряда по степеням малого параметра $1-B/H_{c2}$ [4]:

$$
\Delta=\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2+\ldots,
\mathbf{A}=(0,Bx,0)+\mathbf{A}^{(1)}+\ldots, \quad (13)
$$

где B — магнитная индукция в сверхпроводнике, H_{c2} — второе критическое поле,

$$
\Delta_0=\sum_{N=-\infty}^{\infty}C_N\exp(2ieB(Nx_1-x_0)y)D_0(z_N);
z_N=2\sqrt{eB}(x+x_0-Nx_1), \quad (14)
$$

численные коэффициенты $\{C_N,x_1\}$ зависят от типа решетки, x_0 — свободный параметр. Поправочные члены $\{\Delta_1,\Delta_2,\ldots\}$ выражаются через функции $\Delta_0^{(M)}$, равные

$$
\Delta_0^{(M)}=\sum_{N=-\infty}^{\infty}C_N\times
\times\exp(2ieB(Nx_1-x_0))D_M(z_N),
M=1,2,3,\ldots, \quad (15)
$$

где $D_M(z)$ — функции параболического цилиндра [5], по формуле

$$
\Delta_1=\alpha_2\Delta_0^{(2)}+\alpha_4\Delta_0^{(4)}+\ldots \quad (16)
$$

Определим ортогональный базис

$$
\Delta,\theta^{(1)},\theta^{(2)},\ldots \quad (17)
$$

С учетом первых поправочных членов функции $\theta^{(M)}$ можно выбрать в виде

$$
\theta^{(1)}=\Delta_0^{(1)},\quad\theta^{(2)}=\Delta_0^{(2)}-2\alpha_2^*\Delta_0,
\theta^{(4)}=\Delta_0^{(4)}-24\alpha_4^*\Delta_0,\ldots \quad (18)
$$

С учетом формулы (9) ищем функции $\left\{\chi_1^{(1)},\chi_2^{(1)}\right\}$ с точностью до членов второго порядка по параметру $1-B/H_{c2}$ в виде

$$
\chi_1^{(1)}=\gamma_1\Delta+\mu_1\theta^{(2)},\quad\chi_2^{(1)}=\gamma_1\Delta^*+\mu_1^{(1)}(\theta^{(2)})^*, \quad (19)
$$

где γ_1 — численный коэффициент.

Приведем несколько соотношений, важных для рассмотрения. Используя формулы (14), (15), находим

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{k}\partial_-^{(0)})(\mathbf{u}\partial_-^{(0)})\Delta_0 = \\
&\quad = (-eB(\mathbf{uk}) + ie\mathbf{k}\cdot[\mathbf{B}\times\mathbf{u}])\Delta_0 + \\
&\quad + eB(\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y)(\mathbf{k}_x + i\mathbf{k}_y)\Delta_0^{(2)}, \\
&(\mathbf{k}\partial_-^{(0)})(\mathbf{u}\partial_-^{(0)})\Delta_0^{(2)} = \\
&\quad = 2eB(\mathbf{k}_x - i\mathbf{k}_y)(\mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y)\Delta_0 + \\
&\quad + (-5eB(\mathbf{ku}) + ie\mathbf{k}\cdot[\mathbf{B}\times\mathbf{u}])\Delta_0^{(2)} + \\
&\quad + eB(\mathbf{k}_x + i\mathbf{k}_y)(\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y)\Delta_0^{(4)}, \\
&(\mathbf{u}\partial_-^{(0)})\Delta_0 = -\sqrt{eB}(\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y)\Delta_0^{(1)}, \\
&\mathbf{k}\cdot[\mathbf{B}\times\mathbf{u}] = -B(\mathbf{k}_x\mathbf{u}_y - \mathbf{k}_y\mathbf{u}_x).
\end{aligned} \tag{20}$$

Используя формулы (20), находим с точностью до членов второго порядка по параметру $1 - B/H_{c2}$ равенство

$$\begin{aligned}
&\langle\Delta(\mathbf{k}\partial_+)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)\rangle - \langle\Delta^*(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta)\rangle = \\
&\quad = -2ie\mathbf{k}\cdot[\mathbf{B}\times\mathbf{u}]\langle|\Delta_0|^2\rangle + \\
&\quad + 2ie\left\{\left\langle(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{k})\left(\mathbf{u}\frac{\partial|\Delta_0|^2}{\partial\mathbf{r}}\right)\right\rangle - \right. \\
&\quad \left. - \left\langle(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{u})\left(\mathbf{k}\frac{\partial|\Delta_0|^2}{\partial\mathbf{r}}\right)\right\rangle\right\}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
&\left\langle(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{k})\left(\mathbf{u}\frac{\partial|\Delta_0|^2}{\partial\mathbf{r}}\right)\right\rangle - \left\langle(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{u})\left(\mathbf{k}\frac{\partial|\Delta_0|^2}{\partial\mathbf{r}}\right)\right\rangle = \\
&\quad = \langle(|\Delta_0|^2 - \langle|\Delta_0|^2\rangle)([\mathbf{k}\times\mathbf{u}]\operatorname{rot}\mathbf{A}^{(1)})\rangle,
\end{aligned} \tag{22}$$

условие разрешимости (8) автоматически выполняется с точностью до членов второго порядка по параметру $1-B/H_{c2}$. В результате при решении системы уравнений (7) возникает свободный параметр — угол между векторами $\{\mathbf{k}, \mathbf{u}\}$. Он может быть найден из условия экстремума энергии $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ по этому параметру.

Из системы уравнений (7) находим три уравнения для величин $\left\{\gamma_1, \mu_1, \mu_1^{(1)}\right\}$ и уравнение для векторного потенциала $\mathbf{A}_1$. Уравнение для величины γ_1 есть

$$\begin{aligned}
&\frac{7\zeta(3)\langle|\Delta_0|^4\rangle}{2\pi^2T^2}\gamma_1 + \frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\langle\mu_1\theta^{(2)}|\Delta_0|^2\Delta_0^* + \\
&\quad + \mu_1^{(1)}(\theta^{(2)})^*|\Delta_0|^2\Delta_0\rangle = \frac{1}{2\pi\nu}\langle\operatorname{rot}\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{H}\rangle + \\
&+ \frac{i\pi D}{4T}\langle\Delta^*(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta) + \Delta(\mathbf{k}\partial_+)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)\rangle.
\end{aligned} \tag{23}$$

В уравнении (23) $\mathbf{H}$ — магнитное поле в сверхпроводнике,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}) = (0, 0, H), \\
&H = B - \frac{\pi^2 e\nu D}{T}(|\Delta_0|^2 - \langle|\Delta_0|^2\rangle).
\end{aligned} \tag{24}$$

Величины $\left\{\mu_1, \mu_1^{(1)}\right\}$ находятся из уравнений

$$\begin{aligned}
&\gamma_1\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\langle\Delta|\Delta|^2(\theta^{(2)})^*\rangle + \\
&+ \left\langle(\theta^{(2)})^*\left[\left(-\tau - \frac{\pi D}{8T}\partial_-^2 + \frac{7\zeta(3)|\Delta|^2}{4\pi^2T^2}\right)\times\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\times\,\mu_1\theta^{(2)} + \frac{7\zeta(3)\Delta^2}{8\pi^2T^2}\mu_1^{(1)}(\theta^{(2)})^*\right]\right\rangle = \\
&= -\frac{i\pi eD}{4T}\langle(\theta^{(2)})^*(\mathbf{A}_1\partial_-\Delta) - \mathbf{A}_1\Delta\partial_+(\theta^{(2)})^*\rangle + \\
&\quad + \frac{i\pi D}{4T}\langle(\theta^{(2)})^*(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta)\rangle + \\
&\quad + \frac{\pi eD}{4T}\langle(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}])\Delta(\theta^{(2)})^*\rangle, \\
&\gamma_1\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\langle\Delta^*|\Delta|^2\theta^{(2)}\rangle + \\
&+ \left\langle\theta^{(2)}\left[\left(-\tau - \frac{\pi D}{8T}\partial_+^2 + \frac{7\zeta(3)|\Delta|^2}{4\pi^2T^2}\right)\times\right.\right. \\
&\left.\left.\times\,\mu_1^{(1)}(\theta^{(2)})^* + \frac{7\zeta(3)(\Delta^*)^2}{8\pi^2T^2}\mu_1\theta^{(2)}\right]\right\rangle = \\
&\quad = \frac{i\pi eD}{4T}\langle(\mathbf{A}_1\partial_+\Delta^*)\theta^{(2)} - (\mathbf{A}_1\Delta^*\partial_-\theta^{(2)})\rangle + \\
&\quad + \frac{i\pi D}{4T}\langle\theta^{(2)}(\mathbf{k}\partial_+)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*)\rangle - \\
&\quad - \frac{\pi eD}{4T}\langle(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}])\Delta^*\theta^{(2)}\rangle.
\end{aligned} \tag{25}$$

Векторный потенциал $\mathbf{A}_1$ есть решение уравнения

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}_1 + \frac{4\pi^2e^2\nu D}{T}|\Delta|^2\mathbf{A}_1 = \\
&= 2\gamma_1\operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{i\pi^2e\nu D}{T}\left\{\mu_1(\theta^{(2)}\partial_+\Delta^* - \Delta^*\partial_-\theta^{(2)}) - \right. \\
&\quad \left. - \mu_1^{(1)}((\theta^{(2)})^*\partial_-\Delta - \Delta\partial_+(\theta^{(2)})^*)\right\} - \\
&\quad - i\left\{\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]) - 2\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]\right\}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Покажем, что правая часть уравнения (26) пропорциональна величине $\operatorname{rot}(0, 0, H)$ в главном приближении по параметру $(1-B/H_{c2})$. Используя формулы (14), (15), находим

$$\begin{gathered}\partial_-^{(0)}\Delta_0 = -\sqrt{eB}(1;i)\Delta_0^{(1)},\\ \partial_-^{(0)}\Delta_0^{(2)} = 2\sqrt{eB}(1;-i)\Delta_0^{(1)} - \sqrt{eB}(1;i)\Delta_0^{(3)},\\ \Delta_0^{(2)}\partial_+^{(0)}\Delta_0^* - \Delta_0^*\partial_-^{(0)}\Delta_0^{(2)} =\\ = i\,\mathrm{rot}(0,0,\Delta_0^*\Delta_0^{(2)}) - 4\sqrt{eB}(1;-i)\Delta_0^*\Delta_0^{(1)}.\end{gathered} \tag{27}$$

В главном приближении по параметру $1-B/H_{c2}$ из уравнений (25) находим значения величин $\left\{\mu_1, \mu_1^{(1)}\right\}$:

$$\begin{gathered}\mu_1 = \frac{i}{4}ku\exp(i(2\phi+\eta)),\\ \mu_1^{(1)} = \frac{i}{4}ku\exp(-i(2\phi+\eta)),\end{gathered} \tag{28}$$

где η — угол между векторами $\{\mathbf{k}, \mathbf{u}\}$,

$$\begin{gathered}\mathbf{k} = k(\cos\phi; \sin\phi),\\ \mathbf{u} = u(\cos(\phi+\eta); \sin(\phi+\eta)).\end{gathered} \tag{29}$$

Простые вычисления приводят к следующему значению последнего члена в формуле (26):

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}]) - 2\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)[\mathbf{H}\times\mathbf{u}] =\\ = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{k})\,\mathrm{rot}(0,0,H) + \frac{\pi^2 e\nu D}{T}\times\\ \times\sqrt{eB}\,ku\big(-i\Delta_0^*\Delta_0^{(1)}\exp(i(2\phi+\eta)) +\\ + i\Delta_0(\Delta_0^{(1)})^*\exp(-i(2\phi+\eta));\\ - \Delta_0^*\Delta_0^{(1)}\exp(i(2\phi+\eta)) -\\ - \Delta_0(\Delta_0^{(1)})^*\exp(-i(2\phi+\eta))\big).\end{gathered} \tag{30}$$

Используя формулы (27)–(30), приведем уравнение (26) для векторного потенциала $\mathbf{A}_1$ к виду

$$\begin{gathered}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}_1 + \frac{4\pi^2 e^2\nu D}{T}|\Delta|^2\mathbf{A}_1 =\\ = 2\gamma_1\,\mathrm{rot}(0,0,H) - i(\mathbf{u}\cdot\mathbf{k})\,\mathrm{rot}(0,0,H) -\\ - \frac{i\pi^2 e\nu D}{4T}ku\big\{\exp(i(2\phi+\eta))\,\mathrm{rot}(0,0,\Delta_0^*\Delta_0^{(2)}) +\\ + \exp(-i(2\phi+\eta))\,\mathrm{rot}(0,0,\Delta_0(\Delta_0^{(2)})^*)\big\}.\end{gathered} \tag{31}$$

Ключевой величиной является последний член в уравнении (23) для величины γ_1. Используя формулы (20), находим его значение:

$$\begin{gathered}\langle\Delta^*(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta)\rangle + \langle\Delta(\mathbf{k}\partial_+)(\mathbf{u}\partial_+\Delta^*) =\\ = -2eB(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u})\langle|\Delta_0|^2\rangle +\\ + 4eB\langle|\Delta_0|^2\rangle[(\alpha_2+\alpha_2^*)(u_xk_x - u_yk_y) -\\ - i(\alpha_2-\alpha_2^*)(u_xk_y + k_xu_y)] + \frac{2T}{\pi^2\nu D}\times\\ \times\left\langle(H-B)\left\{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u})(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}^{(1)})_z + \right.\right.\\ + \left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial y}\right)(k_xu_y + k_yu_x) +\\ \left.\left. + \left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x}\right)(k_yu_y - k_xu_x)\right\}\right\rangle.\end{gathered} \tag{32}$$

Из уравнений (23), (25), (31), (32) следует, что существуют две ветви спектра $\mathcal{E}(\mathbf{k})$. Одна из них соответствует «продольной» поляризации с углом η между векторами $\{\mathbf{k}, \mathbf{u}\}$, близким к значению $(0,\pi)$, другая — «поперечной» поляризации с углом η, близким к значению $(\pm\pi/2)$. Поперечная ветвь является «мягкой» с энергией, пропорциональной $\langle|\Delta_0|^4\rangle$. Из формулы (23) следует, что величина $\partial\gamma_1/\partial\eta$ велика в поперечной моде. По этой причине она легко находится и оказывается равной

$$\begin{gathered}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\eta} = \frac{ikuBT\sin\eta}{2\pi^2 e\nu D\langle|\Delta_0|^2\rangle}\,\frac{1}{\beta_A(\kappa^2-1)+1},\\ \kappa = \frac{1}{\pi^2 eD}\sqrt{\frac{7\zeta(3)}{2\pi\nu}}.\end{gathered} \tag{33}$$

Величина угла η определяется из уравнения

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\eta} = 0. \tag{34}$$

Используя уравнение (12) для величины $\mathcal{E}(\mathbf{k})$, приведем формулу (34) к виду

$$\begin{gathered}\frac{i\pi D}{4T}\left\{\frac{\partial\gamma_1}{\partial\eta}\left[-2eB\langle|\Delta_0|^2\rangle\cos\eta + \right.\right.\\ + 4eB\langle|\Delta_0|^2\rangle((\alpha_2+\alpha_2^*)\cos(2\phi+\eta) -\\ - i(\alpha_2-\alpha_2^*)\sin(2\phi+\eta)) + \frac{2T}{\pi^2\nu D}\left\langle(H-B)\times\right.\\ \times\left(-\cos(2\phi+\eta)\left(\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y}\right) + \right.\\ \left.\left.\left. + \sin(2\phi+\eta)\left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial y}\right)\right)\right\rangle\right] +\\ \left. + 2eB\gamma_1\langle|\Delta_0|^2\rangle\sin\eta\right\} - B^2\frac{ku}{4\pi\nu}\sin(2\eta) = 0.\end{gathered} \tag{35}$$

В главном приближении по параметру $1-B/H_{c2}$ величины $\left\{\mu_1, \mu_1^{(1)}\right\}$ определяются формулой (28). Подставляя их значения в формулу (23), получим следующее уравнение для величины γ_1 в поперечной моде:

$$\frac{7\zeta(3)(\langle\Delta_0|\rangle)^2}{2\pi^2T^2\kappa^2}(\beta_A(\kappa^2-1)+1)\gamma_1 = -i\frac{7\zeta(3)ku}{16\pi^2T^2}\left(1-\frac{1}{\kappa^2}\right)\langle|\Delta_0|^2(\Delta_0^*\Delta_0^{(2)}\exp(i(2\phi+\eta))+$$
$$+\Delta_0(\Delta_0^{(2)})^*\exp(-i(2\phi+\eta))\rangle + \frac{i\pi D}{4T}\Bigg\{-2eB(\mathbf{u}\cdot\mathbf{k})\langle|\Delta_0|^2\rangle + uk\Bigg[4eB\langle|\Delta_0|^2\rangle\times$$
$$\times((\alpha_2+\alpha_2^*)\cos(2\phi+\eta)-i(\alpha_2-\alpha_2^*)\sin(2\phi+\eta)) + \frac{2T}{\pi^2\nu D}\left\langle(H-B)\left(\sin(2\phi+\eta)\left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial y}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\cos(2\phi+\eta)\left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x}\right)\right)\right\rangle\Bigg]\Bigg\}. \quad (36)$$

Используя уравнения (33), (36), получим из уравнения (35) значение параметра

$$\cos\eta = \left(1-\frac{1}{\kappa^2}\right)\frac{7\zeta(3)\langle|\Delta_0|^2((\Delta_0)^*\Delta_0^{(2)}\exp(i(2\phi+\eta))+\Delta_0(\Delta_0^{(2)})^*\exp(-i(2\phi+\eta)))\rangle}{16\pi^3eBDT\langle|\Delta_0|^2\rangle(\beta_A(\kappa^2-1)+1)}. \quad (37)$$

Для завершения вычисления спектра $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ необходимо найти значения коэффициентов $\left\{\mu_1, \mu_1^{(1)}\right\}$ с точностью до членов первого порядка по параметру $1-B/H_{c2}$. Возникающие при этом формулы оказываются довольно громоздкими. По этой причине мы приведем их в Приложении (уравнения (43)–(47)).

3. ТРЕУГОЛЬНАЯ РЕШЕТКА ($\varphi = \pi/3$)

Приведенные выше формулы позволяют найти спектр возбуждений поперечной моды при произвольном значении угла φ между векторами элементарной ячейки. Общие выражения существенно упрощаются для квадратной ($\varphi=\pi/2$) и в особенности для треугольной ($\varphi=\pi/3$) решеток. При этих углах многие структурные константы обращаются в нуль, а также существуют точные соотношения, приводящие в $\mathbf{k}^2$-приближении к изотропному спектру в треугольной решетке и к существованию оси четвертого порядка в квадратной решетке. В этой работе мы приведем без вывода все связи между структурными константами и их значения для треугольной решетки.

Прежде всего находим при $\varphi = \pi/3$ значения простейших структурных блоков:

$$\begin{gathered}\langle|\Delta_0|^4\rangle = \beta_A\langle|\Delta_0|^2\rangle^2, \quad \beta_A = 1.159595,\\ \langle|\Delta_0|^2\Delta_0^*\Delta_0^{(2)}\rangle = S_1\langle|\Delta_0|^2\rangle^2, \quad S_1=0,\\ \langle|\Delta_0|^2|\Delta_0^{(2)}|^2\rangle = S_2\langle|\Delta_0|^2\rangle^2, \quad S_2 = 2.112642,\\ \langle(\Delta_0^*)^2(\Delta_0^{(2)})^2\rangle = S_3\langle|\Delta_0|^2\rangle^2, \quad S_3=0.\end{gathered} \quad (38)$$

Для блоков, в которые входят векторные потенциалы $\left\{\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}_1\right\}$, находим следующие значения:

$$\langle(A_x^{(1)}-iA_y^{(1)})(\Delta_0^{(3)})^*\Delta_0\rangle = \frac{i\pi^{5/2}e\nu Da}{2T}\langle|\Delta_0|^2\rangle F, \quad F=0;$$

$$\langle(A_x^{(1)}+iA_y^{(1)})(2(\Delta_0^{(1)})^*\Delta_0+(\Delta_0^{(2)})^*\Delta_0^{(1)})\rangle =$$
$$= \frac{i\pi^{3/2}e\nu Da}{T}\langle|\Delta_0|^2\rangle^2F_1, \quad F_1=0;$$

$$\left\langle|\Delta_0|^2\left(\sin(2\phi+\eta)\left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial y}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\cos(2\phi+\eta)\left(\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y}\right)\right)\right\rangle =$$
$$= \frac{\pi^2e\nu D}{T}\langle|\Delta_0|^2\rangle^2\cos(2\phi+\eta)F_2, \quad F_2=0;$$

$$\langle(\Delta_0^{(2)})^*((\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{k})(\mathbf{u}\partial_-^{(0)})\Delta_0+(\mathbf{k}\partial_-^{(0)})(\mathbf{u}\mathbf{A}^{(1)})\Delta_0)\rangle = \\ = \frac{iku\pi e\nu Da}{4T}\langle|\Delta_0|^2\rangle\sqrt{eB}\{F_3\exp(i(2\phi+\eta))+ \\ +(G_1\cos\phi+iG_2\sin\phi)\exp(i(\phi+\eta))+ \\ +(R_1\cos(\phi+\eta)+iR_2\sin(\phi+\eta))\exp(-i\phi)+ \\ +R_3\exp(-i(2\phi+\eta))\},$$

$$F_3=-1.05298,\quad G_1=G_2=0.9563497, \\ R_1=-R_2=-R_3=0.7172623;$$

$$\langle(\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{A}^{(1)}\partial_-^{(0)})\Delta_0\rangle = \frac{i\pi^{3/2}e\nu Da}{2T}\sqrt{eB}\langle|\Delta_0|^2\rangle^2F_6, \\ F_6=-0.8652635;$$

$$\left\langle|\Delta_0|^2\left(\sin(2\phi+\eta)\left(\frac{\partial A_1^{(x)}}{\partial x}-\frac{\partial A_1^{(y)}}{\partial y}\right)-\right.\right. \\ \left.\left.-\cos(2\phi+\eta)\left(\frac{\partial A_1^{(x)}}{\partial y}+\frac{\partial A_1^{(y)}}{\partial x}\right)\right)\right\rangle = \\ = \frac{2i\pi^2e\nu D}{T}\langle|\Delta_0|^2\rangle^2\{ku(F_4\sin^2(2\phi+\eta)+ \\ +G_4\cos^2(2\phi+\eta))+i\gamma_1\cos(2\phi+\eta)F_5\}, \\ F_5=0,\quad F_4=G_4=-0.0724747;$$

$$\langle(\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{A}_1\partial_-^{(0)})\Delta_0-\Delta_0(\mathbf{A}_1\partial_+^{(0)})(\Delta_0^{(2)})^*\rangle = \\ = \frac{\pi^{3/2}e\nu Da}{T}\sqrt{eB}\langle|\Delta_0|^2\rangle^2\{ku(\cos(2\phi+\eta)F_7+ \\ +i\sin(2\phi+\eta)F_8)+\gamma_1F_9\}, \\ F_7=F_8=-0.2217276,\quad F_9=0.$$

Здесь a — длина вектора элементарной ячейки: $eBa^2\sin\varphi=\pi$.

Подставляя значения структурных констант $\{S_1,F,F_1,F_2\}$ в треугольной решетке в формулы (36), (37) и (47) из Приложения, получим, что величины $\{\alpha_2,\cos\eta,\gamma_1\}$ обращаются в нуль в точке $\varphi=\pi/3$:

$$\alpha_2=0,\quad \cos\eta=0,\quad \gamma_1=0. \tag{39}$$

Величины $\left\{\delta\mu_1,\delta\mu_1^{(1)}\right\}$ входят в выражение для $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ лишь в одной комбинации, значение которой в треугольной решетке ($\varphi=\pi/3$) может быть получено с помощью формулы (45) из Приложения и численных значений структурных констант из разд. 3:

$$\delta\mu_1\exp(-i(2\phi+\eta))+\delta\mu_1^{(1)}\exp(i(2\phi+\eta)) = \\ = \frac{7i\zeta(3)\langle|\Delta_0|^2\rangle ku}{16\pi^3eBDT}\left\{\beta_A-S_2+\frac{1}{\kappa^2}\left[-(\beta_A-1)+\right.\right. \\ \left.\left.+\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}}\left(\frac{F_6}{2}-2F_7+\frac{F_3+G_1}{\sqrt{\pi}}\right)\right]\right\}. \tag{40}$$

Используя формулы (39), (40), приведем выражение (46) из Приложения для энергии $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ к простому виду:

$$\mathcal{E}(\mathbf{k})(\mathbf{B}^2+2eB\langle|\Delta_0|^2\rangle) = \frac{7\zeta(3)\mathbf{k}^2\langle|\Delta_0|^2\rangle^2}{32\pi^2T^2}\times \\ \times\left\{S_2-\beta_A-\frac{1}{\kappa^2}\left[3(\beta_A-1)+\right.\right. \\ \left.\left.+\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}}\left(\frac{F_6}{2}-2F_7+\frac{2}{\sqrt{\pi}}(F_3+G_1)\right)-8F_4\right]\right\}. \tag{41}$$

Подставляя в формулу (41) численные значения структурных констант из разд. 3, находим

$$\mathcal{E}(\mathbf{k})(\mathbf{B}^2+2eB\langle|\Delta_0|^2\rangle) = \frac{7\zeta(3)\mathbf{k}^2\langle|\Delta_0|^2\rangle^2}{32\pi^2T^2}\times \\ \times\left\{0.953047-\frac{1}{\kappa^2}0.9542565\right\}. \tag{42}$$

Из формулы (42) следует, что треугольная решетка Абрикосова неустойчива в области значений параметра $1<\kappa<1.000634$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что существует «мягкая» ветвь поперечных возбуждений треугольной решетки Абрикосова ($\varphi=\pi/3$), обладающих отрицательной энергией при значениях параметра Гинзбурга–Ландау κ, лежащих в области $1<\kappa<1.000634$. Это означает, что в этой области значений κ основное состояние не является состоянием с одним квантом потока в элементарной ячейке. По-видимому, при приближении параметра κ к единице число состояний с энергией $E<E_{Abr}$, $\varphi=\pi/3$ нарастает.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для вычисления величин $\left\{\mu_1,\mu_1^{(1)}\right\}$ и $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ воспользуемся соотношениями

$$\langle(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{u}])\Delta(\theta^{(2)})^*\rangle = \\ = \frac{\pi^2e\nu D}{T}ku\sin\eta\langle|\Delta_0|^2\Delta_0(\Delta_0^{(2)})^*\rangle,$$

$$
\begin{gathered}
\langle(\theta^{(2)})^*(\mathbf{k}\partial_-)(\mathbf{u}\partial_-\Delta)\rangle = 2eBku\exp(i(2\phi+\eta))\langle|\Delta_0|^2\rangle + 2ie\langle(\mathbf{u}\mathbf{A}^{(1)})\Delta_0(\mathbf{k}\partial_+^{(0)})(\Delta_0^{(2)})^* - \\
- (\mathbf{k}\mathbf{A}^{(1)})(\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{u}\partial_-^{(0)})\Delta_0\rangle, \\
\left\langle(\theta^{(2)})^*\left[-\tau - \frac{\pi D}{8T}\partial_-^2 + \frac{7\zeta(3)|\Delta|^2}{4\pi^2T^2}\right]\theta^{(2)}\right\rangle = \frac{2\pi eDB}{T}\langle|\Delta_0|^2\rangle - \frac{\pi eD}{2T}(H_{c2}-B)\langle|\Delta_0|^2\rangle + \\
+ \frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\langle|\Delta_0|^2|\Delta_0^{(2)}|^2\rangle + \frac{i\pi eD}{4T}\langle(\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{A}^{(1)}\partial_-^{(0)})\Delta_0^{(2)} - \Delta_0^{(2)}(\mathbf{A}^{(1)}\partial_+^{(0)})(\Delta_0^{(2)})^*\rangle, \\
\left\langle\theta^{(2)}\left[-\tau - \frac{\pi D}{8T}\partial_+^2 + \frac{7\zeta(3)|\Delta|^2}{4\pi^2T^2}\right](\theta^{(2)})^*\right\rangle = \frac{2\pi eBD\langle|\Delta_0|^2\rangle}{T} - \frac{\pi eD}{2T}(H_{c2}-B)\langle|\Delta_0|^2\rangle + \\
+ \frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\langle|\Delta_0|^2|\Delta_0^{(2)}|^2\rangle - \frac{i\pi eD}{4T}\langle\Delta_0^{(2)}(\mathbf{A}^{(1)}\partial_+^{(0)})(\Delta_0^{(2)})^* - (\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{A}^{(1)}\partial_-^{(0)})\Delta_0^{(2)}\rangle.
\end{gathered} \tag{43}
$$

Используя формулы (25), (43), находим значения коэффициентов $\left\{\mu_1, \mu_1^{(1)}\right\}$:

$$
\mu_1 = \frac{iuk}{4}\exp(i(2\phi+\eta)) + \delta\mu_1, \quad \mu_1^{(1)} = \frac{iuk}{4}\exp(-i(2\phi+\eta)) + \delta\mu_1^{(1)}, \tag{44}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\delta\mu_1 = \frac{T}{2\pi eBD\langle|\Delta_0|^2\rangle}\left\{\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\langle|\Delta_0|^2\Delta_0(\Delta_0^{(2)})^*\rangle\left(\frac{ku\sin\eta}{2\kappa^2} - \gamma_1\right) + \right. \\
+ \frac{i\pi eD}{8T}ku(H_{c2}-B)\langle|\Delta_0|^2\rangle\exp(i(2\phi+\eta)) - \frac{7i\zeta(3)}{16\pi^2T^2}ku\langle|\Delta_0|^2|\Delta_0^{(2)}|^2\rangle\exp(i(2\phi+\eta)) + \\
+ \frac{\pi eD}{16T}ku\langle(\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{A}^{(1)}\partial_-^{(0)})\Delta_0^{(2)} - \Delta_0^{(2)}(\mathbf{A}^{(1)}\partial_+^{(0)})(\Delta_0^{(2)})^*\rangle\exp(i(2\phi+\eta)) - \frac{7i\zeta(3)}{32\pi^2T^2}ku\langle(\Delta_0)^2((\Delta_0^{(2)})^*)^2 \times \\
\times\exp(-i(2\phi+\eta)) - \frac{i\pi eD}{4T}\langle(\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{A}_1\partial_-^{(0)})\Delta_0 - \Delta_0(\mathbf{A}_1\partial_+^{(0)})(\Delta_0^{(2)})^*\rangle - \frac{\pi eD}{2T}\langle(\mathbf{u}\mathbf{A}^{(1)})\Delta_0(\mathbf{k}\partial_+^{(0)})(\Delta_0^{(2)})^* - \\
\left. - (\mathbf{k}\mathbf{A}^{(1)})(\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{u}\partial_-^{(0)})\Delta_0\rangle\right\}, \\
\delta\mu_1^{(1)} = \frac{T}{2\pi eBD\langle|\Delta_0|^2\rangle}\left\{-\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\langle|\Delta_0|^2\Delta_0^*\Delta_0^{(2)}\rangle\left(\frac{ku\sin\eta}{2\kappa^2} + \gamma_1\right) + \right. \\
+ \frac{i\pi eD}{8T}(H_{c2}-B)uk\langle|\Delta_0|^2\rangle\exp(-i(2\phi+\eta)) - \frac{7i\zeta(3)ku}{32\pi^2T^2}\langle(\Delta_0^*)^2(\Delta_0^{(2)})^2\rangle\exp(i(2\phi+\eta)) - \\
- \frac{\pi eDku}{16T}\langle\Delta_0^{(2)}(\mathbf{A}^{(1)}\partial_+)(\Delta_0^{(2)})^* - (\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{A}^{(1)}\partial_-^{(0)})\Delta_0^{(2)}\rangle\exp(-i(2\phi+\eta)) - \\
- \frac{7i\zeta(3)ku}{16\pi^2T^2}\langle|\Delta_0|^2|\Delta_0^{(2)}|^2\rangle\exp(-i(2\phi+\eta)) + \frac{i\pi eD}{4T}\langle\Delta_0^{(2)}(\mathbf{A}_1\partial_+^{(0)})\Delta_0^* - \Delta_0^*(\mathbf{A}_1\partial_-^{(0)})\Delta_0^{(2)}\rangle + \\
\left. + \frac{\pi eD}{2T}\langle\Delta_0^*(\mathbf{u}\mathbf{A}^{(1)})(\mathbf{k}\partial_-^{(0)})\Delta_0^{(2)} - \Delta_0^{(2)}(\mathbf{k}\mathbf{A}^{(1)})(\mathbf{u}\partial_+^{(0)})\Delta_0^*\rangle\right\}.
\end{gathered} \tag{45}
$$

Используя формулы (13), (16), (19), (20), (32), (43), приведем выражение (12) для $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ в поперечной моде к виду

$$\mathcal{E}(\mathbf{k})(\mathbf{B}^2 + 2eB\langle|\Delta_0|^2\rangle) = \frac{\pi D}{4T}\mathbf{k}^2 \Bigg\{ -2eB\langle|\Delta_0|^2\rangle[(\alpha_2+\alpha_2^*)\cos(2(\phi+\eta)) - i(\alpha_2-\alpha_2^*)\sin(2(\phi+\eta))] -$$

$$-\frac{\pi^2 e^2 \nu D}{T}\langle|\Delta_0|^2\rangle^2(\beta_A - 1) + e\left\langle|\Delta_0|^2\left(\sin(2(\phi+\eta))\left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial y}\right) - \cos(2(\phi+\eta))\left(\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y}\right)\right)\right\rangle\Bigg\} +$$

$$+\frac{i\pi D}{4T}\frac{k}{u}\gamma_1\Bigg\{-2eB\cos\eta\langle|\Delta_0|^2\rangle + 4eB\langle|\Delta_0|^2\rangle[(\alpha_2+\alpha_2^*)\cos(2\phi+\eta) - i(\alpha_2-\alpha_2^*)\sin(2\phi+\eta)] -$$

$$-2e\left\langle|\Delta_0|^2\left(\sin(2\phi+\eta)\left(\frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial y}\right) - \cos(2\phi+\eta)\left(\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y}\right)\right)\right\rangle\Bigg\} +$$

$$+\frac{i\pi D}{4T}\frac{k}{u}\Big\{2eB\langle|\Delta_0|^2\rangle[\delta\mu_1^{(1)}\exp(i(2\phi+\eta)) + \delta\mu_1\exp(-i(2\phi+\eta))] + \frac{e}{2}\Big[\exp(-i(2\phi+\eta))\langle(\Delta_0^{(2)})^*(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{k})(\mathbf{u}\partial_-^{(0)}\Delta_0) +$$

$$+(\mathbf{k}\partial_-^{(0)})((\mathbf{u}\mathbf{A}^{(1)})\Delta_0)\rangle - \exp(i(2\phi+\eta))\langle\Delta_0^{(2)}(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{k})(\mathbf{u}\partial_+^{(0)})\Delta_0^* + \Big(\mathbf{k}\partial_+^{(0)}\Big)((\mathbf{u}\mathbf{A}^{(1)})\Delta_0^*)\rangle\Big]\Big\} -$$

$$-\frac{7i\zeta(3)\mathbf{k}^2}{32\pi^2T^2\kappa^2}\sin\eta\langle|\Delta_0|^2\big[\Delta_0^*\Delta_0^{(2)}\exp(i(2\phi+\eta)) - \Delta_0(\Delta_0^{(2)})^*\exp(-i(2\phi+\eta))\big]\rangle + \frac{\mathbf{B}^2\mathbf{k}^2}{4\pi\nu}\cos^2\eta - \frac{i\pi e D}{4T}\frac{k}{u}\times$$

$$\times\left\langle|\Delta_0|^2\left[\sin(2\phi+\eta)\left(\frac{\partial A_1^{(x)}}{\partial x} - \frac{\partial A_1^{(y)}}{\partial y}\right) - \cos(2\phi+\eta)\left(\frac{\partial A_1^{(x)}}{\partial y} + \frac{\partial A_1^{(y)}}{\partial x}\right)\right]\right\rangle. \quad (46)$$

Для завершения вычисления спектра нам необходимо найти величину α_2. Используя уравнение Гинзбурга–Ландау для параметра порядка Δ, находим величину α_2:

$$\frac{2\pi eBD}{T}\langle|\Delta_0|^2\rangle\alpha_2 = -\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2T^2}\langle|\Delta_0|^2(\Delta_0^{(2)})^*\Delta_0\rangle - \\ -\frac{i\pi eD}{4T}\sqrt{eB}\langle(A_x^{(1)} - iA_y^{(1)})\Delta_0(\Delta_0^{(3)})^*\rangle + \\ +\frac{i\pi eD}{4T}\sqrt{eB}\langle(A_x^{(1)} + iA_y^{(1)})(2\Delta_0(\Delta_0^{(1)})^* + \\ +\Delta_0^{(1)}(\Delta_0^{(2)})^*)\rangle. \quad (47)$$

Уравнение (47) завершает вычисление всех структурных блоков, входящих в выражения для величин $\{\alpha_2, \cos\eta, \gamma_1, \delta\mu_1, \delta\mu_2, \mathcal{E}(\mathbf{k})\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).
2. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **20**, 1064 (1950).
3. I. M. Sigal and T. Tzanetas, arXiv:1308.5446.
4. Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **144**, 552 (2013).
5. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1963).