ЖЭТФ, 2016, том 150, вып. 2 (8), стр. 293–305

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЭЛАСТОМАГНИТОЭЛЕКТРОСТАТИКА НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД

А. Ф. Кабыченков, Ф. В. Лисовский [*]

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова Российской академии наук 141190, Фрязино, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 24 ноября 2015 г.

В рамках феноменологической эластомагнитоэлектростатики изучено взаимодействие электрической, магнитной и упругой подсистем в нелинейных неупорядоченных микрополярных средах с тензором изгиба-кручения и несимметричным тензором деформаций. Вариационным методом получена система нелинейных уравнений для определения основного состояния таких сред. Показано, что неоднородные внешние и внутренние вращения создают не только упругие напряжения, но и дополнительные электрические и магнитные индукции, а неоднородные упругие напряжения и внешние поля индуцируют внутренние вращения. Нелокальный характер микрополярных сред оказывает также значительное воздействие на элементарные возбуждения и нелинейные динамические процессы.

DOI: 10.7868/S0044451016080101

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время непреложным фактом является то, что классическая строго локальная теория упругости [1], базирующаяся на использовании модели сред в виде континуума бесструктурных геометрических точек с тремя степенями свободы, изменение положения которых при внешних или внутренних воздействиях сводится к простым перемещениям и может быть описано компонентами вектора упругих смещений, является только грубым приближением к действительности. В неклассических теориях упругости элементы среды (называемой обобщенной или усложненной) обладают дополнительными степенями свободы (например, вращательными) и в общем случае могут подвергаться действию не только обычных, но и моментных напряжений.

Первая из неклассических теорий упругости, впоследствии получившая название микрополярной или теории континуума Коссера, была разработана в 1909 г. братьями Эженом и Франсуа Коссера [2] (историческую справку см. в [3]) для модели сред, допускающих смещения и вращения (повороты) псевдоточечных элементов. Реальным физическим прообразом таких сред можно считать, например, полярные диэлектрики.

В настоящее время существует достаточно большое количество моделей обобщенных сред, сопоставление и сравнение которых является довольно сложной задачей. Тем не менее имеются обстоятельные обзоры, в которых описываются не только модели, но и основанные на их использовании теории, а также анализируются возможности их обобщения [4–7].

Согласно предложенной в [5] классификации, все теории обобщенных (усложненных) сред условно можно разделить на сильно нелокальные и слабо нелокальные. Сильно нелокальные теории для описания состояния континуума используют интегральные соотношения без предположений о наличии дополнительных степеней свободы и моментных напряжений. В слабо нелокальных теориях такие предположения делаются, а интегральные соотношения заменяются степенными рядами по термодинамическим переменным и их производным.

Заметим, что при учете зависимости энергии упругих деформаций от высших производных (градиентов) вектора смещений моментные напряжения возникают естественным образом, на что впервые обратил внимание Фойхт [8], поэтому слабо нелокальные теории упругости часто называют градиентными [9].

Неклассические теории упругости нашли многочисленные приложения в механике, физике конден-

[*] E-mail: lisf@rambler.ru

сированных сред и различных областях техники. К физическим объектам ее применимости относятся кристаллы с дефектами (в том числе с дислокациями и дисклинациями), спиновые и дипольные стекла, жидкие кристаллы, биоматериалы (например, костная ткань), наноматериалы, геоматериалы и др. [10].

Поскольку любая конденсированная обобщенная среда включает в себя совокупность нескольких подсистем — упругой, электрической и магнитной, тепловой и др., следует ожидать, что из-за нелокальности модификация реакции упругой подсистемы на напряжения (например, за счет наличия дополнительных степеней свободы у элементов деформируемого континуума) будет вызывать существенные изменения характера взаимодействия между всеми подсистемами. Теоретические и экспериментальные исследования таких явлений малочисленны и фрагментарны: см., например, монографии [11, 12], где выполнен общий анализ проблемы, монографию [13], содержащую разделы о термопьезоэлектрических и термопьезомагнитных эффектах в микрополярных средах, и несколько оригинальных публикаций, посвященных пьезоэлектрическим явлениям, а также влиянию внешних полей на асимметрию тензора деформаций [14–16].

В последнее время значительный интерес вызывают исследования эластомагнитоэлектрических эффектов, обусловленных наличием в среде неоднородно распределенных электрических и магнитных полей, поляризации, намагниченности и упругих деформаций или напряжений. Толчком к этому послужило обнаружение (в середине прошлого века) и последующее изучение так называемого флексоэлектрического эффекта, заключающегося в изменении электрической поляризации при неоднородных деформациях типа изгиба; подробности и библиографию см. в обзоре [17].

Ранее в рамках классической теории упругости методом варьирования термодинамического потенциала был выполнен анализ эластомагнитоэлектрических эффектов в локальных изотропных центросимметричных нелинейных средах [18–20]. Целью настоящей работы является обобщение описанной процедуры на случай градиентной теории упругости и обсуждение некоторых конкретных примеров использования модели обобщенных нелокальных сред для описания их статического и динамического поведения.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Статическое состояние электрической, магнитной и упругой подсистем непроводящей микрополярной среды описывается следующими уравнениями [1, 21–23]:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\mathbf{D}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=0,\\ \operatorname{div}\mathbf{B}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=0,\\ \operatorname{Div}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{*}+\mathbf{f}=0,\quad \operatorname{Ink}\hat{\mathbf{t}}\equiv\operatorname{Rot}(\operatorname{Rot}\hat{\mathbf{t}})^{*}=0,\\ \operatorname{Div}\hat{\boldsymbol{\tau}}^{*}+\mathbf{n}=0,\quad \operatorname{Ink}\mathbf{r}\equiv\operatorname{Rot}(\operatorname{Rot}\hat{\mathbf{r}})^{*}=0,\end{gathered}\tag{1}$$

где $\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ и $\mathbf{B}=\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M}$ — векторы электрической и магнитной индукции, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ — векторы поляризации и намагниченности, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\sigma_{ij}$ — тензор напряжений, $\mathbf{e}_i$ — базисные векторы, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, $\mathbf{f}$ — плотность объемных сил, $\hat{\mathbf{t}}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\,(\partial R_i/\partial x_j)$ — тензор дисторсии, $\mathbf{R}=\mathbf{e}_kR_k$ — вектор смещения, $\hat{\boldsymbol{\tau}}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\tau_{ij}$ — тензор микромоментов, τ_{ij} — компоненты тензора микромоментов, $\mathbf{n}=2\mathbf{c}+\boldsymbol{\eta}$ — полная плотность моментов объемных сил, $\mathbf{c}=-(1/2)\mathbf{e}_ie_{ijk}\sigma_{jk}^{(a)}$ — вектор, дуальный антисимметричной части тензора напряжений, e_{ijk} — единичный антисимметричный тензор, $\boldsymbol{\eta}$ — внешняя плотность моментов объемных сил, $\hat{\mathbf{r}}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_jr_{ij}$ — тензор изгиба-кручения, $r_{ij}=\partial\phi_i/\partial x_j$ — компоненты тензора изгиба-кручения, $\boldsymbol{\phi}=\mathbf{e}_k\phi_k$ — вектор внутреннего вращения (усредненный по элементу среды), Ink — дифференциальный оператор, результат действия которого на тензорное поле характеризует несовместность последнего. Несимметричный тензор деформаций $\hat{\gamma}$ в среде с внутренним вращением может быть представлен в виде либо $\hat{\gamma}=\hat{\mathbf{t}}+\hat{\boldsymbol{\phi}}$, где $\hat{\boldsymbol{\phi}}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_je_{ijk}\phi_k$, либо $\hat{\gamma}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\,(u_{ij}+e_{ijk}\psi_k)$, где $u_{ij}=(1/2)\,(\partial R_i/\partial x_j+\partial R_j/\partial x_i)$ — компоненты тензора деформаций, $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\varphi}$ — разность векторов внутреннего вращения и внешнего вращения $\boldsymbol{\varphi}=-(1/2)\,\mathbf{e}_ie_{ijk}\omega_{jk}$, связанного с антисимметричным тензором $\omega_{jk}=(1/2)\,(\partial R_j/\partial x_k-\partial R_k/\partial x_j)=-e_{ijk}\varphi_k$ [1, 21–23].

Для сред конечного размера на поверхности с нормалью $\mathbf{n}^{(s)}$ для электрической и магнитной подсистем должны выполняться граничные условия, которые заключаются в непрерывности нормальных компонент $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ и тангенциальных компонент $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, а для упругой подсистемы задаются уравнением $\mathbf{f}^{(s)}=\mathbf{e}_i\sigma_{ij}n_j^{(s)}$ для внешних сил на единицу площади поверхности и уравнением $\boldsymbol{\eta}^{(s)}=\mathbf{e}_i\tau_{ij}n_j^{(s)}$ для внешних моментов сил на единицу площади поверхности [1, 21–23].

Систему (1) необходимо дополнить уравнениями состояния

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}\left(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}, \hat{\mathbf{r}}\right), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}\left(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}, \hat{\mathbf{r}}\right),$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}, \hat{\mathbf{r}}\right), \quad \hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\boldsymbol{\tau}}\left(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}, \hat{\mathbf{r}}\right),$$

которые с учетом пространственной дисперсии (нелокальности) среды определяются интегральными соотношениями [23]. При слабой дисперсии (слабой нелокальности) среды эти соотношения можно представить в виде алгебраических функций от переменных $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ и их производных, однако вместо этого целесообразнее использовать энергетический подход [18–20], который и будет использован ниже.

3. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД

Термодинамический потенциал слабо нелокальной среды можно записать в виде

$$W = \int\limits_V w\left(T, E_i, \frac{\partial E_i}{\partial x_j}, H_i, \frac{\partial H_i}{\partial x_j}, \gamma_{ij}, \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x_k}, r_{ij}, \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_k}\right) dv, \quad (2)$$

где V — объем среды, T — температура, а w — плотность термодинамического потенциала, равная

$$w = w_0 + w_e + w_m + w_\gamma + w_r + w_{em} + w_{e\gamma} + w_{er} + w_{m\gamma} + w_{mr} + w_{\gamma r} + w_{em\gamma} + w_{emr} + w_{e\gamma r} + w_{m\gamma r} + w_{em\gamma r}. \quad (3)$$

Здесь слагаемое w_0 представляет собой плотность термодинамического потенциала в отсутствие полей и деформаций, слагаемые w_e и w_m описывают вклады электрической и магнитной подсистем, w_γ и w_r — парциальные вклады упругой подсистемы, обусловленные соответственно несимметричными деформациями и изгибом-кручением, w_{em}, $w_{e\gamma}$, w_{er}, $w_{m\gamma}$, w_{mr}, $w_{\gamma r}$; $w_{em\gamma}$, w_{emr}, $w_{e\gamma r}$, $w_{m\gamma r}$ и $w_{em\gamma r}$ — вклады, обусловленные соответственно двойными, тройными и четверными взаимодействиями между электрической, магнитной подсистемами и «частями» упругой подсистемы. В случае сильной нелокальности среды в выражении (2) необходимо учитывать производные более высоких порядков, а при неоднородной температуре среды — и градиент температуры [13].

Ограничим рассмотрение изотермическим случаем для изотропной нелинейной среды без дальнего порядка, когда неоднородные эластомагнитоэлектрические эффекты проявляются наиболее отчетливо, т. е. не маскируются пониженной симметрией среды — исходной и (или) возникшей при упорядочении.

В таких средах в отсутствие внешних полей, сил и моментов отсутствуют поляризация, намагниченность, деформации изгиба-кручения и повороты, поэтому целесообразно использовать разложение плотности термодинамического потенциала в ряд по степеням внутренних полей, тензорам изгиба-кручения и поворотов и их производным [22, 23].

С точностью до членов не выше четвертой степени по напряженности электрического и магнитного полей и второй степени по их производным и по компонентам тензоров деформаций, изгиба-кручения и поворотов слагаемые в выражении (3) для плотности термодинамического потенциала с учетом системы уравнений (1) можно записать в следующем виде:

$$w_e = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} a_1 \mathbf{E}^4 + a_2 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_i}\right)^2\right] + a_3 \mathbf{E}^2 \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad (4)$$

где ε_0 — линейная диэлектрическая проницаемость, a_i — феноменологические константы, характеризующие вклад нелинейности и неоднородности электрической подсистемы в w;

$$w_m = \frac{1}{2}\left[\mu_0 \mathbf{H}^2 + \frac{b_1}{2} \mathbf{H}^4 + b_2 \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i}\right)^2\right], \quad (5)$$

где μ_0 — линейная магнитная проницаемость, b_i — феноменологические константы, характеризующие вклад нелинейности и неоднородности магнитной подсистемы в w;

$$\begin{aligned} w_\gamma = {} & \frac{1}{2}\left(\lambda \gamma_{ii}^2 + \eta_1 \gamma_{ij}^2 + \eta_2 \gamma_{ij}\gamma_{ji}\right) + \\ & + \left(\lambda_1^{(n)} \frac{\partial \gamma_{ii}}{\partial x_k} + \eta_1^{(n)} \frac{\partial \gamma_{kn}}{\partial x_n} + \eta_2^{(n)} \frac{\partial \gamma_{nk}}{\partial x_n}\right) \frac{\partial \gamma_{ii}}{\partial x_k} + \\ & + \left(\eta_3^{(n)} \frac{\partial \gamma_{ki}}{\partial x_k} + \eta_4^{(n)} \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_k}\right) \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x_j} + \\ & + \left(\eta_5^{(n)} \frac{\partial \gamma_{ki}}{\partial x_k} + \eta_6^{(n)} \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_k}\right) \frac{\partial \gamma_{ji}}{\partial x_j} + \\ & + \left(\eta_7^{(n)} \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_j} + \eta_8^{(n)} \frac{\partial \gamma_{ki}}{\partial x_j}\right) \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x_k} + \end{aligned}$$

$$+\left(\eta_9^{(n)}\frac{\partial\gamma_{ik}}{\partial x_j}+\eta_{10}^{(n)}\frac{\partial\gamma_{ki}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\gamma_{ji}}{\partial x_k}+ \\ +\left(\eta_{11}^{(n)}\frac{\partial\gamma_{ki}}{\partial x_j}+\eta_{12}^{(n)}\frac{\partial\gamma_{ik}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\gamma_{ki}}{\partial x_j}, \quad (6)$$

где λ, η_1, η_2 и $\lambda_1^{(n)}$, $\eta_1^{(n)}\div\eta_{12}^{(n)}$ — феноменологические константы, характеризующие однородный и неоднородный вклады несимметричных деформаций в w;

$$w_r=\frac{1}{2}\left(\theta r_{ii}^2+\nu_1 r_{ij}^2+\nu_2 r_{ij}r_{ji}\right)+\nu_1^{(n)}\left(\frac{\partial r_{ii}}{\partial x_k}\right)^2+ \\ +\left(\nu_2^{(n)}\frac{\partial r_{ii}}{\partial x_k}+\nu_3^{(n)}\frac{\partial r_{ki}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial r_{kj}}{\partial x_j}+ \\ +\left(\nu_4^{(n)}\frac{\partial r_{ik}}{\partial x_j}+\nu_5^{(n)}\frac{\partial r_{jk}}{\partial x_i}+\nu_6^{(n)}\frac{\partial r_{kj}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial r_{kj}}{\partial x_i}, \quad (7)$$

где θ, ν_1, v_2 и $\nu_1^{(n)}\div\nu_6^{(n)}$ — феноменологические константы, характеризующие однородный и неоднородный вклады изгиба-кручения в w;

$$w_{em}=\frac{1}{2}\left[c_1\mathbf{E}^2\mathbf{H}^2+c_2(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2\right]+ \\ +c_3\mathbf{H}^2\operatorname{div}\mathbf{E}+c_4(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})\operatorname{div}\mathbf{H}, \quad (8)$$

где c_i — феноменологические константы магнитоэлектрического взаимодействия;

$$w_{e\gamma}=\frac{1}{2}\lambda^{(e)}\gamma_{ii}\mathbf{E}^2+\eta^{(e)}\gamma_{ij}E_iE_j+ \\ +\lambda^{(en)}\gamma_{ii}\operatorname{div}\mathbf{E}+\eta^{(en)}\gamma_{ij}\frac{\partial E_i}{\partial x_j}, \quad (9)$$

где $\lambda^{(e)}$, $\eta^{(e)}$ и $\lambda^{(en)}$, $\eta^{(en)}$ — феноменологические константы деформационно-электрического взаимодействия[1)];

$$w_{er}=\frac{1}{2}\theta_{ii}^{(e)}\mathbf{E}^2+\nu_{ij}^{(e)}E_iE_j+\theta_{ii}^{(en)}\operatorname{div}\mathbf{E}+ \\ +\nu_{ij}^{(en)}\frac{\partial E_i}{\partial x_j}+\varsigma^{(e)}\left(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{E}\right), \\ \theta_{ii}^{(e)}=\theta^{(e)}r_{ii}^2+\nu_1^{(e)}r_{ij}^2+\nu_2^{(e)}r_{ij}r_{ji}, \quad (10) \\ \nu_{ij}^{(e)}=\nu_3^{(e)}r_{ll}r_{ij}+\nu_4^{(e)}r_{ki}r_{kj}+\nu_5^{(e)}r_{ki}r_{jk}, \\ \theta_{ii}^{(en)}=\theta^{(en)}r_{ii}^2+\nu_1^{(en)}r_{ij}^2+\nu_2^{(en)}r_{ij}r_{ji}, \\ \nu_{ij}^{(en)}=\nu_3^{(en)}r_{ll}r_{ij}+\nu_4^{(en)}r_{ki}r_{kj}+\nu_5^{(en)}r_{ki}r_{jk},$$

$\theta^{(e)}$, $\nu_1^{(e)}\div\nu_5^{(e)}$ и $\theta^{(en)}$, $\nu_1^{(en)}\div\nu_5^{(en)}$ — феноменологические константы, характеризующие соответственно однородный и неоднородный вклады вращательно-электрического взаимодействия в w, $\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{e}_k e_{kji}r_{ij}=\operatorname{rot}\boldsymbol{\phi}$ — вихрь поля внутреннего вращения, а $\varsigma^{(e)}=\varsigma_1^{(e)}+\varsigma_2^{(e)}\operatorname{div}\mathbf{E}+\varsigma_3^{(e)}\mathbf{E}^2$ — перенормированная константа взаимодействия между внутренним вращением и электрической подсистемой;

$$w_{m\gamma}=\frac{1}{2}\lambda_0^{(m)}\gamma_{ii}+\eta_{ij}^{(m)}\gamma_{ij}+\lambda_k^{(mn)}\frac{\partial\gamma_{ii}}{\partial x_k}+ \\ +\left(\eta_{ijk}^{(mn)}+\lambda_{ijk}^{(mn)}\right)\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x_k}, \\ \lambda_0^{(m)}=\lambda^{(m)}\mathbf{H}^2+\lambda_1^{(mn)}\left(\operatorname{div}\mathbf{H}\right)^2+ \\ +\lambda_2^{(mn)}\left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x_k}\right)^2, \\ \eta_{ij}^{(m)}=\eta^{(m)}H_iH_j+\eta_1^{(mn)}\frac{\partial H_i}{\partial x_j}\operatorname{div}\mathbf{H}+ \\ +\eta_2^{(mn)}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x_j}, \quad (11) \\ \lambda_k^{(mn)}=\lambda_3^{(mn)}\frac{\partial H_j}{\partial x_k}H_j+\lambda_4^{(mn)}H_k\operatorname{div}\mathbf{H}, \\ \eta_{ijk}^{(mn)}=\eta_3^{(mn)}\frac{\partial H_i}{\partial x_j}H_k+\eta_4^{(mn)}\frac{\partial H_i}{\partial x_k}H_j+ \\ +\eta_5^{(mn)}\frac{\partial H_j}{\partial x_k}H_i, \\ \lambda_{ijk}^{(mn)}=\lambda_5^{(mn)}\frac{\partial H_l}{\partial x_j}H_l\delta_{ki}+ \\ +\left(\lambda_6^{(mn)}\frac{\partial H_l}{\partial x_i}H_l+\lambda_7^{(mn)}\frac{\partial H_l}{\partial x_l}H_i\right)\delta_{kj},$$

$\lambda^{(m)}$, $\eta^{(m)}$ и $\lambda_1^{(mn)}\div\lambda_7^{(mn)}$, $\eta_1^{(mn)}\div\eta_5^{(mn)}$ — феноменологические константы, характеризующие однородный и неоднородный вклады деформационно-магнитного взаимодействия в w;

$$w_{mr}=(1/2)\,\theta_{ii}^{(m)}\mathbf{H}^2+\nu_{ij}^{(m)}H_iH_j+ \\ +\varsigma^{(m)}\left(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{H}\right)\operatorname{div}\mathbf{H}, \\ \theta_{ii}^{(m)}=\theta^{(m)}r_{ii}^2+\nu_1^{(m)}r_{ij}^2+\nu_2^{(m)}r_{ij}r_{ji}, \quad (12) \\ \nu_{ij}^{(m)}=\nu_3^{(m)}r_{ll}r_{ij}+\nu_4^{(m)}r_{ki}r_{kj}+\nu_5^{(m)}r_{ki}r_{jk},$$

где $\theta_{ii}^{(m)}$, $\nu_1^{(m)}\div\nu_5^{(m)}$ — феноменологические константы, характеризующие однородный вклады изгибно-кручено-магнитного взаимодействия в w, а $\varsigma^{(m)}$ — константа взаимодействия между изгибом-кручением и магнитной подсистемой;

[1)] В (9) опущены слагаемые более высокого порядка малости, аналогичные приводимым далее в (11) с заменой $\mathbf{H}$ на $\mathbf{E}$ и верхних индексов (m) на (e).

$$w_{\gamma r} = \theta_{ii}^{(\gamma)}\gamma_{ii} + \nu_{ij}^{(\gamma)}\gamma_{ij} + \left(\varsigma_1^{(\gamma)}\gamma_{ij} + \varsigma_2^{(\gamma)}\gamma_{ji}\right)\frac{\partial\kappa_i}{\partial x_j} + \\ + 2\psi_k\left(\varsigma_3^{(\gamma)}\frac{\partial r_{kl}}{\partial x_l} + \varsigma_4^{(\gamma)}\frac{\partial r_{lk}}{\partial x_l}\right),$$

$$\theta_{ii}^{(\gamma)} = \theta^{(\gamma)} r_{ii}^2 + \nu_1^{(\gamma)} r_{ij}^2 + \nu_2^{(\gamma)} r_{ij} r_{ji}, \quad (13)$$

$$\nu_{ij}^{(\gamma)} = \left(\nu_3^{(\gamma)} r_{ij} + \nu_4^{(\gamma)} r_{ji}\right) r_{ll} + \\ + \left(\nu_5^{(\gamma)} r_{jk} + \nu_6^{(\gamma)} r_{kj}\right) r_{ik} + \\ + \left(\nu_7^{(\gamma)} r_{jk} + \nu_8^{(\gamma)} r_{kj}\right) r_{ki},$$

где $\theta^{(\gamma)}$, $\nu_1^{(\gamma)} \div \nu_8^{(\gamma)}$, $\varsigma_{1,2,3,4}^{(\gamma)}$ — феноменологические константы, характеризующие однородный вклады изгибно-кручено-деформационного взаимодействия в w, а $\psi_k = (1/2)\, e_{ijk}\gamma_{ij}$;

$$w_{emr} = c_1^{(r)}(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{E})\cdot\mathbf{H}^2 + c_2^{(r)}(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{H})(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}) + \\ + c_{jk}^{(rr)} H_j [\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}]_k, \quad (14)$$

где $c_{jk}^{(rr)} = \left(c_3^{(r)} r_{jk} + c_4^{(r)} r_{kj}\right)$, $c_1^{(r)} \div c_4^{(r)}$ — константы изгибно-кручено-электромагнитного взаимодействия;

$$w_{e\gamma r} = \lambda_1^{(r)}(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\kappa})\gamma_{ii} + \lambda_{2ij}^{(r\gamma)} E_i\kappa_j + \\ + 2\lambda_{ij}^{(rr)} E_i\psi_j + \lambda_i^{(r\gamma r)} E_i,$$

$$\lambda_{ij}^{(rr)} = \lambda_8^{(r)}\delta_{ij} r_{ll} + \lambda_9^{(r)} r_{ij} + \lambda_{10}^{(r)} r_{ji}, \quad (15)$$

$$\lambda_{2(4,6)ij}^{(r\gamma)} = \lambda_{2(4,6)}^{(r)}\gamma_{ij} + \lambda_{3(5,7)}^{(r)}\gamma_{ji},$$

$$\lambda_i^{(r\gamma r)} = e_{ijk}\left(\lambda_{4kl}^{(r\gamma)} r_{lj} + \lambda_{6kl}^{(r\gamma)} r_{jl}\right),$$

где $\lambda_1^{(r)} \div \lambda_{10}^{(r)}$ — константы изгибно-кручено-электродеформационного взаимодействия.

Входящие в выражение (3) слагаемые $w_{em\gamma}$, $w_{m\gamma r}$ и $w_{em\gamma r}$ дают дополнительные инварианты, не сводящиеся к перечисленным выше, но являющиеся бесконечно малыми величинами более высокого порядка.

Если в отсутствие внешних полей в среде существуют спонтанные поляризация и намагниченность, то в термодинамическом потенциале появляются дополнительные слагаемые, вид которых получается путем замен $\mathbf{E}$ на $\mathbf{P}$ и $\mathbf{H}$ на $\mathbf{M}$ в формулах (4)–(15). Заметим при этом, однако, что тензоры $\partial P_i/\partial x_j$ и $\partial M_i/\partial x_j$ будут несимметричными, в отличие от симметричных тензоров $\partial E_i/\partial x_j$ и $\partial H_i/\partial x_j$ в квазистатике.

При слабой температурной зависимости констант из выражений (4)–(15) учет неоднородности температуры в среде сводится к замене w_0 в выражении (3) на $w_{00} - \alpha(T - T_0)\,\mathrm{div}\,\mathbf{R}$, где α — коэффициент теплового расширения, а $w_{00} = w_0\,(T = T_0)$ [20].

4. УРАВНЕНИЯ ЭЛАСТОМАГНИТОЭЛЕКТРОСТАТИКИ НЕЛОКАЛЬНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД

Стационарные состояния нелокальных микрополярных сред, соответствующие экстремумам функционала (2), находятся путем решения системы (1) с учетом следующих выражений для вариационных производных термодинамических переменных:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial w}{\partial\mathbf{E}} - \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial w}{(\partial\mathbf{E}/\partial x_k)},$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial w}{\partial\mathbf{H}} - \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial w}{(\partial\mathbf{H}/\partial x_k)}, \quad (16)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial\gamma_{ij}} - \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial w}{(\partial\gamma_{ij}/\partial\gamma_k)},$$

$$\tau_{ij} = \frac{\partial w}{\partial r_{ij}} - \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial w}{(\partial r_{ij}/\partial x_k)}.$$

Найденные стационарные состояния будут устойчивыми для экстремумов с положительной второй вариацией; основному состоянию соответствует абсолютный минимум термодинамического потенциала, а все другие стационарные состояния будут метастабильными. Границы устойчивости любого состояния определяются из условия обращения второй вариации в нуль.

Далее при выполнении расчетов будем исходить из предположения о том, что все феноменологические константы, входящие в выражения (4)–(15), являются постоянными.

Подставляя (4), (8)–(10), (14) и (15) в первое уравнение системы (16), находим, что компоненты вектора электрической индукции равны

$$D_i = \varepsilon_{ij}E_j - a_2\Delta E_i + vH_i - \\ - \eta^{(en)}\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x_j} + D_i^{(g)} + D_i^{(r)}. \quad (17)$$

Здесь

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij} + 2\eta^{(e)}\gamma_{ij} + \left(\nu_{ij}^{(e)} + \nu_{ji}^{(e)}\right)$$

— тензор нелинейной диэлектрической проницаемости, где

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + a_1\mathbf{E}^2 + 2a_3\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + c_1\mathbf{H}^2 + \lambda^{(e)}u_{ll} + \\ + \theta_{ll}^{(e)} + 2\varsigma_3^{(e)}(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{E})$$

включает в себя как изотропные слагаемые, перенормированные электрическим и магнитным полями, деформациями и вращением, так и анизотропные слагаемые, обусловленные деформациями и вращением,

$$v = c_2(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}) + c_4 \operatorname{div}\mathbf{H} + c_2^{(r)}(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{H})$$

— нелинейная электромагнитная проницаемость,

$$\mathbf{D}^{(g)} = \\ = -\operatorname{grad}\left[a_3\mathbf{E}^2 + c_3\mathbf{H}^2 + \lambda^{(en)}u_{ll} + \theta_{ll}^{(en)} + \varsigma_2^{(e)}\left(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{E}\right)\right]$$

— градиентная составляющая электрической индукции,

$$D_i^{(r)} = \varsigma_{ij}\kappa_j - \frac{\partial\nu_{ij}^{(en)}}{\partial x_j} + 2\lambda_{ij}^{(rr)}\psi_j + \lambda_i^{(r\lambda r)} + e_{ilk}c_{jk}^{(rr)}H_lH_j$$

— обусловленная внутренним вращением составляющая электрической индукции, а

$$\varsigma_{ij} = \left(\varsigma^{(e)} + c_1^{(r)}\mathbf{H}^2 + \lambda_1^{(r)}\gamma_{ii}\right)\delta_{ij} + \lambda_{ij}^{(r\gamma)}.$$

Видно, что неоднородное внутреннее вращение типа изгиба-кручения перенормирует диэлектрическую проницаемость и дает вклад как в электрическую индукцию, так и в градиентную составляющую последней.

Подставляя (4), (8)–(10), (14) и (15) во второе уравнение системы (16), получаем следующее выражение для компонент вектора магнитной индукции:

$$B_i = \mu_{ij}H_j - b_{ij}\Delta H_i + \nu E_i - \eta_{lk}^{(mn)}\frac{\partial\gamma_{il}}{\partial x_k} + \\ + B_i^{(g)} + B_i^{(r)}. \quad (18)$$

Здесь $\mu_{ij} = \mu\delta_{ij} + \mu_{ij}^{(e)}$ — тензор нелинейной магнитной проницаемости, где

$$\mu = \mu_0 + b_1\mathbf{H}^2 + c_1\mathbf{E}^2 + 2c_3\operatorname{div}\mathbf{E} + \lambda^{(m)}u_{ll} + \\ + \theta_{ll}^{(m)} + c_1^{(r)}\left(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{E}\right)$$

— изотропное слагаемое, зависящее от полей, деформаций и внутреннего вращения,

$$\mu_{ij}^{(e)} = 2\eta^{(m)}\gamma_{ij} - \eta_{ij}^{(m\gamma)} + \lambda_{ij}^{(m\gamma)} + \left(\nu_{ij}^{(m)} + \nu_{ji}^{(m)}\right)$$

— анизотропное слагаемое, зависящее от деформаций и изгиба-кручения,

$$\eta_{ij}^{(m\gamma)} = \eta_3^{(mn)}\frac{\partial^2\gamma_{ik}}{\partial x_j\partial x_k} + \eta_4^{(mn)}\frac{\partial^2\gamma_{ij}}{\partial x_k\partial x_k},$$

$$\lambda_{ij}^{(m\gamma)} = \left(\lambda_2^{(mn)} + \lambda_3^{(mn)}\right)\frac{\partial^2\gamma_{ll}}{\partial x_i\partial x_j} + \\ + \lambda_5^{(mn)}\frac{\partial^2\gamma_{lj}}{\partial x_l\partial x_i} + \lambda_6^{(mn)}\frac{\partial^2\gamma_{jl}}{\partial x_l\partial x_i}$$

— функции, определяемые градиентом несимметричных деформаций,

$$b_{ij} = \left(b_2 + \lambda_2^{(mn)}\gamma_{ll}\right)\delta_{ij} + \eta_1^{(mn)}\gamma_{ij}$$

— перенормированный несимметричными деформациями коэффициент при неоднородном слагаемом,

$$\eta_{lk}^{(mn)} = \eta_1^{(mn)}\delta_{lk}\operatorname{div}\mathbf{H} + \left(\eta_3^{(mn)} + \eta_4^{(mn)}\right)\frac{\partial H_l}{\partial x_k}$$

— определяемый градиентом магнитного поля коэффициент,

$$\mathbf{B}^{(g)} = -\operatorname{grad}\left[c_4\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}\right) + U + \varsigma^{(m)}(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{H})\right]$$

— градиентная составляющая магнитной индукции,

$$U = \lambda_1^{(mn)}\gamma_{ll}\operatorname{div}\mathbf{H} + \eta_1^{(mn)}\gamma_{lk}\frac{\partial H_l}{\partial x_k} - \lambda_k^{(\gamma)}H_k$$

— эффективный потенциал, определяемый неоднородным полем и неоднородными деформациями,

$$\lambda_k^{(\gamma)} = \left(\lambda_2^{(mn)} + \lambda_3^{(mn)}\right)\frac{\partial\gamma_{ll}}{\partial x_k} + \\ + \lambda_5^{(mn)}\frac{\partial\gamma_{lk}}{\partial x_l} + \left(\lambda_6^{(mn)} - \lambda_7^{(mn)}\right)\frac{\partial\gamma_{kl}}{\partial x_l}$$

— коэффициент, определяемый неоднородными деформациями,

$$B_i^{(r)} = c_{ik}^{(rr)}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right]_k - e_{ijk}c_{lk}^{(rr)}H_lE_j$$

— составляющая магнитной индукции, определяемая электрическими и магнитными полями и изгибом-кручением.

Подстановка (6), (9), (11), (13) и (15) в третье уравнение системы (16) дает следующее выражение для компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = \lambda\gamma_{ll}\delta_{ij} + \eta_1\gamma_{ij} + \eta_2\gamma_{ji} - \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(e)} + \\ + \sigma_{ij}^{(h)} + \sigma_{ij}^{(r)} + \sigma_{ij}^{(re)}. \quad (19)$$

Здесь

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \left(\lambda_1^{(n)}\frac{\partial^2\gamma_{ll}}{\partial^2 x_k} + \eta_1^{(n)}\frac{\partial^2\gamma_{kl}}{\partial x_k\partial x_l} + \eta_2^{(n)}\frac{\partial^2\gamma_{lk}}{\partial x_k\partial x_l}\right)\delta_{ij} + \\ + \eta_{12}^{(n)}\frac{\partial^2\gamma_{ll}}{\partial x_i\partial x_j} + \eta_{39}^{(n)}\frac{\partial^2\gamma_{ki}}{\partial x_k\partial x_j} + 2\eta_{47}^{(n)}\frac{\partial^2\gamma_{ik}}{\partial x_k\partial x_j} + \\ + \eta_{39}^{(n)}\frac{\partial^2\gamma_{jk}}{\partial x_k\partial x_i} + \eta_{510}^{(n)}\frac{\partial^2\gamma_{kj}}{\partial x_k\partial x_i}$$

— напряжения, вызванные градиентами несимметричных деформаций,

$$\eta_{12}^{(n)} = \eta_1^{(n)} + \eta_2^{(n)},$$

$$\eta_{39}^{(n)} = \eta_3^{(n)} + \eta_6^{(n)} + \eta_8^{(n)} + \eta_9^{(n)},$$

$$\eta_{47}^{(n)} = \eta_4^{(n)} + \eta_7^{(n)},$$

$$\eta_{510}^{(n)} = \eta_5^{(n)} + \eta_{10}^{(n)}$$

— комбинации констант,

$$\sigma_{ij}^{(e)} = \frac{1}{2}\lambda^{(e)}\mathbf{E}^2\delta_{ij} + \eta_2^{(e)}E_iE_j + \lambda^{(en)}\operatorname{div}\mathbf{E}\delta_{ij} + \eta^{(en)}\frac{\partial E_i}{\partial x_j},$$

$$\sigma_{ij}^{(h)} = \frac{1}{2}\lambda^{(m)}\mathbf{H}^2\delta_{ij} + \eta^{(m)}H_iH_j - \frac{\partial \lambda_k^{(mn)}}{\partial x_k}\delta_{ij} - \\ - \frac{\partial \eta_{ijk}^{(mn)}}{\partial x_k} - \frac{\partial \lambda_{ijk}^{(mn)}}{\partial x_k}$$

— напряжения, вызванные электрическими и магнитными полями,

$$\sigma_{ij}^{(r)} = \theta_{ll}^{(\gamma)}\delta_{ij} + \nu_{ij}^{(\gamma)} + \varsigma_1^{(\gamma)}\frac{\partial \kappa_i}{\partial x_j} + \varsigma_2^{(\gamma)}\frac{\partial \kappa_j}{\partial x_i} + \\ + e_{ijk}\left(\varsigma_3^{(\gamma)}\frac{\partial r_{kl}}{\partial x_l} + \varsigma_4^{(\gamma)}\frac{\partial r_{lk}}{\partial x_l}\right)$$

— напряжения, вызванные изгибом-кручением,

$$\sigma_{ij}^{(re)} = \lambda_1^{(r)}(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{E})\delta_{ij} + \lambda_2^{(r)}E_i\kappa_j + \lambda_3^{(r)}E_j\kappa_i + \\ + \left(e_{ijl}\lambda_{kl}^{(rr)} + e_{ikl}\lambda_{4jl}^{(rr)} + e_{jkl}\lambda_{5il}^{(rr)}\right)E_k$$

— напряжения, вызванные совместным действием электрического поля и изгиба-кручения, где

$$\lambda_{4jl}^{(rr)} = \lambda_4^{(r)}r_{jl} + \lambda_6^{(r)}r_{lj}, \quad \lambda_{5il}^{(rr)} = \lambda_5^{(r)}r_{il} + \lambda_7^{(r)}r_{li}.$$

Подставляя (6), (9), и (11)–(14) в последнее уравнение системы (16), находим, что компоненты тензора микромоментов равны

$$\tau_{ij} = \theta' r_{kk}\delta_{ij} + \nu_1' r_{ij} + \nu_2' r_{ji} - \tau_{ij}^{(n)} + \tau_{ij}^{(eh)} + \\ + \tau_{ij}^{(r)} + \tau_{ij}^{(\gamma)}. \quad (20)$$

Здесь

$$\theta' = \theta + \theta^{(e)}\mathbf{E}^2 + 2\theta^{(en)}\operatorname{div}\mathbf{E} + \theta^{(m)}\mathbf{H}^2 + 2\theta^{(\gamma)}\gamma_{ll},$$

$$\nu_{1(2)}' = \nu_{1(2)}' + \nu_{1(2)}^{(e)}\mathbf{E}^2 + 2\nu_{1(2)}^{(en)}\operatorname{div}\mathbf{E} + \nu_{1(2)}^{(m)}\mathbf{H}^2 + 2\nu_{1(2)}^{(\gamma)}\gamma_{ll}$$

— перенормированные полями и деформациями коэффициенты, определяющие вклад изгиба-кручения в термодинамический потенциал,

$$\tau_{ij}^{(n)} = \nu_2^{(n)}\frac{\partial^2 r_{ll}}{\partial x_k^2}\delta_{ij} + \nu_{24}^{(n)}\frac{\partial^2 r_{ll}}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + 2\nu_{16}^{(n)}\frac{\partial^2 r_{ij}}{\partial x_k^2} + \nu_{45}^{(n)}\frac{\partial^2 r_{ji}}{\partial x_k^2}$$

— компоненты тензора микромоментов, определяемых градиентами изгиба-кручения, где

$$\nu_{24}^{(n)} = \nu_2^{(n)} + \nu_4^{(n)}, \quad \nu_{16}^{(n)} = \nu_1^{(n)} + \nu_3^{(n)} + \nu_6^{(n)},$$

$$\nu_{45}^{(n)} = \nu_4^{(n)} + 2\nu_5^{(n)}$$

— комбинации констант,

$$\tau_{ij}^{(eh)} = c_3^{(r)}H_i\left[\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}\right]_j + c_4^{(r)}H_j\left[\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}\right]_i - \varsigma^{(e)}e_{ijl}E_l$$

— компоненты тензора микромоментов, определяемых электрическими и магнитными полями,

$$\tau_{ij}^{(r)} = \nu_{3ij}^{(eh)}r_{ll} + \left(\nu_{3kl}^{(eh)}r_{kl} + \nu_{kl}^{(\gamma r)}\gamma_{lk}\right)\delta_{ij} + \\ + \nu_{4kj}^{(eh)}r_{ik} + \nu_{5kj}^{(eh)}r_{ki} + \nu_{5ik}^{(eh)}r_{jk}$$

— компоненты тензора микромоментов, определяемых электрическими и магнитным полями и изгибом-кручением, где

$$\nu_{3(4,5)kl}^{(eh)} = \nu_{3(4,5)}^{(e)}E_kE_l + \nu_{3(4,5)}^{(en)}\frac{\partial E_k}{\partial x_l} + \nu_{3(4,5)}^{(m)}H_kH_l$$

— коэффициенты, определяемые электрическими и магнитным полями,

$$\tau_{ij}^{(\gamma)} = e_{ijl}\left(\varsigma_1^{(\gamma)}\frac{\partial \gamma_{lk}}{\partial x_k} + \varsigma_2^{(\gamma)}\frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x_k}\right) - \\ - 2\left(\varsigma_3^{(\gamma)}\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + \varsigma_4^{(\gamma)}\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\right) + \lambda_8^r(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\psi})\delta_{ij} + \\ + \lambda_9^{(r)}E_i\psi_j + \lambda_{10}^{(r)}E_j\psi_i + \left(e_{jkl}\lambda_{4ki}^{(r\gamma)} + e_{ikl}\lambda_{6kj}^{(r\gamma)}\right)E_l + \\ + \left(\nu_3^{(\gamma)}\gamma_{ij} + \nu_4^{(\gamma)}\gamma_{ji}\right)r_{ll}$$

— компоненты тензора микромоментов, определяемых электрическим полем, несимметричными деформациями, изгибом-кручением и градиентами несимметричных деформаций.

Видно, что поля и деформации (однородные и неоднородные) перенормируют вклад изгиба-кручения в термодинамический потенциал и создают дополнительные микромоменты.

Подстановка (17)–(20) в (1) приводит к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{ij}E_j - a_2\Delta E_i + \nu H_i - \right.\\
&\qquad \left. - \eta^{(en)}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x_j} + D_i^{(g)} + D_i^{(r)}\right) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu_{ij}H_j - b_{ij}\Delta H_j + \nu E_i - \right.\\
&\qquad \left. - \eta_{lk}^{(mn)}\frac{\partial \gamma_{il}}{\partial x_k} + B_i^{(g)} + B_i^{(r)}\right) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda\gamma_{kk}\delta_{ij} + \eta_1\gamma_{ij} + \eta_2\gamma_{ji} - \sigma_{ij}^{(n)} + \right.\\
&\qquad \left. + \sigma_{ij}^{(e)} + \sigma_{ij}^{(h)} + \sigma_{ij}^{(r)} + \sigma_{ij}^{(re)}\right) + f_i = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\theta' r_{kk}\delta_{ij} + \nu_1' r_{ij} + \nu_2' r_{ji} - \tau_{ij}^{(n)} + \tau_{ij}^{(eh)} + \right.\\
&\qquad \left. + \tau_{ij}^{(r)} + \tau_{ij}^{(\gamma)}\right) - e_{ijk}\sigma_{jk} + \eta_i = 0.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Третье уравнение системы (21) для сил можно записать в несколько ином виде с использованием вектора смещений $\mathbf{R}$:

$$
\begin{aligned}
&\left(\lambda + \eta_{12}^{(n)}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{R} - \eta_1^{(n)}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{R} + \\
&\quad + \left(\eta_1^{(n)} - \eta_2^{(n)}\right)\operatorname{rot}\boldsymbol{\phi} - \\
&- \Delta\left(\lambda^{(\eta)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{R} + 2\eta_{47}^{(\eta)}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{R} - \eta^{(\varsigma)}\operatorname{rot}\boldsymbol{\phi}\right) + \\
&+ \left(2\theta^{(r)} + \nu_3^{(r)} + \nu_4^{(r)}\right) r_{ll}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\phi} - \nu_3^{(r)} r_{ll}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\phi} + \\
&\quad + \mathbf{f}^{(r)} + \mathbf{f}^{(e)} + \mathbf{f}^{(h)} + \mathbf{f}^{(re)} = -\mathbf{f},
\end{aligned} \tag{22}
$$

где

$$
\lambda^{(\eta)} = \lambda_1^{(n)} + 2\eta_{12}^{(n)} + 2\eta_{39}^{(n)} + 2\eta_{47}^{(n)} + \eta_{510}^{(n)},
$$

$$
\eta^{(\varsigma)} = 2\eta_{47}^{(n)} - \varsigma_1^{(r)} - \varsigma_3^{(r)}
$$

— комбинации констант;

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{f}^{(r)} = \operatorname{grad}U^{(r)} + \mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu_3^{(r)}r_{ij} + \nu_4^{(r)}r_{ji}\right)r_{ll} + \right.\\
&\left. + \left(\nu_5^{(r)}r_{jk} + \nu_6^{(r)}r_{kj}\right)r_{ik} + \left(\nu_7^{(r)}r_{jk} + \nu_8^{(r)}r_{kj}\right)r_{ki}\right],
\end{aligned}
$$

где

$$
U^{(r)} = \nu_1^{(r)}r_{kl}^2 + \nu_2^{(r)}r_{lk}^2
$$

— сила, обусловленная нелинейностью среды и неоднородностью поворотов;

$$
\mathbf{f}^{(e)} = \operatorname{grad}U^{(e)} + \eta_1^{(n)}\mathbf{E}\operatorname{div}\mathbf{E},
$$

где

$$
U^{(e)} = \frac{1}{2}\left(\lambda^{(e)} + \eta_1^{(e)}\right)\mathbf{E}^2 + \left(\lambda^{(en)} + \eta_2^{(e)}\right)\operatorname{div}\mathbf{E}
$$

— сила, обусловленная нелинейностью среды и неоднородностью электрического поля[2)];

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{f}^{(h)} = \operatorname{grad}U^{(h)} + \eta^{(m)}\mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{H} + \\
&\qquad + \lambda_{57}^{(mn)}\mathbf{H}\Delta\operatorname{div}\mathbf{H} + \eta_{17}^{(mn)}\left(\Delta\mathbf{H}\cdot\nabla\right)\mathbf{H},
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
U^{(h)} &= \lambda_1^{(h)}\mathbf{H}^2 + \lambda_2^{(h)}\left(\operatorname{div}\mathbf{H}\right)^2 + \lambda_3^{(h)}\left(\partial\mathbf{H}/\partial x_j\right)^2 + \\
&\quad + \lambda_4^{(h)}\left(\mathbf{H}\cdot\Delta\mathbf{H}\right),\\
\lambda_1^{(h)} &= \frac{1}{2}\left(\lambda^{(m)} + \eta^{(m)} + \lambda_3^{(mn)}\right),\\
\lambda_2^{(h)} &= \frac{1}{2}\left(\lambda_1^{(mn)} - 2\lambda_4^{(mn)} + \eta_1^{(mn)} - \eta_3^{(mn)} - \eta_4^{(mn)}\right),\\
\lambda_3^{(h)} &= \frac{1}{2}\left(\lambda_2^{(mn)} - 2\lambda_5^{(mn)} - 2\lambda_6^{(mn)} + \eta_2^{(mn)} - \right.\\
&\quad \left. - \eta_3^{(mn)} - \eta_4^{(mn)} - \eta_5^{(mn)}\right),\\
\lambda_4^{(h)} &= -\lambda_4^{(mn)} - \lambda_5^{(mn)} - \lambda_6^{(mn)} - \eta_3^{(mn)} - \eta_4^{(mn)},\\
\lambda_{57}^{(mn)} &= \lambda_5^{(mn)} + \lambda_7^{(mn)},\\
\eta_{17}^{(mn)} &= \eta_1^{(mn)} + \eta_2^{(mn)} - 2\eta_5^{(mn)} - \lambda_7^{(mn)}
\end{aligned}
$$

— сила, обусловленная нелинейностью среды и неоднородностью магнитного поля;

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{f}^{(re)} = \operatorname{grad}U^{(re)} + \lambda_3^{(\eta)}\boldsymbol{\kappa}\operatorname{div}\mathbf{E} + \lambda_2^{(\eta)}\left(\boldsymbol{\kappa}\cdot\nabla\right)\mathbf{E} + \\
&\qquad + \lambda_3^{(r)}\left(\mathbf{E}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{f}_1^{(re)},
\end{aligned}
$$

где

$$
U^{(re)} = \lambda_1^{(r)}\left(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{E}\right),
$$

$$
\mathbf{f}_1^{(re)} = \mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(e_{ijl}\lambda_{kl}^{(rr)} + e_{jkl}\lambda_{il}^{(rr)}\right)E_k\right]
$$

— сила, обусловленная неоднородностью изгиба-кручения и электрического поля.

Аналогично, четвертое уравнение системы (21) для моментов сил можно записать через векторы смещений $\mathbf{R}$ и поворотов $\boldsymbol{\phi}$:

$$
\begin{aligned}
&\theta''\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\phi} + \varsigma''\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\phi} - 2\eta_{12}\boldsymbol{\phi} + \eta_{12}\operatorname{rot}\mathbf{R} - \\
&- \Delta\left(\nu_{26}^{(n)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\phi} - \nu_{16}^{(n)}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\phi} - \varsigma_{13}^{(\gamma)}\operatorname{rot}\mathbf{R}\right) - \\
&- \left(\nu_3^{(\gamma)} + \nu_4^{(\gamma)}\right)r_{ll}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{R} - \nu_3^{(\gamma)}r_{ll}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{R} - \\
&\qquad - \nu_{43}^{(r\gamma)}r_{ll}\operatorname{rot}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{n}^{(n)} + \mathbf{n}^{(eh)} = -\boldsymbol{\eta},
\end{aligned} \tag{23}
$$

[2)] В выражении для этой силы опущены слагаемые более высокого порядка малости, аналогичные приводимым далее для силы магнитного происхождения с заменой $\mathbf{H}$ на $\mathbf{E}$ и верхних индексов (m) и (h) на (e).

где

$$\theta'' = \theta' + \nu_4' + \nu_2' - 2\left(\varsigma_3^{(\gamma)} + \varsigma_4^{(\gamma)}\right) - 2\left(\varsigma_3^{(r)} + \varsigma_4^{(r)}\right),$$

$$\varsigma'' = \varsigma_1' - \left(\varsigma_1^{(\gamma)} - \varsigma_2^{(\gamma)} + 2\varsigma_3^{(\gamma)} + \varsigma_1 + 2\varsigma_3 - 2\eta_{310}^{(n)}\right),$$

$$\nu_{26}^{(n)} = 2\left(\nu_2^{(n)} + \nu_4^{(n)} + \nu_5^{(n)} + \nu_{16}^{(n)}\right),$$

$$\varsigma_{13}^{(\gamma)} = \varsigma_1^{(\gamma)} + \varsigma_3^{(\gamma)},$$

$$\nu_{43}^{(r\gamma)} = 2\left(\nu_4^{(r)} - \nu_3^{(r)} + \nu_{43}^{(\gamma)}\right), \quad \nu_{43}^{(\gamma)} = \nu_4^{(\gamma)} - \nu_3^{(\gamma)}.$$

Здесь

$$\mathbf{n}^{(n)} = \nu_{43}^{(\gamma)}[\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\phi}] + \mathrm{grad}\left[-\nu_{43}^{(\gamma)}\,(\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\phi}) + \right.$$
$$\left. + \left(\nu_3^{(\gamma)}\frac{\partial\phi_l}{\partial x_k} + \nu_4^{(\gamma)}\frac{\partial\phi_k}{\partial x_l}\right)\frac{\partial R_k}{\partial x_l}\right] +$$
$$+ \mathbf{e}_i\left(\nu_3^{(\gamma)}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \nu_4^{(\gamma)}\frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\phi}) \quad (24)$$

— нелинейная составляющая механического момента сил;

$$\mathbf{n}^{(eh)} = \mathbf{n}_1^{(eh)} + \mathbf{n}_2^{(eh)} + \mathbf{n}_3^{(eh)} + \mathbf{n}_4^{(eh)} \quad (25)$$

— момент сил, создаваемый электрическими и магнитным полями.

Здесь

$$\mathbf{n}_1^{(eh)} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_3^{(r)}\mathbf{H}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]_j + c_4^{(r)}H_j\,[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\right),$$

$$\mathbf{n}_2^{(eh)} = \mathrm{grad}\left(\nu_{3kl}^{(eh)}r_{kl}\right) +$$
$$+ \mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu_{3ij}^{(eh)}r_{ll} + \nu_{4kj}^{(eh)}r_{ik} + \nu_{5kj}^{(eh)}r_{ki}\right),$$

$$\mathbf{n}_3^{(eh)} = \lambda_8^{(r)}\mathrm{grad}\,(\mathbf{E}\boldsymbol{\psi}) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda_9^{(r)}\mathbf{E}\psi_j + \lambda_{10}^{(r)}E_j\boldsymbol{\psi}\right) +$$
$$+ \mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(e_{jkl}\lambda_{4ki}^{(r\gamma)} + e_{ikl}\lambda_{6kj}^{(r\gamma)}\right)E_l\right],$$

$$\mathbf{n}_4^{(eh)} = -\lambda_{23}^{(r)}\,[\mathbf{E}\times\boldsymbol{\kappa}] - \eta_{457}^{(mn)}\,[\mathbf{H}\times\Delta\mathbf{H}] - 2\mathbf{e}_i\lambda_{ni}^{(rr)}E_n,$$

где

$$\eta_{457}^{(mn)} = \eta_4^{(mn)} - \eta_5^{(mn)} - \eta_7^{(mn)}.$$

В выражении для $\mathbf{n}_4^{(eh)}$ опущено допускаемое симметрией слагаемое, пропорциональное $\mathbf{E}\times\Delta\mathbf{E}$, поскольку неоднородность электрического поля проявляется в более низком порядке малости, в отличие от неоднородности магнитного поля (ср. выражения (9) и (11)).

Последнее слагаемое в выражении для определяемых электрическим и магнитным полями компонент тензора микромоментов $\tau_{ij}^{(eh)}$ (см. расшифровку обозначений к формуле (20)), равное $-\varsigma^{(e)}e_{ijl}E_l$, не дает вклада в механический момент сил $\mathbf{n}_1^{(eh)}$ из-за безвихревого характера статического электрического поля. Однако если в среде существует спонтанная поляризация $\mathbf{P}$, то возникает момент сил, пропорциональный $\mathrm{rot}\,\mathbf{P}$. Кроме того, при наличии спонтанных поляризации $\mathbf{P}$ и намагниченности $\mathbf{M}$ возникают механические моменты типа $\mathbf{P}\times\mathbf{E}$ и $\mathbf{M}\times\mathbf{H}$, отсутствующие в средах без магнитного и электрического упорядочения, где $\mathbf{P}||\mathbf{E}$ и $\mathbf{M}||\mathbf{H}$.

В линейном приближении и без учета нелокальности (пространственной дисперсии) в выражениях (22) и (23) остаются соответственно только первые три и первые четыре слагаемых, что согласуется с результатами, полученными в работе [22] для центросимметричных сред. Из-за нелокальности в выражениях (22) и (23) появляются слагаемые с оператором Лапласа; члены с коэффициентом r_{ll} аналогичны полученным в [22] для случая отсутствия центросимметричности в средах.

Из приведенных выше уравнений следует, что в рассматриваемой микрополярной среде неоднородные внешние и внутренние вращения создают не только упругие напряжения, но и электрические и магнитные поля, а неоднородные упругие напряжения и внешние поля индуцируют внутренние вращения.

5. УПРУГИЕ ВОЛНЫ В НЕЛОКАЛЬНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕДАХ

Нелокальный характер микрополярных сред оказывает сильное воздействие и на их динамические свойства, в частности на дисперсию и характеристики всех элементарных возбуждений. Для иллюстрации этого применим систему уравнений (21) для анализа спектра упругих волн. Поскольку скорости упругих волн много меньше скорости света, в уравнениях электродинамики можно не учитывать запаздывание и использовать квазистатическое приближение для полей и индукций.

Уравнения динамики среды получаются путем добавления в правые части описывающих упругую подсистему уравнений в (1) сил и моментов сил инерции, т. е.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 R_i}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + n_i = \rho J_{ij} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial t^2}, \tag{26}$$

где ρ — плотность среды, а J_{ij} — компоненты тензора момента инерции. Будем искать решение системы (26) в виде плоских гармонических волн

$$\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\phi} \propto \exp\left(ikx - \omega t\right),$$

где $\mathbf{k}$ и ω — волновой вектор и частота. В линейном приближении с учетом (21) упругие смещения и повороты определяются следующей системой уравнений:

$$d_{11}\mathbf{R} - d_{12}\mathbf{k}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}\right) = -ic_1'\left[\mathbf{k}\times\boldsymbol{\phi}\right],$$
$$d_{22}\boldsymbol{\phi} - d_{21}\mathbf{k}\left(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\phi}\right) = -ic_2'\left[\mathbf{k}\times\mathbf{R}\right], \tag{27}$$

где

$$d_{11} = \rho\omega^2 - \left(\eta_1 + 2\eta_{47}^{(n)}k^2\right)k^2,$$

$$d_{12} = \lambda + \eta_2 - \left(\lambda^{(n)} + 2\eta_{47}^{(n)}\right)k^2 - \left(\lambda^{(en)} + \eta_2^{(e)}\right)Q,$$

$$Q = \left(\lambda^{(en)} + \eta^{(en)}\right)k^2/\left(\varepsilon_0 + a_2k^2\right),$$

$$c_1' = (\eta_1 - \eta_2) + \eta^{(\varsigma)}k^2,$$

$$d_{22} = \rho J\omega^2 - 2\eta_{12} - \left(\nu'' + \nu_{16}^{(n)}\right)k^2, \quad J_{ij} = J\delta_{ij},$$

$$d_{21} = \theta'' - \nu'' + \left(\nu_{26}^{(n)} - \nu_{16}^{(n)}\right)k^2, \quad c_2' = \eta_{12} - \varsigma_{13}^{(\gamma)}k^2.$$

В рассматриваемом приближении электрическое поле связано со смещением соотношением $\mathbf{k}\cdot(\mathbf{E} + Q\mathbf{R}) = 0$, а связь между магнитной и упругой подсистемами вообще отсутствует.

Продольные волны в среде являются либо волнами смещения, $\mathbf{R}||\mathbf{k}$, либо волнами поворота, $\boldsymbol{\phi}||\mathbf{k}$, которые между собой не связаны. Дисперсионное соотношение для волн смещения имеет вид

$$\omega^2 = \left(v_{dl}^2 - v_{dlk}^2\right)k^2,$$

где

$$v_{dl}^2 = \left(\eta_1 + \eta_2 + \lambda\right)/\rho$$

— квадрат скорости продольных волн смещения в классической теории упругости, а

$$v_{dlk}^2 = \left[\lambda^{(\eta)}k^2 + \left(\lambda^{(en)} + \eta_2\right)Q\right]/\rho$$

— добавка к квадрату скорости за счет пространственной дисперсии среды. Наличие связи между Q и $\mathbf{E}$ (см. выше) свидетельствует о том, что на дисперсию волн рассматриваемого типа влияет электрическое поле.

Дисперсия волн поворота («микроротационные» волны в классификации Новацкого [13]) описывается соотношением

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \left(v_{rl}^2 + v_{rlk}^2\right)k^2,$$

где

$$v_{rl}^2 = \left(\theta'' + \nu_{16}^{(n)}\right)/\rho J$$

— квадрат скорости продольных волн поворота,

$$v_{rlk}^2 = \left(\nu_{26}^{(n)} - \nu_{16}^{(n)}\right)k^2/\rho J$$

— добавка к квадрату скорости за счет пространственной дисперсии среды, а $\omega_0^2 = 2\eta_{12}/\rho J^2$ — слагаемое, свидетельствующее о наличии активации (энергетической щели) для данного типа волн.

Уравнения для поперечных волн с $\mathbf{R}\perp\mathbf{k}\perp\boldsymbol{\phi}$ оказываются связанными, а дисперсионное соотношение для таких гибридных (связанных) волн смещения и поворота имеет вид

$$\left[\omega^2 - \left(v_{dt}^2 + v_{dtk}^2\right)k^2\right]\left[\omega^2 - \omega_0^2 - \left(v_{rt}^2 + v_{rtk}^2\right)k^2\right] - c_0k^2 = 0, \tag{28}$$

где $v_{dt}^2 = \eta_1/\rho$ и $v_{dtk}^2 = 2\eta_{47}^2k^2/\rho$ — соответственно квадрат поперечной скорости волн смещения и обусловленная пространственной дисперсией добавка, $v_{rt}^2 = \nu''/\rho J$ и $v_{rtk}^2 = \nu_{16}^{(n)}k^2/\rho J$ — соответственно поперечная скорость волн поворота и обусловленная пространственной дисперсией добавка, $c_0 = c_1'c_2'/\rho^2 J$ — коэффициент связи между волнами смещений и поворотов.

Дисперсионные кривые имеют две ветви — активационную $\omega_1(k)$ и безактивационную $\omega_2(k)$, определяемые соотношением

$$\omega_{1,2}(k) = Q_1 \pm \left(Q_1^2 - Q_2\right)^{1/2}, \tag{29}$$

где

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left[\omega_0^2 + \left(v_{dt}^2 + v_{dtk}^2 + v_{rt}^2 + v_{rtk}^2\right)k^2\right],$$

$$Q_2 = \left\{\left(v_{dt}^2 + v_{dtk}^2\right)\left[\omega_0^2 + \left(v_{rt}^2 + v_{rtk}^2\right)k^2\right] - c_0\right\}k^2.$$

В пределе больших волновых чисел ($k\to\infty$) волны обладают доминирующей пространственной дисперсией и при $\beta_r > \beta_d$ имеют асимптоты

$$\omega_1^2 \to \beta_r k^4, \quad \omega_2^2 \to \beta_d k^4,$$

а при $\beta_r < \beta_d$ — асимптоты

$$\omega_1^2 \to \beta_d k^4, \quad \omega_2^2 \to \beta_r k^4,$$

где

$$\beta_r = 2\eta_{47}^{(2)}/\rho, \quad \beta_d = \nu_{16}^{(n)}/\rho J.$$

В области малых волновых чисел ($k \to 0$) имеем

$$\omega_1^2 \to \omega_0^2 + \left(v_{rt}^2 + v_c^2\right) k^2 + \left(\beta_r + \beta_{vc}\right) k^4,$$

$$\omega_2^2 \to \left(v_{rt}^2 - v_c^2\right) k^2 + \left(\beta_d - \beta_{vc}\right) k^4,$$

где $v_c^2 = v_{dt}^2 \left[1 - (\eta_2/\eta_1)\right]/2$ — добавка к квадратам скоростей за счет взаимодействия волн разных ветвей, а

$$\beta_{vc} = \left[\left(v_{dt}^2 - v_{rt}^2\right)^2 - 4c_{01}\right]/4\omega_0^2,$$

$$c_{01} = \frac{2v_c^2\zeta_{13}^{(\gamma)}}{\rho J} + \frac{\omega_0^2\eta^{(\zeta)}}{2\rho}.$$

Влияние взаимодействия волн разных ветвей на их скорости максимально в зонах фазового синхронизма, которые располагаются вблизи точек пересечения дисперсионных кривых «несвязанных» ветвей. Значения квадрата волнового вектора в таких точках определяется уравнением

$$\left(k_s^2\right)_{1,2} = -Q_{s1} \pm \left(Q_{s1}^2 - Q_{s2}\right)^{1/2},$$

где

$$Q_{s1} = \frac{1}{2}\frac{v_{rt}^2 - v_{dt}^2}{\beta_r - \beta_d},$$

$$Q_{s2} = \frac{\omega_0^2}{\beta_r - \beta_d}.$$

В случае $\beta_r > \beta_d$ существуют две точки пересечения $\left(k_s^2\right)_{1,2}$ при $(v_{rt}/v_{dt})^2 < 1$; если $(v_{rt}/v_{dt})^2 > 1$, то ветви не пересекаются. В случае $\beta_r < \beta_d$ ветви пересекаются в одной точке, а именно $\left(k_s^2\right)_1$. В окрестности точек фазового синхронизма ветви расталкиваются для $c_0 > 0$ и притягиваются для $c_0 < 0$. В общем случае волны обладают эллиптической поляризацией, в чем можно убедиться, подставляя выражение (29) в уравнения (27).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ выполненных расчетов показывает, что в нелокальных микрополярных средах допускается возможность существования гораздо более широкого набора эластомагнитоэлектрических эффектов по сравнению с бесструктурными «классическими» средами. К сожалению, при этом даже на феноменологическом уровне значительно усложняется теоретическое описание подобных явлений и чрезвычайно затрудняется количественное сравнение с результатами экспериментов из-за большого числа материальных констант, необходимых для адекватной характеристики взаимодействия между электрической, магнитной и упругой подсистемами среды.

Так, например, в настоящей работе для описания простейшего случая — изотропной среды без дальнего порядка — используется 90 констант[3)], в то время как в аналогичных расчетах без учета электрической и магнитной подсистем в рамках классической теории упругости можно обойтись 19-ю константами [19].

Определенные проблемы при использовании неклассических теорий упругости возникают и при решении системы уравнений (21). Для нахождения частных решений обычно прибегают к некоторым упрощающим предположениям, детализируя топологию, симметрию и параметры элементов микрополярного континуума, после чего становится возможным использование хорошо известных в классической теории подходов (потенциалов напряжений Эри, интегральных преобразований Хенкеля или Фурье, методов комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили и др.; подробности см., например, в [25]). При поиске приближенных решений можно применить опробованный в работах [18–20] метод разложения в ряд по формальному малому параметру, однако при этом нахождение решений даже первых приближений потребует длительных и громоздких вычислений.

Несмотря на описанные выше сложности, следует иметь в виду, что к настоящему времени именно неклассическая теория упругости позволила правильно интерпретировать множество наблюдаемых на практике явлений, не находящих объяснения в классических рамках. К областям применимости неклассической теории упругости в технике сейчас относят ячеистые твердые тела, волокнистые, пористые, зернистые и гранулированные материалы, армированные композиты, сыпучие среды, оболочки, горные породы, 4D-среды, конструкционные материалы с масштабными технологическими неоднородностями и др. [10].

Что касается эластомагнитоэлектростатических явлений в микрополярных средах, то здесь открывается необозримое поле деятельности как для теоретических и экспериментальных исследований, так и для новых практических применений.

[3)] Такое количество констант не является чем-то экстраординарным, поскольку, например, в сходной в методическом отношении работе [24], посвященной учету внутреннего вращения в континуальной теории асимметрической упругости, авторы использовали 45 констант для описания только упругой подсистемы.

Нелокальный характер микрополярных сред оказывает сильное воздействие не только на статические свойства и элементарные возбуждения (см. разд. 4 и 5), но и на разнообразные нелинейные динамические процессы, на что имеются указания в более ранних публикациях. Наличие переменного электромагнитного поля приводит к появлению в энергии квадратичных по **E** и **H** слагаемых, в результате чего возникают постоянные составляющие электрической и магнитной индукции, упругие напряжения и силы, упругие микромоменты и моменты сил.

Уже более полувека назад впервые было установлено, что интенсивное световое поле через нелинейное электромагнитное взаимодействие может создавать намагниченность и распределенные силы даже в неупорядоченной среде [26]. Позже было показано, что в сходных условиях в магнитоупорядоченных средах могут наблюдаться оптомагнитные и оптомагнитоэлектрические явления (индуцирование светом изменения намагниченности и (или) электрических и магнитных полей), оптоиндуцированные магнитные фазовые переходы, оптомагнитокалорическое охлаждение, смещение магнитной трикритической точки, возбуждение и усиление спиновых волн [27–30].

В нелинейных микрополярных средах появляется возможность существования и ряда нетрадиционных эффектов. Так, из формул (20) и (22) с учетом расшифровок входящих в них слагаемых следует, что квазигармоническая электромагнитная волна, для которой

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\,\mathbf{E}_0 \exp(ikx - i\omega t) + \text{c.c.},$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}\,\mathbf{H}_0 \exp(ikx - i\omega t) + \text{c.c.},$$

где $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — медленно меняющиеся функции x и t, создает не только силы $\mathbf{f}^{(e)}$ и $\mathbf{f}^{(h)}$, но и создает или модифицирует микромоменты $n_1^{(eh)} \div n_4^{(eh)}$ (см. выражение (25)). Так, появляется момент $n_1^{(eh)}$, имеющий составляющие с частотами ω и 3ω. Возникает также момент $n_2^{(eh)}$, для которого наряду с гармониками на частоте 2ω имеется и квазистационарное слагаемое с

$$\left(\nu_{3(4,5)}^{(eh)}\right)_{kl} = \frac{1}{4}\left\{\nu_{3(4,5)}^{(e)}\left[(E_{0k}E_{0l}^*) + (E_{0k}^*E_{0l})\right] + \right. \\ \left. + \nu_{3(4,5)}^{(m)}\left[(H_{0k}H_{0l}^*) + (H_{0k}^*H_{0l})\right]\right\}.$$

Аналогичные слагаемые, помноженные на k^2, появляются и в выражении для момента $n_4^{(eh)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1987).

2. E. Cosserat and F. Cosserat, *Théorie des Corps Déformables*, Hermann et Fils, Paris (1909).

3. В. И. Ерофеев, Вычислит. механ. сплошных сред **2**(4), 5 (2009).

4. R. Lakes, in: *Continuum Models for Materials with Microstructures*, ed. by H. Mühlhaus, Wiley, New York (1995), pp. 1–22.

5. И. Ю. Смолин, Математическое моделирование систем и процессов № 14, 189 (2006).

6. П. А. Белов, *Существующие модели градиентных теорий упругости и их обобщение.* http://www.rusnauka.com/6_PNI_2014/Tecnic/2_160882.doc.htm.

7. П. А. Белов, Композиты и наноструктуры № 1, 24 (2011).

8. W. Voigt, Abh. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. **34**, 3 (1887).

9. M. J. Le Roux, Ann. Sci. de l'École Norm. Supér. **28**, 523 (1911).

10. S. Forest, in *Encyclopedia of Materials*: *Science and Technology*, Elsevier, Amsterdam (2001), pp. 1715–1718.

11. Ж. Можен, *Механика электромагнитных сплошных сред*, Мир, Москва (1991). [G. A. Maugin, *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*, North-Holland, Amsterdam (1988)].

12. A. C. Eringen and G. A. Maugin, *Electrodynamics of Continua*. II. *Fluids and Complex Media*, Springer-Verlag, New York (1990).

13. W. Nowacki, *Theory of Asymmetric Electricity*, Pergamon Press, Oxford (1985).

14. Е. А. Иванова, Я. Э. Колпаков, *Континуум Коссера и пьезоэлектричество.* Приложение к книге: П. А. Жилин, *Рациональная механика сплошных сред*: учеб. пособие, Изд-во Политехн. ун-та, СПб (2012).

15. А. С. Козицын, А. П. Шмаков, Вестник МГУ, матем. и механика № 3, 32 (2000).

16. Е. Ф. Грекова, П. А. Жилин, Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион, естеств. науки, спецвыпуск 24 (2000).

17. А. К. Таганцев, УФН **152**, 423 (1981).

18. А. Ф. Кабыченков, Ф. В. Лисовский, Письма в ЖЭТФ **98**, 898 (2013).

19. А. Ф. Кабыченков, Ф. В. Лисовский, ЖЭТФ **145**, 733 (2014).

20. А. Ф. Кабыченков, Ф. В. Лисовский, ЖЭТФ **146**, 624 (2014).

21. Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская, *Основы кристаллофизики*, Наука, Москва (1979).

22. Е. В. Кувшинский, Э. А. Аэро, ФТТ **5**, 2591 (1963).

23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).

24. Е. В. Кувшинский, Э. А. Аэро, ФТТ **6**, 2689 (1963).

25. М. А. Кулеш, Дисс. докт. физ.-мат. наук, Институт механики сплошных сред УРО РАН, Пермь (2001).

26. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **39**, 1450 (1960).

27. А. Ф. Кабыченков, ЖЭТФ **100**, 1219 (1991).

28. A. Kabychenkov, *Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics*, Vol. 13, *Nonlinear Electromagnetic System*, ed. by V. Kose and J. Sievert. JOS Press, Amsterdam (1998), p. 879.

29. А. Ф. Кабыченков, ФТТ **38**, 2478 (1996).

30. А. Ф. Кабыченков, ФТТ **48**, 485 (2006).