ЖЭТФ, 2016, том 150, вып. 2 (8), стр. 229–237

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР ФОТОНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. М. Катков *

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 30 ноября 2015 г.

Поляризационный оператор фотона в постоянном и однородном магнитном поле исследуется при произвольных энергиях фотона: как выше, так и ниже порога рождения фотоном электрон-позитронной пары. В первом порядке по константе электромагнитного взаимодействия α получены выражения для показателя преломления фотона с определенной поляризацией как в слабых, так и в сильных полях по сравнению с критическим полем $H_0 = 4.41\cdot10^{13}$ Гс. Рассмотрены как чисто квантовая область энергий фотона, когда частицы пары рождаются на низших уровнях Ландау, так и область применимости квазиклассического приближения в случае заселения высоких уровней энергии. Получена общая спектрально-интегральная формула, в которой в явном аналитическом виде выделены расходящиеся пороговые члены.

DOI: 10.7868/S0044451016080034

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение процессов КЭД в сильных магнитных полях, близких и превышающих критическое поле $H_0 = m^2/e = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс (используется система единиц $\hbar = c = 1$) вызвано главным образом существованием таких полей в природе. Является общепризнанным, что магнитное поле нейтронных звезд (пульсаров) достигает значений $H \sim 10^{11}$–10^{13} Гс [1]. Такой интервал магнитных полей дает модель вращающегося магнитного диполя, когда пульсар теряет энергию посредством магнитного дипольного излучения. Предсказания указанной выше модели находятся в хорошем согласии с наблюдением излучения пульсаров в области радиочастот. В настоящее время известно несколько тысяч радиопульсаров. Другой класс нейтронных звезд, названных магнетарами [2], был открыт при наблюдении излучения в области рентгеновского и гамма-спектров. Здесь существующие модели дают значительно большую величину магнитного поля $H \sim 10^{14}$–10^{15} Гс. В этой связи представляет интерес описание движения фотона в полях как больших, так и меньших критического. Это движение сопровождается превращением фотона в пару заряженных частиц, когда его поперечный к магнитному полю импульс превышает пороговое значение $k_\perp > 2m$. Действительная часть показателя преломления фотона определяет дисперсионные свойства пространства, занятого магнитным полем. Если поле слабо меняется на характерной длине формирования процесса (эта длина много меньше масштаба неоднородности магнитного поля нейтронной звезды), расчет поляризационного оператора можно проводить в приближении постоянного поля H.

В 1971 г. Баталиным и Шабадом [3] впервые был получен поляризационный оператор фотона в постоянном электромагнитном поле произвольной конфигурации при помощи функции Грина, найденной Швингером [4]. В работе [3] была также выполнена диагонализация поляризационного оператора. В чисто магнитном поле подобные расчеты были проведены в 1974 г. Цаем [5] (см. также цитированную там литературу). В 1975 г. Шабад [6] провел анализ сингулярного поведения полярзационного оператора вблизи порогов рождения электрон-позитронных пар. В том же году Цаем и Эрбером [7] показатель преломления фотона исследовался в слабых полях при больших энергиях и в сильных полях при малых энергиях. Тогда же Байером, Катковым и Страховенко [8] в постоянном электромагнитном поле произвольной конфигурации был вычислен вклад петель заряженных частиц с n внешними фотонными линиями с использованием техники собственного времени Швингера [4]. При $n = 2$ в

* E-mail: V.M.Katkov@inp.nsk.su

работе [8] были даны выражения для вклада скалярных и спинорных частиц в поляризационный оператор фотона. Для вклада спинорных частиц полученные выражения согласуются с выведенными в [3], но имеют иную форму записи. В дальнейшем поляризационный оператор в магнитном поле исследовался в работах [9–11] (см. также цитируемую там литературу).

Настоящая работа посвящена систематическому анализу поляризационного оператора фотона на массовой поверхности ($k^2 = 0$, используется метрика $ab = a^0b^0 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$) при произвольных значениях энергии фотона и величины магнитного поля. Ограничением является только применимость теории возмущений по константе электромагнитного взаимодействия α. В сильных полях в выражениях для собственных значений поляризационного оператора κ_i ($i = 2, 3$) выделены интегралы, асимптотически расходящиеся для пороговых значений энергии фотона, которые вычисляются аналитически. В оставшихся интегралах контур интегрирования можно развернуть на мнимую полуось, так что они становятся действительными в явном виде. Эти интегралы хорошо сходятся, поскольку в подынтегральное выражение вместо осциллирующих функций входят экспоненциально убывающие функции. Данное обстоятельство весьма удобно и для анализа асимптотических выражений, и при численных вычислениях. С ростом энергии фотона используемая для низших порогов процедура выделения расходимостей может быть продолжена в область следующих более высоких порогов рождения пары. Однако, последовательным явилось создание в работе регулярного метода, позволяющего провести соответствующие вычисления поляризационного оператора в общем виде. Полученная спектрально-интегральная формула, в которой в явном аналитическом виде выделены расходящиеся пороговые члены, справедлива при произвольных энергиях фотона и напряженности магнитного поля. Следует отметить, что пороговое поведение поляризационного оператора, исследованное в настоящей работе, согласуется с анализом работы [6].

В связи с рассмотрением предельно больших полей $H \gg H_0$ необходимо упомянуть эффект сильного экранирования электрического поля магнитным, обусловленный линейным ростом по полю одного из собственных значений κ_i поляризационного оператора [12]. В работе [13] исследуется основное состояние водородоподобных атомов в таком поле. Модификация кулоновского потенциала в сильном магнитном поле рассматривалась также в [14]. Анализ, связанный со спектром атома водорода и процессами КЭД в таких условиях, проводился в работах [15, 16].

2. ОБЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО ОПЕРАТОРА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Проведенное нами исследование основано на общем виде выражения для вклада спинорных частиц в поляризационный оператор, который был впервые получен в диагональном виде в [3] (см. формулы (17) в той работе). Однако для удобства здесь используются формулы (3.19), (3.33) работы [8]. В чисто магнитном поле имеем в ковариантной форме

$$\Pi^{\mu\nu} = -\sum_{i=2,3}\kappa_i\beta_i^\mu\beta_i^\nu, \quad \beta_i\beta_j = -\,\delta_{ij}, \quad \beta_i k = 0; \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\beta_2^\mu = \frac{(F^*k)^\mu}{\sqrt{-(F^*k)^2}}, \quad \beta_3^\mu = \frac{(Fk)^\mu}{\sqrt{-(F^*k)^2}},\\ FF^* = 0, \quad F^2 = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2) > 0,\end{gathered} \tag{2}$$

где $F^{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, $F^{*\mu\nu}$ — дуальный тензор, k^μ — импульс фотона, $(Fk)^\mu = F^{\mu\nu}k_\nu$,

$$\kappa_i = \frac{\alpha}{\pi}m^2 r\int\limits_{-1}^{1}dv\int\limits_{0}^{\infty-i0}f_i(v,x)\exp[i\psi(v,x)]\,dx. \tag{3}$$

Здесь

$$\begin{aligned}f_2(v,x) &= 2\frac{\cos(vx)-\cos x}{\sin^3 x}-\frac{\cos(vx)}{\sin x}+v\frac{\cos x\sin(vx)}{\sin^2 x},\\ f_3(v,x) &= \frac{\cos(vx)}{\sin x}-v\frac{\cos x\sin(vx)}{\sin^2 x}-(1-v^2)\operatorname{ctg}x,\\ \psi(v,x) &= \frac{1}{\mu}\left\{2r\frac{\cos x-\cos(vx)}{\sin x}+[r(1-v^2)-1]x\right\};\end{aligned} \tag{4}$$

$$r = -\frac{(F^*k)^2}{2m^2F^2}, \quad \mu^2 = \frac{F^2}{2H_0^2}. \tag{5}$$

Действительная часть κ_i определяет показатель преломления фотона n_i с поляризацией $e_i = \beta_i$:

$$n_i = 1 - \frac{\operatorname{Re}\kappa_i}{2\omega^2}. \tag{6}$$

При $r > 1$ собственные значения поляризационного оператора содержат мнимую часть, которая определяет вероятность рождения электрон-позитронной пары фотоном с поляризацией β_i:

$$W_i = -\frac{1}{\omega}\operatorname{Im}\kappa_i. \tag{7}$$

При $r < 1$ контур интегрирования по x в формуле (3) можно развернуть на нижнюю полуось ($x \to -ix$), тогда значения κ_i становятся действительными в явном виде.

3. ОБЛАСТЬ СЛАБЫХ ПОЛЕЙ И НИЗКИХ ЭНЕРГИЙ, $\mu \ll 1$, $1 < r \ll 1/\mu^2$

Сместим контур интегрирования по x в (3) в нижнюю полуплоскость на величину x_0:

$$x_0(r) = -il(r), \quad l(r) = \ln\frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-1}. \tag{8}$$

В результате получим следующее выражение для κ_i:

$$\kappa_i = \kappa_i^a + \kappa_i^b, \quad \kappa_i^a = \frac{\alpha}{\pi}m^2 r a_i, \quad \kappa_i^b = \frac{\alpha}{\pi}m^2 r b_i, \tag{9}$$

где

$$a_i = -i\int\limits_{-1}^{1} dv \int\limits_{0}^{l(r)} dx\, f_i(v,-ix)\exp[i\psi(v,-ix)], \tag{10}$$

$$b_i = \int\limits_{-1}^{1} dv \int\limits_{0}^{\infty} dz\, f_i(v,z+x_0)\exp[i\psi(v,z+x_0)]. \tag{11}$$

Вклад в интеграл по x (10) дают малые значения $x \sim \mu$. Этот интеграл вычислим, разлагая по x функции, входящие в выражение для a_i. Учитывая, что в рассматриваемой области выполняется условие $r\mu^2 \ll 1$, оставим в показателе экспоненты только член $-x/\mu$ и распространим интеграл по x до ∞. После элементарного интегрирования по v имеем

$$\begin{gathered} a_2 = -\frac{16}{45}\mu^2, \quad a_3 = -\frac{28}{45}\mu^2, \\ \kappa_2^a = -\frac{4\alpha m^2\kappa^2}{45\pi}, \quad \kappa_3^a = -\frac{7\alpha m^2\kappa^2}{45\pi}, \\ \kappa^2 = -\frac{(Fk)^2}{H_0^2 m^2}. \end{gathered} \tag{12}$$

Вклад в интеграл (11) дают малые значения v. Разлагая по v функции, входящие в b_i, и распространяя пределы интегрирования по v до бесконечности, получаем после несложного интегрирования следующее выражение для b_i:

$$b_i = \sqrt{\mu\pi}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\int\limits_0^\infty \frac{dz f_i(0,x_0+z)}{\sqrt{\chi(x_0+z)}} \times \exp\left[-\frac{i}{\mu}\varphi(x_0+z)\right], \tag{13}$$

$$\begin{gathered} \varphi(x) = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + (1-r)x, \\ \chi(x) = rx\left(1-\frac{x}{\sin x}\right). \end{gathered} \tag{14}$$

Рассмотрим область энергий фотона $r-1 \ll 1$, когда движение родившихся частиц является нерелятивистским. В этой области

$$i\varphi(z+x_0) \simeq \beta(r) + (r-1)(1-e^{-iz}-iz), \tag{15}$$

$$\beta(r) = 2\sqrt{r} - (r-1)l(r), \tag{16}$$

$$\chi(x) \simeq z + x_0, \quad f_2(0,x) \simeq 0, \quad f_3(0,x) \simeq -i. \tag{17}$$

В припороговой области, где частицы рождаются на не слишком высоких уровнях Ландау, представим выражение (13) для b_3 в виде

$$b_3 = -i\sqrt{\mu\pi}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\exp\left[-\frac{\beta(r)}{\mu}-\gamma\right] \times \int\limits_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{x_0+z}}\sum_{n=0}^\infty \frac{\gamma^n}{n!}\exp[i(\gamma-n)z], \tag{18}$$

$$\gamma = (r-1)/\mu \sim 1. \tag{19}$$

Интеграл (18) имеет корневую расходимость при целых значениях параметра γ. При $|\gamma - m| \ll x_0^{-1}$, $z \sim |\gamma - m|^{-1} \gg x_0$ имеем

$$b_3 = -2i\sqrt{\mu\pi}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\exp\left[-\frac{\beta(r)}{\mu}-\gamma\right] \times \frac{\gamma^m}{m!}\int\limits_0^\infty dy\exp[i(\gamma-m)y^2] = -\pi\sqrt{\frac{\mu}{|\gamma-m|}} \times \exp\left[-\frac{\beta(r)}{\mu}-\gamma+i\frac{\pi}{2}\vartheta(\gamma-m)\right]\frac{m^m}{m!}, \tag{20}$$

где $\vartheta(z)$ — функция Хевисайда: $\vartheta(z) = 1$ при $z \ge 0$, $\vartheta(z) = 0$ при $z < 0$. Выражение для κ_3 с принятой точностью можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered} \kappa_3^b \simeq -\frac{\alpha m^2\mu}{\sqrt{|g|}}e^{-\zeta}\frac{(2\zeta)^m}{m!}\exp\left[i\frac{\pi}{2}\vartheta(g)\right], \\ g = r - 1 - m\mu, \quad \zeta = 2r/\mu. \end{gathered} \tag{21}$$

При $\gamma \gg 1$ вклад в интеграл (13) дают малые z, тогда

$$\begin{gathered} i\varphi(z+x_0) \simeq \beta(r) + (r-1)z^2/2, \\ i\chi(z+x_0) \simeq ix_0 = l(r); \end{gathered} \tag{22}$$

$$\kappa_3^b \simeq -i\frac{\alpha m^2\mu}{\sqrt{2(r-1)l(r)}}\exp\left(-\frac{\beta(r)}{\mu}\right). \tag{23}$$

В случае когда выполняется условие $\mu \ll r-1 \ll \ll \mu^{-2}$, в выражении (11) для b_i с самого начала можно провести разложение по v и z. В результате получим (см. [17], формула (B5))

$$\kappa_3^b \simeq -i\frac{\alpha m^2\mu\sqrt{r}}{\sqrt{\beta(r)(r-1)l(r)}}\exp\left(-\frac{\beta(r)}{\mu}\right), \qquad \kappa_2^b = \kappa_3^b\frac{r-1}{2r}. \tag{24}$$

4. ОБЛАСТЬ СЛАБЫХ ПОЛЕЙ И ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ, $\mu \ll 1$, $r \gtrsim 1/\mu^2$

Это область, которая входит в область стандартного квазиклассического приближения (СКП) (см., например, [17,18] и цитированную там литературу). Вклад в интеграл (3) дают малые значения x. Разлагая функции в (4) по x и проводя замену переменных $x = \mu t$, получаем

$$\kappa_i = \frac{\alpha m^2\kappa^2}{24\pi}\int\limits_0^1 \alpha_i(v)(1-v^2)\,dv \times \times\int\limits_0^\infty t\exp\left[-i\left(t+\xi\frac{t^3}{3}\right)\right]dt; \tag{25}$$

$$\alpha_2 = 3+v^2, \quad \alpha_3 = 2(3-v^2), \quad \sqrt{\xi} = \frac{\kappa(1-v^2)}{4}, \tag{26}$$

$$\kappa^2 = 4r\mu^2 = -\frac{(Fk)^2}{m^2H_0^2}. \tag{27}$$

Входящие в (25) интегралы по t выражаются через производные функций Эйри (мнимая часть) и Харди (действительная часть). Условия применимости позволяют нам сшить эту область с рассмотренной выше. При $\kappa \ll 1$ для действительной части эффективной массы κ_i имеем

$$\int\limits_0^\infty t\cos t\,dt = -1, \quad \int\limits_0^1 \alpha_2(1-v^2)\,dv = \frac{32}{15}, \qquad \int\limits_0^1 \alpha_3(1-v^2)\,dv = \frac{56}{15}. \tag{28}$$

Полученные выражения согласуются с формулой (12).

При вычислении мнимой части интеграла в (25) распространим пределы интегрирования по t до $-\infty$, ввиду четности подынтегральной функции, и воспользуемся методом стационарной фазы ($t_0 = = -i/\sqrt{\xi}$). В результате имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t\exp\left[-i\left(t+\xi\frac{t^3}{3}\right)\right]dt = = \frac{t_0}{2}\sqrt{\frac{\pi}{it_0\xi}}\exp\left[-i\left(t_0+\xi\frac{t_0^3}{3}\right)\right] = = -i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\xi^{-3/4}\exp\left(-\frac{2}{3\sqrt{\xi}}\right) = = -4i\sqrt{\pi}\kappa^{-3/2}\left(1-v^2\right)^{-3/2} \times \times\exp\left(-\frac{8}{3\kappa(1-v^2)}\right). \tag{29}$$

Подставляя полученное выражение в (25) и проводя интегрирование по v с учетом того, что вклад дают малые v, получаем

$$\kappa_2 = -i\sqrt{\frac{3}{32}}\alpha m^2\kappa\exp\left(-\frac{8}{3\kappa}\right), \quad \kappa_3 = 2\kappa_2. \tag{30}$$

При $\kappa \gg 1$ ($\xi \gg 1$) вклад в интеграл (25) дают малые значения t ($\xi t^3 \sim 1$), и в показателе экспоненты (25) можно опустить члены, линейные по t. Проведя после этого замену переменных

$$\xi t^3/3 = -ix, \quad t = \left(\frac{3x}{\xi}\right)^{1/3}\exp\left(\frac{-i\pi}{6}\right), \tag{31}$$

получим

$$\kappa_i = \frac{\alpha m^2\kappa^2}{24\pi}\int\limits_0^1 dv\,\alpha_i(v)(1-v^2)\frac{1}{3}\left(\frac{3}{\xi}\right)^{2/3} \times \times\exp\left(\frac{-i\pi}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right). \tag{32}$$

Интегрируя по v, имеем

$$\kappa_i = \frac{\alpha m^2(3\kappa)^{2/3}}{7\pi}\frac{\Gamma^3(2/3)}{\Gamma(1/3)}\left(1-i\sqrt{3}\right)\beta_i, \qquad \beta_2 = 2, \quad \beta_3 = 3. \tag{33}$$

5. СИЛЬНЫЕ ПОЛЯ, $\mu \gtrsim 1$

Рассмотрим область энергий фотона, верхняя граница которой находится немного выше порога r_{10}. На пороге r_{10} одна из частиц пары рождается на первом возбужденном уровне Ландау, а другая — на нижнем уровне. Выберем при этом нижнюю границу энергии несколько ниже порога рождения пары частиц в основном состоянии r_{00}. В общем случае пороговые значения параметра r_{lk} имеют следующий вид:

$$r_{lk} = (\varepsilon(l)+\varepsilon(k))^2/4m^2, \qquad \varepsilon(l) = \sqrt{m^2+2eHl} = m\sqrt{1+2\mu l}. \tag{34}$$

При $r < r_{10}$ контур интегрирования по x в (3) можно развернуть на нижнюю мнимую полуось для всех членов, кроме члена, содержащего в подынтегральном выражении для κ_3 функцию

$$\Phi(v,x) = -(1-v^2)\operatorname{ctg} x \exp[i\psi(v,x)].$$

Прибавим к $\Phi(v,x)$ и вычтем функцию

$$\begin{aligned}\Phi_{red}(v,x) &= i(1-v^2)\exp[i\psi_{red}(v,x)],\\ \psi_{red}(v,x) &= \frac{1}{\mu}\left\{2ri + [r(1-v^2)-1]x\right\}.\end{aligned} \tag{35}$$

Тогда в интеграле по x для суммы $\Phi(v,x)+\Phi_{red}(v,x)$ контур интегрирования по x можно развернуть на нижнюю полуось. Интеграл по x оставшейся функции имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^\infty \exp[i\psi_{red}(v,x)]\,dx =\\ &\qquad = \exp\left(-\frac{2r}{\mu}\right)\frac{i\mu}{r(1-v^2)-1+i0} =\\ &= \mu\exp\left(-\frac{2r}{\mu}\right)\left[i\frac{\mathcal{P}}{r-1-rv^2}+\pi\delta\left(r-1-rv^2\right)\right].\end{aligned} \tag{36}$$

Оператор $\mathcal{P}$ в (36) означает, что интеграл по v берется в смысле главного значения. Проводя интегрирование по v, имеем

$$\begin{aligned}&-ir\int\limits_{-1}^1 dv(1-v^2)\left[i\frac{\mathcal{P}}{r-1-rv^2}+\pi\delta\left(r-1-rv^2\right)\right] =\\ &= 2\left[1+\frac{1}{\sqrt{r(1-r)}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-r}{r}}\right]-\frac{i\pi}{\sqrt{r(r-1)}}.\end{aligned} \tag{37}$$

В результате выражения для κ_i приобретают следующий вид:

$$\kappa_2 = \alpha m^2\frac{r}{\pi}\int\limits_0^1 dv\int\limits_0^\infty F_2(v,x)\exp[-\chi(v,x)]dx, \tag{38}$$

$$\kappa_3 = \kappa_3^1 + \kappa_3^{00}, \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\kappa_3^1 = \alpha m^2\frac{r}{\pi}\int\limits_0^1 dv\int\limits_0^\infty &\{F_3(v,x)\exp[-\chi(v,x)] +\\ &+ (1-v^2)\exp[-\chi_{00}(v,x)]\}dx,\end{aligned} \tag{40}$$

$$\kappa_3^{00} = \alpha m^2\frac{\mu}{\pi}\exp\left(-\frac{2r}{\mu}\right)[1+B(r)]; \tag{41}$$

$$B(r) = \frac{2}{\sqrt{r(1-r)}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-r}{r}} - \frac{i\pi}{\sqrt{r(r-1)}}. \tag{42}$$

Выше порога рождения пары ($r > 1$, $\sqrt{1-r} = i\sqrt{r-1}$)

$$B(r) = \frac{2}{\sqrt{r(r-1)}}\ln\left(\sqrt{r}+\sqrt{r-1}\right) - \frac{i\pi}{\sqrt{r(r-1)}}. \tag{43}$$

Ниже порога рождения пары ($r < 1$, $\sqrt{r-1} = i\sqrt{1-r}$)

$$B(r) = \frac{1}{\sqrt{r(1-r)}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-r}{r}} - \frac{\pi}{2\sqrt{r(1-r)}}. \tag{44}$$

Здесь

$$\begin{aligned}F_2(v,x) &= \frac{1}{\operatorname{sh} x}\left(2\frac{\operatorname{ch} x\operatorname{ch}(vx)}{\operatorname{sh}^2 x} -\right.\\ &\qquad\left. - \operatorname{ch}(vx)+v\operatorname{sh}(vx)\operatorname{cth} x\right),\end{aligned} \tag{45}$$

$$F_3(v,x) = \frac{\operatorname{ch}(vx)}{\operatorname{sh} x} - v\frac{\operatorname{ch} x\operatorname{sh}(vx)}{\operatorname{sh}^2 x} - (1-v^2)\operatorname{cth} x;$$

$$\chi(v,x) = \frac{1}{\mu}\left[2r\frac{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch}(vx)}{\operatorname{sh} x} + (rv^2-r+1)x\right], \tag{46}$$

$$\chi_{00}(v,x) = \frac{1}{\mu}\left[2r + (rv^2-r+1)x\right]. \tag{47}$$

В сверхсильных полях ($\mu \gg 1$) экспоненциальные члены, входящие в подынтегральные выражения, можно заменить на единицу. В результате получаем для ведущих членов

$$\kappa_2 \simeq -\frac{4r}{3\pi}\alpha m^2, \quad \kappa_3 \simeq -\alpha m^2\frac{\mu}{\pi}[2+B(r)]. \tag{48}$$

Интегралы в κ_2 и κ_3^1 имеют корневые особенности при $r = r_{10}$. Для того чтобы выделить эти особенности в явном виде, рассмотрим главные члены асимптотик соответствующих подынтегральных функций при $x \to \infty$. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\kappa_i^{10} = \alpha m^2 r\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^1 dv\int\limits_0^\infty d_i(v)\,\times&\\ \times\exp[-\chi_{10}(v,x)]\,dx&,\end{aligned} \tag{49}$$

$$d_2 = v-1, \quad d_3 = 1-v-\frac{2r}{\mu}(1-v^2),$$

$$\chi_{10}(v,x) = \frac{2r}{\mu} + \frac{1}{\mu}\left[(1-v)\mu + rv^2 - r + 1\right]x. \tag{50}$$

В результате элементарного интегрирования по x получаем

$$\begin{aligned}\kappa_i^{10} = \alpha m^2\mu r\frac{2}{\pi}\exp\left(-\frac{2r}{\mu}\right)\,\times&\\ \times\int\limits_{-1}^1 dv\frac{d_i(v)}{rv^2-\mu v-r+1+\mu}&.\end{aligned} \tag{51}$$

Взяв интегралы по v, имеем

$$\kappa_2^{10} = \alpha m^2 \mu r \frac{2}{\pi} \exp\left(-\frac{2r}{\mu}\right) \times \times \left[\frac{\mu/2r - 1}{\sqrt{h(r)}} A(r) - \frac{1}{2r} \ln(\mu + 1 - r)\right], \quad (52)$$

$$\kappa_3^{10} = \alpha m^2 \mu r \frac{2}{\pi} \exp\left(-\frac{2r}{\mu}\right) \times \times \left[\frac{\mu/2r - 1 - 2/\mu}{\sqrt{h(r)}} A(r) - \frac{1}{2r} \ln(\mu + 1 - r) + \frac{2}{\mu}\right], \quad (53)$$

$$A(r) = \operatorname{arctg} \frac{r - \mu/2}{\sqrt{h(r)}} + \operatorname{arctg} \frac{r + \mu/2}{\sqrt{h(r)}} = = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{h(r)}}{r - \mu/2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{h(r)}}{r + \mu/2}, \quad (54)$$

$$h(r) = (1 + \mu) r - r^2 - \mu^2/4. \quad (55)$$

При $r_{10} - r \ll 1$ выполняется соотношение $h(r) \simeq \simeq \sqrt{1 + 2\mu}(r_{10} - r) \ll 1$, и выражения (52), (53) имеют корневую расходимость при $r = r_{10}$:

$$\kappa_i^{10} \simeq -4\alpha m^2 r \exp\left(-\frac{2r}{\mu}\right) \frac{\beta_i}{\sqrt{h(r)}}, \quad (56)$$

$$\beta_2 = \frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{4r}, \quad \beta_3 = 1 + \frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{4r}. \quad (57)$$

Если энергия фотона выше рассматриваемой ($r > > r_{10}$, но $r < r_{20} = (1 + \sqrt{1 + 4\mu})^2/4$), возникает новый канал рождения пары, а формула (51) приобретает вид (ср. с формулой (37))

$$\kappa_i^{10} = \alpha m^2 \mu r \frac{2}{\pi} \exp\left(-\frac{2r}{\mu}\right) \int\limits_{-1}^{1} dv\, d_i(v) \times \times \left[\frac{\mathcal{P}}{rv^2 - \mu v - r + 1 + \mu} - i\pi\delta(rv^2 - \mu v - r + 1 + \mu)\right]. \quad (58)$$

При $r - r_{10} \ll 1$

$$\kappa_i^{10} \simeq -4i\alpha m^2 r \exp\left(-\frac{2r}{\mu}\right) \frac{\beta_i}{\sqrt{-h(r)}}. \quad (59)$$

С ростом энергии фотона изложенная процедура выделения расходимостей может быть продолжена и дальше. Однако в следующем разделе мы рассмотрим другой (регулярный) метод, позволяющий провести соответствующие вычисления в общем виде.

В сильных полях и при достаточно больших энергиях фотона, когда заселяются высокие уровни энергии рождающихся частиц ($\mu \gtrsim 1$, $r \gg \mu$), могут быть использованы квазиклассические формулы (31)–(33), поскольку вклад дают $x \sim (\mu/r)^{1/3} \ll 1$, а условие $\kappa \gg 1$ в этом случае всегда выполнено. Тогда

$$\kappa_i = (0.175 - 0.304i)\beta_i \alpha m^2 \kappa^{2/3}, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 3/2. \quad (60)$$

Формула (60) совпадает с соответствующей формулой стандартного квазиклассического приближения для $\kappa \gg 1$. Однако следует помнить, что для слабых полей ($\mu \ll 1$, $H \ll H_0$) условие $\kappa \gg 1$ является достаточным для квазиклассичности движения ($n \gg 1$) рождающихся частиц. В то время как для полей, превышающих критическое поле H_0 ($\mu \gg 1$), большое значение параметра κ не обеспечивает указанной квазиклассичности. В этом случае необходимым условием применимости квазиклассического приближения является условие $r/\mu \sim n \gg 1$.

6. СПЕКТРАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Следуя работе [17] (см. Приложение А), собственное значение поляризационного оператора представим в виде

$$\kappa_i = \alpha m^2 \frac{r}{\pi} T_i; \quad T_i = \int\limits_{-1}^{1} dv \int\limits_{0}^{\infty - i0} f_i(v, x) \times \times \exp[i\psi(v, x)]\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta_{n0}}{2}\right) T_i^{(n)}; \quad (61)$$

$$T_i^{(n)} = \int\limits_{-1}^{1} dv \int\limits_{0}^{\infty - i0} F_i^{(n)}(v, x) \exp[i a_n(v) x]\, dx, \quad (62)$$

где

$$F_1^{(n)} = (-i)^n \exp(iz \operatorname{ctg} x) \times \times \left[\frac{i}{\sin x}(\mathcal{J}_{n+1}(t) - \mathcal{J}_{n-1}(t)) - \frac{2vn}{z} \operatorname{ctg} x\, \mathcal{J}_n(t)\right],$$
$$F_2^{(n)} = (-i)^n \exp(iz \operatorname{ctg} x) \frac{4}{z}\left(b \operatorname{ctg} x - \frac{i}{\sin^2 x}\right) \times \times \mathcal{J}_n(t) - F_1^{(n)}, \quad (63)$$
$$F_3^{(n)} = F_1^{(n)} - 2(-i)^n \exp(iz \operatorname{ctg} x)(1 - v^2) \times \times \operatorname{ctg} x\, \mathcal{J}_n(t);$$

$$a_n(v) = nv - b, \quad b = \frac{1}{\mu}(1 - r(1 - v^2)), \quad z = \frac{2r}{\mu}, \quad t = \frac{z}{\sin x}. \quad (64)$$

Здесь $\mathcal{J}_n$ — функции Бесселя. Заметим, что при $x \to \to -i\infty$

$$\mathcal{J}_n(t) \simeq \mathcal{J}_n(2ize^{-|x|}) \simeq \frac{(iz)^n}{n!} e^{-n|x|}. \tag{65}$$

Если выполняется условие $a_n(v) < n$, контур интегрирования по x в (62) может быть развернут на нижнюю мнимую полуось. Величина $T_i^{(n)}$ при этом становится действительной в явном виде.

Функции $F_i^{(n)}(v,x)$ являются периодическими в зависимости от x. Тогда $T_i^{(n)}$ можно представить в виде

$$T_i^{(n)} = \int\limits_{-1}^{1} dv \int\limits_{0}^{2\pi} F_i^{(n)}(v,x) \exp[ia_n(v)x]\, dx \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \exp[2\pi i k a_n(v)] = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dv}{1 - \exp[2\pi i a_n(v)] + i0} \times \\ \times \int\limits_{0}^{2\pi} F_i^{(n)}(v,x) \exp[ia_n(v)x]\, dx. \tag{66}$$

Воспользуемся известной формулой

$$\frac{1}{1 - \exp[2\pi i a_n(v)] + i0} = \\ = \frac{\mathcal{P}}{1 - \exp[2\pi i a_n(v)]} - i\pi\delta(1 - \exp[2\pi i a_n(v)]). \tag{67}$$

Принимая во внимание сделанное выше замечание (65), имеем

$$-i\pi\delta(1 - \exp[2\pi i a_n(v)]) = \\ = -i\pi \sum_m \delta(1 - \exp[2\pi i(a_n(v) - m)]) \to \\ \to \frac{1}{2} \sum_{m \geq n} \delta(a_n(v) - m). \tag{68}$$

Используя также соотношение

$$F_i^{(n)}(v, x+\pi) = (-1)^n F_i^{(n)}(v,x),$$

получаем

$$T_i^{(n)} = (-1)^n \frac{i}{2} \mathcal{P} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dv}{\sin(\pi a_n(v))} \times \\ \times \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_i^{(n)}(v,x) \exp[ia_n(v)x]\, dx + \\ + \sum_{m \geq n}^{m=n_{max}} \sum_{v_{1,2}} \frac{1 + (-1)^{m+n}}{2|a'_n(v)|} \vartheta(g(n,m,r)) \times \\ \times \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_i^{(n)}(v_{1,2},x) \exp[imx]\, dx, \tag{69}$$

где

$$g(n,m,r) = r^2 - (1+m\mu)r + n^2\mu^2/4, \tag{70}$$

$$v_{1,2} = \frac{n\mu}{2r} \pm \frac{1}{r}\sqrt{g}, \quad a'_n(v) = \frac{2}{\mu}\sqrt{g}; \tag{71}$$

$$n_{max} = [d(r)], \quad d(r) = \frac{2\,(r - \sqrt{r}\,)}{\mu}. \tag{72}$$

Здесь $[d]$ — целая часть d.

Выделяя расходимости в явном виде, представим $T_i^{(n)}$ следующим образом:

$$T_i^{(n)} = T_i^{(nr)} + T_i^{(ns)}; \tag{73}$$

$$T_i^{(nr)} = (-1)^n \frac{i}{2} \mathcal{P} \int\limits_{-1}^{1} dv \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[F_i^{(n)}(v,x) \frac{\exp[ia_n(v)x]}{\sin(\pi a_n(v))} - \right. \\ \left. - \sum_{m \geq n}^{m=n_{max}} \sum_{v_{1,2}} \frac{(-1)^m}{\pi} F_i^{(n)}(v_{1,2},x) \frac{\exp[imx]}{a_n(v) - m} \right] dx, \tag{74}$$

$$T_i^{(ns)} = \sum_{m \geq n}^{m=n_{max}} \sum_{v_{1,2}} \frac{\mu\pi}{2\sqrt{g}} \times \\ \times \left[1 - \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{-g}}{2r - \mu n} + \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{-g}}{2r + \mu n} \right) \right] \times \\ \times \int\limits_{0}^{\pi} F_i^{(n)}(v_{1,2},x) \exp[imx]\, dx. \tag{75}$$

Отметим, что регуляризованное выражение $T_i^{(nr)}$ уже не содержит сингулярностей, а контур интегрирования в $T_i^{(n)}$ при $n > n_{max}$ можно развернуть на нижнюю полуось. Затем выражение для T_i представим в виде

$$T_i = \sum_{n>n_{max}}^{\infty} T_i^{(n)} + \sum_{n=0}^{n_{max}} T_i^{(n)} = \left(T_i - \sum_{n=0}^{n_{max}} T_i^{(n)}\right) + \\ + \sum_{n=0}^{n_{max}} T_i^{(n)} = \int_{-1}^{1} dv \int_0^{\infty} \left\{ F_i(v,x) \exp[-\chi(v,x)] + \right. \\ \left. + i \sum_{n=0}^{n_{max}} F_i^{(n)}(v,-ix) \exp[a_n(v)x] \right\} dx + \\ + \sum_{n=0}^{n_{max}} T_i^{(n)}. \quad (76)$$

Интегралы по x в формуле для $T_i^{(ns)}$ вычислены в Приложении А работы [17]. Наряду с целыми числами m и n мы используем числа $l = (m+n)/2$, $k = (m-n)/2$, которые соответствуют формуле (34). В результате имеем

$$\kappa_i^s = \alpha m^2 \frac{r}{\pi} \sum_{n=0}^{n_{max}} T_i^{(ns)} = \\ = -i\alpha m^2 \mu e^{-\zeta} \sum_{n,m} (2 - \delta_{n0}) \frac{\zeta^n k!}{\sqrt{g} l!} \times \\ \times \left[1 - \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{-g}}{2r - \mu n} + \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{-g}}{2r + \mu n} \right) \right] D_i; \quad (77)$$

$$D_2 = \left(\frac{m\mu}{2} - \frac{n^2\mu^2}{4r} \right) F + 2\mu l \vartheta(k-1) \times \\ \times \left[2L_{k-1}^{n+1}(\zeta) L_k^{n-1}(\zeta) - L_k^n(\zeta) L_{k-1}^n(\zeta) \right], \quad (78)$$

$$D_3 = \left(1 + \frac{m\mu}{2} - \frac{n^2\mu^2}{4r} \right) F + \\ + 2\mu l \vartheta(k-1) L_k^n(\zeta) L_{k-1}^n(\zeta), \quad (79)$$

$$F = \left[L_k^n(\zeta) \right]^2 + \vartheta(k-1) \frac{l}{k} \left[L_{k-1}^n(\zeta) \right]^2, \quad \zeta = \frac{2r}{\mu}, \quad (80)$$

где $L_k^n(\zeta)$ — обобщенные полиномы Лагерра.

При $\mu \ll 1$, $(r-1)/\mu \lesssim 1$, $g/\mu \simeq |(r-1)/\mu - m| \ll 1$ главные члены суммы в (77) имеют вид

$$\kappa_3^s \simeq -i\alpha m^2 \mu e^{-\zeta} \zeta^m g^{-1/2} \sum_{k+l=m} \frac{1}{k! l!} = \\ = -i\alpha m^2 \mu e^{-\zeta} \zeta^m g^{-1/2} \frac{2^m}{m!}, \quad \kappa_2^s \simeq \frac{1}{2} m\mu \kappa_3^s. \quad (81)$$

Здесь мы учли, что при $\zeta \gg 1$

$$L_k^n(\zeta) \simeq \zeta^k / k!, \quad D_3 \simeq \left[L_k^n(\zeta) \right]^2, \\ D_2 \simeq m\mu D_3/2. \quad (82)$$

Выражение (81) согласуется с формулой (21). Заметим, что эта формула отражает вырождение по энергии пары на уровнях Ландау в нерелятивистском случае. При $g > 0$ первая часть формулы (81), как и общее выражение (77), дает парциальную вероятность заселенности уровней энергии родившимися частицами [17].

При $\mu \gtrsim 1$, $|r-1| \ll 1$, $m = n = k = l = 0$, $D_3 = 1$, $D_2 = 0$, и формула (77) согласуется с формулой (41). При $|r - r_{10}| \ll 1$ главный член в сумме определяется значениями $m = n = l = 1$, $k = 0$, $D_2 = \beta_2$, $D_3 = \beta_3$, $g = -h$, что согласуется с выражением (59).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы рассмотрели поляризационный оператор фотона как в слабом, так и в сильном магнитном поле при произвольных значениях энергии фотона. При больших квантовых числах в слабом ($H \ll H_0$) поле существуют две области энергий фотона, приближенное описание в которых имеет различную природу, и соответственно различный вид. Первая область с не очень большими квантовыми числами начинается в нерелятивистской области энергий ($r-1 \ll 1$). Применимость приближенного описания в этой области заканчивается уже при релятивистских энергиях ($r \gg 1$), когда параметр κ не мал ($\kappa^2 = 4r\mu^2 \gtrsim 1$). Однако при таких энергиях применимо стандартное квазиклассическое приближение, так что области энергий этих приближений пересекаются между собой при $\kappa \ll 1$. В слабом поле ($\mu \ll 1$) при $\kappa \sim 1$ мнимая часть поляризационного оператора выражается через производную функции Эйри, действительная часть связана с функцией Харди. При $\kappa \gg 1$ приближенное описание поляризационного оператора существенно упрощается.

В сильных полях в выражениях для κ_i мы выделили интегралы, асимптотически расходящиеся при пороговой энергии фотона и вычисляемые аналитически. В оставшихся интегралах контур интегрирования можно развернуть на мнимую полуось, так что они становятся действительными в явном виде. Эти интегралы хорошо сходятся, поскольку в подынтегральном выражении вместо осциллирующих функций имеем экспоненциально убывающие функции. Данное обстоятельство весьма удобно как для анализа асимптотических выражений, так и при численных вычислениях. С ростом энергии фотона используемая для низших порогов (r_{00} и r_{10}) процедура выделения расходимостей может быть продолжена и в область следующих, более высоких порогов рождения пары. Однако более последовательным явилось создание в работе регулярного метода, позволяющего провести соответствующие вычисления в общем виде. Мнимая часть поляризационного оператора, полученная в таком виде, согласуется с общей формулой для вероятности рождения пары фотоном [17].

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации. Автор благодарен РФФИ (грант № 15-02-02674) за частичную поддержку выполненных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Ruderman, in *The Electromagnetic Spectrum of Nutron Stars*, NATO ANSI Proc., Springer, New York (2004).
2. R. C. Duncan and C. Tompson, Astrophys. J. **392**, 19 (1992).
3. И. А. Баталин, А. Е. Шабад, ЖЭТФ **60**, 894 (1971).
4. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
5. Wu-yang Tsai, Phys. Rev. D **10**, 2699 (1974).
6. A. E. Shabad, Ann. Phys. (N. Y.) **90**, 166 (1975).
7. Wu-yang Tsai and T. Erber, Phys. Rev. D **12**, 1132 (1975).
8. В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко, ЖЭТФ **68**, 405 (1975).
9. В. Н. Байер, А. И. Мильштейн, Р. Ж. Шайсултанов, ЖЭТФ **111**, 52 (1997).
10. A. C. Harding, M. G. Baring, and P. L. Conthier, Astrophys. J. **476**, 246 (1997).
11. А. Е. Шабад, ЖЭТФ **125**, 210 (2004).
12. A. E. Shabad and V. V. Usov, Phys. Rev. Lett. **98**, 180403 (2007).
13. A. E. Shabad and V. V. Usov, Phys. Rev. D **77**, 025001 (2008).
14. N. Sadooghi and A. S. Jalili, Phys. Rev. D **76**, 065013 (2007).
15. B. Machet and M. I. Vysotsky, Phys. Rev. D **83**, 025022 (2011).
16. S. Godunov, B. Machet, and M. I. Vysotsky, Phys. Rev. D **85**, 044058 (2012).
17. V. N. Baier and V. M. Katkov, Phys. Rev. D **75**, 073009 (2007).
18. В. М. Катков, ЖЭТФ **141**, 258 (2012).