

# НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Д. А. Климачков <sup>a\*</sup>, А. С. Петросян <sup>a,b\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Институт космических исследований Российской академии наук  
117997, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Московский физико-технический институт  
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 14 февраля 2016 г.

Магнитогидродинамическая теория мелкой воды, описывающая несжимаемые течения плазмы, обобщена на случай сжимаемых течений. Получена система магнитогидродинамических уравнений, описывающая течения тонкого слоя сжимаемой вращающейся плазмы в поле силы тяжести в приближении мелкой воды. Полученная система квазилинейных гиперболических уравнений допускает полное аналитическое рассмотрение простых волн и решение задачи распада произвольного разрыва в простейшем варианте невращающихся течений. В новых уравнениях фильтруются звуковые волны и учитывается зависимость плотности от давления на крупных масштабах, описывающая эффекты статической сжимаемости. В полученных уравнениях закон сохранения массы формулируется для переменной, нетривиально зависящей от формы нижней границы, характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. Развита теория простых волн для полученной системы уравнений. Найдены все автомодельные разрывные решения и все непрерывные центрированные автомодельные решения полученной системы. В явном виде решена задача распада произвольного разрыва для уравнений сжимаемой магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды. Показано существование пяти различных конфигураций, реализующих решение задачи распада произвольного разрыва. Для каждой конфигурации найдены условия, необходимые и достаточные для ее реализации. Проанализированы различия между несжимаемым и сжимаемым случаями. Несмотря на формальное сходство решений в классическом случае магнитогидродинамических течений несжимаемой и сжимаемой жидкостей, нелинейная динамика, описываемая полученными решениями, существенно разная вследствие различия выражений для квадрата скорости распространения слабых возмущений. Полученные решения, кроме того, описывают новые физические эффекты, связанные с зависимостью высоты свободной границы от плотности жидкости. Найдены также автомодельные непрерывные и разрывные решения для системы на наклонной плоскости и получено решение распада произвольного разрыва в данном случае.

DOI: 10.7868/S0044451016090170

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является развитием классической теории мелкой воды для случая нелинейных течений тонкого сжимаемого слоя плазмы со свободной границей в поле силы тяжести в магнитогидродинамическом (МГД) приближении. Нелинейная динамика таких течений, описываемых полной системой МГД-уравнений для сжимаемой жидкости на всех

масштабах [1], не допускает аналитического исследования и является сложной задачей для компьютерного моделирования даже в случае несжимаемой жидкости. В таких случаях требуется развитие упрощенных моделей [2], допускающих аналитическое рассмотрение и численное исследование. В работе получена система МГД-уравнений сжимаемой плазмы в приближении мелкой воды для вращающихся течений над границей произвольной формы из полной системы МГД-уравнений для сжимаемой жидкости в предположении гидростатичности распределения давления и малости толщины слоя по отношению к характерному линейному размеру за-

\* E-mail: klimachkovdmitry@gmail.com

\*\* E-mail: apetrotsy@iki.rssi.ru

дачи путем усреднения по высоте слоя. В результате в этом приближении фильтруются звуковые волны и учитывается зависимость плотности от давления на крупных масштабах, описывающая эффекты статической сжимаемости по сравнению со случаем несжимаемой жидкости [3]. Полученная система квазилинейных гиперболических уравнений допускает полное аналитическое рассмотрение простых волн и решение задачи распада произвольного разрыва в простейшем варианте невращающихся течений.

МГД-приближение мелкой воды применяется для изучения солнечного тахоклина [4–6], растекания материи при дисковой аккреции в нейтронных звездах [7, 8], динамики атмосфер нейтронных звезд [9, 10], атмосфер внесолнечных планет [11], а также для оптимизации механических процессов при получении алюминия электролизом, а именно, для минимизации МГД-шума на поверхности жидкого металла и тем самым уменьшения энергозатрат для производства алюминия [12]. Для изучения таких течений предложена модель, основанная на МГД-уравнениях мелкой воды несжимаемой жидкости [13–16], хотя совершенно очевидно, что сжимаемость является принципиальным свойством перечисленных астрофизических течений. Предложенная в работе МГД-теория тонкого слоя сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды может служить основой для объяснения и моделирования перечисленных выше астрофизических явлений.

Полученные в работе уравнения в приближении мелкой воды для сжимаемой жидкости существенно отличаются от уравнений для несжимаемой жидкости естественным образом переходят в них. В классической МГД-теории мелкой воды для несжимаемой жидкости физическими переменными являются высота свободной поверхности, усредненные по глубине горизонтальные скорости и усредненные горизонтальные составляющие магнитного поля. В этой теории уравнение для высоты свободной поверхности играет роль закона сохранения массы, а сама высота свободной поверхности в силу постоянства плотности жидкости во всем объеме является массой столба жидкости. В нашем случае сжимаемой плазмы в МГД-приближении мелкой воды массой столба газа является произведение высоты свободной поверхности на среднюю по глубине плотность жидкости. Как следствие в полученных в работе уравнениях появляется новая переменная, определяющая закон сохранения массы и однозначно связанная с высотой свободной поверхности.

Таким образом, при наличии эффектов крупномасштабной сжимаемости, закон сохранения массы формулируется для переменной, нетривиально зависящей от формы нижней границы, характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. Перечисленные физические характеристики течения и форма нижней границы модифицируют закон сохранения импульса. Учитывая широкий спектр возможных применений полученных уравнений и фундаментальную роль эффектов сжимаемости, мы приводим их подробный вывод в общем случае вращающегося слоя плазмы.

Полученная система уравнений обладает существенными преимуществами по сравнению с известными МГД-уравнениями мелкой воды для несжимаемой жидкости. В классических МГД-уравнениях мелкой воды высота и скорость столба жидкости полностью определяют его взаимодействие с остальным объемом жидкости. В случае сжимаемой жидкости это взаимодействие определяется не только высотой и скоростью, но и средней плотностью столба жидкости. Вследствие этого учет горизонтального импульса в уравнениях происходит более точно, по сравнению со случаем несжимаемой жидкости [17], что является фундаментальным преимуществом при применении этих уравнений для описания космических и астрофизических течений.

Гиперболичность МГД-уравнений сжимаемой мелкой воды определяет, наряду с гладкими решениями, наличие разрывных. Даже в случае, когда начальные условия являются гладкими, нелинейный характер уравнений, наряду с их гиперболичностью, за конечное время может привести к разрывному решению. В простейшем случае невращающейся плазмы полученная система уравнений допускает полное аналитическое решение в виде простых волн. В работе получены простые автомодельные решения МГД-уравнений в приближении мелкой воды над ровной границей: магнитогравитационные волны разрежения, магнитогравитационные ударные волны и альфвеновские волны. Такие решения являются основополагающими в исследовании нелинейных волновых явлений и позволяют найти точное решение задачи распада произвольного разрыва.

Получено точное явное решение начальной задачи с кусочно-постоянными начальными условиями для МГД-уравнений в приближении сжимаемой мелкой воды на ровной границе. Эта задача впервые возникла в газовой динамике (задача Римана) [18]. Показано, что решение представляет собой од-

ну из пяти волновых конфигураций: две магнито-гравитационные ударные волны, две альфвеновские волны; «левая» (распространяющаяся влево от разрыва) магнито-гравитационная ударная волна, «правая» (распространяющаяся вправо от разрыва) магнито-гравитационная волна разрежения, две альфвеновские волны; левая магнито-гравитационная волна разрежения, правая магнито-гравитационная ударная волна, две альфвеновские волны; две магнито-гравитационные волны разрежения, две альфвеновские волны; две магнито-гравитационные волны разрежения, зона вакуума. Найдены условия на начальные данные, при которых реализуется каждая конкретная конфигурация.

Несмотря на формальное сходство решений в классическом случае МГД-течений несжимаемой и сжимаемой жидкостей, нелинейная динамика, описываемая полученными решениями, существенно разная вследствие различия выражений для квадрата скорости распространения слабых возмущений. Полученные решения, кроме того, описывают новые физические эффекты, связанные с зависимостью высоты свободной границы от плотности жидкости.

Аналогичный анализ проведен для МГД-уравнений сжимаемой мелкой воды на наклонной плоскости. Решение задачи на наклонной плоскости представляет самостоятельный интерес, поскольку в приближении мелкой воды произвольную границу и внешнюю силу можно естественным образом аппроксимировать серией наклонных границ для качественного анализа сжимаемых течений. Мы используем обобщенное определение простой волны [19], которое сводится к классическому определению в случае отсутствия источников слагаемого. Показано, что характеристиками системы уравнений являются параболы, которые переходят в прямые в случае плоской нижней границы. В явном виде найдены все непрерывные и разрывные решения системы. Получено аналитическое решение задачи распада произвольного разрыва для МГД-течений сжимаемой плазмы в поле силы тяжести в приближении мелкой воды над нижней границей с линейным профилем. Решение состоит из пяти волновых конфигураций, как и в случае ровной границы. Для каждой конфигурации найдены необходимые и достаточные условия для реализации. Наличие нижней границы с линейным профилем в МГД-приближении для сжимаемой мелкой воды вместо плоской поверхности приводит к качественному изменению решений в реализуемых конфигурациях. Вместо областей с однородным течением реализуются облас-

ти равноускоренного течения, в которых ударные волны распространяются по параболическим траекториям. Отметим, что крупномасштабная сжимаемость существенно видоизменяет течения на наклонной плоскости, как и в случае ровной границы.

В разд. 2 приведен вывод МГД-уравнений вращающихся течений сжимаемой плазмы в приближении мелкой воды над произвольной границей. В разд. 3 получены все частные решения типа централизованных простых волн и все разрывные решения с ненулевым потоком массы через разрыв для системы над ровной поверхностью. В явном виде представлены непрерывные и разрывные автомодельные решения для системы над наклонной плоскостью. В разд. 4 сформулирована задача Римана. Показано, что ее решение представляет собой одну из пяти волновых конфигураций. Получены условия для начальных данных, при которых реализуется каждая из конфигураций. Получено решение задачи Римана для случая наклонной нижней границы. Показано, чем решение задачи Римана для сжимаемой жидкости отличается от случая несжимаемой. В Заключении приведены основные результаты работы.

## 2. МГД-УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Для изучения нелинейной динамики течений тонкого слоя плазмы со свободной границей получим систему МГД-уравнений для сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды. Для общности считаем слой плазмы вращающимся с угловой скоростью  $\omega$ , а нижнюю границу слоя считаем произвольной. Геометрия задачи изображена на рис. 1. Считаем, что сила тяжести направлена в сторону, противоположную оси  $z$ . Высоту слоя жидко-

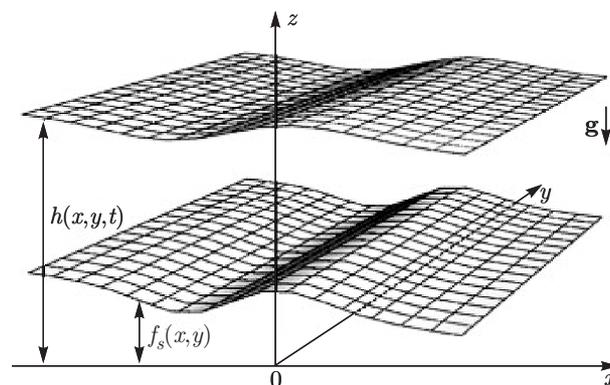


Рис. 1. Тонкий слой сжимаемой магнитной жидкости

сти над плоскостью  $z = 0$  обозначим  $h(x, y, t)$ , нижнюю границу обозначим  $f_s(x, y)$ . Запишем систему МГД-уравнений для сжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1^2 - \rho B_1^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_1 u_2 - \rho B_1 B_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_1 u_3 - \rho B_1 B_3)}{\partial z} = f u_2 \rho, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1 u_2 - \rho B_1 B_2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_2^2 - \rho B_2^2 + p)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_2 u_3 - \rho B_2 B_3)}{\partial z} = -f u_1 \rho, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho u_3}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1 u_3 - \rho B_1 B_3)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_2 u_3 - \rho B_2 B_3)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_3^2 - \rho B_3^2 + p)}{\partial z} = -\rho g, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\partial(u_2 B_1 - u_1 B_2)}{\partial y} + \frac{\partial(u_3 B_1 - u_1 B_3)}{\partial z} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 B_2 - u_2 B_1)}{\partial x} + \frac{\partial(u_3 B_2 - u_2 B_3)}{\partial z} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial B_3}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 B_3 - u_3 B_1)}{\partial x} + \frac{\partial(u_2 B_3 - u_3 B_2)}{\partial y} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_3}{\partial z} = 0, \quad (2.7)$$

$$dU = -pd(1/\rho), \quad (2.8)$$

$$p = \rho RT, \quad (2.9)$$

$$U = c_v T, \quad (2.10)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (2.11)$$

В системе уравнений (2.1)–(2.11)  $u_1, u_2, u_3$  — компоненты вектора скорости,  $B_1, B_2, B_3$  — компоненты вектора магнитного поля,  $t$  — время,  $\rho$  — плотность жидкости,  $p$  — давление жидкости,  $f = 2\omega$  — параметр Кориолиса,  $T$  — температура жидкости,  $c_v$  — теплоемкость при постоянном объеме,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $g$  — ускорение свободного падения. Параметры  $c_v$  и  $f$  считаем постоянными.

Уравнения (2.1)–(2.3) — уравнения движения для сжимаемой жидкости в проекциях соответственно на оси  $x, y, z$ , уравнения (2.4)–(2.6) — уравнения переноса магнитного поля, уравнение (2.7) —

закон сохранения массы, (2.8) — уравнение изменения внутренней энергии при адиабатических процессах, (2.9) — уравнение Клапейрона, (2.10) — уравнение для внутренней энергии, (2.11) — уравнение бездивергентности магнитного поля автоматически удовлетворяется при задании корректных начальных условий.

Запишем граничные условия для рассматриваемой геометрии течения:

$$u_3|_{z=f_s} = u_1|_{z=f_s} \frac{\partial f_s}{\partial x} + u_2|_{z=f_s} \frac{\partial f_s}{\partial y}, \quad (2.12)$$

$$u_3|_{z=h} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_1|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + u_2|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (2.13)$$

$$B_3|_{z=f_s} = B_1|_{z=f_s} \frac{\partial f_s}{\partial x} + B_2|_{z=f_s} \frac{\partial f_s}{\partial y}, \quad (2.14)$$

$$B_3|_{z=h} = B_1|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + B_2|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (2.15)$$

$$p|_{z=h} = p_a = \text{const}, \quad (2.16)$$

$$T|_{z=h} = T_h = \text{const}. \quad (2.17)$$

Выражения (2.12), (2.13) — условия непротекания соответственно на нижней границе  $z = f_s(x, y)$  и на свободной границе  $z = h(x, y, t)$ , означающие равенство нулю нормальной к поверхностям составляющей скорости жидкости, условия (2.14), (2.15) означают, что магнитные поля на дне и на свободной границе параллельны поверхностям, последние два условия, (2.16) и (2.17), задают постоянные значения давления и температуры на свободной границе. Заметим, что если один из параметров  $p, \rho, T$  постоянен на свободной границе, то остальные два параметра необходимо постоянны вследствие уравнения Клапейрона и адиабатичности рассматриваемых процессов. Используя уравнение Клапейрона, получим условие для плотности на свободной границе:

$$\rho_h = \rho|_{z=h} = \frac{p_a}{RT_h} = \text{const}. \quad (2.18)$$

Таким образом, течение вращающегося слоя магнитной жидкости со свободной границей  $z = h(x, y, t)$  и нижней границей  $z = f_s(x, y)$  полностью описывается системой (2.1)–(2.10) и граничными условиями (2.12)–(2.18).

МГД-уравнения в приближении мелкой воды выводим из исходных МГД-уравнений для сжимаемой жидкости (2.1)–(2.11) в предположении гидростатичности распределения давления и малости флуктуаций скорости и магнитного поля по сравнению с их средними по глубине значениями путем усреднения по глубине. В результате получится система

уравнений для средних по высоте скоростей и магнитных полей, а также для высоты слоя и средней плотности жидкости.

Рассмотрим сжимаемое течение магнитной жидкости, для которой характерный горизонтальный масштаб  $L$  много больше характерного вертикального масштаба — высоты слоя  $h_0$ . Течение полагаем гидростатическим, тогда уравнение (2.3) записывается в виде

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{2.19}$$

с точностью до слагаемых порядка  $O(h_0/L)$ . Тогда уравнение (2.19) и уравнения (2.8)–(2.10) становятся замкнутой системой и позволяют определить  $p, \rho, U, T$ . Выразим сначала температуру  $T$  из уравнения (2.9) и подставим в уравнение (2.10) для внутренней энергии  $U$ . Тогда получим

$$T = \frac{1}{R} \frac{p}{\rho}, \quad U = \frac{c_v}{R} \frac{p}{\rho}. \tag{2.20}$$

Подставим теперь (2.20) в уравнение (2.8). В результате имеем

$$\frac{c_v}{R} d\left(\frac{p}{\rho}\right) + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0. \tag{2.21}$$

Теперь запишем (2.21) в виде уравнения

$$d\left(\ln \frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0, \tag{2.22}$$

решением которого является адиабата Пуассона:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_a}{\rho_h^\gamma} = \text{const}. \tag{2.23}$$

В (2.22), (2.23) показатель адиабаты  $\gamma = (c_v + R)/c_v$ . Таким образом, система уравнений (2.8)–(2.10), (2.19) сводится к двум уравнениям,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \tag{2.24}$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_a}{\rho_h^\gamma}, \tag{2.25}$$

из которых найдем величины  $p$  и  $\rho$ . Для этого выразим  $\rho$  через  $p$  из уравнения (2.25), подставим в уравнение (2.24) и проинтегрируем по высоте газа от  $z$  до  $h(x, y, t)$ , используя граничное условие (2.16):

$$p(x, y, z, t) = p_a \left(1 + \frac{h(x, y, t) - z}{H_\rho}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \tag{2.26}$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_h \left(1 + \frac{h(x, y, t) - z}{H_\rho}\right)^{1/(\gamma-1)}, \tag{2.27}$$

где

$$H_\rho = \frac{c_p T_h}{g}, \tag{2.28}$$

$c_p = c_v + R = \text{const}$  — теплоемкость при постоянном давлении. Величина  $H_\rho$  называется характерной плотностной высотой и соответствует масштабу высоты, на котором вариация плотности по высоте становится существенной.

Проведем усреднение уравнений (2.1), (2.2), (2.4)–(2.7) по высоте слоя от  $z = f_s(x, y)$  до  $z = h(x, y, t)$ . Тогда уравнение (2.7) после интегрирования имеет вид

$$\int_{f_s(x, y)}^{h(x, y, t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_3}{\partial z}\right) dz = 0. \tag{2.29}$$

Воспользуемся формулой Лейбница, решениями (2.26) и (2.27) для  $p$  и  $\rho$  и граничными условиями (2.12)–(2.15) в (2.29). В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{f_s}^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h \rho u_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h \rho u_2 dz = 0. \tag{2.30}$$

Проинтегрируем теперь уравнение (2.1) по глубине слоя от  $z = f_s(x, y)$  до  $z = h(x, y, t)$ , воспользовавшись формулой Лейбница и граничными условиями (2.12)–(2.15). Получим усредненное уравнение движения в проекции на ось  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{f_s}^h \rho u_1 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h (\rho u_1^2 - \rho B_1^2) dz + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h (\rho u_1 u_2 - \rho B_1 B_2) dz + \int_{f_s}^h \frac{\partial p}{\partial x} dz = \\ = f \int_{f_s}^h \rho u_2 dz. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Аналогично преобразуем и уравнение (2.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{f_s}^h \rho u_2 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h (\rho u_1 u_2 - \rho B_1 B_2) dz + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h (\rho u_2^2 - \rho B_2^2) dz + \int_{f_s}^h \frac{\partial p}{\partial y} dz = \\ = -f \int_{f_s}^h \rho u_1 dz. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Усредним аналогично уравнения переноса магнитного поля. Тогда из (2.4) и (2.5) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{f_s}^h B_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h (u_2 B_1 - u_1 B_2) dz = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{f_s}^h B_2 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h (u_1 B_2 - u_2 B_1) dz = 0. \quad (2.34)$$

Усредняя также уравнение бездивергентности магнитного поля (2.11), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h B_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{f_s}^h B_2 dz = 0. \quad (2.35)$$

Введем далее средние по высоте слоя плотность  $\bar{\rho}$ , давление  $\bar{p}$ , горизонтальные скорости  $\bar{u}_i$  и горизонтальные составляющие магнитного поля  $\bar{B}_i$ :

$$\bar{\rho} = \frac{1}{h - f_s} \int_{f_s}^h \rho dz, \quad (2.36)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{h - f_s} \int_{f_s}^h p dz, \quad (2.37)$$

$$\bar{u}_i = \frac{1}{h - f_s} \int_{f_s}^h u_i dz, \quad i = 1, 2, \quad (2.38)$$

$$\bar{B}_i = \frac{1}{h - f_s} \int_{f_s}^h B_i dz, \quad i = 1, 2. \quad (2.39)$$

Рассмотрим теперь слагаемое с давлением  $p$  в уравнениях (2.31) и (2.32):

$$\begin{aligned} \int_{f_s}^h \frac{\partial p}{\partial x} dz &= \int_{f_s}^h \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_a}{H_\rho} \left(1 + \frac{h - z}{H_\rho}\right)^{1/(\gamma - 1)} \frac{\partial h}{\partial x} dz = \\ &= \int_{f_s}^h \rho h \left(1 + \frac{h - z}{H_\rho}\right)^{1/(\gamma - 1)} g \frac{\partial h}{\partial x} dz = \\ &= (h - f_s) \bar{\rho} g \frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Подставив в уравнения (2.36) и (2.37) выражения для  $\rho$  и  $p$  из (2.27) и (2.26) и получим

$$\bar{\rho} = \frac{1}{h - f_s} \frac{p_a}{g} \left[ \left(1 + \frac{h - f_s}{H_\rho}\right)^{\gamma/(\gamma - 1)} - 1 \right], \quad (2.41)$$

$$\bar{p} = \frac{p_a}{h - f_s} \frac{H_\rho}{\frac{\gamma}{\gamma - 1} + 1} \left[ \left(1 + \frac{h - f_s}{H_\rho}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1} + 1} - 1 \right]. \quad (2.42)$$

Величины  $p, \rho, u_i, B_i$  представим в виде суммы средних значений и малых флуктуаций:

$$\begin{aligned} p &= \bar{p} + p', & \rho &= \bar{\rho} + \rho', & u_i &= \bar{u}_i + v'_i, \\ B_i &= \bar{B}_i + B'_i, \end{aligned} \quad (2.43)$$

причем выполняются равенства

$$\int_{f_s}^h \rho' dz = \int_{f_s}^h p' dz = \int_{f_s}^h v'_i dz = \int_{f_s}^h B'_i dz = 0. \quad (2.44)$$

Подставляя в уравнения (2.30)–(2.35) средние значения  $\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{v}_i, \bar{B}_i$  и пренебрегая интегралами от произведений флуктуаций, получим усредненную по высоте слоя систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} (h' \bar{\rho}) + \frac{\partial}{\partial x} (h' \bar{\rho} \bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial y} (h' \bar{\rho} \bar{u}_2) = 0, \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (h' \bar{\rho} \bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial x} (h' \bar{\rho} \bar{u}_1^2 - h' \bar{\rho} \bar{B}_1^2) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (h' \bar{\rho} \bar{u}_1 \bar{u}_2 - h' \bar{\rho} \bar{B}_1 \bar{B}_2) + h' \bar{\rho} g \frac{\partial h}{\partial x} = \\ = f h' \bar{\rho} \bar{u}_2, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (h' \bar{\rho} \bar{u}_2) + \frac{\partial}{\partial x} (h' \bar{\rho} \bar{u}_1 \bar{u}_2 - h' \bar{\rho} \bar{B}_1 \bar{B}_2) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (h' \bar{\rho} \bar{u}_2^2 - h' \bar{\rho} \bar{B}_2^2) + h' \bar{\rho} g \frac{\partial h}{\partial y} = -f h' \bar{\rho} \bar{u}_1, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (h' \bar{\rho} \bar{B}_1) + \frac{\partial}{\partial y} (h' \bar{\rho} \bar{u}_2 \bar{B}_1 - h' \bar{\rho} \bar{u}_1 \bar{B}_2) = 0, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (h' \bar{\rho} \bar{B}_2) + \frac{\partial}{\partial x} (h' \bar{\rho} \bar{u}_1 \bar{B}_2 - h' \bar{\rho} \bar{u}_2 \bar{B}_1) = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (h' \bar{\rho} \bar{B}_1) + \frac{\partial}{\partial y} (h' \bar{\rho} \bar{B}_2) = 0, \quad (2.50)$$

где  $h' = h - f_s$ . Введем обозначение

$$l \equiv (h - f_s) \bar{\rho} = \frac{p_a}{g} \left[ \left(1 + \frac{h - f_s}{H_\rho}\right)^{\gamma/(\gamma - 1)} - 1 \right]. \quad (2.51)$$

Выразим  $\partial h / \partial x$  и  $\partial h / \partial y$  через  $l$  и  $f_s$ , используя (2.41), (2.42):

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{a^2}{l} \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial f_s}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{a^2}{l} \frac{\partial l}{\partial y} + \frac{\partial f_s}{\partial y}, \quad (2.52)$$

где

$$a^2 = \frac{l}{\rho h} \left( l \frac{g}{p_a} + 1 \right)^{-1/\gamma}. \quad (2.53)$$

Тогда, опуская знаки среднего, получим следующую систему:

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial lu_1}{\partial x} + \frac{\partial lu_2}{\partial y} = 0, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial lu_1}{\partial t} + \frac{\partial(lu_1^2 - lB_1^2)}{\partial x} + \frac{\partial(lu_1u_2 - lB_1B_2)}{\partial y} + a^2g\frac{\partial l}{\partial x} + lg\frac{\partial f_s}{\partial x} - flu_2 = 0, \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial lu_2}{\partial t} + \frac{\partial(lu_1u_2 - lB_1B_2)}{\partial x} + \frac{\partial(lu_2^2 - lB_2^2)}{\partial y} + a^2g\frac{\partial l}{\partial y} + lg\frac{\partial f_s}{\partial y} + flu_1 = 0, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial lB_1}{\partial t} + \frac{\partial(lu_2B_1 - lu_1B_2)}{\partial y} = 0, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial lB_2}{\partial t} + \frac{\partial(lu_1B_2 - lu_2B_1)}{\partial x} = 0, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial lB_1}{\partial x} + \frac{\partial lB_2}{\partial y} = 0. \quad (2.59)$$

Таким образом, получена система (2.54)–(2.58) МГД-уравнений в приближении мелкой воды для вращающегося слоя плазмы над неровной поверхностью с учетом крупномасштабной сжимаемости. Уравнение (2.59) является следствием уравнения бездивергентности магнитного поля и выполняется тождественно. Система уравнений (2.54)–(2.58) записана в переменных  $u_1, u_2, B_1, B_2, l$ . Переменная  $l$  и скорость  $a$  распространения слабых возмущений явным образом связаны с глубиной  $h$  слоя согласно соотношениям (2.53) и (2.51). Величина  $H_\rho$  определяется в (2.28) и характеризует масштаб глубины, на котором становятся существенными изменения плотности. Если характерная глубина  $h_0$  слоя много меньше характерной высоты  $H_\rho$ , то  $\epsilon = h_0/H_\rho \rightarrow 0$  и данное течение можно считать несжимаемым. При этом система уравнений мелкой воды для сжимаемой плазмы (2.54)–(2.58) переходит в классические МГД-уравнения для вращающейся мелкой воды для несжимаемой плазмы над неоднородной границей.

Система уравнений (2.54)–(2.58) отличается от классических МГД-уравнений для несжимаемых течений. В классических МГД-уравнениях в приближении мелкой воды высота, скорость и магнитное поле столба жидкости полностью определяют его взаимодействие с остальным объемом жидкости. В уравнениях (2.54)–(2.58) это взаимодействие определяется не только высотой, скоростью и магнитным полем, но и средней плотностью столба жидкости,

поэтому учет горизонтального импульса в уравнениях происходит более точно.

В случае плоской границы, когда  $f_s(x) = \text{const}$ , система МГД-уравнений мелкой воды для сжимаемой плазмы (2.54)–(2.58) переходит в систему уравнений для сжимаемой мелкой воды над ровной подстилающей поверхностью. Заметим, что в полученной системе уравнений (2.54)–(2.58) влияние формы нижней границы проявляется как в коэффициентах полученных уравнений, так и в виде внешней силы в законе изменения импульса. Этим нелинейная динамика сжимаемых МГД-течений на неровной границе существенно отличается от несжимаемого случая [14]: в последнем влияние неоднородности границы присутствует только в законе сохранения импульса в виде внешней силы.

Показано, что задача исследования течений сжимаемого слоя плазмы со свободной поверхностью в поле силы тяжести в приближении мелкой воды сводится к анализу квазилинейной системы уравнений (2.54)–(2.58), решения которой однозначно определяют высоту свободной поверхности. Далее мы используем математический аппарат гиперболических квазилинейных систем уравнений для нахождения явных соотношений, описывающих высоту свободной поверхности и скорости потока течений мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости.

### 3. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ МГД-УРАВНЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ ПРИ НАЛИЧИИ КРУПНОМАСШТАБНОЙ СЖИМАЕМОСТИ

В данном разделе рассмотрена система одномерных уравнений мелкой воды для сжимаемых МГД-течений в отсутствие вращения, допускающая полное аналитическое рассмотрение сильнонелинейных простых волн. Решения получены в виде соотношений, позволяющих при заданных начальных условиях определить пространственно-временную область, занимаемую волной, а также значения искоемых физических величин ( $h, u_1, u_2, B_1, B_2$ ) в каждой точке волны.

Используя уравнение бездивергентности (2.59), запишем одномерную систему (2.54)–(2.58) в виде, удобном для дальнейшего анализа:

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial lu_1}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial lu_1}{\partial t} + (a^2g + B_1^2 - u_1^2)\frac{\partial l}{\partial x} + 2u_1\frac{\partial lu_1}{\partial x} + lg\frac{\partial f_s}{\partial x} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial l u_2}{\partial t} + (B_1 B_2 - u_1 u_2) \frac{\partial l}{\partial x} + u_2 \frac{\partial l u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial l u_2}{\partial x} - B_1 \frac{\partial l B_2}{\partial x} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial l B_1}{\partial t} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial l B_2}{\partial t} + (u_2 B_1 - u_1 B_2) \frac{\partial l}{\partial t} + B_2 \frac{\partial l u_1}{\partial x} - B_1 \frac{\partial l u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial l B_2}{\partial x} = 0. \quad (3.5)$$

Для нахождения непрерывных автомодельных решений на ровной границе переписываем систему (3.1)–(3.5) в следующем виде:

$$\partial_t \begin{pmatrix} l \\ l u_1 \\ l u_2 \\ l B_1 \\ l B_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 g + B_1^2 - u_1^2 & 2 u_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 B_2 - u_1 u_2 & u_2 & u_1 & 0 & -B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 B_1 - u_1 B_2 & B_2 & -B_1 & 0 & u_1 \end{pmatrix} \times \partial_x \begin{pmatrix} l \\ l u_1 \\ l u_2 \\ l B_1 \\ l B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Нелинейная система уравнений (3.6) в обозначениях  $(l u_1, l u_2, l B_1, l B_2, l)$  является гиперболической системой уравнений, в которой квадрат скорости распространения слабых возмущений,  $a^2$ , не тривиально зависит от переменной  $l$  согласно (2.53), в то время как в МГД-теории для несжимаемой мелкой воды скорость распространения слабых возмущений есть  $\sqrt{gh + B_1^2}$ . Таким образом, несмотря на формальное сходство гиперболических волн, пространственно-временная динамика течений в случае сжимаемой мелкой воды отличается существенным образом от соответствующих классических МГД-уравнений в приближении мелкой воды. Поэтому приведенный ниже анализ гиперболической структуры уравнений (3.6) представляет самостоятельный интерес. В этом разделе найдены частные непрерывные и разрывные решения системы (3.6) в виде простых волн.

Спроектируем систему уравнений (3.6) на линии вида  $x = \lambda t$ . Для этого введем новую переменную  $\alpha = x/t$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{d}{d\alpha}, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{x}{t^2} \frac{d}{d\alpha} = -\frac{1}{t} \lambda \frac{d}{d\alpha}, \quad (3.8)$$

после чего запишем систему (3.6) в виде

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 g + B_1^2 - u_1^2 & 2 u_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ B_1 B_2 - u_1 u_2 & u_2 & u_1 - \lambda & 0 & -B_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ u_2 B_1 - u_1 B_2 & B_2 & -B_1 & 0 & u_1 - \lambda \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l \\ l u_1 \\ l u_2 \\ l B_1 \\ l B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Четвертое уравнение системы (3.9) при условии бездивергентности дает  $B_1 l = \text{const}$ . Учитывая это равенство, далее анализируем четыре оставшихся уравнения системы (3.9)

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ a^2 g + B_1^2 - u_1^2 & 2 u_1 - \lambda & 0 & 0 \\ B_1 B_2 - u_1 u_2 & u_2 & u_1 - \lambda & -B_1 \\ u_2 B_1 - u_1 B_2 & B_2 & -B_1 & u_1 - \lambda \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l \\ l u_1 \\ l u_2 \\ l B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Для нахождения нетривиальных решений системы (3.10) необходимо равенство нулю определителя матрицы коэффициентов. Следовательно, величины  $\lambda$  должны быть собственными числами этой матрицы. У данной матрицы имеются четыре собственных числа:

$$\lambda_{1,2} = u_1 \pm B_1, \quad \lambda_{3,4} = u_1 \pm \sqrt{a^2 g + B_1^2}. \quad (3.11)$$

Для каждого собственного числа найдем зависимости для искомым величин.

### 3.1. Вырождение непрерывных альфвеновских волн в сжимаемых течениях

Рассмотрим собственные числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Течения, соответствующие этим собственным числам, назовем непрерывными альфвеновскими волнами в сжимаемых течениях.

Для случая  $\lambda = u_1 - B_1$  преобразуем систему уравнений (3.10) к виду

$$\begin{pmatrix} B_1 - u_1 & 1 & 0 & 0 \\ a^2g + B_1^2 - u_1^2 & u_1 + B_1 & 0 & 0 \\ B_1B_2 - u_1u_2 & u_2 & B_1 & -B_1 \\ u_2B_1 - u_1B_2 & B_2 & -B_1 & B_1 \end{pmatrix} \times \partial_\alpha \begin{pmatrix} l \\ lu_1 \\ lu_2 \\ lB_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

В системе уравнений (3.12) линейно независимы только три уравнения, поэтому для нахождения решения, соответствующего собственному числу  $\lambda_1$ , используем первые три уравнения системы (3.12):

$$(B_1 - u_1) \frac{dl}{d\alpha} + \frac{dlu_1}{d\alpha} = 0, \quad (3.13)$$

$$(a^2g + B_1^2 - u_1^2) \frac{dl}{d\alpha} + (u_1 + B_1) \frac{dlu_1}{d\alpha} = 0, \quad (3.14)$$

$$(B_1B_1 - u_1u_2) \frac{dl}{d\alpha} + u_2 \frac{dlu_1}{d\alpha} + B_1 \frac{dlu_2}{d\alpha} - B_1 \frac{dlB_2}{d\alpha} = 0. \quad (3.15)$$

При умножении уравнения (3.13) на  $B_1 + u_1$  и вычитании его из уравнения (3.14) получаем

$$a^2g \frac{dl}{d\alpha} = 0, \quad (3.16)$$

откуда  $l = \text{const}$ . Тогда из уравнения (3.13) следует соотношение  $u_1 = \text{const}$ , а с учетом требования  $lB_1 = \text{const}$  во всей области определения системы (3.6) имеем  $B_1 = \text{const}$ . Из уравнения (3.15) находим последнее соотношение:

$$\frac{du_2}{d\alpha} = \frac{dB_2}{d\alpha}. \quad (3.17)$$

Таким образом, в простой волне, соответствующей значению  $\lambda_1 = u_1 - B_1$ , выполняются следующие соотношения:

$$l = \text{const}, \quad u_1 = \text{const}, \quad B_1 = \text{const}, \quad \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{dB_2}{d\alpha}. \quad (3.18)$$

Аналогичным образом находим соотношения для второго собственного числа  $\lambda_2 = u_1 + B_1$ :

$$l = \text{const}, \quad u_1 = \text{const}, \quad B_1 = \text{const}, \quad \frac{du_2}{d\alpha} = -\frac{dB_2}{d\alpha}. \quad (3.19)$$

Найденные для  $\lambda_{1,2} = u_1 \mp B_1$  дифференциальные соотношения (3.18), (3.19) выполняются только на одних характеристиках  $x = \lambda t$ , которые не пересекаются, поэтому на полученной волне ни одна из искомым величин не может меняться. Таким образом, в автомодельном случае непрерывная альфвеновская волна вырождается.

### 3.2. Центрированные магнитогравитационные волны Римана в сжимаемых течениях

Течения, соответствующие решениям системы уравнений (3.10) при  $\lambda = \lambda_3$  и  $\lambda = \lambda_4$ , назовем центрированными волнами Римана в сжимаемых течениях, обращенными соответственно назад и вперед.

Собственному числу  $\lambda_3 = u_1 - \sqrt{a^2g + B_1^2}$  соответствует система линейно независимых дифференциальных уравнений, состоящая из первого, третьего и четвертого уравнений системы (3.10):

$$\frac{dl}{d\alpha} \left( -u_1 + \sqrt{a^2g + B_1^2} \right) + \frac{dlu_1}{d\alpha} = 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{dl}{d\alpha} (B_1B_2 - u_1u_2) + \frac{dlu_1}{d\alpha} u_2 + \frac{dlu_2}{d\alpha} \sqrt{a^2g + B_1^2} - \frac{dlB_2}{d\alpha} B_1 = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{dl}{d\alpha} (B_1u_2 - u_1B_2) + \frac{dlu_1}{d\alpha} B_2 - \frac{dlu_2}{d\alpha} B_1 + \frac{dlB_2}{d\alpha} \sqrt{a^2g + B_1^2} = 0. \quad (3.22)$$

Складывая уравнения (3.21) и (3.22), получаем

$$\frac{dl}{d\alpha} [B_1(B_2 + u_2) - u_1(B_2 + u_2)] + \frac{dlu_1}{d\alpha} (B_2 + u_2) + \frac{dlu_2}{d\alpha} \left( \sqrt{a^2g + B_1^2} - B_1 \right) + \frac{dlB_2}{d\alpha} \left( \sqrt{a^2g + B_1^2} - B_1 \right) = 0. \quad (3.23)$$

После введения обозначения  $\delta = B_2 + u_2$ , уравнение (3.23) принимает вид

$$\frac{dl}{d\alpha} (B_1 - u_1) \delta + \frac{dlu_1}{d\alpha} \delta + \frac{dl\delta}{d\alpha} \left( \sqrt{a^2g + B_1^2} - B_1 \right) = 0 \quad (3.24)$$

или, после преобразований,

$$\frac{du_1}{d\alpha} l \delta + \frac{dl}{d\alpha} \sqrt{a^2 g + B_1^2} \delta + \sqrt{a^2 g + B_1^2} l \frac{d\delta}{d\alpha} - B_1 l \frac{d\delta}{d\alpha} = 0. \quad (3.25)$$

С учетом уравнения (3.20), записанного в виде

$$\frac{du_1}{d\alpha} = -\frac{\sqrt{a^2 g + B_1^2}}{l} \frac{dl}{d\alpha}, \quad (3.26)$$

первые два члена в уравнении (3.25) сокращаются, и оно принимает вид

$$l \left( B_1 - \sqrt{a^2 g + B_1^2} \right) \frac{d\delta}{d\alpha} = 0. \quad (3.27)$$

Следовательно,  $B_2 + u_2 = \text{const}$ . После раскрытия производных произведений и учета соотношения (3.27) в виде

$$\frac{dB_2}{d\alpha} = -\frac{du_2}{d\alpha} \quad (3.28)$$

уравнение (3.22) переписывается в форме

$$\frac{du_1}{d\alpha} l B_2 + \frac{dB_2}{d\alpha} l B_1 + \frac{dB_2}{d\alpha} l \sqrt{a^2 g + B_1^2} + \frac{dl}{d\alpha} B_2 \sqrt{a^2 g + B_1^2} = 0. \quad (3.29)$$

Перегруппируем слагаемые в левой части,

$$\left( \frac{du_1}{d\alpha} + \frac{\sqrt{a^2 g + B_1^2}}{l} \frac{dl}{d\alpha} \right) B_2 + \frac{dB_2}{d\alpha} l B_1 + \frac{dB_2}{d\alpha} l \sqrt{a^2 g + B_1^2} = 0, \quad (3.30)$$

и используем соотношение (3.26). В результате получим

$$\frac{dB_2}{d\alpha} \left( l B_1 + l \sqrt{a^2 g + B_1^2} \right) = 0, \quad (3.31)$$

откуда  $B_2 = \text{const}$ , а следовательно, и  $u_2 = \text{const}$ .

Таким образом, в области простой волны, соответствующей третьему собственному числу системы уравнений (3.10), выполняются соотношения

$$u_2 = \text{const}, \quad B_2 = \text{const}, \quad B_1 l = \text{const}, \quad \frac{du_1}{d\alpha} = -\frac{\sqrt{a^2 g + B_1^2}}{l} \frac{dl}{d\alpha}. \quad (3.32)$$

Отметим, что соотношения  $u_2 = \text{const}$ ,  $B_2 = \text{const}$  не зависят от значения  $\alpha$  во всей области полученного решения, в то время как переменные  $u_1, B_1, l$ ,

соответствующие последним двум соотношениям в (3.32), постоянны только на линиях  $dx/dt = \alpha$ .

Для собственного числа  $\lambda_4 = u_1 + \sqrt{a^2 g + B_1^2}$  аналогичным образом получаем

$$u_2 = \text{const}, \quad B_2 = \text{const}, \quad B_1 l = \text{const}, \quad \frac{du_1}{d\alpha} = \frac{\sqrt{a^2 g + B_1^2}}{l} \frac{dl}{d\alpha}. \quad (3.33)$$

Соотношения (3.32) и (3.33) описывают центрированные магнитогравитационные волны Римана, обращенные соответственно назад и вперед. Отметим, что при  $B_1 \rightarrow 0$  соотношения для этих волн совпадают с соотношениями для центрированных волн разрежения в нейтральной гидродинамике.

С учетом условия  $B_1 l = \text{const}$ , выполняющегося во всей области определения системы (3.9), связь между  $u_1$  и  $l$  в центрированных магнитогравитационных волнах Римана записывается в виде

$$\frac{du_1}{d\alpha} = \pm \frac{d\phi(l)}{d\alpha}, \quad (3.34)$$

где знаки определяют волны, обращенные соответственно вперед и назад. В уравнении (3.34)

$$\phi(l) = \int \frac{\sqrt{a^2 g + B_1^2}}{l} dl. \quad (3.35)$$

Выражения  $u_1 + \phi(l) = \text{const}$  и  $u_1 - \phi(l) = \text{const}$  являются инвариантами центрированных магнитогравитационных волн Римана и сохраняются внутри волны, обращенной соответственно назад и вперед.

Таким образом, получены автомодельные решения системы МГД-уравнений в приближении мелкой воды, описывающие центрированные магнитогравитационные волны в сжимаемых течениях.

### 3.3. Соотношения Ранкина – Гюгонио в сжимаемых МГД-течениях мелкой воды

Соотношения Ранкина – Гюгонио существенно зависят от выражения для квадрата скорости распространения слабых возмущений, которое в нашем случае отличается от аналогичного для случая несжимаемых МГД-течений мелкой воды [14], поэтому ниже приводится их подробный вывод. Соотношения получим интегрированием уравнений (3.1)–(3.5) по области  $(x, t)$ , содержащей линию разрыва (рис. 2). Соотношения Ранкина – Гюгонио выполняются для произвольной нижней границы.

Получим соотношения Ранкина – Гюгонио, выполняющиеся на линии разрыва. Эти соотношения

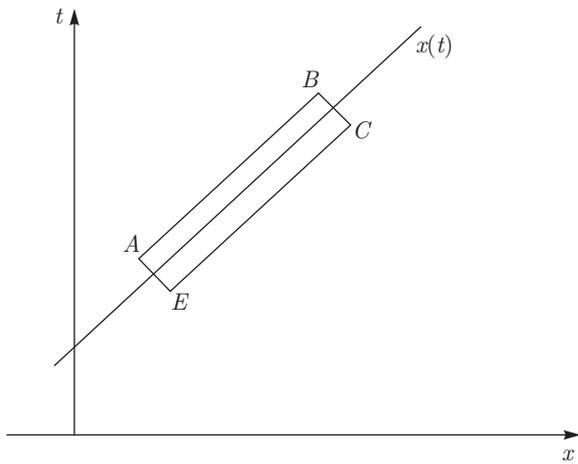


Рис. 2. Контур  $ABCE$ , бесконечно близко примыкающий к линии разрыва  $x(t)$  сверху и снизу

вместе с начальными условиями задают направление линии разрыва и величину скачка искомых параметров. Для нахождения этих соотношений используем систему уравнений (3.1)–(3.5) в дифференциальном виде. Для этого введем функцию  $\psi(l)$  такую, что

$$\psi = \int a^2 g dl, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = a^2 g \frac{\partial l}{\partial x}. \quad (3.36)$$

Интегрируя уравнения системы по произвольной области  $G$ , гомеоморфной квадрату на плоскости  $xt$ , получаем

$$\iint_G \left( \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial lu_1}{\partial x} \right) dG = 0, \quad (3.37)$$

$$\iint_G \left[ \frac{\partial lu_1}{\partial t} + \frac{\partial (lu_1^2 - lB_1^2 + \psi)}{\partial x} \right] dG = 0, \quad (3.38)$$

$$\iint_G \left[ \frac{\partial lu_2}{\partial t} + \frac{\partial (lu_1 u_2 - lB_1 B_2)}{\partial x} \right] dG = 0, \quad (3.39)$$

$$\iint_G \frac{\partial lB_1}{\partial t} dG = 0, \quad (3.40)$$

$$\iint_G \left[ \frac{\partial lB_2}{\partial t} + \frac{\partial (lu_1 B_2 - lu_2 B_1)}{\partial x} \right] dG = 0. \quad (3.41)$$

После преобразования по формуле Грина объемных интегралов, входящих в левую часть системы (3.37)–(3.41), имеем

$$\oint_{\partial G} l dx - lu_1 dt = 0, \quad (3.42)$$

$$\oint_{\partial G} lu_1 dx - (lu_1^2 - lB_1^2 + \psi) dt = 0, \quad (3.43)$$

$$\oint_{\partial G} lu_2 dx - (lu_1 u_2 - lB_1 B_2) dt = 0, \quad (3.44)$$

$$\oint_{\partial G} lB_1 dx = 0, \quad (3.45)$$

$$\oint_{\partial G} lB_2 dx - (lu_1 B_2 - lB_1 u_2) dt = 0. \quad (3.46)$$

Система интегральных уравнений (3.42)–(3.46) выполняется для произвольного интегрируемого контура  $\partial G$  и, в частности, для содержащего линию разрыва входящих в подынтегральные выражения функций.

Пусть  $x = x(t)$  — уравнение линии разрыва — обладает непрерывной касательной на отрезке  $[t_1, t_2]$ . В предположении, что функции  $u_1, u_2, B_1, B_2, l$  терпят разрыв только на линии  $x(t)$ , вводятся обозначения

$$u_1^I(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} u_1(x, t), \quad u_1^{II}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} u_1(x, t),$$

$$u_2^I(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} u_2(x, t), \quad u_2^{II}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} u_2(x, t),$$

$$B_1^I(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} B_1(x, t), \quad B_1^{II}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} B_1(x, t),$$

$$B_2^I(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} B_2(x, t), \quad B_2^{II}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} B_2(x, t),$$

$$l^I(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} l(x, t), \quad l^{II}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} l(x, t).$$

В качестве  $\partial G$  возьмем контур  $ABCE$ , бесконечно близко примыкающий линиями  $AB$  и  $CE$  к линии разрыва  $x(t)$  соответственно слева и справа от нее. Введем в рассмотрение скорость разрыва  $D = D(t) = x'(t)$ , откуда  $dx = D(t) dt$ . Тогда

$$\int_{AB} (Dl - lu_1) dt - \int_{CE} (Dl - lu_1) dt = 0, \quad (3.47)$$

$$\int_{AB} (Dlu_1 - lu_1^2 + lB_1^2 - \psi) dt - \int_{CE} (Dlu_1 - lu_1^2 + lB_1^2 - \psi) dt = 0, \quad (3.48)$$

$$\int_{AB} (Dlu_2 - lu_1 u_2 + lB_1 B_2) dt - \int_{CE} (Dlu_2 - lu_1 u_2 + lB_1 B_2) dt = 0, \quad (3.49)$$

$$\int_{AB} (DlB_1) dt - \int_{CE} (DlB_1) dt = 0, \quad (3.50)$$

$$\int_{AB} (DlB_2 - lu_1B_2 + lB_1u_2) dt - \int_{CE} (DlB_2 - lu_1B_2 + lB_1u_2) dt = 0. \quad (3.51)$$

В силу произвольности контура  $ABCE$  соотношения (3.47)–(3.51) эквивалентны следующим условиям для подынтегральных выражений:

$$Dl^I - l^I u_1^I = Dl^{II} - l^{II} u_1^{II}, \quad (3.52)$$

$$Dl^I u_1^I - l^I (u_1^I)^2 + l^I (B_1^I)^2 - \psi^I = Dl^{II} u_1^{II} - l^{II} (u_1^{II})^2 + l^{II} (B_1^{II})^2 - \psi^{II}, \quad (3.53)$$

$$dl^I D_1^I = dl^{II} D_1^{II}, \quad (3.54)$$

$$Dl^I u_2^I - l^I u_1^I u_2^I + l^I B_1^I B_2^I = Dl^{II} u_2^{II} - l^{II} u_1^{II} u_2^{II} + l^{II} B_1^{II} B_2^{II}, \quad (3.55)$$

$$Dl^I B_2^I - l^I u_1^I B_2^I + l^I u_2^I B_1^I = Dl^{II} B_2^{II} - l^{II} u_1^{II} B_2^{II} + l^{II} u_2^{II} B_1^{II}. \quad (3.56)$$

Соотношения (3.52)–(3.56) называются соотношениями Ранкина–Гюгоно для сжимаемых МГД-течений в приближении мелкой воды. Найдем автомодельные решения, допускаемые этими соотношениями.

### 3.4. Магнитогравиационные ударные волны в сжимаемых течениях

Магнитогравиационной ударной волной называется разрывное течение, такое, что глубины жидкостей слева и справа от разрыва различны, а значит, и  $l^I \neq l^{II}$ . Тогда из первых трех уравнений системы (3.52)–(3.56) следует

$$l^I B_1^I = l^{II} B_1^{II}, \quad (3.57)$$

$$D = \frac{l^I u_1^I - l^{II} u_1^{II}}{l^I - l^{II}}, \quad (3.58)$$

$$u_1^I - u_1^{II} = \pm \sqrt{\frac{(l^I - l^{II})(\psi^I - \psi^{II}) + (B_1^I)^2 (l^I / l^{II})(l^I - l^{II})^2}{l^I l^{II}}}. \quad (3.59)$$

После подстановки выражения для  $D$  из соотношения (3.58) в уравнения (3.55), (3.56) и перегруппировки слагаемых получаем

$$l^I l^{II} (u_1^I - u_1^{II})(u_2^I - u_2^{II}) = -(l^I - l^{II})(l^I B_1^I B_2^I - l^{II} B_1^{II} B_2^{II}), \quad (3.60)$$

$$l^I l^{II} (u_1^{II} - u_1^I)(B_2^{II} - B_2^I) = (l^I - l^{II})(l^{II} u_2^{II} B_1^{II} - l^I u_2^I B_1^I). \quad (3.61)$$

Если

$$B_2^I = B_2^{II}, \quad u_2^I = u_2^{II}, \quad (3.62)$$

то уравнения (3.60) и (3.61) выполнены тождественно. В противном случае при делении уравнений (3.60) и (3.61) друг на друга получаем

$$(u_2^I - u_2^{II})^2 = (B_1^I - B_1^{II})^2, \quad (3.63)$$

откуда

$$u_2^I - u_2^{II} = \pm (B_1^I - B_1^{II}). \quad (3.64)$$

Подставляя выражение (3.64) в уравнение (3.52) и учитывая уравнение (3.54), имеем

$$(u_1^I - u_1^{II}) = \pm (l^I - l^{II}) \frac{l^I B_1^I}{l^I l^{II}}. \quad (3.65)$$

Однако для одновременного выполнения соотношений (3.59) и (3.65) необходимо, чтобы  $l^I l^{II} = 0$ , что невозможно. Следовательно, величины  $B_2$  и  $u_2$  не могут иметь разрыв на тех линиях, где имеет разрыв  $l$ .

Соотношения (3.57)–(3.59) и (3.62) задают магнитогравиационные ударные волны в сжимаемой плазме. Отметим, что магнитогравиационная ударная волна в случае сжимаемой плазмы является аналогом ударной волны для уравнений сжимаемой мелкой воды, и при  $B_1 \rightarrow 0$  соотношения на ней переходят в соотношения для ударной волны для жидкости с крупномасштабной сжимаемостью. Так же как и в классической теории мелкой воды, магнитогравиационная ударная волна, являющаяся аналогом гидродинамической ударной волны в сжимаемой нейтральной жидкости, имеет сверхзвуковую скорость относительно жидкости перед ней и дозвуковую относительно жидкости за ней.

### 3.5. Разрывные альфвеновские волны в сжимаемых течениях

Альфвеновской разрывной волной назовем разрывное решение, для которого глубина справа от

разрыва совпадает с глубиной слева, а значит,  $l^I = l^{\text{II}}$ . Тогда из соотношений (3.57)–(3.59) следует, что непрерывными останутся также и тангенциальные составляющие поля скорости и напряженности магнитного поля:  $B_1^I = B_1^{\text{II}}$  и  $u_1^I = u_1^{\text{II}}$ . Следовательно, нетривиальные соотношения на разрыве несут лишь два последних уравнения системы соотношений Ранкина–Гюгонио, (3.55) и (3.56):

$$D = u_1 - B_1 \frac{B_2^I - B_2^{\text{II}}}{u_2^I - u_2^{\text{II}}}, \quad (3.66)$$

$$(B_2^I - B_2^{\text{II}})^2 = (u_2^I - u_2^{\text{II}})^2. \quad (3.67)$$

После элементарных преобразований уравнений (3.66), (3.67) получаем

$$D = u_1 \pm B_1, \quad (3.68)$$

$$B_2^I - B_2^{\text{II}} = \mp(u_2^I - u_2^{\text{II}}). \quad (3.69)$$

Кроме того, по предположению выполняется также

$$l^I = l^{\text{II}}, \quad B_1^I = B_1^{\text{II}}, \quad u_1^I = u_1^{\text{II}}. \quad (3.70)$$

Полученные соотношения (3.68)–(3.70) определяют альфвеновские разрывные волны в приближении мелкой воды для сжимаемой плазмы. Так как непрерывные альфвеновские волны непригодны для построения решения задачи Римана и здесь не рассматриваются, в дальнейшем будем опускать слово «разрывные».

### 3.6. Допустимые разрывы в сжимаемых течениях

В предыдущих разд. 3.4 и 3.5 было показано, что существуют два типа устойчивых разрывов с ненулевым потоком массы:

1) разрыв (3.57)–(3.59), (3.62), содержащий скачки  $l$  (а значит, и скачок свободной поверхности), нормальных составляющих поля скорости и напряженности магнитного поля, называемый магнитогравитационной ударной волной в сжимаемой плазме.

2) разрыв (3.68)–(3.70) тангенциальных составляющих поля скорости и напряженности магнитного поля, называемый альфвеновской волной в приближении сжимаемой мелкой воды.

Вообще говоря, система уравнений (3.52)–(3.56) допускает третий тип устойчивых разрывов, для которых нормальная составляющая скорости непрерывна и тождественно совпадает со скоростью самого разрыва, называемого контактным разрывом.

Такой тип разрывов должен быть включен в рассмотрение при наличии физических различий в описании жидкости для задачи произвольного разрыва, например, когда жидкость в начальный момент времени в каждой из полуплоскостей имеет различную плотность. Другой пример контактного разрыва, рассматриваемый в данной работе, соответствует вырождению альфвеновской ударной волны при стремлении тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля к нулю. В этом случае поток массы через такую волну равен нулю, а нормальные составляющие напряженности магнитного поля и поля скорости становятся указанными физическими различиями.

Таким образом, получены разрывные решения для слоя сжимаемой плазмы со свободной поверхностью в поле силы тяжести в приближении мелкой воды. Нелинейная динамика сильных разрывов отличается от случая классической МГД-динамики в приближении мелкой воды вследствие различия выражения для квадрата скорости слабых возмущений и вследствие нетривиальной зависимости высоты  $h$  слоя от переменной  $l$ . Так же как и в случае непрерывных решений, полученные разрывные решения однозначно определяют физическое решение для глубины  $h$  в соответствии с (2.51) и (2.53).

### 3.7. Простые волны на наклонной плоскости в сжимаемых течениях

Простой волной в решениях системы МГД-уравнений в приближении мелкой воды, так же как и в газовой динамике, называется такое решение, при котором одна из переменных Римана постоянна во всей области течения, поэтому простая волна может существовать только в случае ровной границы. Для случая произвольной границы в работах [15, 19, 20] введены обобщенные простые волны как такие решения системы гиперболических уравнений, при которых одно из уравнений системы тождественно удовлетворяется во всей области течения, а не только вдоль соответствующей характеристики, и показано, что такое возможно только при линейном профиле нижней границы, т. е. в случае наклонной плоскости  $f_s = kx + f_s(0)$ . Здесь  $k = \text{const}$  — угловой коэффициент. Естественно, что в случае однородной нижней границы понятие обобщенной простой волны совпадает с классическим понятием простой волны.

Запишем систему уравнений (3.6) на наклонной плоскости в следующем виде:

$$\partial_t \begin{pmatrix} l \\ u_1 \\ u_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & l & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a^2 g + B_1^2}{l} & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & -B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_1 & 0 & u_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l \\ u_1 \\ u_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gk \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

Используем замену переменных

$$\tilde{x} = x + \frac{gkt^2}{2}, \quad \tilde{t} = t, \quad (3.72)$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \quad \tilde{u}_1 = u_1 + gkt. \quad (3.73)$$

Тогда система (3.71) приводится к виду, аналогичному системе уравнений на ровной границе (3.6),

$$\partial_{\tilde{t}} \begin{pmatrix} l \\ \tilde{u}_1 \\ u_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & l & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a^2 g + B_1^2}{l} & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & -B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_1 & 0 & u_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l \\ \tilde{u}_1 \\ u_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.74)$$

характеристики которой  $\tilde{x} = \lambda \tilde{t}$  в физических переменных, согласно (3.72), являются параболой. Решения системы уравнений (3.74) получаются обратной заменой переменных из решений системы уравнений на ровной границе, откуда для магнитограви- тационной волны Римана в сжимаемых течениях на наклонной плоскости имеем

$$u_1 = \pm \int \frac{\sqrt{a^2 + B_1^2}}{l} dl + gkt + \text{const}, \quad (3.75)$$

$$u_2 = \text{const}, \quad B_2 = \text{const}, \quad B_1 l = \text{const}. \quad (3.76)$$

Непрерывные альфвеновские волны в сжимаемых течениях на наклонной плоскости вырождаются, так же как и в случае ровной нижней границы. Таким образом, несмотря на формальное сходство решений (3.75), (3.76) с аналогичными для случая несжимаемой жидкости [14], нелинейная динамика простых волн в сжимаемых течениях существенно отличается в силу различия соотношений для квадрата скорости распространения слабых возмущений, вследствие нетривиальной зависимости высоты  $h$  слоя от массы столба жидкости.

Заметим, что в случае наклонной границы условия Ранкина – Гюгонио не отличаются от условий на разрыве для ровной нижней границы. Это значит, что найденные разрывные решения (3.57)–(3.59), (3.62) и (3.68)–(3.70) полностью переносятся на случай наклонной плоскости. Ударные волны распространяются по параболам со старшим коэффициентом таким же, как и у параболических характеристик для непрерывных решений.

#### 4. ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ МГД-ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В данном разделе сформулирована задача распада произвольного разрыва (задача Римана) для МГД-течений сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды и перечислены все допустимые волновые конфигурации из ранее найденных частных решений. Показано, что в предположении автомодельности решение единственно, а в предположении единственности – автомодельно. Для каждой конфигурации найдены условия для начальных данных, необходимых для ее реализации. Как было показано выше, частные решения в нашем случае отличаются от аналогичных для случая несжимаемой жидкости. Следовательно, будут отличаться и условия реализации каждой конфигурации. Поэтому ниже мы приводим полный вывод решения задачи произвольного разрыва.

##### 4.1. Постановка задачи Римана для сжимаемых течений

Рассмотрим систему уравнений (3.6) с кусочно- постоянными начальными условиями для левого ( $x < 0$ ) и правого ( $x > 0$ ) полупространств, удовлетворяющими уравнению бездивергентности:

$$\begin{aligned}
 & t = 0, \\
 & \left. \begin{aligned}
 l = l^I, \quad u_1 = u_1^I, \quad u_2 = u_2^I, \\
 B_1 = B_1^I, \quad B_2 = B_2^I,
 \end{aligned} \right\} x < 0, \\
 & \left. \begin{aligned}
 l = l^{II}, \quad u_1 = u_1^{II}, \quad u_2 = u_2^{II}, \\
 B_1 = B_1^{II}, \quad B_2 = B_2^{II},
 \end{aligned} \right\} x > 0, \\
 & B_1^I l^I = B_1^{II} l^{II}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Разрыв начальных условий для двух полубесконечных магнитных жидкостей, характеризующихся постоянными значениями приведенных выше параметров и удовлетворяющих системе (4.1), назовем произвольным разрывом. МГД-течение, удовлетворяющее системе уравнений (3.6) при  $t > 0$  и начальным условиям (4.1), называется решением задачи о распаде произвольного разрыва для МГД-уравнений для сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды.

Без ограничения общности считаем, что глубина жидкости справа не превышает глубины жидкости слева, а значит,  $l^I \geq l^{II}$ . В случае отсутствия жидкости в правом полупространстве, как будет показано ниже, необходимо отсутствие нормальной составляющей магнитного поля в левом полупространстве,  $B_1^I = 0$ , что приводит к ее полному отсутствию,  $B_1 \equiv 0$ , во всей пространственно-временной области определения решения системы (3.6), (4.1). В этом случае решение полностью аналогично решению классической задачи о разрушении дамбы с учетом конвективного переноса составляющих поля скорости и напряженности магнитного поля в сжимаемом случае. Жидкость справа от разрыва считается покоящейся. Выполнение указанных условий легко достигается выбором направления пространственных осей и переходом в инерциальную систему координат, двигающуюся со скоростью жидкости справа от разрыва в начальный момент времени.

Заметим, что в силу бездивергентности магнитного поля для нетривиальной МГД-постановки,  $B_1 \neq 0$ , глубина жидкости во всей области определения решения является строго положительной. Поэтому если в одном из полупространств жидкость отсутствует, то в другом нормальная составляющая магнитного поля необходимо вырождается. Случай отсутствия жидкости и в другом полупространстве в силу полного вырождения решения (все МГД-величины постоянны и равны нулю) не рассматривается. Если нормальная составляющая напряженности магнитного поля отсутствует в обоих полупространствах,  $B_1 \equiv 0$ , то задача вырождается в гидродинамическую с крупномасштабной сжимаемостью и решение переходит в решение класси-

ческой задачи о разрушении дамбы. Действительно, если при этом тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля также равна нулю, т. е. магнитное поле отсутствует, система уравнений (3.6) вырождается в систему уравнений для сжимаемой мелкой воды. А при наличии ненулевой тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля,  $B_2 \neq 0$ , вырождается искомое решение. В этом случае, как будет показано ниже, правая и левая альфвеновские ударные волны «схлопываются», вырождаясь в контактный разрыв, а тангенциальные составляющие магнитного поля и поля скорости переносятся конвективно, что также соответствует решению МГД-задачи о разрушении дамбы для сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды. В дальнейшем случай схлопывания альфвеновских волн выделяться не будет.

Исходная система уравнений (3.6) инвариантна относительно преобразований подобия переменных  $x$  и  $t$  ( $t' = kt$ ,  $x' = kx$ ,  $k > 0$ ) вместе со своим интегральным следствием. (В данном случае имеет смысл говорить именно о следствии интегральных законов сохранения из дифференциальных, поскольку уравнения для сжимаемых МГД-течений мелкой воды являются следствием усреднения дифференциальных МГД-уравнений по высоте слоя.) Поэтому из предположения единственности решения задачи распада произвольного разрыва и построенного ниже решения следует его автомодельность. В то же время построенное ниже решение в предположении автомодельности является доказательством существования и единственности.

Построение автомодельного решения задачи о распаде произвольного разрыва состоит в согласовании элементарных решений типа центрированных непрерывных волн Римана, магнитогравитационных и альфвеновских ударных волн, зон постоянного течения, контактных разрывов и в нахождении параметров, характеризующих их области определения.

Схематически автомодельная картина возникающего течения изображается на пространственно-временной плоскости одной из пяти возможных конфигураций:

две центрированные магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны (см. ниже рис. 3);

магнитогравитационная волна разрежения, обращенная назад, правая магнитогравитационная ударная волна и две альфвеновские волны (см. ниже рис. 4);

левая магнитогравиационная ударная волна, магнитогравиационная волна разрежения, обращенная вперед, и две альфвеновские волны (см. ниже рис. 5);

две магнитогравиационные ударные волны и две альфвеновские волны (см. ниже рис. 6);

две гидродинамические волны Римана и зона вакуума (см. ниже рис. 7).

Последняя конфигурация совпадает с аналогичной конфигурацией в решении задачи о разрушении дамбы с учетом конвективного переноса тангенциальных составляющих скорости и напряженности магнитного поля через разрыв. Данная конфигурация реализуется только при  $B_1 \equiv 0$ .

Покажем, что других волновых конфигураций быть не может. Действительно, из-за того что магнитогравиационная волна движется со сверхзвуковой скоростью относительно среды перед ней и с дозвуковой скоростью относительно среды за ней, следует, что в одно полупространство не могут бежать две магнитогравиационные ударные волны или магнитогравиационная ударная волна и волна разрежения. Две волны разрежения также не могут бежать в одно полупространство, поскольку при этом их крайние характеристики необходимо совпадают и они образуют одну волну разрежения. Кроме того, скорость альфвеновской волны всегда меньше скорости любой магнитогравиационной волны. Из перечисленных выше условий следует, что в одно полупространство может бежать не более одной магнитогравиационной волны (ударной или разрежения) и одной альфвеновской, движущейся с меньшей относительно магнитогравиационной волны скоростью. Следовательно, при распаде разрыва не могут реализовываться конфигурации, отличные от указанных выше.

Рассмотрение задачи о распаде произвольного разрыва будем проводить следующим способом: непрерывно меняя конкретные начальные условия, реализующие одну из перечисленных выше конфигураций, найдем непрерывно изменяющееся решение, переходящее через критические значения параметров, отделяющих одну конфигурацию от другой.

#### 4.2. Конфигурация «две волны разрежения и две альфвеновские волны» в сжимаемых течениях

Пусть начальные условия определяют конфигурацию «две центрированные магнитогравиационные волны разрежения Римана и две альфвеновские волны» (рис. 3). Данная конфигурация разбивает

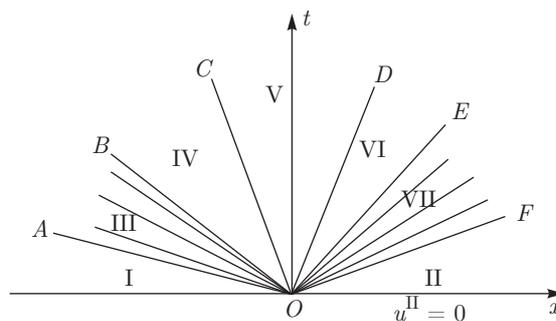


Рис. 3. Две центрированные магнитогравиационные волны разрежения и две альфвеновские волны

область определения течения на семь областей, разделенных шестью лучами:  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$ ,  $OE$ ,  $OF$ . В области постоянного течения I величины  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $l$ , задаваемые начальными условиями

$$\begin{aligned} l &= l^I, & u_1 &= u_1^I, & u_2 &= u_2^I, \\ B_1 &= B_1^I, & B_2 &= B_2^I, \end{aligned} \tag{4.2}$$

для массы жидкости слева от разрыва сохраняют свои значения. Луч  $OA$  задается соотношением  $x = y_1 t$  и отделяет область I от области III, которая является центрированной магнитогравиационной волной Римана, обращенной назад. Тогда, согласно (3.26),

$$y_1 = u_1^I - \sqrt{(a^I)^2 g + (B_1^I)^2},$$

поскольку луч  $OA$  задает характеристику центрированной волны Римана, обращенной назад. Луч  $OB$ , задаваемый соотношением  $x = y_2 t$ , также является характеристикой, отделяющей волну разрежения от области IV — зоны постоянного течения, следовательно,

$$y_2 = u_1^{IV} - \sqrt{(a^{IV})^2 g + (B_1^{IV})^2}.$$

Лучи  $OC$  и  $OD$ , заданные уравнениями  $x = y_3 t$  и  $x = y_4 t$ , соответствуют альфвеновским ударным волнам (3.68)–(3.70), поэтому

$$y_3 = u_1^{IV} - |B_1^{IV}|, \quad y_4 = u_1^V + |B_1^V|.$$

Лучи  $OE$  и  $OF$ , соответствующие магнитогравиационной волне разрежения Римана, обращенной вперед (3.32), задаются, аналогично лучам  $OA$  и  $OB$ , соотношениями  $x = y_5 t$  и  $x = y_6 t$ , где

$$\begin{aligned} y_5 &= u_1^{VI} + \sqrt{(a^{VI})^2 g + (B_1^{VI})^2}, \\ y_6 &= \sqrt{(a^{II})^2 g + (B_1^{II})^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим области IV, V и VI. Они представляют собой три области постоянного течения, отделенные друг от друга альфвеновскими ударными волнами. Величины  $u_2$  и  $B_2$  в этих областях связаны, согласно (3.68)–(3.70), при  $B_1 > 0$  соотношениями

$$u_2^{IV} - B_2^{IV} = u_2^V - B_2^V, \quad u_2^V + B_2^V = u_2^{VI} + B_2^{VI}, \quad (4.3)$$

а при  $B_1 < 0$  –

$$u_2^{IV} + B_2^{IV} = u_2^V + B_2^V, \quad u_2^V - B_2^V = u_2^{VI} - B_2^{VI}, \quad (4.4)$$

откуда

$$u_2^V = \frac{1}{2} [u_2^{VI} + u_2^{IV} + \text{sign}(B_1)(B_2^{VI} - B_2^{IV})], \quad (4.5)$$

$$B_2^V = \frac{1}{2} [\text{sign}(B_1)(u_2^{VI} - u_2^{IV}) + B_2^{VI} + B_2^{IV}]. \quad (4.6)$$

Поскольку в центрированных магнитогравитационных волнах Римана величины  $u_2$  и  $B_2$  не меняются, выполняются соотношения

$$u_2^I = u_2^{III} = u_2^{IV}, \quad u_2^{II} = u_2^{VII} = u_2^{VI}, \quad (4.7)$$

следовательно,

$$u_2^V = \frac{1}{2} [u_2^{II} + u_2^I + \text{sign}(B_1)(B_2^{II} - B_2^I)], \quad (4.8)$$

$$B_2^V = \frac{1}{2} [\text{sign}(B_1)(u_2^{II} - u_2^I) + B_2^{II} + B_2^I]. \quad (4.9)$$

Таким образом, значения  $u_2$  и  $B_2$  однозначно определены и известны во всем пространстве в любой момент времени.

Поскольку на альфвеновских ударных волнах величины  $u_1$ ,  $B_1$  и  $l$  сохраняют свои значения, справедливы следующие равенства:

$$u_1^{IV} = u_1^V = u_1^{VI}, \quad B_1^{IV} = B_1^V = B_1^{VI}, \quad (4.10)$$

$$l^{IV} = l^V = l^{VI}.$$

В дальнейшем для них в областях V и VI использованы обозначения с индексом «IV». Область III представляет собой волну Римана (3.26), обращенную назад, поэтому параметры в ней удовлетворяют соотношениям

$$u_1 + \phi(l) = \text{const}, \quad B_1 l = \text{const}, \quad (4.11)$$

откуда

$$u_1^I + \phi(l^I) = u_1^{IV} + \phi(l^{IV}), \quad B_1^I l^I = B_1^{IV} l^{IV}. \quad (4.12)$$

Аналогично, область VII представляет собой волну Римана (3.32), обращенную вперед, поэтому выполняются соотношения

$$-\phi(l^{II}) = u_1^{IV} - \phi(l^{IV}), \quad B_1^{II} l^{II} = B_1^{IV} l^{IV}. \quad (4.13)$$

Тогда

$$u_1^{IV} = \frac{1}{2} [u_1^I - \phi(l^{II}) + \phi(l^I)], \quad (4.14)$$

$$\phi(l^{IV}) = \frac{1}{2} [u_1^I + \phi(l^I) + \phi(l^{II})]. \quad (4.15)$$

Для реализации данной конфигурации необходимо, чтобы

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 \leq y_6, \quad (4.16)$$

$$u_1^I - \sqrt{(a^I)^2 g + (B_1^I)^2} < u_1^{IV} - \sqrt{(a^{IV})^2 g + (B_1^{IV})^2} < u_1^{IV} - |B_1^{IV}| \leq u_1^{IV} + |B_1^{IV}| < u_1^{IV} + \sqrt{(a^{IV})^2 g + (B_1^{IV})^2} \leq \sqrt{(a^{II})^2 g + (B_1^{II})^2}. \quad (4.17)$$

При этом равенство в последнем неравенстве цепочки (4.17) достигается в случае вырождения центрированной магнитогравитационной волны Римана, обращенной вперед. Случай равенства,

$$u_1^{IV} - |B_1^{IV}| = u_1^{IV} + |B_1^{IV}|, \quad (4.18)$$

достигается лишь при отсутствии тангенциальной составляющей магнитного поля, что соответствует вырождению двух альфвеновских ударных волн в одну. Такая волна в точности совпадает с контактным разрывом между двумя жидкостями, характеризующимися различными нормальными составляющими поля скорости и магнитного поля. Далее такая ситуация будет считаться частным случаем двух альфвеновских ударных волн и не будет выделяться отдельно. Условия  $y_2 < y_3$  и  $y_4 < y_5$  выполняются автоматически, поскольку неравенство  $\sqrt{a^2 g + B_1^2} > B_1$  строго выполняется во всей области определения в силу строгой положительности функции  $a(l)$ .

Для выполнения первого и последнего неравенств цепочки (4.17) необходимо и достаточно выполнение неравенств для глубин в соответствующих областях:

$$l_1^I \geq l_1^{II} \geq l_1^{IV}. \quad (4.19)$$

Таким образом, для нахождения условий совместности предложенной конфигурации остается показать существование и единственность значений  $u_1^{IV}$  и  $l^{IV}$  таких, что выполнены неравенства (4.19), а в каждой волне выполнено условие постоянства инвариантов

$$u_1^I + \phi(l^I) = u_1^{IV} + \phi(l^{IV}) \quad (4.20)$$

для центрированной волны Римана, обращенной назад, и

$$-\phi(l^{II}) = u_1^{IV} - \phi(l^{IV}) \quad (4.21)$$

для центрированной волны Римана, обращенной вперед. Одновременное выполнение инвариантов (4.20) и (4.21) эквивалентно выполнению уравнения для  $l^{IV}$ :

$$\phi(l^{IV}) = \frac{1}{2} [u_1^I + \phi(l^I) + \phi(l^{II})]. \quad (4.22)$$

Заметим, что

$$\phi(l) = \int \frac{dl}{l} \sqrt{\frac{(B_1 l)^2}{l^2} + g a^2} \quad (4.23)$$

является возрастающей функцией  $l$ , тогда условие выполнения неравенств (4.19) выглядит следующим образом:

$$u_1^I \leq \phi(l^{II}) - \phi(l^I). \quad (4.24)$$

**4.3. Конфигурация «магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разрежения и две альфвеновские волны» в сжимаемых течениях**

В данной конфигурации пять лучей,  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$  и  $OE$ , разбивают течение на шесть областей (рис. 4). В области I параметры, задаваемые начальными условиями (4.1) для массы жидкости слева от разрыва, не изменяются. Аналогично, в области II параметры совпадают с начальными параметрами для массы жидкости справа от разрыва. Лучи  $OA$  и  $OB$ , задаваемые уравнениями

$$x = y_1 t, \quad x = y_2 t, \quad (4.25)$$

где

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1^I - \sqrt{(a^I)^2 g + (B_1^I)^2}, \\ y_2 &= u_1^V - \sqrt{(a^V)^2 g + (B_1^V)^2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

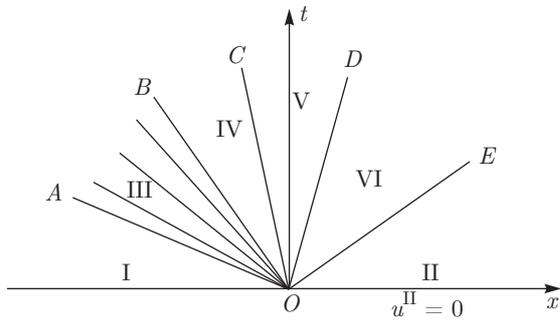


Рис. 4. Магнитогравитационная волна разрежения, обращенная назад, правая магнитогравитационная ударная волна и две альфвеновские волны

ограничивают область центрированной волны разрежения Римана. Лучи  $OC$  и  $OD$ , определяемые соотношениями

$$x = y_3 t, \quad x = y_4 t, \quad (4.27)$$

где

$$y_3 = u_1^V - |B_1^V|, \quad y_4 = u_1^V + |B_1^V|, \quad (4.28)$$

являются альфвеновскими ударными волнами, а луч  $OE$ , задаваемый как  $x = Dt$ , является правой магнитогравитационной ударной волной.

Условия реализации данной конфигурации принимают вид

$$\begin{aligned} u_1^I - \sqrt{(a^I)^2 g + (B_1^I)^2} &\leq u_1^V - \sqrt{(a^V)^2 g + (B_1^V)^2} \leq \\ &\leq u_1^V - |B_1^V| \leq u_1^V + |B_1^V| \leq D. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Равенства в цепочке неравенств достигаются при вырождении соответствующих волн, как и в случае рассмотренной выше конфигурации. Для выполнения всей цепочки необходимо и достаточно, чтобы

$$l^{II} \leq l^{III} \leq l^I. \quad (4.30)$$

Второе равенство соответствует вырождению центрированной магнитогравитационной волны Римана, обращенной назад, в зону постоянного течения, а первое — вырождению правой магнитогравитационной волны.

В областях III, IV и V выполняются соотношения

$$u_2^{IV} = \frac{1}{2} [u_2^{II} + u_2^I + \text{sign}(B_1)(B_2^I - B_2^{II})], \quad (4.31)$$

$$B_2^{IV} = \frac{1}{2} [\text{sign}(B_1)(u_2^{II} - u_2^I) + B_2^{II} + B_2^I]. \quad (4.32)$$

Используя равенства  $u_1^{III} = u_1^{IV} = u_1^V$ ,  $B_1^{III} = B_1^{IV} = B_1^V$ ,  $l^{III} = l^{IV} = l^V$ , можно обозначить соответствующие параметры в областях IV и V индексом «III».

Для области III, с одной стороны, выполняется условие постоянства инварианта Римана на магнитогравитационной волне разрежения, обращенной назад,

$$u_1^{III(1)} = u_1^I + \phi(l^I) - \phi(l^{III}), \quad (4.33)$$

с другой, — условие для правой ударной волны,

$$\begin{aligned} u_1^{III(2)} &= \\ &= -\sqrt{\frac{(l^{II} - l^{III})(\psi^{II} - \psi^{III}) + (l^{II} - l^{III})^2 (B_1^I l^I)^2 / l^{II} l^{III}}{l^{III} l^{III}}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

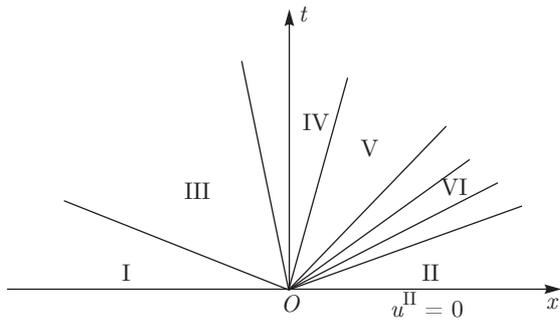


Рис. 5. Левая магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разрежения, обращенная вперед, и две альфвеновские волны

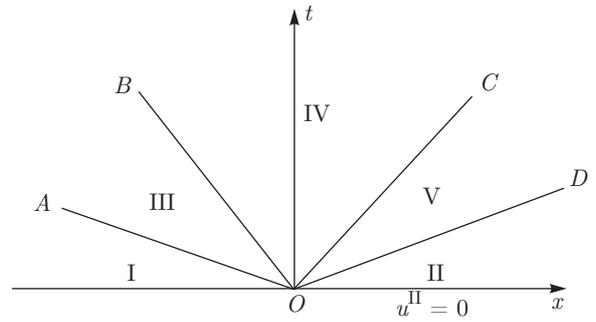


Рис. 6. Две магнитогравитационные ударные волны и две альфвеновские волны

Функция (4.33) является убывающей по переменной  $l^{\text{III}}$ , а (4.34) — возрастающей, поэтому для существования и единственности решения на отрезке  $[l^{\text{II}}, l^{\text{I}}]$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} u_1^{\text{III}(1)}(l^{\text{II}}) &\geq u_1^{\text{III}(2)}(l^{\text{II}}), \\ u_1^{\text{III}(1)}(l^{\text{I}}) &\geq u_1^{\text{III}(2)}(l^{\text{I}}), \end{aligned} \quad (4.35)$$

т. е.

$$\begin{aligned} u_1^{\text{I}} &\geq \phi(l^{\text{II}}) - \phi(l^{\text{I}}), \\ u_1^{\text{I}} &\leq \sqrt{\frac{(l^{\text{I}} - l^{\text{II}})(\psi^{\text{I}} - \psi^{\text{II}}) + (l^{\text{I}} - l^{\text{II}})^2 (B_1^{\text{I}} l^{\text{I}})^2 / l^{\text{I}} l^{\text{II}}}{l^{\text{I}} l^{\text{II}}}}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Отметим, что при выполнении равенства в (4.36) решение соответствует случаю вырождения правой ударной волны и превращения ее в волну разрежения.

Аналогично рассматриваем случай, когда влево распространяется магнитогравитационная ударная волна, а вправо — волна разрежения (рис. 5).

#### 4.4. Конфигурация «две магнитогравитационные ударные волны и две альфвеновские ударные волны» в сжимаемых течениях

В данной конфигурации область определения течения разбивается лучами  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  и  $OD$  на пять областей (рис. 6). В каждой из этих областей течение постоянно. В области I параметры, задаваемые начальными условиями для массы жидкости слева от разрыва не изменяются. Аналогично, в области II параметры совпадают с начальными параметрами для массы жидкости справа от разрыва. Луч  $OA$ , задаваемый уравнением  $x = D_1 t$ , является левой магнитогравитационной ударной волной, для

которой должны выполняться условия (3.57)–(3.59). Аналогично, луч  $OD$ , определяемый соотношением  $x = D_2 t$ , является правой магнитогравитационной ударной волной, для которой должны выполняться условия (3.57)–(3.59).

Лучи  $OB$  и  $OC$ , определяемые соотношениями

$$x = y_1 t, \quad x = y_2 t, \quad (4.37)$$

где

$$y_1 = u_1^{\text{III}} - |B_1^{\text{III}}|, \quad y_2 = u_1^{\text{V}} + |B_1^{\text{V}}|, \quad (4.38)$$

являются альфвеновскими ударными волнами.

Необходимым условием реализации данной конфигурации является цепочка неравенств

$$D_1 \leq u_1^{\text{III}} - |B_1^{\text{III}}| \leq u_1^{\text{V}} + |B_1^{\text{V}}| < D_2. \quad (4.39)$$

Выполнение первого и последнего неравенств цепочки является следствием эволюционности ударных магнитогравитационных волн. Равенство в первом неравенстве цепочки достигается при вырождении левой магнитогравитационной волны в зону постоянного течения, а равенство скоростей альфвеновских ударных волн, как и выше, соответствует вырождению этих двух волн в одну.

При рассмотрении областей III, IV и V, граничащих с альфвеновскими волнами, можно провести рассуждения, аналогичные изложенным при рассмотрении предыдущей конфигурации, и получить

$$u_2^{\text{V}} = \frac{1}{2} [u_2^{\text{VI}} + u_2^{\text{IV}} + \text{sign}(B_1)(B_2^{\text{VI}} - B_2^{\text{IV}})], \quad (4.40)$$

$$B_2^{\text{V}} = \frac{1}{2} [\text{sign}(B_1)(u_2^{\text{VI}} - u_2^{\text{IV}}) + B_2^{\text{VI}} + B_2^{\text{IV}}]. \quad (4.41)$$

Принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned} u_1^{\text{III}} = u_1^{\text{IV}} = u_1^{\text{V}}, \quad B_1^{\text{III}} = B_1^{\text{IV}} = B_1^{\text{V}}, \\ l^{\text{III}} = l^{\text{IV}} = l^{\text{V}}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

далее для соответствующих параметров из областей IV и V используем значения параметров с индексом «III».

Соотношения для магнитогравиационных ударных волн, записанные в соответствующих областях, имеют вид

$$u_1^{\text{III}(1)} = u_1^{\text{I}} + \sqrt{\frac{(l^{\text{I}} - l^{\text{III}})(\psi^{\text{I}} - \psi^{\text{III}}) + (l^{\text{I}} - l^{\text{III}})^2 (B_1^{\text{I}} l^{\text{I}})^2 / l^{\text{I}} l^{\text{III}}}{l^{\text{I}} l^{\text{III}}}}, \quad (4.43)$$

$$u_1^{\text{III}(2)} = -\sqrt{\frac{(l^{\text{II}} - l^{\text{III}})(\psi^{\text{II}} - \psi^{\text{III}}) + (l^{\text{II}} - l^{\text{III}})^2 (B_1^{\text{II}} l^{\text{II}})^2 / l^{\text{II}} l^{\text{III}}}{l^{\text{II}} l^{\text{III}}}} \quad (4.44)$$

соответственно для левой и правой магнитогравиационных ударных волн.

С учетом неравенств  $l^{\text{III}} \geq l^{\text{I}} \geq l^{\text{II}}$  для ударных волн можно заметить, что выражение (4.43) является убывающей функцией переменной  $l^{\text{III}}$ , а (4.44) — возрастающей. Тогда, чтобы эти две функции имели единственный корень  $l^{\text{III}}$  на полуинтервале  $[l^{\text{I}}; +\infty)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $u_1^{\text{III}(1)}(l^{\text{I}}) \geq u_1^{\text{III}(2)}(l^{\text{I}})$ , откуда для существования этой конфигурации следует условие для начальных данных:

$$u_1^{\text{I}} \geq \sqrt{\frac{(l^{\text{I}} - l^{\text{II}})(\psi^{\text{I}} - \psi^{\text{II}}) + (l^{\text{I}} - l^{\text{II}})^2 (B_1^{\text{I}} l^{\text{I}})^2 / l^{\text{I}} l^{\text{II}}}{l^{\text{I}} l^{\text{II}}}}. \quad (4.45)$$

Отметим, что при выполнении равенства в (4.45) решение соответствует случаю вырождения левой ударной волны и превращения ее в волну разрежения.

#### 4.5. Конфигурация «две гидродинамические волны Римана и зона вакуума» в сжимаемых течениях

Если  $B_1^{\text{I}} = B_1^{\text{II}} = 0$ , то магнитогравиационные волны разрежения превращаются в гидродинамические волны Римана и может реализовываться конфигурация «две гидродинамические волны Римана и зона вакуума» (рис. 7). Условием ее реализации является выполнение неравенств

$$B_1^{\text{I}} = B_1^{\text{II}} = 0, \quad u_1^{\text{I}} < -2\sqrt{(a^{\text{I}})^2 g} - 2\sqrt{(a^{\text{II}})^2 g}. \quad (4.46)$$

Лучи  $OB$  и  $OC$  отделяют зону вакуума ( $u_{1,2} = 0, B_{1,2} = 0, l = 0$ ) от зон, в которых величины  $u_2$  и  $B_2$

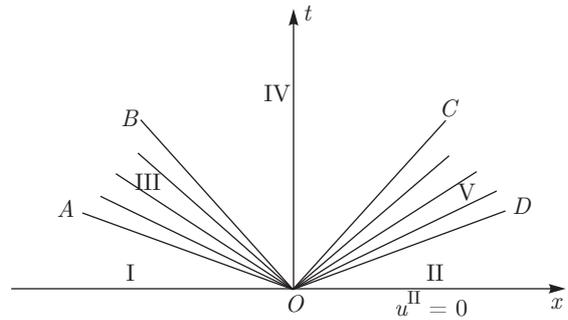


Рис. 7. Две гидродинамические волны Римана и зона вакуума

сохраняют начальные значения  $u_2 = u_2^{\text{I}}$  и  $B_2 = B_2^{\text{I}}$  слева от разрыва и  $u_2 = u_2^{\text{II}}$  и  $B_2 = B_2^{\text{II}}$  справа, фактически являясь контактными разрывами.

#### 4.6. Решение задачи Римана для сжимаемых течений. Сравнение с решением для несжимаемых течений

Таким образом, получены решения для произвольных начальных данных, удовлетворяющих условиям

$$B_1^{\text{I}} l^{\text{I}} = B_1^{\text{II}} l^{\text{II}}, \quad l^{\text{II}} \neq 0, \quad (4.47)$$

$$l^{\text{I}} \geq l^{\text{II}} > 0, \quad u_1^{\text{II}} = 0$$

и

$$l^{\text{II}} = 0, \quad B_1^{\text{I}} = B_1^{\text{II}} = 0, \quad u_1^{\text{II}} = 0. \quad (4.48)$$

Для конфигурации «две магнитогравиационные ударные волны и две альфвеновские волны» (см. рис. 6) выполняется условие (4.45); для конфигурации «магнитогравиационная ударная волна, магнитогравиационная волна разрежения и две альфвеновские волны» (см. рис. 4) — условия (4.36); для конфигурации «две магнитогравиационные волны разрежения и две альфвеновские волны» (см. рис. 3) — условие (4.24) и для конфигурации «две гидродинамические волны Римана и зона вакуума» (см. рис. 7) — условие (4.46).

Таким образом, найденные области начальных параметров, на которых реализуются все четыре возможные конфигурации, полностью покрывают область начальных условий в формулировке задачи распада произвольного разрыва. Поскольку эти области не перекрываются, найденное решение задачи Римана единственно.

Полученное решение задачи Римана помимо самостоятельной ценности является основополагающим для построения целого класса конечнообъемных численных методов сквозного счета, позволяю-

ших рассчитывать как непрерывные, так и разрывные решения без выделения разрывов.

Покажем, что исходная система МГД-уравнений для сжимаемой мелкой воды (2.54)–(2.58), соотношения на разрыве Ранкина–Гюгонио (3.52)–(3.56) и решение задачи распада разрыва переходят в систему классических МГД-уравнений в приближении мелкой воды для несжимаемой плазмы с соответствующими соотношениями на разрыве и решением задачи распада разрыва в случае, когда характерная глубина  $h_0$  слоя становится много меньше характерной плотностной высоты  $H_\rho$ , т.е. при  $\epsilon = h_0/H_\rho \rightarrow 0$ . Разложим функции  $l$ ,  $a^2$  из (2.51), (2.53) в ряд Тейлора в окрестности  $\epsilon = 0$ :

$$l = \rho_h h \left( 1 + \frac{\epsilon}{2(\gamma - 1)} + O(\epsilon^2) \right), \quad (4.49)$$

$$a^2 = h \left( 1 - \frac{\epsilon}{2(\gamma - 1)} + O(\epsilon^2) \right). \quad (4.50)$$

Тогда в нулевом приближении имеем  $l \approx \rho_h h$ ,  $a^2 \approx h$ , и система (2.54)–(2.58) переходит при делении на  $\rho_h = \text{const}$  в классические МГД-уравнения в приближении мелкой воды. Разложение функции  $\psi(l)$  в ряд по малому параметру  $\epsilon$  дает

$$\psi = \rho_h g \frac{h^2}{2} (1 + O(\epsilon^2)). \quad (4.51)$$

Из (4.49)–(4.51) следует, что соотношения (3.52)–(3.56) на разрыве Ранкина–Гюгонио переходят в соответствующие классические МГД-уравнения для мелкой воды при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Поскольку исходная система уравнений (2.54)–(2.58) и соотношения (3.52)–(3.56) Ранкина–Гюгонио на разрыве переходят в систему МГД-уравнений для несжимаемых течений с условиями на разрыве при  $\epsilon \rightarrow 0$ , все решения исходной системы перейдут в решения для несжимаемой плазмы. Используя разложения для  $l$ ,  $a^2$  и  $\phi$ , запишем решения задачи Римана с точностью до  $o(\epsilon)$ . В этих уравнениях  $\phi_0$  — функции, описывающие альфвеновские волны для несжимаемого случая. Решениями будут следующие конфигурации:

$$u_1^I \geq \left[ (h^I - h^{II}) \sqrt{\frac{g(h^I + h^{II})/2 + (B_1^I h^I)^2/h^I h^{II}}{h^I h^{II}}} \right] \times \\ \times (1 + \alpha\epsilon), \quad \alpha > 0 \quad (4.52)$$

— конфигурация «две магнитогравиационные ударные волны и две альфвеновские волны»,

$$u_1^I \geq [\phi_0(h^{II}) - \phi_0(h^I)](1 - \beta\epsilon), \quad \beta > 0, \\ u_1^I \leq \\ \leq \left[ (h^I - h^{II}) \sqrt{\frac{g(h^I + h^{II})/2 + (B_1^I h^I)^2/h^I h^{II}}{h^I h^{II}}} \right] \times \\ \times (1 + \alpha\epsilon), \quad \alpha > 0 \quad (4.53)$$

— конфигурация «магнитогравиационная ударная волна, магнитогравиационная волна разряжения и две альфвеновские волны»,

$$u_1^I \leq [\phi_0(h^{II}) - \phi_0(h^I)](1 - \beta\epsilon), \quad \beta > 0 \quad (4.54)$$

— конфигурация «две магнитогравиационные волны разрежения и две альфвеновские волны»,

$$B_1^I = B_1^{II} = 0, \quad u_1^I < \left( -2\sqrt{gh^I} - 2\sqrt{gh^{II}} \right) \times \\ \times \left( 1 - \frac{1}{4(\gamma - 1)}\epsilon \right) \quad (4.55)$$

— конфигурация «две гидродинамические волны Римана и зона вакуума».

Как видно, конфигурации и решение задачи распада разрыва в случае приближения мелкой воды для сжимаемой магнитной жидкости переходят в конфигурации и решение задачи распада разрыва для классических МГД-уравнений в приближении мелкой воды для несжимаемой жидкости при предельном переходе  $\epsilon \rightarrow 0$ . Проведенный анализ показывает, что изменились границы между областями в решении задачи распада разрыва для сжимаемых течений по сравнению с несжимаемыми.

Видно, что уменьшилась область начальных условий, при которых реализуется конфигурация «две гидродинамические волны Римана и зона вакуума». Область начальных условий, которая реализовывала эту конфигурацию изменилась, расширив область начальных условий для конфигурации «две магнитогравиационные волны разрежения и две альфвеновские волны». Кроме того, увеличилась область начальных условий, при которых реализуется конфигурация «магнитогравиационная ударная волна, магнитогравиационная волна разряжения и две альфвеновские волны». Область начальных условий, реализующая конфигурации «две магнитогравиационные волны разрежения и две альфвеновские волны» и «две магнитогравиационные ударные волны и две альфвеновские волны» теперь частично реализует конфигурацию «магнитогравиационная ударная волна, магнитогравиационная

волна разряжения и две альфвеновские волны». Полученное решение задачи Римана на ровной границе позволяет получить решение на наклонной плоскости, используя замену переменных (3.72). Таким образом, на наклонной плоскости реализуются те же конфигурации, что и в случае ровной границы. Также не меняются условия реализации для каждой из конфигураций, но решения внутри конфигураций качественно отличаются от решений на плоской границе. Вместо областей с однородным течением теперь реализуются области равноускоренного течения. Ударные волны распространяются по параболическим траекториям, их характеристики являются параболой.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получена система МГД-уравнений для вращающейся сжимаемой плазмы в приближении мелкой воды над неоднородной границей. Полученная система нетривиальным образом зависит от формы нижней границы, а также отношения характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. В отличие от МГД-уравнений в приближении мелкой воды для несжимаемой плазмы, высота свободной поверхности не является определяющей характеристикой для описания течений, так как закон сохранения массы записывается через новую переменную, которая зависит от плотности жидкости и высоты столба. Полученная система имеет широкий спектр применения для описания астрофизической плазмы, поэтому в работе приведен подробный ее вывод, проведен анализ пределов применимости данного приближения. Динамика течений, описываемых полученной системой в случаях, когда характерная плотностная высота много меньше характерной высоты слоя, существенно отличается от случая, описываемого системой МГД-уравнений несжимаемой жидкости в приближении мелкой воды, вследствие различия выражений для скорости распространения слабых возмущений и того, что в качестве параметра используется переменная, нетривиально связанная с высотой слоя, несмотря на формальную аналогию гиперболической структуры систем уравнений для обеих моделей.

Исследована нелинейная динамика МГД-течений сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды. В явном виде найдены все непрерывные (магнитогравитационные волны и альфвеновские

волны) и разрывные (ударные магнитогравитационные волны и альфвеновские разрывные волны) решения системы. Найдены все центрированные автомодельные решения. Решена задача распада произвольного разрыва для МГД-уравнений для сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды над ровной поверхностью.

Показано, что решение представляет собой одну из пяти конфигураций: две магнитогравитационные ударные волны и две альфвеновские волны; две центрированные магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны; левая магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разрежения, обращенная вперед, и две альфвеновские волны; магнитогравитационная волна разрежения, обращенная назад, правая магнитогравитационная волна и две альфвеновские волны; две гидродинамические волны Римана и зона вакуума. Для каждой конфигурации найдены необходимые и достаточные условия реализации.

Проведен сравнительный анализ полученного решения и решения классической задачи Римана для МГД-течений несжимаемой жидкости в приближении мелкой воды. Учет сжимаемости магнитной жидкости в приближении мелкой воды приводит к изменению границ областей начальных условий, реализующих различные конфигурации решения задачи Римана. Область начальных условий, при которой реализуется конфигурация «две центрированные магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны», уменьшается по сравнению с классической несжимаемой моделью МГД-течений в приближении мелкой воды, а область начальных условий, при которой реализуется конфигурация «магнитогравитационная волна разрежения, магнитогравитационная волна и две альфвеновские волны», увеличивается. Конфигурация «две гидродинамические волны Римана и зона вакуума» может быть реализована только при равенстве нулю нормальной составляющей магнитного поля.

Найдены непрерывные решения системы на наклонной плоскости в виде обобщенных волн. Показано, что характеристиками волн являются параболы. Найдены разрывные решения, которые распространяются вдоль параболических характеристик. Показано, что волны на наклонной поверхности отличаются тем, что в областях с однородным течением теперь реализуется равноускоренное течение. Решение задачи Римана обобщено на случай наклонной поверхности. Наличие наклонного профиля нижней границы приводит

к качественному изменению решений в реализуемых конфигурациях: вместо областей с однородным течением реализуются области ускоренного течения, ударные волны распространяются по параболическим траекториям, а их характеристики имеют форму парабол.

Работа выполнена при поддержке Программы № 7 «Экспериментальные и теоретические исследования объектов солнечной системы и звездных планетных систем» Президиума РАН и РФФИ (грант № 14-29-06065).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
2. В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные волны в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат, Москва (1989).
3. Дж. Бэтчелор, *Введение в динамику жидкости*, Мир, Москва (1973).
4. P. A. Gilman, *Astrophys. J. Lett.* **544**, L79 (2000).
5. M. S. Miesch and P. A. Gilman, *Solar Phys.* **220**, 220 (2004).
6. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, and J. L. Ballester, *Astrophys. J. Lett.* **691**, L41 (2009).
7. N. A. Inogamov and R. A. Sunyaev, *Astron. Lett.* **25**, 269 (1999).
8. N. A. Inogamov and R. A. Sunyaev, *Astron. Lett.* **36**, 848 (2010).
9. A. Spitkovsky, Y. Levin, and G. Ushomirsky, *Astrophys. J.* **566**, 1018 (2002).
10. K. Heng and A. Spitkovsky, *Astrophys. J.* **703**, 1819 (2009).
11. J. Y.-K. Cho, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **366**, 4477 (2008).
12. V. Bojarevics and K. Pericleous, in *Proc. of Joint 15th Riga and 6th PAMIR Internat. Conf.* (2005), Vol. 2, p. 87.
13. V. Zeitlin, *Nonlin. Proc. Geophys.* **20**, 893 (2013).
14. К. В. Карельский, А. С. Петросян, С. В. Тарасевич, *ЖЭТФ* **140**, 606 (2011).
15. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and S. V. Tarasevich, *Phys. Scripta* **155**, 014024 (2013).
16. Д. А. Климачков, А. С. Петросян, *ЖЭТФ* **149**, 965 (2016).
17. K. V. Karelsky and A. S. Petrosyan, *Fluid Dyn. Res.* **38**, 339 (2006).
18. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных явлений*, Наука, Москва (1966).
19. K. V. Karelsky, V. V. Papkov, A. S. Petrosyan, and D. V. Tsygankov, *Phys. Lett. A* **271**, 341 (2000).
20. К. В. Карельский, А. С. Петросян, А. В. Черняк, *ЖЭТФ* **143**, 779 (2013).