

ЭЛЕКТРОН В ПОЛЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ: КВАНТОВОЕ ВРЕМЯ, МАГНИТООСЦИЛЛЯЦИИ И РАЗРУШЕНИЕ КОГЕРЕНТНОСТИ

И. В. Горный^{a,b,c,d}, *А. П. Дмитриев*^{b*}, *А. Д. Мирлин*^{a,c,d,e}, *И. В. Протопопов*^{a,c,d}

^a *Institut für Nanotechnologie, Karlsruhe Institute of Technology
76021, Karlsruhe, Germany*

^b *Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия*

^c *Institut für Theorie der kondensierten Materie, Karlsruhe Institute of Technology
76128, Karlsruhe, Germany*

^d *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

^e *Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова
188300, Гатчина, Ленинградская обл., Россия*

Поступила в редакцию 13 января 2016 г.

Изучено движение электрона в мембране под влиянием равновесных изгибных колебаний, коррелятор которых убывает с расстоянием по закону $r^{-2\eta}$. Подробно рассмотрен случай $\eta < 1/2$, когда даже при сколь угодно слабом взаимодействии теория возмущений неприменима. Показано, что в этом случае обратное квантовое время $1/\tau_q$ пропорционально $g^{1/(1-\eta)}T^{(2-\eta)/(2-2\eta)}$, где g — константа электрон-фононного взаимодействия, а T — температура. Развитый метод применен к вычислению плотности состояний электрона в перпендикулярном к мембране магнитном поле. Показано, в частности, что в режиме $\omega_c\tau_q \gg 1$ уровни Ландау имеют гауссову форму с шириной, зависящей от магнитного поля по закону B^η . Кроме того, вычислено время сбоя фазы волновой функции электрона τ_φ за счет его взаимодействия с изгибными фононами в случае $\eta < 1/2$. Показано, что имеется несколько температурных интервалов, в которых величина $1/\tau_\varphi$ выражается различными степенными функциями от константы электрон-фононного взаимодействия, температуры и энергии электрона.

DOI: 10.7868/S0044451016080186

1. ВВЕДЕНИЕ

Создание графена [1–3] инициировало новый интерес к физическим свойствам мембран, в особенности, к транспортным явлениям в них. Экспериментально и теоретически (см. [4, 5]) были изучены различные механизмы рассеяния носителей заряда в графене, в первую очередь, рассеяние на примесном беспорядке, которое вносит доминирующий вклад в сопротивление при низких температурах. Напротив, при высоких температурах более важными могут оказаться электрон-фононные столкновения, играю-

щие также, наряду с электрон-электронными, определяющую роль в процессах декогеренции при всех температурах. Влияние электрон-фононных столкновений на транспорт особенно велико в подвешенной мембране, где отсутствует случайный потенциал подложки, и концентрация дефектов кристаллической решетки значительно ниже. При этом самостоятельный интерес, как с практической, так и с теоретической точек зрения, представляет взаимодействие носителей заряда с так называемыми изгибными фононами, способными распространяться в мембране благодаря наличию у нее изгибной жесткости, т.е. жесткости относительно локальных отклонений мембраны $h(\mathbf{r}, t)$ в направлении, перпендикулярном к плоскости, в которой она расположе-

* E-mail: apd1812@hotmail.com

В отличие от обычных фононов, отвечающих колебаниям атомов кристаллической решетки в плоскости мембраны и имеющих линейный закон дисперсии, $\omega_q \propto q$, закон дисперсии изгибных фононов значительно «мягче», $\omega_q \propto q^2$. Вследствие этого эффективность тепловых флуктуаций, связанных с такими фононами, оказывается более высокой, что может привести к неустойчивости плоской формы мембраны [7, 8]. Эта неустойчивость еще два десятилетия назад обсуждалась применительно к биологическим мембранам и неорганическим пленкам ([9–11]; см. также обзор [6]). Было показано [11–13], что учет нелинейного взаимодействия изгибных колебаний с колебаниями в плоскости мембраны приводит к модификации закона дисперсии изгибных фононов в области малых волновых векторов, где он становится более жестким, $\omega_q \propto q^{2-\eta/2}$, $\eta < 1$, и плоская форма мембраны при достаточно низких температурах оказывается устойчивой. Отметим, что в случае графена «достаточно низкими» являются даже температуры, в несколько раз превышающие комнатную. Это обусловлено аномально высокой изгибной жесткостью κ графеновых мембран, так что при комнатной температуре $\kappa/T \approx 30$.

Необычная «мягкость» закона дисперсии изгибных фононов приводит к особенностям и в эффектах, связанных с электрон-фононным взаимодействием. Гамильтониан взаимодействия электрона с изгибными колебаниями имеет вид $g(\nabla h)^2$, где g — константа с размерностью энергии. При усреднении этого выражения по распределению тепловых фононов возникает логарифмическая расходимость на малых q . Расходимость исчезает, если принять $\omega_q \propto q^{2-\eta/2}$. При этом коррелятор $\langle \partial_\alpha h(\mathbf{r}, \tau) \times \partial_\beta h(\mathbf{r}', \tau') \rangle$ убывает в зависимости от расстояния как $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{2\eta}$.

Вопрос о величине показателя η дискутировался в целом ряде работ [12–26]. В работе [12] проблема была изучена аналитически в рамках самосогласованного приближения для случая чистой мембраны, вложенной в пространство размерности d . Было показано, что при $d \gg 1$, когда сделанные приближения контролируемы, $\eta \approx 2/d$. Для двумерной мембраны в физическом пространстве $d = 3$ самосогласованное приближение дает $\eta \approx 0.821$. В работах [20, 24] были выполнены численные расчеты для $d = 3$ и найдены значения соответственно $\eta \approx 0.6$ и $\eta \approx 0.72$. В работе [26] методом ренорм-группы была изучена подвешенная мембрана с дефектами, наличие которых приводит к появлению статических флуктуаций ∇h . Было показано, что коррелятор этих флуктуаций убывает как степень

расстояния с показателем, принимающим различные значения на разных пространственных масштабах. В частности, в пределе больших расстояний показатель равен 2η независимо от силы беспорядка. При этом для достаточно сильного беспорядка существует параметрически широкая область масштабов, где показатель степени равен $\eta/4$, что для физической мембраны дает значение 0.15–0.2. Таким образом, в мембране с дефектами коррелятор может убывать значительно медленнее, чем в чистой мембране. Как мы увидим, в этой ситуации теория возмущений неприменима.

В работе [27] обсуждался поляронный эффект, обусловленный взаимодействием электрона с изгибными фононами. Была дана оценка радиуса и энергии связи полярона. Влияние взаимодействия электронов с изгибными фононами на транспорт рассматривалось, например, в [28–39]. Опишем кратко результаты двух последних из них, наиболее близких к целям нашей статьи. В [38] был найден вклад рассеяния носителей заряда за счет их взаимодействия с изгибными фононами в проводимость чистого подвешенного графена в окрестности точки Дирака. Было показано, что температурная зависимость проводимости описывается степенной функцией вида $T^{-\eta}$. Было проведено сравнение вкладов электрон-фононных и электрон-электронных столкновений в проводимость и показано, что при высоких температурах, включая комнатную, доминируют первые из них. Расчеты были выполнены для случая $\eta > 1/2$, когда коррелятор создаваемого фононами потенциала убывает с расстоянием быстрее, чем $1/r$, и при вычислении темпа рассеяния электронов можно использовать золотое правило. В работе [39] было вычислено время сбоя фазы волновой функции электрона за счет его взаимодействия с изгибными фононами. Предполагалось, что $\eta > 1/2$. Был рассмотрен как случай низких концентраций электронов, когда экранирование не существенно, так и случай высоких концентраций, когда им пренебречь нельзя. Было показано, что обусловленный этим механизмом темп сбоя фазы может оказаться сравнимым с темпом сбоя фазы за счет электрон-электронных столкновений.

Цель настоящей работы — изучить движение электрона в поле равновесных изгибных фононов в предположении $\eta < 1/2$, когда фононный коррелятор убывает с расстоянием медленнее, чем $1/r$, так что золотое правило, как будет видно, неприменимо даже при сколь угодно слабом электрон-фононном взаимодействии. Этот случай интересен по несколь-

ким причинам. Во-первых, значение $\eta < 1/2$ реализуется, как было сказано, в мембране с достаточно сильным беспорядком. Во-вторых, приведенные выше оценки величины η нельзя считать вполне надежными. Действительно, с одной стороны расчет, основанный на использовании самосогласованного приближения, корректен только при высоких размерностях, тогда как при $d = 3$ он дает для η значение, справедливое лишь по порядку величины. С другой стороны, результаты имеющихся численных расчетов различаются между собой столь значительно, что неравенство $\eta > 1/2$ не может, строго говоря, считаться окончательно установленным. В-третьих, отдельный теоретический интерес представляет задача о двумерной мембране, вложенной в пространство высокой размерности, когда $\eta \approx 2/d < 1/2$. Наконец, учет дальнедействующих взаимодействий, возникающих в изогнутой мембране, таких как взаимное притяжение удаленных друг от друга участков плоской мембраны (например, за счет сил Ван дер Ваальса) или запрет на самопересечение мембраны, также может приводить к изменению класса универсальности и появлению медленно затухающих корреляторов.

Все наши расчеты выполнены для случая слабого электрон-электронного взаимодействия, когда экранированием можно пренебречь. Экранировка отсутствует также в случае взаимодействия электрона с эффективным векторным потенциалом, создаваемым фононами. Вычисления проведены для мембраны с квадратичной зависимостью энергии электрона от импульса (например, двухслойный графен), однако полученные формулы с точностью до численного множителя применимы и для однослойного графена. Были получены аналитические выражения для нескольких ключевых величин, характеризующих электрон-фононное взаимодействие в широкой области параметров. Особенностью взаимодействия электрона с изгибными фононами является испускание (или поглощение) одновременно двух фононов, что требует развития нестандартных математических методов вычисления наблюдаемых величин.

Мы подробно описываем развитые подходы на примере вычисления квантового времени τ_q , определяющего затухание функции Грина электрона. При $\eta < 1/2$, когда нельзя воспользоваться теорией возмущений, полученное для τ_q выражение существенно непертурбативно: $1/\tau_q \propto g^{1/(1-\eta)} T^{(2-\eta)/(2-2\eta)}$. Вычислено также τ_q при $\eta > 1/2$ и слабом взаимодействии, когда золотое правило применимо: $1/\tau_q \propto$

$g^2 T^{2-\eta}$. Для случая $\eta < 1/2$ мы изучили осцилляции плотности состояний электрона в перпендикулярном к мембране магнитном поле и, в частности, показали, что в режиме $\omega_c \tau_q \gg 1$ уровни Ландау имеют гауссову форму с шириной, зависящей от магнитного поля по закону B^η (здесь ω_c — циклотронная частота). Наконец, мы вычислили время срыва фазы волновой функции электрона, обусловленное его взаимодействием с изгибными фононами в случае $\eta < 1/2$. Показано, что имеется несколько температурных интервалов, в которых величина $1/\tau_\varphi$ выражается различными степенными функциями от константы электрон-фононного взаимодействия, температуры и энергии электрона.

Статья организована следующим образом. Раздел 1 посвящен постановке задачи. Функция Грина электрона записана через интеграл по его траекториям в поле изгибных фононов и усреднена по их равновесному распределению. Полученное в результате выражение является основой для дальнейших вычислений.

Содержание разд. 2 носит в основном методический характер. В нем мы сначала вычисляем с помощью интеграла по траекториям функцию Грина электрона в поле слабого случайного потенциала, когда применимо золотое правило. Рассмотрены как короткодействующий, так и плавный беспорядки. Относительно последнего предполагается, что коррелятор потенциала $W(r)$ на больших расстояниях убывает быстрее, чем $1/r$. Мы находим также функцию Грина для случая $W(r) \propto 1/r^{2\eta}$, $\eta < 1/2$, когда золотое правило неприменимо, и показываем, что в этом случае затухание функции Грина со временем определяется экспонентой вида $\exp(-at^{2-2\eta})$, а характерное время затухания неаналитически зависит от амплитуды потенциала U_0 , $1/\tau_q \propto U_0^{1/(1-\eta)}$. В разд. 3 мы вычисляем функцию Грина и находим квантовое время электрона в поле изгибных фононов как при $\eta > 1/2$, так и при $\eta < 1/2$. Вычисления выполнены для случая взаимодействия электрона со скалярным потенциалом фононов. В разд. 4 рассмотрен случай подвешенной мембраны с дефектами. В разд. 5 мы изучаем осцилляции плотности состояний в перпендикулярном к мембране магнитном поле. В разд. 6 вычислено время срыва фазы волновой функции электрона за счет его взаимодействия с изгибными фононами в случае $\eta < 1/2$. В заключительном разд. 7 мы описываем основные результаты работы и кратко обсуждаем другие физические системы, при теоретическом изучении которых могут быть использованы развитые в работе математические методы.

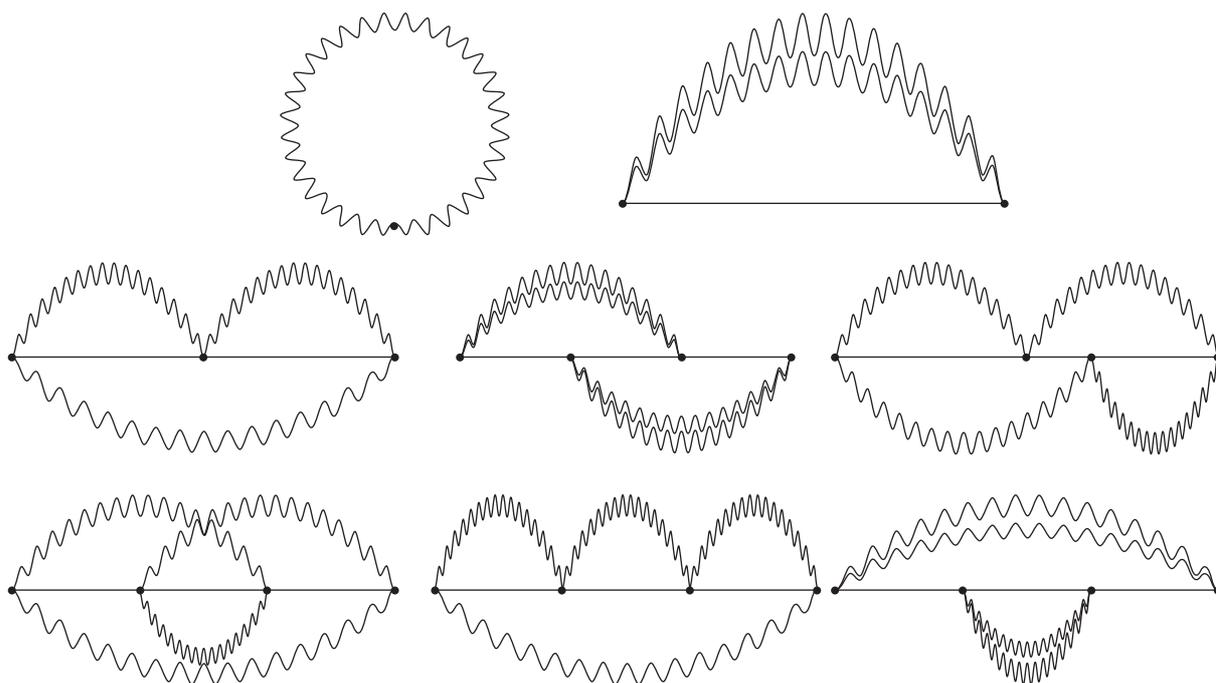


Рис. 1. Неприводимые диаграммы первых четырех порядков. Волнистые линии обозначают коррелятор поля изгибных фононов, отрезки между вершинами электрон-фононного взаимодействия описывают движение электрона. Вычисление по золотому правилу ограничивается второй диаграммой

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим электрон с квадратичным законом дисперсии, взаимодействующий с изгибными колебаниями мембраны, например, электрон в двухслойном графене (конкретные результаты последующих разделов с точностью до численных множителей справедливы и для однослойного графена). Гамильтониан такого электрона имеет вид

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + g(\nabla h)^2, \tag{1}$$

где \mathbf{p} и m — оператор импульса и эффективная масса электрона, g — константа электрон-фононного взаимодействия, а $h(\mathbf{r}, t)$ — локальное отклонение мембраны в момент времени t от ее равновесного положения. Квадратичность гамильтониана по ∇h приводит к тому, что электрон испускает и поглощает фононы парами (рис. 1).

Функцию Грина электрона, усредненную по распределению равновесных фононов, запишем через интеграл по траекториям:

$$G(\mathbf{R}, t) = \int D\mathbf{r} \left\langle \exp i \int_0^t \left\{ \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2(\tau)}{2} - g \{ \nabla h[\mathbf{r}(\tau), \tau] \}^2 \right\} d\tau \right\rangle. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}$, а угловые скобки означают усреднение по термическим флуктуациям фононов. Чтобы выполнить это усреднение, введем векторную функцию $\chi(\tau)$ и с ее помощью перепишем (2) в виде

$$G(\mathbf{R}, t) = \int D\chi D\mathbf{r} \left\langle \exp i \int_0^t \left\{ \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2(\tau)}{2} - g\chi(\tau)\nabla h[\mathbf{r}(\tau), \tau] + \frac{g}{4}\chi^2(\tau) \right\} d\tau \right\rangle. \tag{3}$$

Мера $D\chi$ выбрана так, что

$$\int D\chi \exp \left[i(g/4) \int_0^t \chi^2(\tau) d\tau \right] = 1.$$

Выполнив усреднение, получим

$$G(\mathbf{R}, t) = \int D\mathbf{r} D\chi \times \exp \left\{ i \int_0^t \left[\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2(\tau)}{2} + \frac{g}{4} \chi^2(\tau) \right] d\tau - \frac{g^2}{2} \int_0^t \int_0^t \chi_\alpha(\tau_1) K_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) \chi_\beta(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\}, \quad (4)$$

где

$$K_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \left(N_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \right) \frac{q_\alpha q_\beta}{\rho_0 \omega_{\mathbf{q}}} \times \cos \{ \mathbf{q} [\mathbf{r}(\tau_1) - \mathbf{r}(\tau_2)] - \omega_{\mathbf{q}}(\tau_1 - \tau_2) \} \quad (5)$$

— коррелятор $\langle \partial_\alpha h(\mathbf{r}, \tau) \partial_\beta h(\mathbf{r}', \tau') \rangle$; $N_{\mathbf{q}}$ — функция распределения Бозе–Эйнштейна, $\omega_{\mathbf{q}}$ — частота фоновона с импульсом \mathbf{q} , а ρ_0 — двумерная массовая плотность мембраны. В дальнейшем мы не будем учитывать вклад нулевых колебаний, полагая, что в интересующих нас случаях $N_{\mathbf{q}} \approx T/\omega_{\mathbf{q}} \gg 1$.

В формуле (4) можно проинтегрировать по χ при заданной траектории $\mathbf{r}(\tau)$. Получится

$$G(\mathbf{R}, t) = \int D\mathbf{r} \times \exp \left\{ i \int_0^t \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2(\tau)}{2} d\tau - \frac{1}{2} \text{Sp} \ln \left(\hat{I} + 2ig\hat{K} \right) \right\}, \quad (6)$$

где \hat{K} — интегральный оператор с ядром (5). Разложение (6) по степеням \hat{K} дается рядом, представленным диаграммами рис. 1 (нарисовано несколько первых неприводимых диаграмм).

Прежде чем вычислять функциональный интеграл (6), в следующем разделе мы рассмотрим более простую задачу о движении электрона в случайном статическом потенциальном поле, предполагая его гауссовым. Полученные результаты мы используем при вычислении интеграла (6).

3. ЭЛЕКТРОН В СЛУЧАЙНОМ ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

Функция Грина, усредненная по реализациям случайного гауссового потенциала $U(\mathbf{r})$, записывается, как известно, в виде

$$G(\mathbf{R}, t) = \int D\mathbf{r} \exp \left\{ i \frac{m}{2} \int_0^t \dot{\mathbf{r}}^2(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 W[\mathbf{r}(\tau_1) - \mathbf{r}(\tau_2)] \right\}, \quad (7)$$

где $W(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle U(\mathbf{r}_1)U(\mathbf{r}_2) \rangle$ — коррелятор потенциала. В работе [40] было показано, что в случае плавного потенциала в условиях применимости золотого правила вклад взаимодействия в полное действие достаточно вычислить на отрезке прямой, соединяющем начальную и конечную точки (оптимальная траектория). Это дает затухающий со временем множитель $\exp(-t/2\tau_q)$, где τ_q — найденное по золотому правилу уходящее (квантовое) время. Последующее интегрирование амплитуды свободной частицы по всем траекториям приводит к выражению

$$G(\mathbf{R}, t) = G_0(\mathbf{R}, t) \exp(-t/2\tau_q),$$

где $G_0(\mathbf{R}, t)$ — свободная функция Грина. В работе [40] было также подчеркнуто, что в этом случае

$$\frac{1}{\tau_q} \propto \int_0^\infty W(r) dr.$$

Последнее означает, что область применимости золотого правила ограничена потенциалами, корреляторы которых $W(r)$ убывают с расстоянием быстрее, чем $1/r$. Можно было бы думать, что и в случае короткодействующего беспорядка достаточно вычислить действие на таком же отрезке прямой, однако это не так. Дело в том, что в этом случае вклад взаимодействия в полное действие сильно флуктуирует от траектории к траектории и оптимальной траектории не существует.

Вычислим функцию Грина, используя выражение (7). Перепишем его в форме

$$G(\mathbf{R}, t) = \int D\mathbf{r} \exp \left\{ i \frac{m}{2} \int_0^t \dot{\mathbf{r}}^2(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{W}(\mathbf{k}) \times \exp \{ i\mathbf{k} [\mathbf{r}(\tau_1) - \mathbf{r}(\tau_2)] \} \right\}, \quad (8)$$

представим траекторию в виде

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{V}\tau + \boldsymbol{\rho}(\tau), \quad \mathbf{V} = \mathbf{R}/t, \quad \boldsymbol{\rho}(0) = \boldsymbol{\rho}(t) = 0$$

и разложим экспоненту в формуле (8) по степеням тройного интеграла:

$$G(\mathbf{R}, t) = G_0(\mathbf{R}, t) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{2^N N!} \times \\ \times \int D\boldsymbol{\rho} \exp i \left[\frac{m}{2} \int_0^t \dot{\boldsymbol{\rho}}^2(\tau) d\tau \right] \times \\ \times \left[\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{W}(\mathbf{k}) Q_{\mathbf{k}}[\boldsymbol{\rho}] \right]^N, \quad (9)$$

где

$$Q_{\mathbf{k}}[\boldsymbol{\rho}] = \int_0^t \int_0^t \exp i \{ \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}(\tau_1 - \tau_2) + \\ + \mathbf{k} \cdot [\boldsymbol{\rho}(\tau_1) - \boldsymbol{\rho}(\tau_2)] \} d\tau_1 d\tau_2.$$

Мера при интегрировании по траекториям $\boldsymbol{\rho}(\tau)$ в выражении (9) выбрана так, что

$$\int D\boldsymbol{\rho} \exp \left[i \frac{m}{2} \int_0^t \dot{\boldsymbol{\rho}}^2(\tau) d\tau \right] = 1.$$

Сосчитаем сначала вклад первого порядка:

$$J_1 = \int D\boldsymbol{\rho} \exp \left(i \frac{m}{2} \int_0^t \dot{\boldsymbol{\rho}}^2(\tau) d\tau \right) \times \\ \times \exp i \mathbf{k} \cdot [\boldsymbol{\rho}(\tau_1) - \boldsymbol{\rho}(\tau_2)]. \quad (10)$$

Для этого представим $\boldsymbol{\rho}(\tau)$ рядом Фурье

$$\boldsymbol{\rho}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\rho}_n \sqrt{2/t} \sin(\pi n \tau / t)$$

и перейдем в (10) к интегрированию по векторам $\boldsymbol{\rho}_n$.

В результате получим

$$J_1 = \exp \left(-\frac{i\mathbf{k}^2}{2m} |\tau_1 - \tau_2| + \frac{i\mathbf{k}^2}{2mt} (\tau_1 - \tau_2)^2 \right). \quad (11)$$

Во втором порядке возникает интеграл

$$J_2 = \int D\boldsymbol{\rho} \exp \left(i \frac{m}{2} \int_0^t \dot{\boldsymbol{\rho}}^2(\tau) d\tau \right) \times \\ \times \exp i \{ \mathbf{k}_1 \cdot [\boldsymbol{\rho}(\tau_1) - \boldsymbol{\rho}(\tau'_1)] + \mathbf{k}_2 \cdot [\boldsymbol{\rho}(\tau_2) - \boldsymbol{\rho}(\tau'_2)] \},$$

для которого находим

$$J_2 = \exp \left(-\frac{i\mathbf{k}_1^2}{2m} |\tau_1 - \tau'_1| + \frac{i\mathbf{k}_1^2}{2mt} (\tau_1 - \tau'_1)^2 \right) \times \\ \times \exp \left(-\frac{i\mathbf{k}_2^2}{2m} |\tau_2 - \tau'_2| + \frac{i\mathbf{k}_2^2}{2mt} (\tau_2 - \tau'_2)^2 \right) \times \\ \times \exp \left(-i \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}{2m} \left\{ |\tau'_1 - \tau_2| - |\tau'_1 - \tau'_2| + |\tau_1 - \tau'_2| - \right. \right. \\ \left. \left. - |\tau_1 - \tau_2| - \frac{2}{t} (\tau_1 - \tau'_1)(\tau_2 - \tau'_2) \right\} \right). \quad (12)$$

Дальнейшие вычисления мы проведем отдельно для двух случаев:

$$\int_0^{\infty} W(r) dr < \infty,$$

когда в слабом потенциальном поле можно использовать золотое правило, и

$$\int_0^{\infty} W(r) dr = \infty,$$

когда оно не выполняется в потенциале любой силы.

3.1. Золотое правило, $\int_0^{\infty} W(r) dr < \infty$

В этом случае, как мы увидим, разности времен $\tau_1 - \tau'_1$ и $\tau_2 - \tau'_2$ ограничены неравенствами

$$|\tau_i - \tau'_i| \leq \tau_c \ll t. \quad (13)$$

Нетрудно убедиться в том, что при $|\tau_i - \tau'_i| \leq \tau_c$ и $|\tau_1 - \tau_2| > \tau_c$ показатель экспоненты во второй строке (12) равен нулю. Это означает, что при интегрировании по четырем временам τ_i, τ'_i в пределах от нуля до t эта экспонента равна единице всюду, за исключением малой области порядка $\tau_c^3 t$, вкладом которой поэтому можно пренебречь (полный объем области, где эффективно происходит интегрирование по временам, порядка $(\tau_c t)^2 \gg \tau_c^3 t$). Следовательно,

$$J_2 \approx \exp \left(-\frac{i\mathbf{k}_1^2}{2m} |\tau_1 - \tau'_1| + \frac{i\mathbf{k}_1^2}{2mt} (\tau_1 - \tau'_1)^2 \right) \times \\ \times \exp \left(-\frac{i\mathbf{k}_2^2}{2m} |\tau_2 - \tau'_2| + \frac{i\mathbf{k}_2^2}{2mt} (\tau_2 - \tau'_2)^2 \right). \quad (14)$$

В N -м порядке имеем интеграл

$$J_N = \int D\boldsymbol{\rho} \exp i \left(\frac{m}{2} \int_0^t \dot{\boldsymbol{\rho}}^2(\tau) d\tau \right) \times \\ \times \exp i \sum_{n=1}^N \mathbf{k}_n \cdot [\boldsymbol{\rho}(\tau_n) - \boldsymbol{\rho}(\tau'_n)].$$

Действуя как выше, получим при $r \rightarrow \infty$

$$J_N \approx \prod_{i=1}^N \exp \left(-\frac{i\mathbf{k}_i^2}{2m} |\tau_i - \tau'_i| + \frac{i\mathbf{k}_i^2}{2mt} (\tau_i - \tau'_i)^2 \right). \quad (15)$$

«Перекрестное» слагаемое в показателе экспоненты в этом выражении опущено по тем же причинам, что

и в (14): оно отлично от нуля только тогда, когда хотя бы два интервала $\tau_i - \tau'_i$ перекрываются, т. е. их центры отстоят друг от друга не более, чем на τ_c . В силу неравенств $|\tau_i - \tau'_i| \ll t$ при $t \rightarrow \infty$ вторым слагаемым в показателях экспонент в формуле (15) можно пренебречь, и мы находим

$$G(\mathbf{R}, t) = \frac{m}{2\pi i t} \times \exp \left\{ i \frac{m\mathbf{R}^2}{2t} - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{W}(\mathbf{k}) \times \exp \left(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}(\tau_1 - \tau_2) - \frac{i\mathbf{k}^2}{2m} |\tau_1 - \tau_2| \right) \right\}. \quad (16a)$$

Используя тот факт, что коррелятор зависит только от модуля волнового вектора, двойной интеграл по временам в показателе экспоненты представим в виде

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 \dots = \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{W}(\mathbf{k}) \times \exp \left(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}\tau_2 - \frac{i\mathbf{k}^2}{2m} \tau_2 \right), \quad (16b)$$

или, учитывая, что интеграл по τ_2 сходится и $t \rightarrow \infty$, в виде

$$t \int_0^\infty d\tau \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{W}(\mathbf{k}) \exp \left(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}\tau - \frac{i\mathbf{k}^2}{2m} \tau \right) = \exp \left\{ -\frac{t}{2\tau_q} - i\Delta E t \right\}, \quad (17a)$$

где τ_q совпадает с квантовым временем, вычисленным по золотому правилу:

$$\frac{1}{\tau_q} = \frac{1}{2\pi} \int d^2\mathbf{k} \tilde{W}(k) \delta \left(\mathbf{kV} - \frac{k^2}{2m} \right), \quad (17b)$$

а ΔE есть обусловленный взаимодействием сдвиг энергии электрона (в дальнейшем мы не будем его обсуждать). Окончательно получим

$$G(\mathbf{R}, t) = \frac{m}{2\pi i t} \exp \left\{ i \frac{m\mathbf{R}^2}{2t} - \frac{t}{2\tau_q} - i\Delta E t \right\}. \quad (18)$$

Отметим, что вычислив интеграл

$$\int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 W[\mathbf{r}(\tau_1) - \mathbf{r}(\tau_2)]$$

на отрезке прямой, соединяющем начальную и конечную точки, мы получили бы

$$\frac{1}{\tau_q} = \int_{-\infty}^\infty d\tau W(\mathbf{V}\tau) \sim \frac{2}{V} \int_0^\infty W(r) dt \sim \int \tilde{W}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{V}\mathbf{k}) d^2\mathbf{k},$$

что существенно отличается от результата вычисления по золотому правилу. В случае плавного беспорядка оба способа дают одинаковые результаты потому, что коррелятор $\tilde{W}(\mathbf{k})$ сосредоточен в области малых импульсов и в (17b) в аргументе δ -функции слагаемым $k^2/2m$ можно пренебречь.

Характерная величина переданного импульса k в интегралах (17) зависит от вида коррелятора. В случае плавного беспорядка, коррелятор которого убывает на масштабе корреляционной длины потенциала $\xi \gg 1/mV$, k порядка ξ^{-1} , так что введенные неравенствами (13) время τ_c порядка ξ/V . Для короткодействующего беспорядка $k \propto mV$ и $\tau_c \propto 1/mV^2$. Это оправдывает сделанные выше приближения, основанные на неравенстве $\tau_c \ll t$.

Выше отмечалось, что, согласно [40], в случае дальнедействующего беспорядка обратное квантовое время $1/\tau_q$, даваемое золотым правилом, пропорционально интегралу

$$\int_0^\infty W(r) dr.$$

Это означает, что формула (18) справедлива тогда, когда коррелятор $W(r)$ на больших расстояниях убывает как $1/r^{2\eta}$ с $\eta > 1/2$ или быстрее. Окрестность точки $\eta = 1/2$ требует отдельного рассмотрения. Чтобы сделать это, вернемся к выражению (16b) и положим $W(r) = W_0/(q_0 r)^{1+\delta}$. Для $\tilde{W}(k)$ имеем $\tilde{W}(k) \sim W_0 q_0^{-1-\delta}/k^{1-\delta}$. Интегрируя в (16b) по направлениям вектора \mathbf{k} и делая замену $k = x/V\tau_2$, вместо (16b) с точностью до численного множителя получим

$$\frac{W_0}{q_0^{1+\delta}} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \frac{1}{(V\tau_2)^{1+\delta}} \times \int_0^\infty x^\delta J_0(x) \exp \left(-\frac{ix^2}{2mV^2\tau_2} \right).$$

При $\tau_2 E > 1$ (E — энергия электрона) интеграл по x сходится в области x порядка единицы и не зависит от τ_2 , а при $\tau_2 E < 1$ этот интеграл близок к нулю из-за осцилляций экспоненты. Учитывая это, получим для (16b) при $tE > 1$

$$\frac{W_0}{(q_0 V)^{1+\delta}} \left\{ E^\delta t \frac{1-1/(tE)^\delta}{\delta} - \frac{t^{1-\delta}}{1-\delta} + \frac{1}{(1-\delta)E^{1-\delta}} \right\}.$$

Из этого выражения следует, что при $\delta \ll 1$ затухающие функции Грина меняет вид при $\ln(tE) \sim 1/\delta$:

$$G(\mathbf{R}, t) \sim \begin{cases} \exp \left\{ \frac{W_0}{q_0 V} \left[t \ln(tE) - t + \frac{1}{E} \right] \right\}, & \ln(tE) < 1/\delta, \\ \exp \left\{ \frac{W_0}{q_0 V} \left[\frac{t}{\delta} - t + \frac{1}{E} \right] \right\}, & \ln(tE) > 1/\delta. \end{cases}$$

Формула (18), таким образом, дает асимптотику функции Грина на больших временах.

3.2. Непертурбативные потенциалы,

$$\int_0^\infty W(r) dr = \infty$$

Рассмотрим теперь случай, когда интеграл

$$\int_0^\infty W(r) dr$$

расходится в области больших значений r , и золотое правило неприменимо. В этом случае интегралы по временам «салятся» на верхние пределы, так что в выражениях типа (12) $|\tau_i - \tau'_i| \approx t$. При этих условиях показатели всех экспонент в (12) близки к нулю и для функции Грина при $t \rightarrow \infty$ мы получаем

$$G(\mathbf{R}, t) = \frac{m}{2\pi i t} \times \left\{ \exp \left[i \frac{m\mathbf{R}^2}{2t} - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{W}(\mathbf{k}) \times \exp [i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}(\tau_1 - \tau_2)] \right] \right\},$$

или

$$G(\mathbf{R}, t) = \frac{m}{2\pi i t} \exp \left\{ i \frac{m\mathbf{R}^2}{2t} - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 W[\mathbf{V}(\tau_1 - \tau_2)] \right\}. \quad (19)$$

Выражение (19) означает, что вклад взаимодействия в полное действие «сел» на прямолинейную траекторию $\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{V}\tau$. Приняв, в качестве примера, что на расстояниях, превышающих некоторый масштаб q_0^{-1} , $W(r) = W_0/(q_0 r)^{2\eta}$, $\eta < 1/2$, найдем для больших времен и расстояний

$$G(\mathbf{R}, t) = G_0(\mathbf{R}, t) \exp \left\{ -\frac{W_0 t^{2-2\eta}}{2(1-\eta)(1-2\eta)(q_0 V)^{2\eta}} \right\} = G_0(\mathbf{R}, t) \exp \left\{ -\frac{W_0 t^2}{2(1-\eta)(1-2\eta)(q_0 R)^{2\eta}} \right\}. \quad (20a)$$

Отсюда получим для времени затухания функции Грина

$$\frac{1}{\tau_q} \sim q_0 V (U_0 q_0 V)^{1/(1-\eta)}, \quad (20b)$$

где $U_0 = \sqrt{W_0}$ — характерная величина случайного потенциала. Подчеркнем, что, в противоположность тому, как это бывает в случае применимости теории возмущений, τ_q зависит от U_0 неаналитически.

Выражения, подобные (20), были получены в работах [41–45], где рассматривалось взаимодействие электрона с калибровочным полем, коррелятор которого уменьшается в зависимости от расстояния медленно.

Из (20) видно, что при $\eta \rightarrow 1/2$ аргумент экспоненты в (20) стремится к бесконечности, так что случай $\eta \approx 1/2$ требует отдельного рассмотрения, подобного тому, какое было описано в предыдущем параграфе. Для $\eta = 1/2$ на временах $t > \tau_0 = 1/q_0 V$ из (19) получим

$$G(\mathbf{R}, t) \sim \exp \left\{ -W_0 \tau_0 \left[t \ln \left(\frac{t}{\tau_0} \right) - t + \tau_0 \right] \right\}.$$

На малых расстояниях $R \ll q_0^{-1}$ из (19) находим

$$G(\mathbf{R}, t) = \frac{m}{2\pi i t} \exp \left\{ i \frac{m\mathbf{R}^2}{2t} - \frac{W(0)}{2} t^2 \right\},$$

где $W(0) = \langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}) \rangle$. Из этого выражения следует, в частности, что в области малых энергий $E \ll \sqrt{W(0)}$ плотность состояний электрона $\nu(E) \propto mE/\sqrt{W(0)}$.

4. ЭЛЕКТРОН В ПОЛЕ ИЗГИБНЫХ ФОНОНОВ

Вернемся теперь к вычислению функции Грина электрона в поле изгибных фононов. Как будет видно, главный вклад дает область малых q , где фононная частота мала, так что поле фононов можно считать статическим, положив

$$K_{\alpha\beta} = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} N_{\mathbf{q}} \frac{q_\alpha q_\beta}{\rho_0 \omega_{\mathbf{q}}} \cos \mathbf{q} \cdot [\mathbf{r}(\tau_1) - \mathbf{r}(\tau_2)]. \quad (21)$$

Следуя [39], закон дисперсии изгибных фононов запишем в виде

$$\omega_q = Dq^2 \sqrt{1 + \left(\frac{q_c}{q}\right)^\eta}, \quad (22)$$

$$q_c = \sqrt{\frac{3T\mu(\mu + \lambda)}{4\pi\kappa^2(2\mu + \lambda)}} \equiv \frac{\sqrt{T\Delta_c}}{\hbar V}.$$

Здесь $0 < \eta < 1$, $D = \sqrt{\kappa/\rho_0}$, κ — изгибная жесткость мембраны, а μ и λ — константы, характеризующие ее упругие свойства относительно деформаций в плоскости. Из (22) видно, что при $q \ll q_c$ величина $\omega_q = Dq_c^{\eta/2} q^{2-\eta/2}$, а при $q \gg q_c$ имеем $\omega_q = Dq^2$. Подчеркнем, что $q_c \ll q_T$, где q_T определено равенством $\omega_{q_T} = T$. В случае однослойного графена $q_c = 1.1 \cdot 10^7 \sqrt{T/300 \text{ К}} \cdot \text{см}^{-1}$ и $q_T = 9.1 \cdot 10^7 \times \sqrt{T/300 \text{ К}} \cdot \text{см}^{-1}$.

Процедура вычисления функции Грина и результат существенно зависят от величины параметра η . Ниже мы рассмотрим как случай $\eta > 1/2$, когда золотое правило применимо, так и случай $\eta < 1/2$, когда оно неприменимо.

4.1. Золотое правило, $\eta > 1/2$

В случае $\eta > 1/2$ можно воспользоваться золотым правилом, разложив $\ln(\hat{I} + 2ig\hat{K})$ в выражении (6) по степеням $2ig\hat{K}$ и удержав только два первых слагаемых (это предполагает, конечно, достаточную слабость электрон-фононного взаимодействия и соответствует учету двух первых диаграмм рис. 1):

$$G(\mathbf{R}, t) = \int D\mathbf{r} \times \exp \left\{ i \int_0^t \frac{m\mathbf{r}^2(\tau)}{2} d\tau - ig \text{Sp} \hat{K} - g^2 \text{Sp} \hat{K}^2 \right\}. \quad (23)$$

Первое слагаемое $ig \text{Sp} \hat{K}$ в показателе экспоненты дает вклад только в сдвиг энергии электрона, оно легко вычисляется и интереса для нас не представляет. Второе слагаемое дается выражением

$$g^2 \text{Sp} K^2 = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 W[\mathbf{r}(\tau_1) - \mathbf{r}(\tau_2)],$$

где функция

$$W(\mathbf{r}) \equiv 2g^2 \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2\mathbf{q}'}{(2\pi)^2} N_{\mathbf{q}} N_{\mathbf{q}'} \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2}{\rho_0^2 \omega_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}'}} \times \cos \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \cos \mathbf{q}' \cdot \mathbf{r} \quad (24)$$

играет роль эффективного коррелятора. В области $rq_c \ll 1$ функция $W(\mathbf{r}) \propto \ln^2(1/rq_c)$, а в области

$rq_c \gg 1$ функция $W(\mathbf{r})$ убывает по закону $1/r^{2\eta}$, т. е. быстрее, чем $1/r$, что и требуется для применимости золотого правила. Вычисление дает

$$\frac{1}{\tau_q} \sim \frac{g^2 T^2}{\kappa^2 \varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{q_c V} \right)^{2\eta}.$$

4.2. Непертурбативное взаимодействие, $\eta < 1/2$

На первый взгляд кажется, что и в этом случае при слабом взаимодействии можно воспользоваться приближением (23), вычислив затем вклад коррелятора (24) на траектории $\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{V}\tau$. Это приведет к формуле (20). Мы покажем, однако, что так рассуждать нельзя: если $\eta < 1/2$, то даже при сколь угодно слабом взаимодействии электрона с изгибными фононами важны все члены разложения логарифма, т. е. весь диаграммный ряд на рис. 1.

Коррелятор (21) на траектории $\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{V}(\tau)$ записывается в виде

$$K_{\alpha\beta}(\tau_1 - \tau_2) = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{q_\alpha q_\beta N_{\mathbf{q}}}{\rho_0 \omega_{\mathbf{q}}} \times \cos[\mathbf{q} \cdot \mathbf{V}(\tau_1 - \tau_2)]. \quad (25)$$

Направив ось x вдоль вектора \mathbf{V} и проинтегрировав в (25) по направлениям вектора \mathbf{q} , получим

$$K_{xx}(\tau) \equiv K_V(\tau) = \int_0^\infty \frac{dq}{4\pi} \frac{q^3 N_{\mathbf{q}} [J_0(qV\tau) - J_2(qV\tau)]}{\rho_0 \omega_{\mathbf{q}}}, \quad (26)$$

$$K_{yy}(\tau) \equiv K_\perp(\tau) = \int_0^\infty \frac{dq}{4\pi} \frac{q^3 N_{\mathbf{q}} [J_0(qV\tau) + J_2(qV\tau)]}{\rho_0 \omega_{\mathbf{q}}}, \quad K_{xy} = 0,$$

где J_0 и J_2 — функции Бесселя и $\tau = \tau_1 - \tau_2$. С учетом (26), для функции Грина будем иметь

$$G(\mathbf{R}, t) = G_0(\mathbf{R}, t) \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_\mu \text{Sp} \ln \left(\hat{I} + 2ig\hat{K}_\mu \right) \right\}, \quad (27a)$$

или эквивалентно

$$G(\mathbf{R}, t) = G_0(\mathbf{R}, t) \prod_\mu D_\mu^{-1/2}, \quad (27b)$$

где μ принимает значения V и \perp , а D_μ — определитель оператора $\hat{I} + 2ig\hat{K}_\mu$. Вычисление определителей проведем двумя способами.

4.2.1. Решение задачи на собственные значения

Проблема заключается в вычислении величин $S_\mu = \text{Sp} \ln(\hat{I} + 2ig\hat{K}_\mu)$ с интегральными операторами, ядра которых определены формулами (26). Оба ядра непрерывны и квадратично интегрируемы в квадрате $0 < \tau_{1,2} < t$. Это означает (см., например, [46]), что интегральные операторы \hat{K}_μ вполне непрерывны, так что спектр каждого из них ограничен, дискретен и сгущается к нулю. Мнимые части величин $S_\mu/2$ отвечают за сдвиг энергии, а вещественные обеспечивают затухание функции Грина со временем. В дальнейшем нас будут интересовать только последние. Обозначив собственные числа операторов $2g\hat{K}_\mu$ символами $\Lambda_{\mu n}(t)$, запишем S_μ в виде

$$S_\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \ln[1 + i\Lambda_{\mu n}(t)], \quad (28)$$

$$\text{Re } S_\mu = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln[1 + \Lambda_{\mu n}^2(t)].$$

В Приложении А найдены приближенные выражения для собственных чисел при $n \gg 1$, которые мы в дальнейшем будем обозначать символами $\lambda_{\mu n}(t)$, в отличие от точных собственных чисел $\Lambda_{\mu n}(t)$. С их помощью выражение (28) для $\text{Re } S_\mu$ можно записать в виде

$$\text{Re } S_\mu = P_\mu(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \ln[1 + \lambda_{\mu n}^2(t)], \quad (29)$$

где

$$P_\mu(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln[1 + \Lambda_{+\mu n}^2(t)] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln[1 + \Lambda_{-\mu n}^2(t)] - \sum_{n=1}^{\infty} \ln[1 + \lambda_{\mu n}^2(t)], \quad (30)$$

а $\Lambda_{+\mu n}(t)$ и $\Lambda_{-\mu n}(t)$ отвечают четным и нечетным собственным функциям операторов $2g\hat{K}_\mu$ (см. абзац после формулы (A.2) в Приложении А). В формулах (29) и (30) учтено, что четным и нечетным собственным функциям отвечают одинаковые приближенные собственные числа $\lambda_{\mu n}(t)$.

Рассмотрим сначала второе слагаемое в (29), перейдя в нем от суммирования к интегрированию. Из (A.4) и (A.5) Приложения А следует, что переменная интегрирования n входит в подынтегральное выражение только в комбинации $L/2\pi n$ (здесь $L = q_c V t$). Поэтому, сделав замену $2\pi n/L = z$, получим

$$\text{Re } S_\mu = P_\mu(t) - \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi/L} \ln[1 + \lambda_\mu^2(z)] dz + \frac{L}{2\pi} \int_0^\infty \ln[1 + \lambda_\mu^2(z)] dz, \quad (31)$$

$$\lambda_V(z) = \frac{4\gamma}{z^{1-\eta}} \int_1^\infty \frac{U(q_c z y) dy}{y^{3-\eta} \sqrt{y^2 - 1} [1 + (zy)^\eta]}, \quad (32)$$

$$\lambda_\perp(z) = \frac{4\gamma}{z^{1-\eta}} \int_1^\infty \frac{\sqrt{y^2 - 1} U(q_c z y) dy}{y^{3-\eta} [1 + (zy)^\eta]},$$

где $\gamma = gT/2\pi\kappa q_c V$ — безразмерный параметр, характеризующий силу взаимодействия (в случае однослойного графена $\gamma \approx 0.1\sqrt{T/300 \text{ К}}$). Последнее слагаемое в (31) отвечает за экспоненциальное затухание функции Грина с постоянной времени τ_q :

$$G \propto \exp\left(-\frac{t}{2\tau_q}\right), \quad \frac{1}{\tau_q} = \frac{1}{\tau_V} + \frac{1}{\tau_\perp}, \quad (33)$$

$$\frac{1}{\tau_\mu} = \frac{q_c V}{2\pi} \int_0^\infty \ln[1 + \lambda_\mu^2(z)] dz.$$

Интегралы по y в выражениях (32) сходятся в области y порядка единицы, а интегралы по z в (33) в типичной ситуации $\gamma < 1$ «сидят» на области $z < \gamma^{1/(1-\eta)}$. При таких y и z выражения (32) можно упростить (см. примечание сразу после уравнения (A.1) в Приложении А):

$$\lambda_V(z) = \frac{4\gamma}{z^{1-\eta}} \int_1^\infty \frac{dy}{y^{3-\eta} \sqrt{y^2 - 1}}, \quad (34)$$

$$\lambda_\perp(z) = \frac{4\gamma}{z^{1-\eta}} \int_1^\infty \frac{\sqrt{y^2 - 1} dy}{y^{3-\eta}}.$$

Вычислив интегралы в (34) и (33), получим

$$\frac{1}{\tau_\mu} = \frac{q_c V (\gamma F_\mu)^{1/(1-\eta)}}{\sin[\pi/(2-2\eta)]},$$

$$F_V = \frac{(1-\eta)\Gamma^2[(1-\eta)/2]}{(2-\eta)\Gamma(1-\eta)}, \quad (35)$$

$$F_\perp = \frac{\Gamma^2[(1-\eta)/2]}{(2-\eta)\Gamma(1-\eta)}.$$

Первое и второе слагаемые в (31) отвечают за степенной префактор $A(t)$, который будет найден в следующем разделе в рамках другого метода. С учетом этого замечания получим

$$G(\mathbf{R}, t) = G_0(\mathbf{R}, t) A(t) \exp\left\{-\frac{t}{2\tau_q} - i\Delta E t\right\}. \quad (36)$$

При $t \rightarrow 0$ префактор стремится к единице.

Замечательно, что вместо формулы типа (20) мы получили обычный экспоненциальный закон затухания функции Грина. При этом зависимость квантового времени τ_q от силы взаимодействия g неаналитична, $1/\tau_q \propto g^{1/(1-\eta)}$ (напомним, что в случае движения электрона в поле статического случайного потенциала с коррелятором, убывающим медленнее, чем $1/r$, зависимость τ_q от величины потенциала также неаналитична — см. формулу (20b)). Отметим, что логарифмы в сумме $\sum_{n=1}^{\infty} \ln[1 + \lambda_{\mu n}^2(t)]$ можно разложить только при $n > n^*$, где $n^* = L\gamma^{1/(1-\eta)}$ неограниченно растет со временем. Это означает, что раскладывать логарифмы можно лишь на временах, удовлетворяющих неравенству $L\gamma^{1/(1-\eta)}$, т. е. $t \ll \tau_q$ (мы воспользуемся этим в разд. 5). Подчеркнем, что в выражении (36) учтены все диаграммы ряда рис. 1. Формулы (35) и (36) получены для мембраны с квадратичной зависимостью энергии электрона от импульса. При этом масса m не входит в выражения для $1/\tau_\mu$, так что в случае однослойного графена соответствующие времена отличаются от (35) только численными множителями.

Обсудим зависимость τ_q от температуры мембраны и энергии электрона. Учитывая, что $\gamma \propto T/q_c V$, получим

$$1/\tau_q \propto T^{1/(1-\eta)} / (q_c V)^{\eta/(1-\eta)}.$$

Отсюда и из (22) для случая квадратичной дисперсии следует

$$1/\tau_q \propto T^{(2-\eta)/(2-2\eta)} / \varepsilon^{\eta/(2-2\eta)},$$

а для однослойного графена

$$1/\tau_q \propto T^{(2-\eta)/(2-2\eta)}.$$

Отметим, что в однослойном графене квантовое время не зависит от энергии электрона.

В случае сильного взаимодействия, $\gamma \gg 1$, из формул (31) и (32) следует, что $1/\tau_q \propto q_c V \ln \gamma$, т. е. зависимость темпа рассеяния от константы электрон-фононного взаимодействия в этом случае не степенная, а логарифмическая.

4.2.2. Вычисление определителя по теореме Фишера – Хартвига

Другой путь получить экспоненциальную зависимость (36), а также выражение для префактора на больших временах состоит в использовании теоремы Фишера – Хартвига в форме, предложенной в

работе [47]. Эта теорема позволяет найти асимптотику определителя $N \times N$ матрицы Теплица $Q_{nm} = Q(n - m)$ при $N \gg 1$. Предполагается, что матричные элементы не зависят от N . Сформулируем теорему для частного случая, который реализуется в нашей задаче (общую версию теоремы см. в [47]). Вводится функция $\varphi(w)$, определенная на единичной окружности $w = \exp i\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, рядом Фурье:

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q(n) \exp(in\theta), \\ Q(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \exp(-in\theta) d\theta. \end{aligned} \tag{37}$$

Если $\varphi(\theta)$ можно представить в виде

$$\varphi(\theta) = e^{M(\theta)} |w - w_c|^{2\alpha} = e^{M(\theta)} \left| 2 \sin \frac{\theta - \theta_c}{2} \right|^{2\alpha}, \tag{38}$$

где $M(\theta)$ — достаточно гладкая функция на окружности и $\text{Re } \alpha > -1/2$, то искомым определитель дается выражением

$$\begin{aligned} D(N) &= \exp(NM_0) \times \\ &\times \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [nM_n M_{-n} - \alpha(M_n w_c^n + M_{-n} w_c^{-n})] \right\} \times \\ &\times N^{\alpha^2} \frac{G^2(1 + \alpha)}{G(1 + 2\alpha)} [1 + o(1)], \end{aligned} \tag{39}$$

где

$$M_n = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} M(\theta) \exp(-in\theta) d\theta,$$

а $G(x)$ — функция Барнса.

Чтобы применить эту теорему к нашему случаю, интегральные операторы $\hat{Q}_\mu = \hat{I} + 2ig\hat{K}_\mu$ с разностными ядрами $Q_\mu(\tau_1 - \tau_2) = \delta(\tau_1 - \tau_2) + 2igK_\mu(\tau_1 - \tau_2)$ представим матрицами $N \times N$, перейдя от интегрирования к суммированию:

$$Q_\mu(n - m) = \delta_{n-m,0} + 2ig \frac{t}{N} K_\mu \left(t \frac{n - m}{N} \right). \tag{40}$$

Матричные элементы таких матриц явно зависят от N в комбинации t/N . Чтобы избежать этой зависимости, примем, что t и N одновременно стремятся к бесконечности при фиксированном значении отношения $t/N = t_0$ и выберем интервал t_0 малым сравнительно с характерным масштабом, на котором изменяются функции $K_\mu(\tau)$. Рассмотрим по-

дробно случай $\mu = V$, $Q_V(n) = \delta_{n,0} + 2igt_0 K_V(t_0 n)$. Функция $\varphi(\theta)$ в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \phi_V(\theta) &= 1 + 2igt_0 \int_{\theta/Vt_0}^{\infty} \frac{dq}{\pi} \frac{N_q q^3}{\rho_0 \omega_q (qVt_0)^2} \times \\ &\quad \times \frac{\theta^2}{\sqrt{(qVt_0)^2 - \theta^2}}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \phi_V(\theta) &= 1 + 2igt_0 \int_{(2\pi-\theta)/Vt_0}^{\infty} \frac{dq}{\pi} \frac{N_q q^3}{\rho_0 \omega_q (qVt_0)^2} \times \\ &\quad \times \frac{(2\pi - \theta)^2}{\sqrt{(qVt_0)^2 - (2\pi - \theta)^2}}, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned} \tag{41}$$

При выводе этих выражений мы воспользовались формулами

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_0(qVt_0 n) - J_2(qVt_0 n)] \cos(n\theta) &= \\ &= \frac{4\theta^2 \Theta[qVt_0 - \theta]}{(qVt_0)^2 \sqrt{(qVt_0)^2 - \theta^2}}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_0(qVt_0 n) - J_2(qVt_0 n)] \cos(n\theta) &= \\ &= \frac{4(2\pi - \theta)^2 \Theta[qVt_0 - (2\pi - \theta)]}{(qVt_0)^2 \sqrt{(qVt_0)^2 - (2\pi - \theta)^2}}, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Из (41) можно увидеть, что в окрестности $w = \exp(i\theta) = 1$ функция $\varphi_V(\theta)$ имеет степенную особенность,

$$\varphi_V(\theta) \propto |w - 1|^{-1+\eta} = \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|^{-1+\eta}.$$

Это означает, что $\varphi_V(\theta)$ можно записать в форме (38) с $\theta_c = 0$ и $\alpha = -1/2 + \eta/2 > -1/2$, где функция

$$M_V(\theta) = \ln \left[\varphi_V(\theta) \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|^{1-\eta} \right]$$

регулярна в точке $\exp(i\theta) = 1$. Для M_{V0} получим

$$\begin{aligned} M_{V0} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left[\varphi_V(\theta) \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|^{1-\eta} \right] d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \varphi_V(\theta) d\theta. \end{aligned} \tag{42}$$

Здесь учтено, что

$$\int_0^{2\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|^{1-\eta} d\theta = 0$$

и что, согласно (41), $\varphi_V(\theta) = \varphi_V(2\pi - \theta)$. Вещественная часть M_{V0} дается выражением

$$\text{Re } M_{V0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \ln |\varphi_V(\theta)|^2 d\theta. \tag{43}$$

После ряда замен переменных интегрирования в (41) и в (43), получим

$$N \text{Re } M_{V0} = \frac{L}{2\pi} \int_0^{\pi/\theta_c} \ln [1 + \lambda_V^2(z)] dz, \quad \theta_c = q_c V t_0.$$

Аналогичным образом найдем

$$N \text{Re } M_{\perp 0} = \frac{L}{2\pi} \int_0^{\pi/\theta_c} \ln [1 + \lambda_{\perp}^2(z)] dz.$$

В пределе $t_0 = 0$ из этих выражений следует, что

$$\begin{aligned} N \text{Re } M_{V0} &= \frac{L}{2\pi} \int_0^{\infty} \ln [1 + \lambda_V^2(z)] dz, \\ N \text{Re } M_{\perp 0} &= \frac{L}{2\pi} \int_0^{\infty} \ln [1 + \lambda_{\perp}^2(z)] dz. \end{aligned} \tag{44}$$

Формулы (44) позволяют, согласно (39), найти экспоненциально растущие со временем части детерминантов D_V и D_{\perp} :

$$\begin{aligned} D_{\mu} &\propto \exp(N \text{Re } M_{\mu 0}) = \\ &= \exp \left(\frac{L}{2\pi} \int_0^{\infty} \ln [1 + \lambda_{\mu}^2(z)] dz \right). \end{aligned} \tag{45}$$

Подставив (45) в (27b), мы воспроизведем полученную в предыдущем разделе экспоненциально затухающую часть функции Грина (36). Вычислив затем ряды $\sum_{n=1}^{\infty} [nM_{\mu n}^2 + (1 - \eta)M_{\mu n}]$, стоящие в показателях соответствующих экспонент (39) (см. Приложение В), получим

$$\begin{aligned} G(\mathbf{R}, t) &= G_0(\mathbf{R}, t) B(\eta, \gamma) (q_c V t)^{-(1-\eta)^2/4} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{t}{2\tau_q} - i\Delta E t \right\}, \end{aligned} \tag{46}$$

где $B(\eta, \gamma)$ в пределе $\gamma \ll 1$ дается выражением

$$\begin{aligned} \ln B &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \psi' \left(\frac{2k+1}{1-\eta} \right) - \frac{7(1-\eta)^2 \zeta(3)}{8\pi^2} - \\ &- \ln \frac{G^2((1-\eta)/2)}{G(\eta)} + \frac{1-\eta}{8} \times \\ &\quad \times \ln \frac{-\Gamma^2(2-\eta/2)}{2\pi^2 \gamma^2 \Gamma(3/2-\eta/2) \Gamma(1/2-\eta/2)}. \end{aligned}$$

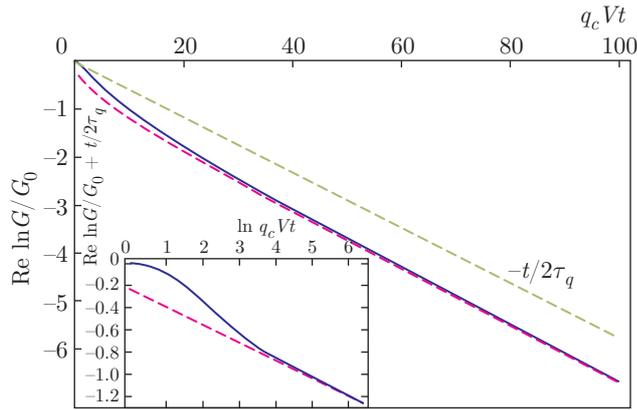


Рис. 2. Результаты численного расчета временной зависимости функции Грина. Основной график на рисунке демонстрирует вещественную часть логарифма отношения полной и свободной функций Грина в зависимости от времени (сплошная линия на графике). На больших временах этот логарифм является в основном линейной функцией времени с коэффициентом $-1/2\tau_q$ (верхняя штриховая линия на рисунке). Вторая штриховая линия на рисунке демонстрирует зависимость от времени полного асимптотического выражения для функции Грина (46). Вставка на рисунке демонстрирует сходимость точного результата для функции Грина к полной асимптотике (46) на больших временах в логарифмическом масштабе

На рис. 2 приведены результаты численного расчета временной зависимости функции Грина в сравнении с предсказаниями асимптотической теории. При расчете было принято $q_c/q_T = 0.01$ и $\gamma = 0.05$, что соответствует $q_c V \tau_q \approx 9$.

5. ЭЛЕКТРОН В МЕМБРАНЕ С ДЕФЕКТАМИ

В этом разделе мы рассмотрим электрон, движущийся в подвешенной мембране с дефектами. В работе [26] было показано, что при наличии в мембране встроенного беспорядка коррелятор $K_{\alpha\beta}$ содержит статическую составляющую

$$K_{\alpha\beta}^0 = \langle \partial_\alpha h(\mathbf{r}) \partial_\beta h(0) \rangle,$$

которая на больших расстояниях убывает по степенному закону:

$$K_{\alpha\beta}^0(r) \propto b_0 \begin{cases} \ln(1/q_c r), & r < q_c^{-1}, \\ (1/q_c r)^{\eta/4}, & q_c^{-1} < r < L_r, \\ (L_r/q_c r)^{2\eta}, & L_r < r, \end{cases} \quad (47)$$

где b_0 — безразмерный параметр, характеризующий силу беспорядка, а

$$L_r = q_c^{-1} \exp(4b_0\kappa/3\eta T).$$

В случае $4b_0\kappa/3\eta T \gg 1$ существует широкая область $q_c^{-1} < r < L_r$, в которой коррелятор убывает медленнее, чем $1/r$. Если при этом функция Грина затухает на расстоянии, меньшем L_r , то можно считать, что

$$K_{\alpha\beta}^0(r) \propto b_0(1/q_c r)^{\eta/4}$$

при всех $r > q_c^{-1}$. Это позволяет нам воспользоваться результатами предыдущего раздела, относящимися к случаю $\eta < 1/2$. Ядра интегральных операторов \hat{K}_μ^0 имеют вид

$$K_V^0(\tau) = \int_0^\infty \frac{dq}{4\pi} \frac{\tilde{b}_0 [J_0(qV\tau) - J_2(qV\tau)]}{q_c^{\eta/4} q^{1-\eta/4}}, \quad (48)$$

$$K_\perp^0(\tau) = \int_0^\infty \frac{dq}{4\pi} \frac{\tilde{b}_0 [J_0(qV\tau) + J_2(qV\tau)]}{q_c^{\eta/4} q^{1-\eta/4}},$$

$\tilde{b}_0 = b_0 2^{1-\eta/4} \Gamma(1-\eta/4) \Gamma(\eta/8)$. Безразмерная константа взаимодействия теперь дается выражением $\tilde{\gamma} = g\tilde{b}_0/2\pi q_c V$.

В случае $\tilde{\gamma} \ll 1$ для квантового времени τ_q получим

$$\frac{1}{\tau_q} = \frac{q_c V (\tilde{\gamma} F_V)^{1/(1-\eta/4)}}{\sin[\pi/(2-\eta/2)]} + \frac{q_c V (\tilde{\gamma} F_\perp)^{1/(1-\eta/4)}}{\sin[\pi/(2-\eta/2)]}, \quad (49)$$

$$F_V = \frac{(1-\eta/4)\Gamma^2[(1-\eta/4)/2]}{(2-\eta/4)\Gamma(1-\eta/4)},$$

$$F_\perp = \frac{\Gamma^2[(1-\eta/4)/2]}{(2-\eta/4)\Gamma(1-\eta/4)}.$$

Отсюда следует, что длина затухания функции Грина l_q по порядку величины равна $1/q_c \tilde{\gamma}^{1/(1-\eta/4)}$, что много меньше $L_r = q_c^{-1} \exp(4b_0\kappa/3\eta T)$, если параметр b_0 не слишком мал (напомним, что в графене при комнатной температуре $\kappa/T \approx 30$, поэтому $4\kappa/3\eta T \approx 50$).

В случае сильного взаимодействия, $\tilde{\gamma} \gg 1$, мы, как и в разд. 3, находим $1/\tau_q \propto q_c V \ln \tilde{\gamma}$.

6. МАГНИТООСЦИЛЛЯЦИИ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ В СЛУЧАЕ $\eta < 1/2$

При $\eta > 1/2$, когда применима теория возмущений, фононный потенциал эффективно является короткодействующим, так что для описания магнитоосцилляций плотности состояний можно воспользоваться известными формулами (см. обзор [48] и

литературу в нем). Ниже мы кратко обсудим магнитоосцилляции в системе с $\eta < 1/2$.

В работе [40] было продемонстрировано (см. также [49, 50]), что в случае слабого плавного потенциала магнитоосцилляции плотности состояний удобно изучать методом интегрирования по траекториям. Плотность состояний выражается, как известно, через функцию Грина $G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t)$ формулой

$$\begin{aligned} \nu(\varepsilon) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} G(\varepsilon), \\ G(\varepsilon) &= \int_0^\infty G(0, 0, t) \exp(i\varepsilon t) dt. \end{aligned} \quad (50)$$

В квазиклассическом приближении $G(\varepsilon)$ можно представить суммой по замкнутым классическим траекториям [51]:

$$G(\varepsilon) = \frac{m}{2} \left\{ \frac{1}{\pi} \ln(-\varepsilon) - i \sum_\beta D_\beta \exp iS_\beta(\varepsilon) \right\}, \quad (51)$$

где $S_\beta(\varepsilon)$ — действие на траектории β , а фактор D_β происходит от интегрирования по ее окрестности. В отсутствие беспорядка классические траектории совпадают с циклотронной окружностью и характеризуются числом оборотов p , равным числу возвратов электрона в исходную точку, так что (51) принимает вид

$$\begin{aligned} G_0(\varepsilon) &= \frac{m}{2} \left\{ \frac{1}{\pi} \ln(-\varepsilon) - \right. \\ &\left. - 2i \sum_{p=1}^\infty \exp \left[2\pi i p \left(\frac{\varepsilon}{\omega_c} + \frac{1}{2} \right) \right] \Theta(\varepsilon) \right\}, \end{aligned} \quad (52)$$

а плотность состояний выражается суммой по дискретным уровням Ландау:

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi l_B^2} \sum_{N=0}^\infty \delta \left[\varepsilon - \omega_c \left(N + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (53)$$

При наличии слабого беспорядка можно пренебречь его влиянием на форму траекторий и по-прежнему считать их окружностями. Вклад в действие от взаимодействия на траектории с p оборотами дается выражением

$$S^{(p)} = \frac{1}{2} \text{Sp} \ln \left(I + 2ig\hat{K}^{(p)} \right),$$

где $\hat{K}^{(p)}$ — интегральный оператор с ядром, равным фононному коррелятору на циклотронной окружности, $x = R_c \sin \omega_c \tau$, $y = R_c - R_c \cos \omega_c \tau$. Для траектории с p оборотами $0 < \tau < pT_c$, где $T_c \equiv 2\pi/\omega_c$.

Выше, чтобы получить выражение (6) из (4), мы проинтегрировали по векторному «полю» $\chi(\tau)$ с компонентами $\chi_x(\tau)$ и $\chi_y(\tau)$. Если и теперь поступить так же, то вместо коррелятора типа (25), зависящего только от разности $\tau_1 - \tau_2$, мы получим выражение, зависящее также и от суммы времен $\tau_1 + \tau_2$. Этого можно избежать, если предварительно сделать преобразование к «вращающемуся полю» χ :

$$\chi_1(\tau) = \chi_x(\tau) \cos \omega_c \tau + \chi_y(\tau) \sin \omega_c \tau,$$

$$\chi_2(\tau) = -\chi_x(\tau) \sin \omega_c \tau + \chi_y(\tau) \cos \omega_c \tau,$$

а уже потом проинтегрировать по $\chi_1(\tau)$ и $\chi_2(\tau)$. Тогда коррелятор запишется в виде

$$\begin{aligned} K_{11}^{(p)}(\tau) &= \int_0^\infty \frac{dq}{4\pi} \times \\ &\times \frac{q^3 N_{\mathbf{q}} \{ J_0[q\rho(\tau)] \cos \omega_c \tau - J_2[q\rho(\tau)] \}}{\rho_0 \omega_{\mathbf{q}}}, \\ K_{22}^{(p)}(\tau) &= \int_0^\infty \frac{dq}{4\pi} \times \\ &\times \frac{q^3 N_{\mathbf{q}} \{ J_0[q\rho(\tau)] \cos \omega_c \tau + J_2[q\rho(\tau)] \}}{\rho_0 \omega_{\mathbf{q}}}, \\ K_{12}^{(p)}(\tau) &= -K_{21}^{(p)}(\tau) = \int_0^\infty \frac{dq}{4\pi} \times \\ &\times \frac{q^3 N_{\mathbf{q}} J_0[q\rho(\tau)] \sin \omega_c \tau}{\rho_0 \omega_{\mathbf{q}}}, \end{aligned} \quad (54)$$

где $\rho(\tau) = 2R_c |\sin(\omega_c \tau/2)|$, $\tau = \tau_1 - \tau_2$, причем $0 \leq \tau_{1,2} \leq pT_c$, а $R_c = V/\omega_c$ — радиус циклотронной окружности.

Собственные числа операторов $\hat{K}^{(p)}$ можно вычислить точно (Приложение С) и, тем самым, найти точные значения величин $S^{(p)}$, через которые, согласно (50) и (51), выражается плотность состояний. Ниже мы выведем приближенные формулы для плотности состояний в пределах слабого и сильного магнитных полей.

В слабом поле, $\omega_c \tau_q \ll 1$, что эквивалентно $\gamma(q_c R_c)^{1-\eta} \gg 1$, действие велико уже на одном обороте и поэтому вкладом траекторий с числом оборотов больше одного можно пренебречь. Заменяя собственные числа $\lambda_{\pm n}$ их асимптотическими значениями при $n \gg 1$, получим

$$S^{(1)} \approx i \text{Im} S^{(1)} + \pi/\omega_c \tau_q + (1-\eta) \ln(\omega_c^2 \tau_V \tau_\perp) + C, \quad (55)$$

где C — число порядка единицы. Это дает

$$\nu(\varepsilon) - \frac{m}{2\pi} \propto -\frac{m}{\pi(\omega_c^2 \tau_V \tau_\perp)^{1-\eta}} \times \cos\left(\frac{2\pi\varepsilon}{\omega_c} - \text{Im} S^{(1)}\right) \exp\left(-\frac{\pi}{\omega_c \tau_q}\right). \quad (56)$$

В случае мембраны с дефектами число λ_{+1} намного превышает, как уже отмечалось, значение, даваемое асимптотической формулой, и может оказаться больше единицы. Тогда в выражении (55) для действия следует учесть слагаемое $\ln \lambda_{+1}$, что приводит к появлению множителя $1/\lambda_{+1}$ в правой части (56), т. е. к дополнительному подавлению осцилляций плотности состояний.

В случае сильного магнитного поля, $\omega_c \tau_q \gg 1$, или, эквивалентно, $\gamma(q_c R_c)^{1-\eta} \ll 1$, действие на одном циклотронном обороте мало и поэтому нельзя ограничиться вкладом слагаемого с $p = 1$. В этом случае можно, однако, разложить $(1/2) \times \text{Sp} \ln(\hat{I} + 2ig\hat{K}^{(p)})$ по степеням оператора $2ig\hat{K}^{(p)}$ (см. абзац после формулы (36)), удержав только два первых члена:

$$S^{(p)} \approx ig \text{Sp} \hat{K}^{(p)} - g^2 \text{Sp} \hat{K}^{(p)2}.$$

В силу периодичности ядра оператора $\hat{K}^{(p)}$ имеем

$$\text{Sp} \hat{K}^{(p)} = p \text{Sp} \hat{K}^{(1)} \quad \text{и} \quad \text{Sp} \hat{K}^{(p)2} = p^2 \text{Sp} \hat{K}^{(1)2}.$$

Это дает

$$\nu(\varepsilon) = \frac{m}{2\pi} + \frac{m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \cos\left(2\pi n \frac{\varepsilon}{\omega_c} - gn \text{Sp} \hat{K}^{(1)}\right) \times \exp\left(-g^2 n^2 \text{Sp} \hat{K}^{(1)2}\right). \quad (57)$$

Здесь $g \text{Sp} \hat{K}^{(1)} \approx 2\pi\gamma q_c R_c [\eta^{-1} + \ln(qT/q_c)]$, а след оператора $g^2 \hat{K}^{(1)2}$ в двух предельных случаях $q_c R_c \gg 1$ и $q_c R_c \ll 1$ равен $a_1/(\omega_c \tau_q)^{2-2\eta}$ и $a_2(\gamma q_c V/\omega_c)^2$ соответственно, где a_1 и a_2 — числа порядка единицы. Применив теперь к (57) формулу суммирования Пуассона, получим в области не слишком сильных магнитных полей $1 \ll q_c R_c \ll \ll \gamma^{-1/(1-\eta)}$

$$\nu(\varepsilon) = \frac{m(\omega_c \tau_q)^{1-\eta}}{2\sqrt{\pi} a_1} \sum_{N=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 \tau_q^2}{a_1 (\omega_c \tau_q)^{2\eta}} \times \left[\varepsilon - \omega_c g \text{Sp} \frac{\hat{K}_1}{2\pi} - \omega_c \left(N + \frac{1}{2}\right)\right]^2\right), \quad (58)$$

$$\nu(\varepsilon) = \frac{m\omega_c}{2\sqrt{\pi} a_2 \gamma q_c V} \sum_{N=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{a_2 (\gamma q_c V)^2} \times \left[\varepsilon - \omega_c g \text{Sp} \frac{\hat{K}_1}{2\pi} - \omega_c \left(N + \frac{1}{2}\right)\right]^2\right) \quad (59)$$

в области очень сильных полей $q_c R_c \ll 1$. В обоих случаях уровни Ландау четко выражены и имеют гауссову форму. В области $1 \ll q_c R_c \ll \gamma^{-1/(1-\eta)}$ ширина уровней Δ растет с магнитным полем как B^η , а в области $q_c R_c \ll 1$ не зависит от него. В случае мембраны с дефектами в формулах (56), (58) и (59) η следует заменить на $\eta/4$, а для τ_q использовать выражение (49) из предыдущего раздела.

7. ВРЕМЯ СБОЯ ФАЗЫ ПРИ $\eta < 1/2$

Как отмечалось во Введении, в работе [39] было вычислено время сбоя фазы волновой функции τ_φ электрона за счет его взаимодействия с изгибными фононами при условии $\eta > 1/2$. Расчет был выполнен для мембраны с достаточно высокой концентрацией примесей, когда движение электрона определяется в основном его столкновениями с ними, а электрон-фононное взаимодействие необходимо учитывать только при анализе процессов декогеренции. В этом разделе мы оценим время сбоя фазы для случая $\eta < 1/2$, также предположив, что электрон-примесное рассеяние является доминирующим. Это предположение означает, в частности, выполнение неравенства $\tau_i < \tau_q$, где τ_i — время рассеяния электронов на примесях.

В такой ситуации для вычисления времени сбоя фазы достаточно вычислить двойное среднее $\Phi(t)$ от произведения амплитуд, отвечающих движению электрона по двум замкнутым близким встречным траекториям $\mathbf{r}_f(\tau)$ и $\mathbf{r}_b(\tau)$ и содержащих вклад в действие, связанный с электрон-фононным взаимодействием:

$$\Phi(t) = \left\langle \left\langle \exp\left(i \int_{-t/2}^{t/2} \left\{ -g \{ \nabla h[\mathbf{r}_f(\tau), \tau] \}^2 + g \{ \nabla h[\mathbf{r}_b(\tau), \tau] \}^2 \right\} d\tau \right) \right\rangle \right\rangle. \quad (60a)$$

Здесь внутреннее усреднение проводится по равновесным фононам, а внешнее — по траекториям. Имея в виду, что при $\eta < 1/2$ создаваемый фононами потенциал является плавным, мы не будем

учитывать относительные флуктуации траекторий $\mathbf{r}_f(\tau)$ и $\mathbf{r}_b(\tau)$ и положим $\mathbf{r}_b(\tau) = \mathbf{r}_f(-\tau)$ (индекс у функции $\mathbf{r}_f(\tau)$ мы в дальнейшем опустим). Тогда (60a) можно переписать так:

$$\Phi(t) = \left\langle \left\langle \exp \left(i \int_{-t/2}^{t/2} \left\{ -g \{ \nabla h[\mathbf{r}_f(\tau), \tau] \}^2 + g \{ \nabla h[\mathbf{r}_f(\tau), -\tau] \}^2 \right\} d\tau \right) \right\rangle \right\rangle. \quad (60b)$$

Введя, подобно тому, как это было сделано в разд. 1, векторные поля $\chi_f(\tau)$ и $\chi_b(\tau)$, запишем (60b) в виде

$$\Phi(t) = \left\langle \int D\chi_f D^* \chi_b \times \left\langle \exp \int_{-t/2}^{t/2} \left\{ \frac{ig}{4} \chi_f^2(\tau) - \frac{ig}{4} \chi_b^2(\tau) - ig \chi_f(\tau) \nabla h_f + ig \chi_b(\tau) \nabla h_b \right\} d\tau \right\rangle \right\rangle. \quad (61)$$

Здесь для краткости обозначено $\nabla h[\mathbf{r}(\tau), \tau] = \nabla h_f$ и $\nabla h[\mathbf{r}(\tau), -\tau] = \nabla h_b$, а символ $D^* \chi$ означает меру, комплексно-сопряженную к $D\chi$, так что

$$\int D^* \chi \exp \left(-i \frac{g}{4} \int_0^t \chi^2(\tau) d\tau \right) = 1.$$

Усреднив по фоновым, получим

$$\Phi(t) = \int D\chi_f D^* \chi_b \times \exp \int_{-t/2}^{t/2} \left[\frac{ig}{4} \chi_f^2(\tau) - \frac{ig}{4} \chi_b^2(\tau) \right] d\tau \times \left\langle \exp \frac{g^2}{2} \left[-\chi_f \hat{K}^{ff} \chi_f - \chi_b \hat{K}^{bb} \chi_b + \chi_f \hat{K}^{fb} \chi_b + \chi_b \hat{K}^{bf} \chi_f \right] \right\rangle, \quad (62)$$

где \hat{K}^{ik} — интегральные операторы с ядрами

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}^{ff}(\tau_1, \tau_2) &= K_{\alpha\beta}^{bb}(\tau_1, \tau_2) = \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{q_\alpha q_\beta N_{\mathbf{q}}}{\rho_0 \omega_{\mathbf{q}}} \times \\ &\times \cos \{ \mathbf{q} \cdot [\mathbf{r}(\tau_1) - \mathbf{r}(\tau_2)] - \omega_{\mathbf{q}}(\tau_1 - \tau_2) \}, \\ K_{\alpha\beta}^{fb}(\tau_1, \tau_2) &= K_{\alpha\beta}^{bf}(\tau_1, \tau_2) = \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{q_\alpha q_\beta N_{\mathbf{q}}}{\rho_0 \omega_{\mathbf{q}}} \times \\ &\times \cos \{ \mathbf{q} \cdot [\mathbf{r}(\tau_1) - \mathbf{r}(\tau_2)] - \omega_{\mathbf{q}}(\tau_1 + \tau_2) \}. \end{aligned} \quad (63)$$

Теперь в правой части (62) необходимо выполнить усреднение по траекториям при фиксированных значениях τ_1 и τ_2 . При этом, следуя работам [52–54], мы воспользуемся неравенством Йенсена $\langle \exp(-S) \rangle \geq \exp(-\langle S \rangle)$, применив его к экспоненте в третьей строке (62). Это позволит нам найти оценку снизу для времени сбоя фазы. Более того, такой расчет дает, по-видимому, выражение для τ_φ с точностью до численного множителя (см. дискуссию в [52] и работы [53, 54], где показано, что в случае сбоя фазы, обусловленного электрон-электронным взаимодействием в квазиодномерных и двумерных системах, усреднение показателя экспоненты приводит к параметрически аккуратному выражению для τ_φ , полученному в [55] путем усреднения экспоненциальной функции). Таким образом, вместо (62) напишем

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int D\chi_f D^* \chi_b \times \\ &\times \exp \int_{-t/2}^{t/2} \left[\frac{ig}{4} \chi_f^2(\tau) - \frac{ig}{4} \chi_b^2(\tau) \right] d\tau \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{g^2}{2} \left[-\chi_f \langle \hat{K}^{ff} \rangle \chi_f - \chi_b \langle \hat{K}^{bb} \rangle \chi_b + \right. \right. \\ &\left. \left. + \chi_f \langle \hat{K}^{fb} \rangle \chi_b + \chi_b \langle \hat{K}^{bf} \rangle \chi_f \right] \right\}. \end{aligned} \quad (64)$$

Из выражений (60) следует, что процедура усреднения сводится к вычислению среднего

$$E_{\mathbf{q}}(\tau_1, \tau_2) = \langle \exp\{i\mathbf{q} \cdot [\mathbf{r}(\tau_1) - \mathbf{r}(\tau_2)]\} \rangle$$

по всем возможным траекториям. При этом мы не будем учитывать того, что траектории электрона замкнуты [52], а просто усредним по всем траекториям, отвечающим интервалу времени $|\tau_1 - \tau_2|$. Строго говоря, промежуток времени $[-t/2, t/2]$ следовало бы разбить на три интервала $[-t/2, \tau_1]$, $[\tau_1, \tau_2]$, $[\tau_2, t/2]$ и рассмотреть движение электрона на каждом в отдельности. На первом интервале электрон движется диффузионно, на втором — диффузионно или баллистически, а на третьем — диффузионно возвращается в исходную точку. Такой расчет заметно усложняет последующие вычисления, однако окончательный результат для τ_φ остается прежним с точностью до численного множителя. Функция $E_{\mathbf{q}}(\tau_1, \tau_2)$, получающаяся в результате упрощенной процедуры усреднения, не зависит от направления вектора \mathbf{q} и зависит только от разности времен: $E_{\mathbf{q}}(\tau_1, \tau_2) = E_{\mathbf{q}}(\tau_1 - \tau_2)$. Это позволяет записать средние от выражений (62) в виде

$$\begin{aligned} \langle K_{\alpha\beta}^{ff}(\tau_1, \tau_2) \rangle &= \langle K_{\alpha\beta}^{bb}(\tau_1, \tau_2) \rangle \equiv K_{\alpha\beta}^{bb}(\tau_1, \tau_2) = \\ &= \delta_{\alpha\beta} \int dq F(q) E_q(\tau_1 - \tau_2) \cos \omega_q(\tau_1 - \tau_2), \\ \langle K_{\alpha\beta}^{fb}(\tau_1, \tau_2) \rangle &= \langle K_{\alpha\beta}^{bf}(\tau_1, \tau_2) \rangle \equiv K_{\alpha\beta}^{fb}(\tau_1, \tau_2) = \\ &= \delta_{\alpha\beta} \int dq F(q) E_q(\tau_1 - \tau_2) \cos \omega_q(\tau_1 + \tau_2), \\ F(q) &= \frac{q^3 N_{\mathbf{q}}}{4\pi \rho_0 \omega_{\mathbf{q}}}. \end{aligned} \tag{65}$$

Вместо (64) напишем теперь

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int D\chi_f D^* \chi_b \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{ig}{4} \int_{-t/2}^{t/2} [\chi_f^2(\tau) - \chi_b^2(\tau)] d\tau \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{g^2}{2} \left[-\chi_f \hat{K}^{ff} \chi_f - \chi_b \hat{K}^{ff} \chi_b + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \chi_f \hat{K}^{fb} \chi_b + \chi_b \hat{K}^{fb} \chi_f \right] \right\}. \end{aligned} \tag{66}$$

Введем новые поля $\bar{\chi}_1 = (\chi_f - \chi_b)/\sqrt{2}$ и $\bar{\chi}_2 = (\chi_f + \chi_b)/\sqrt{2}$ и перепишем (66) через них:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int D\bar{\chi}_1 D\bar{\chi}_2 \exp \left\{ \frac{ig}{2} \int_{-t/2}^{t/2} \bar{\chi}_1(\tau) \bar{\chi}_2(\tau) d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g^2}{2} \left[\bar{\chi}_1 (\hat{K}^{ff} + \hat{K}^{fb}) \bar{\chi}_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{\chi}_2 (\hat{K}^{ff} - \hat{K}^{fb}) \bar{\chi}_2 \right] \right\}. \end{aligned} \tag{67}$$

Этот интеграл можно записать в форме

$$\Phi(t) = (\text{Det } \hat{M})^{-1}, \tag{68}$$

где \hat{M} — операторная матрица:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 2g (\hat{K}^{ff} + \hat{K}^{fb}) & i\hat{I} \\ i\hat{I} & 2g (\hat{K}^{ff} - \hat{K}^{fb}) \end{pmatrix}. \tag{69}$$

Удвоение степени определителя в (68) связано с тем, что $\bar{\chi}_k$ — двумерные векторы. Определитель блочной матрицы

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

дается, как известно, выражением

$$\text{Det}(X) = \text{Det}(A) \text{Det}(D - CA^{-1}B).$$

Отсюда следует, что если матрицы A и C коммутируют друг с другом, то $\text{Det}(X) = \text{Det}(AD - CB)$. В случае матрицы (69) это свойство выполнено, так что мы имеем

$$\text{Det } \hat{M} = \text{Det} \left\{ \hat{I} + 4g^2 \left(\hat{K}^{ff} \hat{K}^{ff} - \hat{K}^{fb} \hat{K}^{fb} - [\hat{K}^{ff}, \hat{K}^{fb}] \right) \right\}. \tag{70}$$

Вычислим оператор $\hat{K} \equiv \hat{K}^{ff} \hat{K}^{ff} - \hat{K}^{fb} \hat{K}^{fb} - [\hat{K}^{ff}, \hat{K}^{fb}]$. Нас интересует поведение ядра $K(\tau_1, \tau_2)$ на больших временах t , поэтому в произведениях операторов в выражении (70) интегрирование по промежуточному времени мы можем распространить на всю числовую ось. Представляя затем функции E_q интегралами Фурье, получим

$$\begin{aligned} K(\tau_1, \tau_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty dq_1 dq_2 F(q_1) F(q_2) \times \\ &\times \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty d\Omega_1 d\Omega_2 E_1(\Omega_1) E_2(\Omega_2) \times \\ &\times \{ [\delta(\Omega_1 - \Omega_2 + \omega_1 - \omega_2) (\cos(\omega_1 + \Omega_1)\tau - \\ &\quad - \cos[2(\omega_1 - \omega_2)\bar{t} + (\omega_1 - \Omega_2)\tau] + \\ &\quad + \cos(2\omega_1\bar{t} - \Omega_1\tau) - \cos(2\omega_2\bar{t} + \Omega_2\tau))] + \\ &\quad + [\omega_2 \rightarrow -\omega_2] \}. \end{aligned} \tag{71}$$

со следующими обозначениями:

$$\bar{t} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}, \quad \tau = \tau_1 - \tau_2,$$

$$\omega_1 = \omega_{\mathbf{q}_1}, \quad \omega_2 = \omega_{\mathbf{q}_2}, \quad E_k(\Omega) = E_{q_k}(\Omega).$$

В дальнейшем мы увидим, что при вычислении определителя разность времен $|\tau|$ оказывается малой сравнительно с полным временем t , тогда как типичные значения самих времен $|\tau_1|$ и $|\tau_2|$ порядка t . При этих условиях $|\bar{t}|$ порядка t и поэтому мы, поскольку речь идет лишь об оценке τ_φ , заменим \bar{t} на $\pm t/2$. После такого упрощения $K(\tau_1, \tau_2)$ становится функцией разности времен и полного времени t , так что для вычисления определителя можно воспользоваться теоремой Фишера — Хартвига.

Разобьем интервал $[-t/2, t/2]$ на N частей и обозначим $t/N = t_0$. Тогда символ $\varphi(\theta, t)$ запишется в виде

$$\varphi(\theta, t) = 1 + 4g^2 t_0 \sum_{n=-\infty}^\infty K(t_0 n, t) \exp(in\theta).$$

Переходя в этом выражении от суммирования по n к интегрированию, получим

$$\varphi(\theta, t) = 1 + 4g^2 \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) \exp \frac{ix\theta}{t_0} dx.$$

Экспоненциальная зависимость определителя от t дается выражением

$$\begin{aligned} \text{Det } \hat{M} &\propto \exp \left(N \int_0^{2\pi} \ln \varphi(\theta) d\theta \right) = \\ &= \exp \left(t \int_0^{2\pi/t_0} \ln \varphi(\omega, t) d\omega \right), \end{aligned}$$

где $\varphi(\omega, t)$ не зависит от t_0 . В пределе $t_0 \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) будем иметь

$$\text{Det } \hat{M} \sim \exp \left(t \int_0^{\infty} \ln \varphi(\omega, t) d\omega \right). \quad (72)$$

Таким образом, в рамках принятых приближений разрушение когерентности описывается экспонентой с показателем

$$S(t) = t \int_0^{\infty} \ln \varphi(\omega, t) d\omega, \quad (73)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\omega, t) &= 1 + 4\pi g^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dq_1 dq_2 F(q_1) F(q_2) \times \\ &\times (\{ [E_1(\omega_1 + \omega) E_2(\omega_2 + \omega) + E_1(\omega_1 - \omega) E_2(\omega_2 - \omega)] \times \\ &\times [1 - \cos 2(\omega_1 - \omega_2)t] \} + \{ \omega_2 \rightarrow -\omega_2 \} + \\ &+ 2i E_1(\omega) \{ [E_2(\omega_1 - \omega_2 + \omega) - E_2(\omega_2 - \omega_1 + \omega)] + \\ &+ [\omega_2 \rightarrow -\omega_2] \} \sin 2\omega_1 t). \quad (74) \end{aligned}$$

Из этого выражения следует, что при $\omega_q = 0$ функция $\varphi(\omega, t) = 1$, как и должно быть, — в статическом поле сбой фазы отсутствует. При $t \rightarrow \infty$ вклады в интеграл (74) от осциллирующих со временем членов стремятся к нулю, а вклады от интегралов, содержащих $\sin 2\omega_i t$, малы при всех t . Чтобы учесть это обстоятельство, введем величину q_t согласно равенству $\omega_{q_t} t = 1$ и обозначим

$$\begin{aligned} J_{\pm}(\omega, t) &= \int_{q_t}^{\infty} F(q) E_q(\omega_q \pm \omega) dq, \\ J_{\pm}(\omega) &= \int_0^{\infty} F(q) E_q(\omega_q \pm \omega) dq, \end{aligned} \quad (75)$$

$$\tilde{J}_{\pm}(\omega, t) = \int_0^{q_t} F(q) E_q(\omega_q \pm \omega) dq.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \varphi(\omega, t) &= 1 + 4\pi g^2 [J_+(\omega, t) + J_-(\omega, t)] \times \\ &\times [J_+(\omega, t) + J_-(\omega, t) + 2\tilde{J}_+(\omega, t) + 2\tilde{J}_-(\omega, t)]. \quad (76) \end{aligned}$$

При $q < k$ (k — импульс электрона) функция $E_q(\omega)$ подчиняется классическому кинетическому уравнению и имеет вид

$$E_q(\omega) = \tau_i \left(\sqrt{(1 - i\omega\tau_i)^2 + q^2 l_i^2} - 1 \right)^{-1} + \text{с.с.},$$

где τ_i и $l_i = V\tau_i$ — транспортное время и транспортная длина относительно рассеяния на статическом беспорядке. В диффузионном ($ql_i < 1$) и баллистическом ($ql_i > 1$) пределах $E_q(\omega)$ упрощается и записывается в виде

$$\begin{aligned} E_q^{diff}(\omega) &= \frac{2D_i q^2}{D_i^2 q^4 + \omega^2}, \\ E_q^{ball}(\omega) &= \frac{2\Theta(q^2 V^2 - \omega^2)}{\sqrt{q^2 V^2 - \omega^2}}. \end{aligned} \quad (77)$$

Здесь $D_i = Vl_i/2$ — коэффициент диффузии за счет рассеяния на примесях. Ниже при вычислении времени сбоя фазы мы в области $q < 1/l_i \equiv k_i$ будем использовать функцию $E_q^{diff}(\omega)$, а в области $q > k_i$ — функцию $E_q^{ball}(\omega)$. Принятое выражение для $E_q(\omega)$ справедливо в случае короткодействующего беспорядка, однако результаты расчета в баллистическом и диффузионном пределах остаются справедливыми и в случае дальнедействующего рассеивающего потенциала. В случае $k < q$ важны квантовые эффекты и для $E_q^{ball}(\omega)$ следует использовать выражение

$$E_q^{ball}(\omega) = \frac{2\Theta [q^2 V^2 - (\omega - q^2/2m)^2]}{[q^2 V^2 - (\omega - q^2/2m)^2]^{1/2}}. \quad (78)$$

Функция $E_q^{diff}(\omega)$, отвечающая области $q < k_i$, в квантовом пределе нам не понадобится, так как мы всегда будем предполагать, что $k \gg k_i$ (условие квазиклассичности движения электрона).

Ниже мы зафиксируем импульс электрона k и отдельно рассмотрим случаи низких, $q_c < k$, и высоких, $q_c > k$, температур.

7.1. Низкие температуры, $q_c < k$

Начнем с области самых малых времен, когда $q_t > k$, так что в выражениях (65) и (75) $\omega_q = Dq^2$

и $F(q) = T/4\pi D^2 \kappa q$. При этом $q_t = 1/\sqrt{Dt}$, так что неравенство $q_t > k$ можно переписать в виде

$$t < t_k = \frac{1}{Dk^2}. \quad (79)$$

Поскольку $q > k$, в качестве $E_q(\omega)$ следует использовать функцию (78), где величину $\omega_q = Dq^2$ можно опустить рядом с величиной $q^2/2m$, так как $Dm \ll \ll 1$. Введя новые переменные $s = \omega/kV$ и $x = q/k$, запишем выражения (75) в форме

$$gJ_{\pm}(\omega, t) = \frac{\lambda Dq_c^2}{kV} \int_{x_1}^{\infty} \frac{\Theta[(x^2 - x_-^2)(x_+^2 - x^2)]}{x \sqrt{(x^2 - x_-^2)(x_+^2 - x^2)}} dx, \quad (80)$$

$$\lambda = \frac{g\Gamma}{2\pi\kappa Dq_c^2}, \quad x_t = \frac{1}{k\sqrt{Dt}},$$

$$g\tilde{J}_{\pm}(\omega, t) = \frac{\lambda Dq_c^2}{kV} \int_0^{x_t} \frac{\Theta[(x^2 - x_-^2)(x_+^2 - x^2)]}{x \sqrt{(x^2 - x_-^2)(x_+^2 - x^2)}} dx,$$

$$x_{\pm} = \sqrt{2s + 1} \pm 1.$$

Поскольку $x_t \gg 1$, справедливо также и неравенство $s \gg 1$ (в противном случае $J_{\pm}(\omega, t) = 0$ и $\varphi(\omega, t) = = 1$). Тогда

$$S(t) \sim tkV \int_{x_t^2/2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{\lambda^2 D^2 q_c^4}{k^2 V^2 s^2} \right] ds. \quad (81)$$

В однослойном графене при температуре ниже комнатной $\lambda Dq_c/V < 0.1$, поэтому логарифм в (81) можно разложить и мы получим

$$S(t) \sim \frac{\lambda^2 kD}{V} (Dq_c^2 t)^2. \quad (82)$$

Если $S(t_k) > 1$, что эквивалентно $q_c^2 > k^2 \sqrt{V/\lambda^2 kD}$, то разрушение когерентности происходит уже при $t < t_k$ с характерным временем

$$\frac{1}{\tau_{\varphi}} \sim Dq_c^2 \sqrt{\frac{\lambda^2 kD}{V}}. \quad (83)$$

Таким образом, чтобы формула (83) была справедлива при $q_c < k$, должно выполняться условие $k^2 > > q_c^2 > k^2 \sqrt{V/\lambda^2 kD}$. Это возможно, если $V/\lambda^2 kD < < 1$. В графене $V/\lambda^2 D \approx 5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$, что отвечает концентрации электронов $n \approx 10^{11} \text{ см}^{-2}$. Следовательно, в этом материале формула (83) может давать время сбоя фазы в случае $q_c < k$ только при $n > 10^{11} \text{ см}^{-2}$. Неравенства $k^2 > q_c^2 > k^2 \sqrt{V/\lambda^2 kD}$ можно записать и в форме условия для температуры. В однослойном графене при $n = 10^{12} \text{ см}^{-2}$ получим $10 \text{ К} > T > 5 \text{ К}$ (здесь учтено, что в графене $q_c \approx 10^7 \sqrt{T/300 \text{ К}} \cdot \text{см}^{-1}$).

Предположим теперь, что $q_c^2 < k^2 \sqrt{V/\lambda^2 kD}$. При этом условии за время t_k когерентность не успевает разрушиться и поэтому необходимо вычислить $S(t)$ на временах, больших t_k . Рассмотрим интервал времени

$$t_k < t < t_c \equiv \frac{1}{Dq_c^2}. \quad (84)$$

В этом интервале по-прежнему $\omega_q = Dq^2$, а в качестве функции $E_q(\omega)$ надо использовать $E_q^{ball}(\omega)$ из (77). Сделав замены $\omega = V^2 s/D$ и $q = Vx/D$, получим

$$gJ_{\pm}(\omega, t) = \lambda \left(\frac{Dq_c}{V} \right)^2 \int_{x_t}^{\infty} \frac{dx \Theta[x^2 - (x^2 \pm s)^2]}{x \sqrt{x^2 - (x^2 \pm s)^2}}, \quad (85)$$

$$x_t = \frac{D}{V\sqrt{Dt}}.$$

Предположим, что типичные значения x и s удовлетворяют неравенству $x^2 < s$. Тогда в (85) можно пренебречь величиной x^2 рядом с s и после замены $x = sy$ будем иметь

$$gJ_{\pm}(\omega, t) = \frac{\lambda}{s} \left(\frac{Dq_c}{V} \right)^2 \int_{x_t/s}^{\infty} \frac{dy \Theta(y^2 - 1)}{y \sqrt{y^2 - 1}}, \quad (86)$$

откуда следует

$$gJ_{\pm}(\omega, t) \sim \begin{cases} \frac{\lambda}{x_t} \left(\frac{Dq_c}{V} \right)^2, & s < x_t, \\ \frac{\lambda}{s} \left(\frac{Dq_c}{V} \right)^2, & s > x_t. \end{cases} \quad (87)$$

Аналогичные рассуждения дают

$$g\tilde{J}_{\pm}(\omega, t) \sim \begin{cases} \frac{\lambda}{s} \left(\frac{Dq_c}{V} \right)^2, & s < x_t, \\ 0, & s > x_t. \end{cases} \quad (88)$$

Таким образом,

$$\varphi(\omega, t) \sim 1 + 16\pi g^2 J_{+}(\omega, t) [J_{+}(\omega, t) + 2\tilde{J}_{+}(\omega, t)].$$

Для $S(t)$ получим

$$S(t) \sim \frac{V^2 t}{D} \int_0^{x_t} \ln \left[1 + 16\pi \frac{\lambda^2}{x_t^2} \left(\frac{Dq_c}{V} \right)^4 + \right. \\ \left. + 32\pi \frac{\lambda^2}{x_t s} \left(\frac{Dq_c}{V} \right)^4 \right] ds + \\ + \frac{V^2 t}{D} \int_{x_t}^{\infty} \ln \left[1 + 16\pi \frac{\lambda^2}{s^2} \left(\frac{Dq_c}{V} \right)^4 \right] ds. \quad (89)$$

В однослойном графене при $t < t_c$ $x_t^2 \gg \gg 16\pi(Dq_c/Dq_c)^4$ и поэтому главный вклад в действие дается выражением

$$S(t) \sim \frac{V^2 t}{D} \int_0^{x_t} \ln \left[1 + 32\pi \frac{\lambda^2}{x_t s} \left(\frac{Dq_c}{V} \right)^4 \right] ds \sim \sim \frac{\lambda^2 Dq_c}{V} \left(\frac{t}{t_c} \right)^{3/2} \int_0^{z_t} \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right) dz, \quad (90)$$

где $z_t \sim (x_t V^2 / \lambda D^2 q_c^2)^2$. Подчеркнем, что разложить логарифм нельзя, т.е. в действие $S(t)$ дают вклад все диаграммы рис. 1. Формула (89) справедлива при $t < t_c$. В графене, как однослойном, так и двухслойном, z_t при $t = t_c$ много больше единицы при всех разумных значениях температур, так что для этих мембран мы получаем

$$S(t) \sim \frac{\lambda^2 Dq_c}{V} \left(\frac{t}{t_c} \right)^{3/2} \ln z_t \sim \sim \frac{\lambda^2 Dq_c}{V} \left(\frac{t}{t_c} \right)^{3/2} \ln \left(\frac{V}{\lambda Dq_c} \sqrt{\frac{t_c}{t}} \right). \quad (91)$$

Из условия $S(\tau_\varphi) = 1$ найдем τ_φ :

$$\frac{1}{\tau_\varphi} \sim Dq_c^2 \left(\frac{\lambda^2 Dq_c}{V} \right)^{2/3} \ln^{2/3} \left(\frac{V}{\lambda^{5/4} Dq_c} \right) \sim \sim (gT)^{4/3}. \quad (92)$$

Эта формула дает время сбоя фазы, если $S(t_c) \sim \sim \lambda^2 Dq_c / V > 1$, что эквивалентно неравенству

$$T > T_1 = \frac{\hbar^2 V^4}{\lambda^4 D^2 \Delta_c}. \quad (93)$$

В однослойном графене температура $T_1 \approx 0.75$ К, а в двухслойном она может оказаться на несколько порядков меньше вследствие меньшей величины скорости.

Выше было предположено, что типичные значения x и s удовлетворяют неравенству $x^2 < s$. Из приведенных вычислений видно, что эти значения порядка x_t . Следовательно, должно выполняться условие $x_t \ll 1$. Подставив сюда x_t из (85), получим неравенство $t > D/V^2$. Наш расчет справедлив, если $D/V^2 < \tau_\varphi$, что эквивалентно $\lambda(Dq_c/V)^2 < 1$. В случае графена это неравенство выполнено при всех разумных температурах ($T < 10^6$ К).

Рассмотрим теперь область температур $T < T_1$. При таких температурах когерентность не успевает разрушиться за время t_c , в течение которого $qt > q_c$,

и необходимо изучить поведение функции $S(t)$ на временах $t > t_c = 1/Dq_c^2$. При этом величины фоновых импульсов оказываются меньше q_c , так что

$$\omega_q = Dq_c^{\eta/2} q^{2-\eta/2}, \quad q_t = q_c / (Dq_c^2 t)^{2/(4-\eta)}.$$

До тех пор пока выполняется неравенство $qt l_i > 1$, по-прежнему реализуется баллистический режим. Это неравенство эквивалентно неравенству

$$t < t_1 = \frac{1}{Dq_c^2} (q_c l_i)^{2-\eta/2} = \tau_i \frac{D_i}{D} \left(\frac{V}{D_i q_c} \right)^{\eta/2}. \quad (94)$$

Отметим, что при типичных значениях параметров $t_1 \gg \tau_i$. Рассуждая как выше, вместо формулы (89) получим

$$S(t) \sim \frac{V^2 t}{D} \int_0^{x_t} \ln \left[1 + 16\pi \frac{\lambda^2}{x_t^{2-2\eta}} \left(\frac{Dq_c}{V} \right)^{4-2\eta} + + 32\pi \frac{\lambda^2}{x_t^{1-\eta} s^{1-\eta}} \left(\frac{Dq_c}{V} \right)^{4-2\eta} \right] ds + + \frac{V^2 t}{D} \int_{x_t}^\infty \ln \left[1 + 16\pi \frac{\lambda^2}{s^{2-2\eta}} \left(\frac{Dq_c}{V} \right)^{4-2\eta} \right] ds. \quad (95)$$

Теперь логарифмы можно разложить (вклад области малых s в первый интеграл, когда этого делать нельзя, мал) и мы получим

$$S(t) \sim \lambda^2 \frac{Dq_c}{V} (Dq_c^2 t)^{(6-5\eta)/(4-\eta)}, \quad (96)$$

откуда следует

$$\frac{1}{\tau_\varphi} \sim Dq_c^2 \left(\frac{\lambda^2 Dq_c}{V} \right)^{(4-\eta)/(6-5\eta)} \sim \sim g^{(8-2\eta)/(6-5\eta)} T^{(16-11\eta)/(12-10\eta)}. \quad (97)$$

Эта формула дает время сбоя фазы, если $S(t_1) > 1$, что можно записать в виде

$$T > T_2 = \frac{\hbar^2 V^4}{\Delta_c D^2 \lambda^{8/(8-5\eta)}} \left(\frac{D}{D_i} \right)^{(12-10\eta)/(8-5\eta)}.$$

При $T < T_2$ разрушение когерентности происходит на временах $t > t_1$, т.е. в диффузионном режиме. В этом случае удобно сделать замены $\omega = Dq_c^2 s$ и $q = q_c \sqrt{D/D_i} x$. Опустив пока в (76) слагаемые $2\tilde{J}_+(\omega, t) + 2\tilde{J}_-(\omega, t)$, получим

$$S(t) = Dq_c^2 t \int_0^{X^2} \ln \{ 1 + 4\pi g^2 [J_+(s, t) + J_-(s, t)]^2 \} ds,$$

$$X = \frac{V}{q_c \sqrt{DD_i}},$$

$$gJ_{\pm} = \lambda \left(\frac{D}{D_i} \right)^{\eta/2} \times \int_{x_t}^X \frac{x^{1+\eta} dx}{x^4 + [(D/D_i)^{(4-\eta)/4} x^{2-\eta/2} \pm s]^2}, \quad (98)$$

$$x_t = \frac{\sqrt{D_i/D}}{(Dq_c^2 t)^{2/(4-\eta)}}.$$

Предположив, что $s > (D/D_i)^{1-\eta/4} x^{2-\eta/2}$, получим

$$S(t) \sim Dq_c^2 t \int_0^{X^2} \ln \left[1 + 16\pi\lambda^2 \left(\frac{D}{D_i} \right)^{\eta} \times \left(\int_{x_t}^X \frac{x^{1+\eta} dx}{x^4 + s^2} \right)^2 \right] ds. \quad (99)$$

Чтобы оценить $S(t)$, представим интеграл по s в виде суммы интегралов по промежуткам $(0, x_t^2)$ и (x_t^2, X^2) . В первом из них в знаменателе подынтегрального выражения интеграла по x можно опустить слагаемое s^2 , а во втором интеграл по x оценим так:

$$\int_{x_t}^X \frac{x^{1+\eta} dx}{x^4 + s^2} \approx \frac{1}{s^2} \int_{x_t}^{\sqrt{s}} x^{1+\eta} dx + \int_{\sqrt{s}}^X \frac{dx}{x^{3-\eta}} \approx \frac{4}{(4-\eta^2)s^{1-\eta/2}}.$$

В результате получим

$$S(t) \sim Dq_c^2 x_t^2 t \ln \left[1 + \frac{16\pi\lambda^2 (D/D_i)^{\eta}}{(2-\eta)^2 x_t^{4-2\eta}} \right] + Dq_c^2 t \int_{x_t^2}^{X^2} \ln \left[1 + \frac{\pi(16\lambda)^2 (D/D_i)^{\eta}}{(4-\eta^2)^2 s^{2-\eta}} \right] ds. \quad (100)$$

Пусть $x_t^{2-\eta} > \lambda(D/D_i)^{\eta/2}$, или

$$t < t_2 = \frac{1}{Dq_c^2} \left(\frac{D_i}{\lambda D} \right)^{(4-\eta)/(4-2\eta)}. \quad (101)$$

Отношение t_1/t_2 уменьшается с уменьшением температуры и максимально при $T = T_2$, но и при этой температуре оно много меньше единицы. Разложив логарифмы в (100), получим

$$S(t) \sim \lambda^2 \frac{D}{D_i} (Dq_c^2 t)^{(8-5\eta)/(4-\eta)}. \quad (102)$$

Подставив в (102) выражение для t_2 из (101), будем иметь при $D \ll D_i$ и $\lambda \gg 1$

$$S(t_2) \sim \lambda^{\eta/(4-2\eta)} \left(\frac{D_i}{D} \right)^{(4-3\eta)/(4-2\eta)} \gg 1.$$

Из (102) получим оценку времени разрушения когерентности

$$\frac{1}{\tau_{\varphi}} \sim Dq_c^2 \left(\frac{\lambda^2 D}{D_i} \right)^{(4-\eta)/(8-5\eta)} \sim g^{(8-2\eta)/(8-5\eta)} T. \quad (103)$$

Учет слагаемых $2\tilde{J}_+(\omega, t) + 2\tilde{J}_-(\omega, t)$ приводит лишь к изменению численного множителя в выражении для действия. При этом в интеграле по s на промежутке $(0, x_t^2)$ возникает логарифм, который нельзя разложить при малых s , однако этот непертурбативный вклад мал.

Таким образом, при $T > T_1$ время сбоя фазы дается выражениями (83) и (92), в интервале температур $T_2 < T < T_1$ — выражением (97), а при $T < T_2$ — выражением (103). В графене по порядку величины $T_1 \approx 1$ К, а $T_2 \approx 10^{-1}-10^{-2}$ К.

Отдельного рассмотрения требует случай $\eta = 1/2$, так как при этом условии второй интеграл в правой части (95) расходится. Чтобы избежать этой расходимости, надо учесть, что при больших значениях s переменная интегрирования x в интеграле (87) тоже велика ($x \sim s$) и, следовательно, необходимо использовать закон дисперсии $\omega_q = Dq^2$, не содержащий η . В результате при $s > x_c$ в аргументе логарифма в расходящемся интеграле s заменится на s^2 и интеграл сойдется. Действие запишется в виде

$$S^{ball}(t) \sim \lambda^2 (Dq_c/V) (Dq_c^2 t) \ln(Dq_c^2 t)$$

и для времени сбоя фазы при $\eta = 1/2$ мы получим

$$\frac{1}{\tau_{\varphi}} \sim Dq_c^2 \frac{\lambda^2 Dq_c}{V} \ln \frac{V}{\lambda^2 Dq_c} \sim g^2 T^{3/2} \ln \frac{T_1}{T}. \quad (104)$$

Это выражение с точностью до численного множителя и логарифма совпадает с выражением, найденным в работе [39] при $\eta = 1/2$ для случая рассеяния на векторном потенциале, когда экранирование отсутствует (формула (17) в [39]). В [39] расчеты проводились для $\eta > 1/2$.

7.2. Высокие температуры, $k < q_c$

Расчет τ_{φ} в случае, когда $k < q_c$, аналогичен проделанному выше для $q_c < k$, и мы не будем описывать его подробно. Отметим только, что на временах $t < t_c$ ($q_t > q_c$) для $E_q(\omega)$ надо использовать формулу (78), а на временах $t > t_c$ — формулы (77). Приведем результаты вычислений.

1. $t < t_c = 1/Dq_c^2$. В этой области

$$S(t) \sim \lambda^2 \frac{Dk}{V} (Dq_c^2 t)^2, \quad \frac{1}{\tau_{\varphi}} \sim Dq_c^2 \sqrt{\frac{\lambda^2 Dk}{V}}. \quad (105)$$

Формулы (105) совпадают с формулами (82) и (83), полученными выше для случая $q_c < k$ в интервале температур, определяемом неравенствами $k^2 > q_c^2 > k^2 \sqrt{V/\lambda^2 k D}$. Теперь мы видим, что формула (83) дает время сбоя фазы в мембране при одновременном выполнении неравенств $\lambda^2 D k / V > 1$ и $q_c^2 > k^2 \sqrt{V/\lambda^2 k D}$. В графене первое из них выполняется при $n > 10^{11} \text{ см}^{-2}$, а второе ограничивает температуру снизу при заданной концентрации электронов: $T > 5 \text{ К} (n \cdot 10^{-12} \text{ см}^2)^{3/4}$.

2. $t_c < t < t_k = t_c(q_c/k)^{(4-\eta)/2}$. В этом интервале

$$S(t) \sim \lambda^2 \frac{Dk}{V} (Dq_c^2 t)^{(8-5\eta)/(4-\eta)},$$

$$\frac{1}{\tau_\varphi} \sim Dq_c^2 \left(\frac{\lambda^2 Dk}{V} \right)^{(4-\eta)/(8-5\eta)}. \quad (106)$$

В графене при всех разумных значениях k (т. е. концентрации) $S(t_k) \gg 1$, так что в этом материале формула (106) определяет время сбоя фазы при $n < 10^{11} \text{ см}^{-2}$. В других мембранах это может быть не так, поэтому анализ следует продолжить.

3. При $t > t_k$, $q_t < k$, поэтому $S(t)$ и τ_φ даются выражениями (96) и (97).

4. Наконец, при $t > t_i$ (время t_i отвечает $q_t = k_i$) реализуется диффузионный режим, и справедливы формулы (102) и (103).

Сравним теперь наши результаты с результатами работы [39] для случая $k < q_c$, где было рассчитано время сбоя фазы при $\eta > 1/2$. Полученные в этой работе выражения для действия и времени сбоя фазы в случаях 1 и 2 совпадают с выражениями (105) и (106). Метод расчета, использованный в работе [39] и основанный на теории возмущений, в случае 3 приводит при $\eta < 1/2$ к расходящемуся выражению для $S(t)$ (отметим, что при $\eta > 1/2$ второй интеграл в выражении (95), из которого следует (96), расходится). Случай 4 также не может быть изучен в рамках теории возмущений.

В заключение этого раздела сделаем следующее замечание. Выше мы, ориентируясь на параметры графена, во многих описанных режимах разрушения когерентности раскладывали логарифм, что означает учет процесса, отвечающего только второй диаграмме рис. 1. В случаях мембран с другими параметрами разложение логарифма может оказаться невозможным и в величину $1/\tau_\varphi$ дадут вклад все диаграммы рис. 1. Кроме того, при очень больших временах аргумент логарифма велик и в случае графена, так что далекий «хвост» функции $\Phi(t)$ всегда требует учета всех процессов рис. 1. Действительно, при $t \rightarrow \infty$ реализуется диффузионный режим, описываемый формулой (100). Первое слагае-

мое в (100) стремится к нулю, и асимптотика функции $S(t)$ определяется вторым слагаемым. Поскольку $x_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, можно написать

$$S(t) \sim Dq_c^2 t \int_0^{x^2} \ln \left[1 + \frac{\pi(16\lambda)^2 (D/D_i)^\eta}{(4-\eta)^2 s^{2-\eta}} \right] ds \sim$$

$$\sim Dq_c^2 t \lambda^{2/(2-\eta)} \left(\frac{D}{D_i} \right)^{\eta/(2-\eta)} \int_0^Z \ln \left(1 + \frac{1}{z^{2-\eta}} \right) dz,$$

$$Z \sim \left(\frac{V}{Dq_c} \right)^2 \left(\frac{D}{D_i} \right)^{(2-2\eta)/(2-\eta)} \frac{1}{\lambda^{2/(2-\eta)}}.$$

Если $Z \gg 1$, то

$$S(t) \sim Dq_c^2 \lambda^{2/(2-\eta)} (D/D_i)^{\eta/(2-\eta)} t,$$

если же $Z \ll 1$, то

$$S(t) \sim Dq_c^2 (V/Dq_c)^2 \ln(1/Z) t.$$

В графене в зависимости от температуры и величины коэффициента диффузии могут реализоваться обе возможности. При достаточно низких температурах реализуется первая из них.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучено движение электрона, взаимодействующего с изгибными фононами мембраны в ситуации, когда фононный коррелятор убывает с расстоянием как $1/r^{2\eta}$, $\eta < 1/2$, и теория возмущений неприменима даже в случае сколь угодно слабого взаимодействия. Основные результаты состоят в следующем.

1. Найдено квантовое время τ_q , определяющее затухание функции Грина. Показано, что оно неаналитически зависит от силы взаимодействия и температуры,

$$1/\tau_q \propto g^{1/(1-\eta)} T^{(2-\eta)/2(1-\eta)}.$$

2. Изучены осцилляции плотности состояний электрона в перпендикулярном к мембране магнитном поле. Показано, что в наиболее интересном случае разделенных уровней Ландау форма уровней является гауссовой с шириной, зависящей от величины магнитного поля согласно закону $\Delta \propto B^\eta$.

3. Вычислено время сбоя фазы волновой функции электрона τ_φ за счет его взаимодействия с изгибными фононами в случае $\eta < 1/2$. Показано, что имеется несколько температурных интервалов, в которых величина $1/\tau_\varphi$ выражается различными степенными функциями от константы электрон-фононного взаимодействия, температуры и энергии электрона.

Развитый в работе метод можно применить и к другим системам, в которых гамильтониан взаимодействия электронов с бозонными модами содержит квадрат бозонного поля. Подобная ситуация обсуждалась, например, в работах [56, 57], посвященных влиянию флуктуаций спиновой плотности на термодинамические и транспортные свойства металлов вблизи антиферромагнитной критической точки. В этих работах было выведено эффективное действие, содержащее составную вершину, выраженную через произведение двух пропагаторов элементарных бозонных возбуждений. Такое приближение соответствует удержанию тех диаграмм на рис. 1, которые содержат только двойные волнистые линии (например, последней), тогда как исходное действие включает все диаграммы рис. 1. Было бы интересно изучить процессы разрушения когерентности в таких системах, используя предложенный в нашей работе подход.

Наконец, отметим, что представляет интерес задача о чистой мембране, в которой как проводимость, так и процессы декогеренции обусловлены исключительно электрон-фононным взаимодействием. Ранее такая ситуация рассматривалась, например, в работах [58, 59]. В [58] изучалась слабая локализация, обусловленная взаимодействием электрона с квазистатическими акустическими фононами, а в [59] изучалась кинетика электронов на нулевом уровне Ландау, взаимодействующих с акустическими фононами. В принципе, при достаточно высоких температурах возможна ситуация, когда изгибные фононы создают столь сильный квазистатический случайный потенциал [38], что электроны успевают локализоваться в нем на временах, меньших τ_φ . Иными словами, при высоких температурах изгибные фононы, вопреки естественным ожиданиям, могут приводить к сильной локализации электронов. Если этот эффект реализуем, то он будет иметь общую природу с явлением, описанным в работе [60], где была предсказана возможность сильной локализации в двухкомпонентной жидкости с сильно различающимися массами частиц. В [60] было показано, что легкие частицы могут локализоваться в потенциале тяжелых, что, в свою очередь, меняет динамические свойства тяжелых частиц и, как следствие, подавляет эквilibрацию и процессы сбоя фазы. В результате система локализуется как целое бесконечно слабым беспорядком. В чистой мембране роль «тяжелых» частиц будут играть изгибные фононы.

Авторы благодарят А. М. Финкельштейна, К. С. Тихонову, Wei L. Z. Zhao, А. М. Монахова, В. Ю. Качоровского и Д. В. Хвещенко за полезные обсуждения. Работа одного из соавторов (А. П. Д.) выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-02-04496-а), других соавторов (И. В. Г., А. Д. М., И. В. П.) — при финансовой поддержке РНФ (грант № 14-42-00044). Работа была также поддержана EU Network FP7-PEOPLE-2013-IRSES (Grant № 612624 “InterNoM”).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вычисление собственных чисел операторов $2g\hat{K}_\mu$

Рассмотрим сначала оператор \hat{K}_V . Требуется решить уравнение

$$2g \int_0^t K_V(\tau_1 - \tau_2) f_n(\tau_2) d\tau_2 = \Lambda_{Vn}(t) f_n(\tau_1).$$

Его удобно записать в форме

$$2g \int_0^t \int_0^\infty \frac{dq}{4\pi} \frac{I[qV(\tau_1 - \tau_2)]U(q)}{\rho_0 D^2 q^{1-\eta} q_c^\eta [1 + (q/q_c)^\eta]} \times \\ \times f_n(\tau_2) d\tau_2 = \Lambda_{Vn}(t) f_n(\tau_1), \quad (A.1)$$

$$I[qV(\tau_1 - \tau_2)] = J_0[qV(\tau_1 - \tau_2)] - \\ - J_2[qV(\tau_1 - \tau_2)], \quad U(q) = \frac{\omega(q)}{T} N(q).$$

Отметим, что $U(q) \approx 1$ при $q < q_T$ и $U(q) \propto \exp(-\omega(q)/T)$ при $q > q_T$. Введем безразмерные переменные $s = qVt$ и $\vartheta_i = \tau_i/t$ и сдвинем ϑ_i так, чтобы они менялись в интервале $[-1/2, 1/2]$. Последнее позволит нам в явном виде учесть четность функции $K_V(\tau) = K_V(-\tau)$. После этого (A.1) запишется так:

$$\gamma L^{1-\eta} \int_0^\infty \frac{U(q_c s/L) ds}{s^{1-\eta} [1 + (s/L)^\eta]} \times \\ \times \int_{-1/2}^{1/2} I[s(\vartheta_1 - \vartheta_2)] f_n(\vartheta_2) d\vartheta_2 = \Lambda_{Vn}(t) f_n(\vartheta_1). \quad (A.2)$$

Здесь $L = q_c Vt$, а $\gamma = gT/2\pi\kappa q_c V$ — безразмерный параметр, характеризующий силу взаимодействия (в случае однослойного графена $\gamma \approx 0.1 \sqrt{T/300}$ К). Из четности функции $I[s(\vartheta_1 - \vartheta_2)]$ относительно преобразования $\vartheta_i \rightarrow -\vartheta_i$ следует, что собственные

функции $f_n(\vartheta)$ имеют определенную четность. При $n \gg 1$ функции $\cos(2\pi n\vartheta)$ и $\sin(2\pi n\vartheta)$ удовлетворяют уравнению (A.2) всюду, кроме узких, шириной порядка $1/2\pi n$, интервалов вблизи концов интервала $[-1/2, 1/2]$. Действительно, подставив первую из них в левую часть (A.2) и сделав очевидные замены переменных, получим

$$\begin{aligned} & \gamma L^{1-\eta} \int_0^\infty \frac{U(q_c s/L) ds}{s^{1-\eta}[1+(s/L)^\eta]} \times \\ & \times \int_{-1/2}^{1/2} I[s(\vartheta_1 - \vartheta_2)] \cos(2\pi n\vartheta_2) d\vartheta_2 = \\ & = \gamma \left(\frac{L}{2\pi n}\right)^{1-\eta} \int_0^\infty \frac{U(2\pi n q_c y/L) dy}{y^{1-\eta}[1+(2\pi n y/L)^\eta]} \times \\ & \times \int_{-(1/2+\vartheta_1)2\pi n}^{(1/2-\vartheta_1)2\pi n} I(yx) [\cos(2\pi n\vartheta_1) \cos x - \\ & - \sin(2\pi n\vartheta_1) \sin x] dx. \quad (A.3) \end{aligned}$$

Интеграл

$$\int_{-(1/2+\vartheta_1)2\pi n}^{(1/2-\vartheta_1)2\pi n} I(yx) \cos x dx$$

сходится в области $|x|$ порядка единицы и поэтому не зависит от ϑ_1 вне указанных выше малых интервалов вблизи краев промежутка $[-1/2, 1/2]$. Это означает, что при почти всех ϑ_1 пределы интегрирования можно положить равными $\pm\infty$. Исключением являются значения y в области шириной порядка $1/n$ вокруг $y = 1$, где интеграл имеет интегрируемую особенность вида $1/\sqrt{|y-1|}$. Вкладом этой области при последующем интегрировании по y можно пренебречь. При тех же значениях ϑ_1 интеграл

$$\int_{-(1/2+\vartheta_1)2\pi n}^{(1/2-\vartheta_1)2\pi n} I(yx) \sin x dx$$

близок к нулю. В результате правая часть (A.3) оказывается равной

$$\begin{aligned} & \cos(2\pi n\vartheta_1) \gamma \left(\frac{L}{2\pi n}\right)^{1-\eta} \int_0^\infty \frac{U(2\pi n q_c y/L) dy}{y^{1-\eta}[1+(2\pi n y/L)^\eta]} \times \\ & \times \int_{-\infty}^\infty I(yx) \cos x dx. \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что

$$\int_{-\infty}^\infty I(yx) \cos x dx = 4\Theta(y-1)/y^2 \sqrt{y^2-1}$$

($\Theta(x)$ — функция Хэвисайда), получим для четных решений

$$\begin{aligned} \Lambda_{Vn}(t) & \approx 4\gamma \left(\frac{L}{2\pi n}\right)^{1-\eta} \times \\ & \times \int_1^\infty \frac{U(2\pi n q_c y/L)}{y^{3-\eta} \sqrt{y^2-1} [1+(2\pi n y/L)^\eta]} dy. \quad (A.4) \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно показать, что при $n \gg 1$ собственные числа, отвечающие нечетным решениям, также даются выражением (A.4). Для собственных чисел оператора \hat{K}_\perp найдем

$$\begin{aligned} \Lambda_{\perp n}(t) & \approx 4\gamma \left(\frac{L}{2\pi n}\right)^{1-\eta} \times \\ & \times \int_1^\infty \frac{U(2\pi n q_c y/L) \sqrt{y^2-1}}{y^{3-\eta} [1+(2\pi n y/L)^\eta]} dy. \quad (A.5) \end{aligned}$$

В дальнейшем приближенные собственные числа (A.4) и (A.5) мы будем обозначать символами $\lambda_{\mu n}(t)$, в отличие от точных собственных чисел $\Lambda_{\mu n}(t)$. Заметим также, что, как следует из (30), при $L \rightarrow \infty$ точные собственные числа, как и найденные приближенные, пропорциональны $L^{1-\eta}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Вычисление префактора во временной зависимости функции Грина электрона

Вычислим величины

$$\begin{aligned} M_n & = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln \left[\varphi_V(\theta) \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|^{1-\eta} \right] \times \\ & \times \exp(-in\theta) d\theta, \quad n \neq 0 \end{aligned}$$

(вычисление величин

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln \left[\varphi_\perp(\theta) \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|^{1-\eta} \right] \exp(-in\theta) d\theta$$

проводится аналогично). Учтя, что для $n \neq 0$

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|^{1-\eta} \exp(-in\theta) d\theta = -\frac{1-\eta}{2|n|},$$

получим

$$M_n = -\frac{1-\eta}{2|n|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \varphi_V(\theta) \exp(-in\theta) d\theta. \quad (B.1)$$

Поскольку $\varphi_V(\theta) = \varphi_V(2\pi - \theta)$,

$$\int_0^{2\pi} \ln \varphi_V(\theta) \exp(-in\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} \ln \varphi_V(\theta) \cos n\theta d\theta.$$

После интегрирования по частям M_n запишется в виде

$$M_n = -\frac{1-\eta}{2|n|} - \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \frac{\varphi'_V(\theta)}{\varphi_V(\theta)} \sin n\theta d\theta.$$

Выражение (46) для $\varphi_V(\theta)$ можно записать в форме

$$\begin{aligned} \varphi_V(\theta) = 1 + 2i\gamma \left(\frac{\theta_c}{\theta}\right)^{1-\eta} \times \\ \times \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3-\eta}[(\theta x/\theta_c)^\eta + 1]\sqrt{x^2-1}}. \quad (B.2) \end{aligned}$$

В результате будем иметь

$$\begin{aligned} M_n = -\frac{1-\eta}{2|n|} + \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi/\theta_c} \frac{\sin(n\theta_c z)}{z} \times \\ \times \frac{2i\gamma/z^{1-\eta} \int_1^{\infty} \frac{(xz)^\eta + 1 - \eta}{x^{3-\eta}\sqrt{x^2-1}[1+(xz)^\eta]^2} dx}{1 + 2i\gamma/z^{1-\eta} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3-\eta}\sqrt{x^2-1}[1+(xz)^\eta]} dx} dz. \end{aligned}$$

Здесь сделана замена переменной интегрирования $\theta \rightarrow \theta_c z$. Отметим, что $M_n = M_{-n}$. Представим внешний интеграл в этом выражении суммой интегралов I_1 и I_2 соответственно по областям $0 < z < 1$ и $1 < z < \pi/\theta_c$. Первый можно записать приближенно в виде

$$\begin{aligned} I_1 \approx \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \frac{\sin(n\theta_c z)}{z} \frac{2i\gamma(1-\eta)A_1/z^{1-\eta}}{1 + 2i\gamma A_1/z^{1-\eta}} dz, \\ A_1 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3-\eta}\sqrt{x^2-1}}, \end{aligned}$$

а второй, учтя неравенство $\gamma \ll 1$, в виде

$$I_2 \approx \frac{2i\gamma A_2}{\pi n} \int_1^{\pi/\theta_c} \frac{\sin(n\theta_c z)}{z^2} dz, \quad A_2 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}.$$

Вычислим эти интегралы для случаев $n\theta_c < 1$ и $n\theta_c > 1$. Пусть сначала $n\theta_c < 1$. В этом случае синус в I_1 можно разложить, и мы получим

$$I_1 \approx \frac{\theta_c}{\pi} \int_0^1 \frac{2i\gamma(1-\eta)A_1/z^{1-\eta}}{1 + 2i\gamma A_1/z^{1-\eta}} dz \approx 2i\gamma\theta_c \frac{(1-\eta)A_1}{\eta\pi}.$$

Для I_2 найдем

$$I_2 \approx 2i\gamma\theta_c \frac{A_2}{\pi} \ln\left(\frac{1}{n\theta_c}\right).$$

Видно, что вклад I_2 доминирует. В случае $n\theta_c > 1$ для I_1 и I_2 получим

$$\begin{aligned} I_1 \approx \frac{2i\gamma(n\theta_c)^{1-\eta}B_1}{\pi n}, \quad 2\gamma(n\theta_c)^{1-\eta} < 1, \\ B_1 = (1-\eta)A_1 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{2-\eta}} dx, \\ I_1 \approx \frac{1-\eta}{2n} + \frac{iC_1}{2\gamma n(n\theta_c)^{1-\eta}}, \quad 2\gamma(n\theta_c)^{1-\eta} > 1, \\ C_1 = \frac{1-\eta}{\pi A_1} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\eta} dx, \\ I_2 \approx \frac{2i\gamma A_2 \cos(n\theta_c)}{\theta_c n^2}. \quad (B.3) \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае вклад I_1 параметрически больше вклада I_2 . В результате мы имеем

$$\begin{aligned} M_n \approx -\frac{1-\eta}{2n} + 2i\gamma\theta_c \frac{A_2}{\pi} \ln(1/n\theta_c), \quad n\theta_c < 1, \\ M_n \approx \frac{2i\gamma(n\theta_c)^{1-\eta}B_1}{\pi n}, \quad 1 < n\theta_c < \frac{1}{\gamma^{1/(1-\eta)}}, \\ M_n \approx \frac{iC_1}{2\gamma n(n\theta_c)^{1-\eta}}, \quad n\theta_c > \frac{1}{\gamma^{1/(1-\eta)}}. \quad (B.4) \end{aligned}$$

Теперь считаем ряд

$$\text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} [nM_n^2 + (1-\eta)M_n].$$

Легко увидеть, что вклад слагаемых с $n > 1/\theta_c \gamma^{1/(1-\eta)}$ в пределе $\theta_c \rightarrow 0$ обращается в нуль. Вклад членов с $1/\theta_c < n < 1/\theta_c \gamma^{1/(1-\eta)}$ в том же пределе стремится к числу порядка единицы. Наконец, вклад членов с $n < 1/\theta_c$ равен

$$-\frac{(1-\eta)^2}{4} \ln \frac{1}{\theta_c}$$

плюс число порядка единицы. Комбинируя это с множителем $N^{(1-\eta)^2/4}$ в выражении (44) для детерминанта ($\alpha = (\eta-1)/2$, $N = t/t_0$), получим префактор $(q_c V t)^{(1-\eta)^2/4}$, не зависящий от t_0 . Это приводит к формуле (51) для функции Грина.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Вычисление собственных чисел оператора $\hat{K}^{(p)}$

Система уравнений на собственные числа и собственные функции оператора $\hat{K}^{(p)}$ имеет вид (по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование)

$$\int_0^{pT_c} K_{ik}^{(p)}(\tau_1 - \tau_2) \chi_k(\tau_2) d\tau_2 = \lambda^{(p)} \chi_i(\tau_1). \quad (C.1)$$

Отсюда видно, что в силу периодичности функций $K_{ik}^{(p)}(\tau_1 - \tau_2) = K_{ik}^{(p)}(\tau_1 + T_c - \tau_2)$ функции $\chi_k(\tau_1)$ также периодичны с периодом T_c . Поэтому (C.1) можно переписать так:

$$p \int_0^{T_c} K_{ik}(\tau_1 - \tau_2) \chi_k(\tau_2) d\tau_2 = \lambda^{(p)} \chi_i(\tau_1), \quad (C.2)$$

$$K_{ik}(\tau_1 - \tau_2) \equiv K_{ik}^{(1)}(\tau_1 - \tau_2).$$

Прежде чем решать эту систему уравнений, перейдем к переменным $\vartheta_i = \tau_i/T_c$ и сдвинем их так, чтобы они менялись в интервале $[-1/2, 1/2]$. Кроме того, в выражениях (56) вместо волнового числа введем переменную $s = qR_c$. Тогда получим

$$2\pi p \gamma (q_c R_c)^{1-\eta} \int_{-1/2}^{1/2} K_{ik}(\vartheta_1 - \vartheta_2) \chi_k(\vartheta_2) d\vartheta_2 = \lambda^{(p)} \chi_i(\vartheta_1), \quad (C.3)$$

где

$$K_{11}(\vartheta) = \int_0^\infty \frac{J_0(2s \sin \pi \vartheta) \cos 2\pi \vartheta - J_2(2s \sin \pi \vartheta)}{s^{1-\eta} [1 + (s/q_c T_c)^\eta]} \times U\left(\frac{s}{R_c}\right) ds,$$

$$K_{22}(\vartheta) = \int_0^\infty \frac{J_0(2s \sin \pi \vartheta) \cos 2\pi \vartheta + J_2(2s \sin \pi \vartheta)}{s^{1-\eta} [1 + (s/q_c T_c)^\eta]} \times U\left(\frac{s}{R_c}\right) ds, \quad (C.4)$$

$$K_{12}(\vartheta) = -K_{21}(\vartheta) = \int_0^\infty \frac{J_0(2s \sin \pi \vartheta) \sin 2\pi \vartheta}{s^{1-\eta} [1 + (s/q_c T_c)^\eta]} U\left(\frac{s}{R_c}\right) ds.$$

Покажем, что пары функций

$$\left\{ \begin{aligned} \chi_1(\vartheta) &= a \cos 2\pi n \vartheta \\ \chi_2(\vartheta) &= b \sin 2\pi n \vartheta \end{aligned} \right\}, \quad (C.5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \chi_1(\vartheta) &= a \sin 2\pi n \vartheta \\ \chi_2(\vartheta) &= b \cos 2\pi n \vartheta \end{aligned} \right\},$$

являются решениями уравнений (C.3). Рассмотрим первую пару. Подействуем оператором \hat{K}_{11} на функцию χ_1 :

$$\int_{-1/2}^{1/2} K_{11}(\vartheta_1 - \vartheta_2) \cos 2\pi n \vartheta_2 d\vartheta_2 = \int_{-1/2-\vartheta_1}^{1/2-\vartheta_1} K_{11}(\vartheta) d\vartheta \{ \cos 2\pi n \vartheta \cos 2\pi n \vartheta_1 - \sin 2\pi n \vartheta \sin 2\pi n \vartheta_1 \}.$$

Используя явное выражение (C.4) для $K_{11}(\vartheta)$, с помощью дифференцирования по ϑ_1 нетрудно убедиться, что интегралы

$$\int_{-1/2-\vartheta_1}^{1/2-\vartheta_1} K_{11}(\vartheta) \cos 2\pi n \vartheta d\vartheta,$$

$$\int_{-1/2-\vartheta_1}^{1/2-\vartheta_1} K_{11}(\vartheta) \sin 2\pi n \vartheta d\vartheta$$

не зависят от переменной ϑ_1 , которую, следовательно, можно положить равной нулю. Из-за четности функции $K_{11}(\vartheta)$ второй интеграл обращается в нуль, так что

$$\int_{-1/2}^{1/2} K_{11}(\vartheta_1 - \vartheta_2) \cos 2\pi n \vartheta_2 d\vartheta_2 = \cos 2\pi n \vartheta_1 \int_{-1/2}^{1/2} K_{11}(\vartheta) \cos 2\pi n \vartheta d\vartheta.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\int_{-1/2}^{1/2} K_{12}(\vartheta_1 - \vartheta_2) \sin 2\pi n \vartheta_2 d\vartheta_2 = -\cos 2\pi n \vartheta_1 \int_{-1/2}^{1/2} K_{12}(\vartheta) \sin 2\pi n \vartheta d\vartheta,$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} K_{21}(\vartheta_1 - \vartheta_2) \cos 2\pi n \vartheta_2 d\vartheta_2 =$$

$$= -\sin 2\pi n \vartheta_1 \int_{-1/2}^{1/2} K_{12}(\vartheta) \sin 2\pi n \vartheta d\vartheta,$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} K_{22}(\vartheta_1 - \vartheta_2) \sin 2\pi n \vartheta_2 d\vartheta_2 =$$

$$= \sin 2\pi n \vartheta_1 \int_{-1/2}^{1/2} K_{22}(\vartheta) \cos 2\pi n \vartheta d\vartheta.$$

Вычисления дают

$$\int_{-1/2}^{1/2} K_{11}(\vartheta) \cos 2\pi n \vartheta d\vartheta =$$

$$= \int_0^\infty \frac{[J_{n+1}(s) + J_{n-1}(s)]^2 U(s/R_c)}{2s^{1-\eta} [1 + (s/q_c R_c)^\eta]} ds,$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} K_{12}(\vartheta) \sin 2\pi n \vartheta d\vartheta =$$

$$= \int_0^\infty \frac{[J_{n-1}^2(s) - J_{n+1}^2(s)] U(s/R_c)}{2s^{1-\eta} [1 + (s/q_c R_c)^\eta]} ds,$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} K_{22}(\vartheta) \cos 2\pi n \vartheta d\vartheta =$$

$$= \int_0^\infty \frac{[J_{n+1}(s) - J_{n-1}(s)]^2 U(s/R_c)}{2s^{1-\eta} [1 + (s/q_c R_c)^\eta]} ds.$$

Пусть $q_c R_c \gg 1$. Тогда при n порядка единицы интегралы сходятся в области s порядка единицы, причем $U(n/R_c) \approx 1$. При $n \gg 1$ функции Бесселя сосредоточены в окрестности точки $s = n$, поэтому при $1 \ll n \ll q_T R_c$, когда $U(n/R_c) \approx 1$, все интегралы (С.6) пропорциональны $1/n^{1-\eta} [1 + (n/q_c R_c)^\eta]$ с коэффициентами, зависящими только от η . При $n \ll q_c R_c$ в знаменателях интегралов (С.6) можно пренебречь слагаемым $(s/q_c R_c)^\eta$ по сравнению с единицей. Вычислив получившиеся интегралы и подставив результат в (С.3), получим систему алгебраических уравнений, из которой найдем, что

$$\lambda_{\pm n}^{(p)} = 2\pi p \gamma (q_c R_c)^{1-\eta} \frac{\Gamma(n + \eta/2)}{\Gamma(n - \eta/2)n} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(1 - \eta)}{2^{2-\eta} \Gamma^2(1 - \eta/2)} s_{\pm}(n), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$s_{\pm}(n) = \frac{2n(2n + \eta)}{(2n - \eta)(2n + 2 - \eta)} + \frac{2n}{2n - 2 + \eta} \pm$$

$$\pm \left(\frac{16n^2 \eta^2}{(2 - \eta)^2 (2n - \eta)^2} + \left\{ \frac{2n(2n + \eta)}{(2n - \eta)(2n + 2 - \eta)} - \frac{2n}{2n - 2 + \eta} \right\}^2 \right)^{1/2}.$$

Функции $s_{\pm}(n)$ с увеличением n быстро достигают предельных значений $s_+ = 4/(2 - \eta)$ и $s_- = 4(1 - \eta)/(2 - \eta)$, тогда как при n порядка единицы значение функции $s_+(n)$ может оказаться большим (например, в случае мембраны с дефектами, где $\eta \approx 0.2$, $s_+(1) \approx 20$). При $n \gg 1$ числа λ_{+n} и λ_{-n} совпадают с найденными в разд. 3.2.1 числами $\lambda_{\mu n}(t)$ для $t = T_c$ или с аналогичными числами в случае мембраны с дефектами.

В случае $q_T R_c \gg n \gg q_c R_c$ слагаемое $(s/q_c R_c)^\eta$, напротив, велико и в знаменателях подынтегральных функций в (63) можно пренебречь единицей. Выражения для собственных чисел получаются из формулы (С.7), если в ней положить $\eta = 0$:

$$\lambda_{\pm n}^{(p)} \approx \frac{\pi p \gamma (q_c R_c)^{1-\eta}}{n}. \tag{С.8}$$

Наконец, при $n > q_T R_c$ собственные числа убывают с ростом n еще быстрее и их вкладом можно пренебречь. Второй паре функций (С.5) отвечают те же собственные числа, что и первой. Случай $q_c R_c \ll 1$ требует отдельного рассмотрения, результаты которого нам, однако, не понадобятся, и мы не станем его проводить.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, and A. A. Firsov, *Science* **306**, 666 (2004).
2. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, and A. A. Firsov, *Nature (London)* **438**, 197 (2005).
3. Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer, and P. Kim, *Nature (London)* **438**, 201 (2005).
4. A. K. Geim and K. S. Novoselov, *Nature Mater.* **6**, 183 (2007).

5. A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 109 (2009).
6. *Statistical Mechanics of Membranes and Surfaces*, ed. by D. Nelson, T. Piran, and S. Weinberg, World Scientific, Singapore (1989).
7. N. D. Mermin, *Phys. Rev.* **176**, 250 (1968).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Статистическая физика*, Ч. I, Наука, Москва (1976).
9. D. R. Nelson and L. Peliti, *J. de Phys.* **48**, 1085 (1987).
10. M. Paczuski, M. Kardar, and D. R. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2638 (1988).
11. P. Le Doussal and L. Radzihovsky, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1209 (1992).
12. J. A. Aronovitz and T. C. Lubensky, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2634 (1988).
13. J. Aronovitz, L. Golubovic, and T. C. Lubensky, *J. de Phys.* **50**, 609 (1989).
14. F. David and E. Guitter, *Europhys. Lett.* **5**, 709 (1988).
15. E. Guitter, F. David, S. Leibler, and L. Peliti, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2949 (1988).
16. E. Guitter, F. David, S. Leibler, and L. Peliti, *J. de Phys.* **50**, 1787 (1989).
17. M. Paczuski and M. Kardar, *Phys. Rev. A* **39**, 6086 (1989).
18. L. Radzihovsky and D. R. Nelson, *Phys. Rev. A* **44**, 3525 (1991).
19. D. R. Nelson and L. Radzihovsky, *Europhys. Lett.* **16**, 79 (1991).
20. G. Gompper and D. M. Kroll, *Europhys. Lett.* **15**, 783 (1991).
21. L. Radzihovsky and P. Le Doussal, *J. de Phys. I* **2**, 599 (1992).
22. D. C. Morse, T. C. Lubensky, and G. S. Grest, *Phys. Rev. A* **45**, R2151 (1992).
23. P. Le Doussal and L. Radzihovsky, *Phys. Rev. B* **48**, 3548 (1993).
24. M. J. Bowick, S. M. Catterall, M. Falcioni, G. Thorleifsson, and K. N. Anagnostopoulos, *J. de Phys. I* **6**, 1321 (1996).
25. J.-P. Kownacki and D. Mouhanna, *Phys. Rev. E* **79**, 040101(R) (2009).
26. I. V. Gornyi, V. Yu. Kachorovskii, and A. D. Mirlin, *Phys. Rev. B* **92**, 155428 (2015).
27. M. I. Katsnelson, *Phys. Rev. B* **82**, 205433 (2010).
28. A. Fasolino, J. H. Los, and M. I. Katsnelson, *Nature Mater.* **6**, 858 (2007).
29. E. Mariani and F. von Oppen, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 076801 (2008).
30. F. von Oppen, F. Guinea, and E. Mariani, *Phys. Rev. B* **80**, 075420 (2009).
31. E. Mariani and F. von Oppen, *Phys. Rev. B* **82**, 195403 (2010).
32. M. A. H. Vozmediano, M. I. Katsnelson, and F. Guinea, *Phys. Rep.* **496**, 109 (2010).
33. E. V. Castro, H. Ochoa, M. I. Katsnelson, R. V. Gorbachev, D. C. Elias, K. S. Novoselov, A. K. Geim, and F. Guinea, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 266601 (2010).
34. K. V. Zakharchenko, R. Roldan, A. Fasolino, and M. I. Katsnelson, *Phys. Rev. B* **82**, 125435 (2010).
35. R. Roldan, A. Fasolino, K. V. Zakharchenko, and M. I. Katsnelson, *Phys. Rev. B* **83**, 174104 (2011).
36. P. San-Jose, J. Gonzalez, and F. Guinea, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 045502 (2011).
37. H. Ochoa, E. V. Castro, M. I. Katsnelson, and F. Guinea, *Phys. Rev. B* **83**, 235416 (2011).
38. I. V. Gornyi, V. Yu. Kachorovskii, and A. D. Mirlin, *Phys. Rev. B* **86**, 165413 (2012).
39. K. S. Tikhonov, Wei L. Z. Zhao, and A. M. Finkelstein, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 076601 (2014).
40. A. D. Mirlin, E. Altshuler, and P. Wölfle, *Ann. der Phys.* **5**, 281 (1996).
41. D. V. Khveshchenko and P. C. E. Stamp, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2118 (1993).
42. D. V. Khveshchenko and P. C. E. Stamp, *Phys. Rev. B* **49**, 5227 (1994).
43. B. L. Altshuler, L. B. Ioffe, and A. J. Millis, *Phys. Rev. B* **50**, 14048 (1994).
44. Y. B. Kim, A. Furusaki, X.-G. Wen, and P. A. Lee, *Phys. Rev. B* **50**, 17917 (1994).
45. D. V. Khveshchenko, *Phys. Rev. B* **65**, 235111 (2002).
46. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, Т. 4, Наука, Москва (1974).

47. P. Delft, A. Its, and I. Krasovsky, *Ann. Math.* **174**, 1243 (2011).
48. I. A. Dmitriev, A. D. Mirlin, D. G. Polyakov, and M. A. Zudov, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1709 (2012).
49. A. G. Aronov, E. Altshuler, A. D. Mirlin, and P. Wölfle, *Europhys. Lett.* **29**, 239 (1995).
50. A. G. Aronov, E. Altshuler, A. D. Mirlin, and P. Wölfle, *Phys. Rev. B* **52**, 4708 (1995).
51. L. E. Reichl, *The Transition to Chaos*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1992).
52. F. Marquardt, J. von Delft, R. A. Smith, and V. Ambegaokar, *Phys. Rev. B* **76**, 195331 (2007).
53. W. Eiler, *J. Low Temp. Phys.* **56**, 481 (1984).
54. S. Chakravarty and A. Schmid, *Phys. Rep.* **140**, 193 (1983).
55. B. L. Altshuler, A. G. Aronov, and D. E. Khmel'nitskii, *J. Phys. C* **15**, 7367 (1982).
56. E. Abrahams, J. Schmalian, and P. Wölfle, *Phys. Rev. B* **90**, 045105 (2014).
57. P. S. Weiß, B. N. Narozhny, J. Schmalian, and P. Wölfle, [arXiv:1507.02603](https://arxiv.org/abs/1507.02603).
58. В. В. Афонин, Ю. М. Гальперин, В. Л. Гуревич, *ЖЭТФ* **88**, 1906 (1985).
59. A. P. Dmitriev and V. Yu. Kachorovskii, *Phys. Rev. B* **52**, 1058 (1995).
60. T. Grover and M. P. A. Fisher, *J. Stat. Mech.* P10010 (2014).