

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА БЕТА-ПРОЦЕССЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ УМЕРЕННО ВЫРОЖДЕННОЙ ПЛАЗМЕ

*И. С. Огнев**

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150003, Ярославль, Россия*

Поступила в редакцию 21 января 2016 г.

Исследуется влияние магнитного поля произвольной напряженности на бета-распад и кроссинг-симметричные к нему процессы. С использованием ковариантной техники вычисления получено выражение для квадратов S -матричных элементов данных реакций, которое справедливо в том числе и в системах отсчета, где среда движется как целое вдоль линий напряженности магнитного поля. Для случая умеренно вырожденной плазмы получены простые аналитические выражения для коэффициентов излучения нейтрино и антинейтрино, которые полностью характеризуют излучательную и поглощательную способности рассматриваемой среды. Показано, что используемое приближение хорошо выполняется для таких объектов, как сверхновые с коллапсом центральной части и аккреционные диски вокруг черных дыр, причем бета-процессы выступают в этих объектах как доминирующие нейтринные реакции. Полученные аналитические выражения для коэффициентов излучения являются хорошим приближением для описания взаимодействия электронных нейтрино и антинейтрино со средой рассматриваемых объектов и справедливы при произвольной напряженности магнитного поля. Ввиду простоты, они легко могут быть включены в магнито-гидродинамическое моделирование сверхновых и аккреционных дисков, а также использоваться для расчета распространения в них нейтрино и антинейтрино. Для случая оптически прозрачной плазмы получены скорости бета-процессов и излучаемые в них энергия и импульс. Показано, что передаваемый среде макроскопический импульс линейно возрастает с ростом напряженности магнитного поля и может существенно влиять на динамику сверхновых и аккреционных дисков в областях, где плазма вырождена. Также показано, что при характерной для сверхновых и аккреционных дисков напряженности магнитного поля $B \lesssim 10^{15}$ Гс скорости бета-процессов и излучаемая в них энергия подавляются по сравнению с бесполевым случаем. Особенно сильно подавление проявляется для реакции с участием нейтрино.

DOI: 10.7868/S0044451016100126

1. ВВЕДЕНИЕ

Нейтрино могут оказывать сильное влияние на процессы, протекающие во многих астрофизических объектах. В особенности это касается взрывных процессов, которые сопровождаются выделением большого количества энергии и нагревом окружающей среды. К таким процессам можно отнести взрыв сверхновой с коллапсом центральной части, который является конечной стадией эволюции массивных звезд, а также слияние звезд в тесной двойной системе. Несмотря на то что оба эти явления существенно отличаются друг от друга, их объединяет наличие мощного нейтринного излучения и связь

с космологическими гамма-всплесками [1], которые до сих пор остаются одной из нерешенных до конца проблем теоретической астрофизики. Источником нейтринного излучения при взрыве сверхновой является протонейтронная звезда, образующаяся при коллапсе ядра массивной звезды на конечной стадии ее эволюции. Отметим, что именно нейтринное излучение является основным фактором, приводящим к взрыву сверхновой. Слияние звезд в тесной двойной системе приводит к формированию центрального объекта (как правило, черной дыры, хотя возможно образование сверхмассивной нейтронной звезды) и горячего аккреционного диска вокруг него. В этом случае диск является источником мощного нейтринного излучения. Отметим, что аналогичная система, состоящая из центральной черной дыры и аккреционного диска, может сформировать-

* E-mail: ognev@uniyar.ac.ru

ся и при неудачном взрыве сверхновой (так называемая модель коллапсара) [2]. В этом случае при коллапсе ядра массивной звезды образуется не протонейтронная звезда, а черная дыра. Отсутствие мощного нейтринного излучения из центральной части приводит к тому, что оставшееся вещество аккрецирует на черную дыру, образуя горячий диск. Интерес к таким системам связан прежде всего с тем, что нейтринное излучение из горячего диска может порождать релятивистскую электрон-позитронную плазму, являющуюся, как считается [1], источником космологических гамма-всплесков. При этом слияние компактных объектов (нейтронных звезд или черных дыр) приводит, по всей видимости, к формированию коротких гамма-всплесков [3]. А длинные гамма-всплески обычно ассоциируются с взрывами сверхновых с большим энерговыделением и, возможно, с коллапсарами [1]. Отметим, что источником длинных гамма-всплесков также может быть слияние компактного объекта с массивной звездой типа Вольфа–Райе [4].

Как при взрыве сверхновой, так и при слиянии звезд в тесной двойной системе образуется достаточно плотная и горячая среда, которая непрозрачна для фотонов, а излучение нейтрино является основным каналом ее остывания. Вследствие больших температур среда преимущественно состоит из свободных нуклонов, фотонов и релятивистских электронов и позитронов, находящихся в локальном термодинамическом равновесии. Нейтрино в такой среде, в зависимости от конкретных условий, могут либо находиться с ней в состоянии равновесия, как в ядре сверхновой, либо излучаться свободно, как в аккреционном диске вокруг черной дыры или во внешней оболочке сверхновой. Основными нейтринными реакциями в такой среде являются бета-процессы [5]

$$p + e^- \rightleftharpoons n + \nu_e, \quad (1)$$

$$n + e^+ \rightleftharpoons p + \tilde{\nu}_e, \quad (2)$$

$$n \rightleftharpoons p + e^- + \tilde{\nu}_e, \quad (3)$$

которые важны прежде всего как главный канал обмена энергией между средой и нейтрино в случае сверхновой и как энергетический источник гамма-всплеска при слиянии звезд в тесной двойной системе. Существенным фактором является то, что в такой среде возможна генерация сильного магнитного поля. Как показывает моделирование, и в сверхновых [6, 7], и в аккреционных дисках [4, 8] напряженность магнитного поля может достигать значений $B \sim 10^{15}$ Гс. Такое магнитное поле не только существенно сказывается на динамике самих объектов,

но и модифицирует взаимодействие нейтрино со средой.

Исследование влияния магнитного поля на рассматриваемые бета-процессы, имеет очень продолжительную историю, которая началась с работы [9]. Отметим, что техника вычисления данных процессов во внешнем магнитном поле, как правило, развивалась не сама по себе, а в связи с вычислением различных макроскопических величин, характеризующих взаимодействие нейтрино со средой. Таким образом, в данных задачах важным фактором является не только модификация волновых функций заряженных частиц и лагранжиана взаимодействия магнитным полем, но и его влияние на саму среду. Так, в одной из первых работ по данной тематике [10] исследовалось влияние магнитного поля на время жизни нейтрона в вырожденной плазме. Было показано, что основным фактором, меняющим его по сравнению с бесполевым случаем, является изменение фазового объема электронов среды магнитным полем. Развитие непосредственно техники расчета бета-процессов в магнитном поле, т. е. получение вероятности перехода из начального состояния в конечное для свободных частиц, началось с учета модификации волновой функции электрона магнитным полем, так как его влияние на другие частицы гораздо слабее. В данном приближении было получено выражение для квадрата S -матричного элемента бета-распада (3) в единицу времени [11]. Дальнейшее развитие техники вычисления заключалось в использовании точных решений уравнения Дирака в магнитном поле для всех заряженных частиц, в том числе с учетом их поляризации. В этом направлении был достигнут достаточно существенный прогресс. Так, например, в работе [12] было получено общее выражение S -матричного элемента бета-распада для релятивистских электронов и протонов с учетом их поляризации. Однако практическое использование данного результата для астрофизических задач является крайне затруднительным ввиду его громоздкости. Достаточно простые выражения для квадратов S -матричных элементов бета-процессов были получены в пределе сильного магнитного поля, когда заряженный лептон занимает только основной уровень Ландау [13, 14]. Однако данное приближение подразумевает слишком сильные магнитные поля, которые, по всей видимости, не реализуются в реальных астрофизических объектах (см. результаты моделирования [4, 6–8]).

Существенным прогрессом развития техники вычисления бета-процессов с точки зрения ее практического применения для астрофизических

задач являются результаты работы [15]. В ней было получено компактное выражение для квадрата S -матричного элемента бета-распада с участием нерелятивистских нуклонов без упрощающих предположений о величине магнитного поля. К сожалению, работа содержит опisku, исправленную позже в [16]. А именно, в ней аксиальная константа g_a входит в нуклонный ток с неправильным знаком. В качестве развития данного результата можно отметить работу [17], где получен квадрат S -матричного элемента бета-распада с учетом формфактора слабого магнетизма f_2 , обусловленного наличием у нуклонов аномального магнитного момента. Этот результат является важным, поскольку обычно учитывается вклад аномального магнитного момента лишь в энергию протона и нейтрона, тогда как аналогичный вклад в нуклонный ток отбрасывается. В смысле развития техники вычисления можно выделить также работу [18], где было получено выражение для квадрата S -матричного элемента бета-распада с учетом поляризации всех участвующих в реакции частиц. Отметим, что авторы указанных выше работ не цитируют друг друга, а следовательно, сравнительный анализ их результатов не проводился. Также следует обратить внимание, что данные расчеты выполнялись в системе отсчета, связанной с покоящейся средой. Для большинства астрофизических задач этого вполне достаточно, так как среда, если и движется, то, как правило, с нерелятивистскими скоростями. Даже в том случае, когда скорости становятся релятивистскими, требуемые физические величины могут быть пересчитаны в движущуюся систему отсчета с использованием преобразований Лоренца. Однако такой подход не всегда удобен. Так, например, светимость нейтрино, которая представляет большой интерес во многих астрофизических задачах, является нулевой компонентой 4-вектора, поэтому не может быть преобразована в движущуюся систему отсчета без знания остальных его компонент. Следовательно, использование цитируемых выше результатов [15, 17, 18], может привести к определенным трудностям при решении задач, в которых среда движется как целое с релятивистской скоростью. Это послужило причиной включения в данную статью краткого изложения ковариантной техники вычисления процессов в магнитном поле, позволяющей получать результат в движущейся системе отсчета. Уточним, что в данном случае подразумевается, что среда как целое может двигаться с произвольными скоростями, но лишь вдоль линий напряженности магнитного

поля. Данное ограничение связано с тем, что поперечное движение приводит к возникновению в среде дополнительного электрического поля, которое в данной технике не учитывается. Однако в астрофизических задачах движение вещества вдоль линий напряженности магнитного поля является достаточно естественным предположением, так как среда обладает большой электрической проводимостью и заморожена в силовые линии магнитного поля. Таким образом, результаты, получаемые в предлагаемой ковариантной технике, имеют достаточно большую общность применительно к астрофизическим задачам. В статье коротко изложен сам формализм, который позволяет проводить расчеты элементарных процессов в среде, движущейся вдоль линий напряженности магнитного поля. Затем на его основе получено ковариантное выражение для квадратов S -матричных элементов бета-процессов в произвольном по напряженности магнитном поле, которое имеет универсальный вид для всех реакций. Отметим, что ранее подобное выражение в литературе не приводилось. Данный результат анализируется на предмет сравнения его с полученными ранее выражениями для квадрата S -матричного элемента бета-распада.

Приложение техники вычисления нейтринных процессов к задачам астрофизики традиционно связано с нейтронными звездами [19] и взрывами сверхновых [20]. В последнее время возник также интерес к аккреционным дискам вокруг черных дыр, поскольку, как отмечалось выше, их нейтринное излучение может быть энергетическим источником гамма-всплесков. Для всех перечисленных объектов основной интерес представляет вычисление нейтринной светимости среды. Так, в нейтронных звездах эта величина определяет скорость их остывания и тепловую эволюцию на начальных этапах. Особенностью нейтринных процессов в этом случае является то, что они идут в плотной сильно вырожденной среде. Целью настоящей работы является вычисление аналогичных величин в условиях релятивистской умеренно вырожденной плазмы, что реализуется в оболочках сверхновых и аккреционных дисках вокруг черных дыр. Отметим, что основным макроскопическим проявлением взаимодействия нейтрино с веществом в данных объектах является передача среде энергии в оболочке сверхновой и остывание аккреционного диска за счет излучения нейтрино. Кроме того, в присутствии магнитного поля взаимодействие нейтрино со средой становится анизотропным, что известно уже давно [9] и является следствием нарушения P -четности в слабых про-

цессах. Данная анизотропия приводит к тому, что при взаимодействии нейтрино со средой происходит не только обмен энергией, но еще и импульсом. Применительно к сверхновым этот эффект может быть важен как механизм [21], приводящий к возникновению больших линейных скоростей, наблюдающихся у некоторых пульсаров. Поэтому вычисление нейтринной светимости и анизотропии в излучении и поглощении нейтрино в присутствии магнитного поля являлось основным направлением нейтринной физики применительно к сверхновым. Подобные расчеты проводились как с использованием различных упрощающих предположений в технике вычисления процессов и учета влияния магнитного поля на среду, так и без них. Однако аналитические результаты были получены лишь в приближении сильного магнитного поля [13, 14], которое, как отмечалось выше, плохо применимо для сверхновых и аккреционных дисков. Целью настоящей работы является получение простых аналитических выражений, характеризующих взаимодействие нейтрино со средой при произвольном по напряженности магнитном поле в условиях релятивистской умеренно вырожденной плазмы. Отметим, что хотя макроскопические величины, характеризующие взаимодействие нейтрино со средой, могут быть вычислены непосредственно, более удобным подходом является использование коэффициентов излучения и поглощения. В локально равновесной среде эти коэффициенты связаны друг с другом и могут быть использованы как для описания распространения нейтрино посредством кинетического уравнения Больцмана, так и для получения различных макроскопических характеристик, таких как передаваемая среде энергия, импульс и другие [5, 22]. В настоящей работе рассчитывались коэффициенты излучения нейтрино и антинейтрино для доминирующих в рассматриваемой среде бета-процессов. Для них были получены простые аналитические выражения, справедливые для сверхновых и аккреционных дисков вокруг черных дыр. Подробно обсуждаются границы применимости полученных выражений. Далее выражения для коэффициентов излучения используются при расчете скоростей производства нейтрино и антинейтрино и излучаемой в них энергии-импульса для случая оптически прозрачной среды. Подробно анализируется зависимость этих величин от напряженности магнитного поля и параметров среды.

Далее в работе используется система единиц, в которой $c = \hbar = k = 1$, где c — скорость света, \hbar — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим частицу со спином $S = 1/2$ (спинорную частицу), массой m и зарядом ϱe , где $e > 0$ — сам заряд, $\varrho = \pm 1$ — его знак, находящуюся в постоянном однородном магнитном поле. Выберем ось z в направлении вектора напряженности внешнего магнитного поля \mathbf{B} , а векторный потенциал этого поля в виде $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$. Будем предполагать, что частица не имеет аномального магнитного момента или он настолько мал, что им можно пренебречь. В этом случае с гамильтонианом коммутирует проекция оператора спина на ось z , которая может быть выбрана в виде

$$\hat{\Sigma}_3 = i\gamma_1\gamma_2,$$

где γ^μ — матрицы Дирака в стандартном представлении. Будем считать, что решение уравнения Дирака для рассматриваемой частицы $\psi_s(\mathbf{x})$ является собственной функцией этого оператора:

$$\hat{\Sigma}_3 \psi_s(\mathbf{x}) = s \psi_s(\mathbf{x}),$$

где $s = \pm 1$ — удвоенное значение проекции среднего спина частицы на направление магнитного поля и $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mu = (t, x, y, z)$. В этом случае нормированное на единицу решение уравнения Дирака становится полностью определенным и для состояния с положительной энергией и определенной поляризацией может быть представлено в виде (см., например, [23])

$$\psi_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(\mathbf{x}) = \frac{\exp\{-i(\varepsilon_n t - p_2 y - p_3 z)\}}{\sqrt{2\varepsilon_n L_y L_z}} \times U_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(\eta), \quad (4)$$

$$U_{n,p_2,p_3,s=\varrho}^{(+)}(\eta) = W_\varrho \chi_n(\eta) - V_{-\varrho} \chi_{n-1}(\eta),$$

$$U_{n,p_2,p_3,s=-\varrho}^{(+)}(\eta) = V_\varrho \chi_n(\eta) + W_{-\varrho} \chi_{n-1}(\eta),$$

где L_y и L_z — нормировочные длины вдоль осей y и z , а $\eta = \sqrt{eB}(x - \varrho p_2/eB)$. Спектр энергий заряженной частицы в магнитном поле дается выражением

$$\varepsilon_n = \sqrt{p_3^2 + m^2 + 2eBn}, \quad (5)$$

где индекс $n = \nu + (1 - \varrho s)/2$ нумерует уровни Ландау частицы ($\nu = 0, 1, 2, \dots$). Как видно из приведенного выражения, на основном уровне ($n = 0$) у частицы имеется только одна, строго определенная поляризация $s = \varrho$. Все остальные уровни двукратно вырождены, а именно, пары значений квантовых чисел $(\nu - 1, s = -\varrho)$ и $(\nu, s = \varrho)$ соответствуют одному уровню Ландау с $n = \nu$. Решение (4) выражается через нормированные функции одномерного осциллятора [24]:

$$\chi_k(\eta) = \frac{(eB)^{1/4} e^{-\eta^2/2}}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} H_k(\eta),$$

$$H_k(\eta) = (-1)^k \exp(\eta^2) \frac{d^k}{d\eta^k} \exp(-\eta^2),$$

где $H_k(\eta)$ — полиномы Эрмита, и следующие биспиноры:

$$\begin{aligned} W_+ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n + m}} \begin{pmatrix} \varepsilon_n + m \\ 0 \\ p_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ W_- &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n + m}} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_n + m \\ 0 \\ -p_3 \end{pmatrix}, \\ V_+ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n + m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i\sqrt{2eBn} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ V_- &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n + m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i\sqrt{2eBn} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

Непосредственно каждый из них не имеет стандартной нормировки, накладываемой на биспинор свободного фермиона, однако такой нормировкой обладает следующая их комбинация:

$$\overline{W}_\varrho W_\varrho + \overline{V}_\varrho V_\varrho = 2m,$$

где \overline{W}_ϱ и \overline{V}_ϱ — сопряженные по Дираку биспиноры.

Решение уравнения Дирака с отрицательной энергией может быть получено из выражений (4) формальной заменой $\varepsilon_n \rightarrow -\varepsilon_n$, $p_2 \rightarrow -p_2$, $p_3 \rightarrow -p_3$, что эквивалентно заменам $m \rightarrow -m$ и $V_\varrho \rightarrow -V_\varrho$ в биспиноре $U_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(\eta)$. Таким образом, отрицательно-частотное решение может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \psi_{n,p_2,p_3,s}^{(-)}(\mathbf{x}) &= \frac{\exp\{i(\varepsilon_n t - p_2 y - p_3 z)\}}{\sqrt{2\varepsilon_n L_y L_z}} \times \\ &\quad \times U_{n,p_2,p_3,s}^{(-)}(\tilde{\eta}), \end{aligned} \tag{7}$$

$$U_{n,p_2,p_3,s=\varrho}^{(-)}(\tilde{\eta}) = \widetilde{W}_\varrho \chi_n(\tilde{\eta}) + \widetilde{V}_{-\varrho} \chi_{n-1}(\tilde{\eta}),$$

$$U_{n,p_2,p_3,s=-\varrho}^{(-)}(\tilde{\eta}) = -\widetilde{V}_\varrho \chi_n(\tilde{\eta}) + \widetilde{W}_{-\varrho} \chi_{n-1}(\tilde{\eta}),$$

где $\widetilde{W}_\varrho = W_\varrho(m \rightarrow -m)$, $\widetilde{V}_\varrho = V_\varrho(m \rightarrow -m)$, $\tilde{\eta} = \sqrt{eB}(x + \varrho p_2/eB)$ и подразумевается, что знак заряда для решения с отрицательной энергией тот же,

что и для положительно-частотного решения. Отметим, что спектр энергий античастицы совпадает с приведенным в (5), однако индекс Ландау $n = \nu + (1 + \varrho s)/2$. Таким образом, основному состоянию ($n = 0$) античастицы соответствует противоположная поляризация $s = -\varrho$.

3. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ ЗАРЯЖЕННОГО ФЕРМИОНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В вакууме стандартной техникой расчета элементарных процессов является использование матриц плотности частиц $\rho(\mathbf{x}) \sim \psi(\mathbf{x}) \overline{\psi}(\mathbf{x})$, с помощью которых легко может быть получен квадрат S -матричного элемента реакции. Ниже коротко излагается формализм, позволяющий аналогичным образом проводить расчет процессов с участием заряженных частиц, находящихся во внешнем магнитном поле. Детальное изложение данной техники можно найти в работах [25,26], где матрицы плотности строились на основе решений уравнения Дирака, удовлетворяющих различным выборам оператора спина релятивистского фермиона. Обсуждение использованных для решения этой задачи операторов можно найти, например, в работе [27], здесь же мы будем следовать выбору, сделанному в [25]. Отметим, что попытки построения подобной техники предпринимались ранее в работе [28]. Однако в ней использовалась неверная волновая функция заряженного фермиона (можно сравнить, например, с [23]). Также следует отметить, что преимуществом данной техники является ее ковариантность. Это позволяет получать результаты в произвольной системе отсчета, что может быть важным для некоторых астрофизических задач.

Отличительной особенностью волновой функции заряженного фермиона в магнитном поле является то, что одна из поперечных компонент импульса будет неопределенной. В используемой калибровке $A^\mu = (0, 0, xB, 0)$ такой компонентой является p_1 . В матрице плотности зависимость от p_1 можно восстановить искусственно, если ввести дополнительное интегрирование по этой компоненте импульса в выражении для матрицы плотности фермиона $\sim \psi(\mathbf{x}) \overline{\psi}(\mathbf{x})$. Как впервые было показано в работе [29], такой подход позволяет не просто формально восстановить вакуумный закон сохранения четырехмерного импульса, который отсутствует в случае магнитного поля, но и воспользоваться при расчете квадрата S -матричного элемента стандартной техникой вычисления шпуров от произведений

γ -матриц Дирака. Таким образом, в предложенном подходе можно проводить расчеты элементарных процессов в магнитном поле способом, максимального схожим с вычислениями в вакууме.

Опуская подробности, которые могут быть найдены в работах [25, 26], приведем результат вычислений матрицы плотности $\psi(x)\bar{\psi}(x')$ для заряженного фермиона в магнитном поле, соответствующий сделанному ранее выбору оператора спина:

$$\psi_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(x)\bar{\psi}_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(x') = \frac{\exp\{i\rho\Phi(x,x')\}}{2\varepsilon_n L_y L_z} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-ip(x-x')\} F_{n,s}(p_1,p_2,p_3) \frac{dp_1}{\sqrt{eB}}. \quad (8)$$

Здесь $p^\mu = (\varepsilon_n, p_1, p_2, p_3)$ — 4-импульс частицы (компонента p_1 в данном случае не является физической) и $\Phi(x,x') = eB(x+x')(y-y')/2$. Отметим, что трансляционно-неинвариантная фаза $\rho\Phi(x,x')$ входит в полученное выражение со знаком заряда частицы ρ , поэтому сокращается в квадрате S -матричного элемента любого процесса вследствие закона сохранения заряда. Функция $F_{n,s}(p_1,p_2,p_3)$ с точностью до произвольного нормировочного множителя имеет смысл матрицы плотности фермиона, находящегося во внешнем магнитном поле, в импульсном представлении. В терминах введенных выше биспиноров (6) она может быть записана в следующем виде:

$$F_{n,s=\rho}(p_1,p_2,p_3) = (-1)^n \frac{\sqrt{eB}}{\pi} e^{-u/2} \times \left\{ L_n(u) [W_\rho \bar{W}_\rho] - L_{n-1}(u) [V_{-\rho} \bar{V}_{-\rho}] \right\} + (-1)^n \frac{\sqrt{2n}}{\pi} \frac{e^{-u/2}}{u} [L_n(u) - L_{n-1}(u)] \times \left\{ (\rho p_2 + ip_1) [W_\rho \bar{V}_{-\rho}] + (\rho p_2 - ip_1) [V_{-\rho} \bar{W}_\rho] \right\},$$

$$F_{n,s=-\rho}(p_1,p_2,p_3) = (-1)^n \frac{\sqrt{eB}}{\pi} e^{-u/2} \times \left\{ L_n(u) [V_\rho \bar{V}_\rho] - L_{n-1}(u) [W_{-\rho} \bar{W}_{-\rho}] \right\} + (-1)^n \frac{\sqrt{2n}}{\pi} \frac{e^{-u/2}}{u} [L_n(u) - L_{n-1}(u)] \times \left\{ (-\rho p_2 + ip_1) [W_{-\rho} \bar{V}_\rho] - (\rho p_2 + ip_1) [V_\rho \bar{W}_{-\rho}] \right\}, \quad (9)$$

где введен безразмерный поперечный импульс частицы $u = 2(p_1^2 + p_2^2)/eB$. Здесь и далее для обобщен-

ных полиномов Лагерра принята нормировка [30]

$$L_n^k(u) = \frac{u^{-k} e^u}{n!} \frac{d^n}{du^n} [u^{n+k} e^{-u}],$$

а также считается, что по определению $L_n(u) \equiv L_n^0(u)$ и $L_{-1}(u) \equiv 0$. Отметим, что для основного уровня ($n = 0$) отличной от нуля является лишь матрица плотности, соответствующая состоянию с $s = \rho$, так как в этом случае биспиноры $V_\pm = 0$ и $F_{n,s=-\rho}(p_1,p_2,p_3) = 0$.

Полученные выражения существенно упрощаются для матрицы плотности, просуммированной по поляризациям частицы. Используя соотношения, которые могут быть проверены непосредственным вычислением:

$$W_\rho \bar{W}_\rho + V_\rho \bar{V}_\rho = (1 + \hat{p}_\parallel) \Pi_\rho,$$

$$\sum_{\rho=\pm 1} (\rho p_2 + ip_1) [V_\rho \bar{W}_{-\rho} - W_\rho \bar{V}_{-\rho}] = \sqrt{2eBn} \hat{p}_\perp,$$

где

$$\Pi_\rho = \frac{1 + i\rho\gamma_1\gamma_2}{2},$$

$$\hat{p}_\parallel = \varepsilon_n \gamma_0 - p_3 \gamma_3, \quad \hat{p}_\perp = p_1 \gamma_1 + p_2 \gamma_2,$$

а также свойство обобщенных полиномов Лагерра [30]

$$n L_n^k(u) - (n+k) L_{n-1}^k(u) = -u L_{n-1}^{k+1}(u),$$

получаем выражение

$$\sum_{s=\pm 1} \psi_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(x)\bar{\psi}_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(x') = \frac{\exp\{i\rho\Phi(x,x')\}}{2\varepsilon_n L_y L_z} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-ip(x-x')\} \rho_n^{(+)}(p) \frac{dp_1}{2\pi}. \quad (10)$$

Здесь введена просуммированная по поляризациям матрица плотности в импульсном представлении:

$$\rho_n^{(+)}(p) = (-1)^n 2 e^{-u/2} \left\{ (\hat{p}_\parallel + m) \times \left[\Pi_\rho L_n(u) - \Pi_{-\rho} L_{n-1}(u) \right] + 2\hat{p}_\perp L_{n-1}^1(u) \right\}, \quad (11)$$

нормировка которой выбрана так, чтобы воспроизводилось выражение $\rho(p) = \hat{p} + m$ в бесполовом пределе. Отметим, что впервые аналогичное выражение было получено в работе [29]. Матрица плотности, соответствующая решению уравнения Дирака с отрицательной энергией, получается из (10) и (11) формальной заменой $p^\mu \rightarrow -p^\mu$, что дает

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=\pm 1} \psi_{n,p_2,p_3,s}^{(-)}(\mathbf{x}) \bar{\psi}_{n,p_2,p_3,s}^{(-)}(\mathbf{x}') = \\
& = \frac{\exp\{-i\rho\Phi(\mathbf{x},\mathbf{x}')\}}{2\varepsilon_n L_y L_z} \times \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ip(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\} \rho_n^{(-)}(p) \frac{dp_1}{2\pi}, \quad (12) \\
& \rho_n^{(-)}(p) = (-1)^n 2e^{-u/2} \left\{ (\hat{p}_{\parallel} - m) \times \right. \\
& \times \left[\Pi_{\rho} L_n(u) - \Pi_{-\rho} L_{n-1}(u) \right] + 2\hat{p}_{\perp} L_{n-1}^1(u) \left. \right\},
\end{aligned}$$

где учтено, что знак заряда ρ такой же, как и для положительно-частотного решения. Приведенные матрицы плотности в импульсном представлении легко могут быть записаны для случая нерелятивистских в системе покоя среды частиц:

$$\begin{aligned}
\rho_n^{(+)}(p) &= (-1)^n 2e^{-u/2} m(\hat{v}_{\parallel} + 1) \times \\
& \times \left[\Pi_{\rho} L_n(u) - \Pi_{-\rho} L_{n-1}(u) \right], \quad (13) \\
\rho_n^{(-)}(p) &= (-1)^n 2e^{-u/2} m(\hat{v}_{\parallel} - 1) \times \\
& \times \left[\Pi_{\rho} L_n(u) - \Pi_{-\rho} L_{n-1}(u) \right].
\end{aligned}$$

Здесь $v^{\mu} = (1, 0, 0, v)/\sqrt{1-v^2}$ — четырехмерная скорость движения среды вдоль вектора напряженности магнитного поля. Напомним, что в данной технике не рассматривается поперечное движение, так как оно приводит к возникновению в среде электрического поля, которое не учитывается в расчетах.

4. КВАДРАТ S -МАТРИЧНОГО ЭЛЕМЕНТА БЕТА-ПРОЦЕССА

Для определенности начнем изучение бета-процессов с неупругого рассеяния электрона на протоне и обратной к нему реакции (1). Квадраты S -матричных элементов для двух других процессов могут быть относительно легко получены, если воспользоваться кроссинг-симметрией рассматриваемых реакций.

В низкоэнергетическом пределе ($Q^2 \ll m_W^2$, где Q^2 — квадрат переданного в реакции 4-импульса и $m_W \approx 80$ ГэВ — масса W -бозона [31]), S -матричный элемент процесса (1) имеет вид

$$\begin{aligned}
S_{if} &= \frac{iG}{\sqrt{2}} \int \left[\bar{\psi}_{\mathbf{P}',s'}^{(n)}(\mathbf{x}) \tilde{O}_{\alpha} \psi_{k,P_2,P_3,s}^{(p)}(\mathbf{x}) \right] \times \\
& \times \left[\bar{\psi}_{\mathbf{q}}^{(\nu)}(\mathbf{x}) O_{\alpha} \psi_{\ell,p_2,p_3,\sigma}^{(e)}(\mathbf{x}) \right] d^4\mathbf{x}, \quad (14) \\
\tilde{O}_{\alpha} &= \gamma_{\alpha} (1 + g\gamma_5), \quad O_{\alpha} = \gamma_{\alpha} (1 + \gamma_5), \\
G &= G_F g_v \cos \theta_c, \quad g = g_a/g_v,
\end{aligned}$$

где G_F — константа Ферми, g_v и g_a — векторная и аксиальная константы нуклонного заряженного тока, θ_c — угол Кабиббо, $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ и интегрирование ведется по четырехмерному нормировочному объему $\Omega = \mathcal{T}V = \mathcal{T}L_x L_y L_z$, причем $L_x \rightarrow \infty$ там, где это не вызывает проблем. Здесь и далее $P'^{\mu} = (E', \mathbf{P}')$, $P^{\mu} = (E_k, \mathbf{P})$, $p^{\mu} = (\varepsilon_{\ell}, \mathbf{p})$ и $q^{\mu} = (\omega, \mathbf{q})$ — 4-импульсы соответственно нейтрона, протона, электрона и нейтрино (как обсуждалось ранее, компоненты импульсов протона P_1 и электрона p_1 не являются физическими), s', s, σ — поляризации нейтрона, протона и электрона. Вероятность перехода из начального состояния в конечное в единицу времени, просуммированная по поляризациям всех частиц, определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s,s',\sigma=\pm 1} \frac{|S_{if}|^2}{\mathcal{T}} = \frac{G^2 \pi^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \times \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} dP_1 \frac{\delta^{(4)}(P+p-P'-q)}{L_y^2 L_z^2 V E' E_k \varepsilon_{\ell} \omega} \times \\
& \times \text{Sp} \left[\rho^{(n)}(P') \tilde{O}_{\alpha} \rho_k^{(p)}(P) \tilde{O}_{\beta} \right] \times \\
& \times \text{Sp} \left[\rho^{(\nu)}(q) O_{\alpha} \rho_{\ell}^{(e)}(p) O_{\beta} \right], \quad (15)
\end{aligned}$$

где $\delta^{(4)}(P) = \delta(P_0) \delta(P_1) \delta(P_2) \delta(P_3)$ — произведение δ -функций Дирака. Нуклоны можно рассматривать как нерелятивистские частицы, поэтому для нейтронов $\rho^{(n)}(P') = m_n (1 + \hat{v}_{\parallel})$, где m_n — их масса, а матрица плотности протонов $\rho_k^{(p)}(P)$ дается выражением (13). Нейтрино будем считать безмассовой частицей левой спиральности с матрицей плотности $\rho^{(\nu)}(q) = \hat{q}(1 - \gamma_5)/2$. Тогда

$$\begin{aligned}
& \sum_{s,s',\sigma=\pm 1} \frac{|S_{if}|^2}{\mathcal{T}} = \frac{(-1)^{\ell+k} G^2 \pi^2 m_n m_p}{L_y^2 L_z^2 V E' E_k \varepsilon_{\ell} \omega} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \times \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} dP_1 \exp\left\{-\frac{U+u}{2}\right\} [N_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}] \delta^{(4)}(\mathcal{P}), \quad (16)
\end{aligned}$$

где

$$U = \frac{2(P_1^2 + P_2^2)}{eB}, \quad u = \frac{2(p_1^2 + p_2^2)}{eB}$$

и введен 4-импульс $\mathcal{P}^{\mu} = P^{\mu} + p^{\mu} - P'^{\mu} - q^{\mu}$. Подынтегральное выражение записано в виде свертки двух шпуров — нуклонного

$$\begin{aligned}
 N_{\alpha\beta} &= N_{\alpha\beta}^{(1)} + N_{\alpha\beta}^{(2)}, \\
 N_{\alpha\beta}^{(1)} &= \\
 &= \text{Sp} \left\{ \gamma_\alpha \left[\Pi_+ L_k(U) - \Pi_- L_{k-1}(U) \right] \gamma_\beta (1-g^2) \right\}, \quad (17) \\
 N_{\alpha\beta}^{(2)} &= \text{Sp} \left\{ \hat{v}_\parallel \gamma_\alpha \hat{v}_\parallel \left[\Pi_+ L_k(U) - \Pi_- L_{k-1}(U) \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \gamma_\beta (1+g^2+2g\gamma_5) \right\}
 \end{aligned}$$

и лептонного

$$\begin{aligned}
 L_{\alpha\beta} &= L_{\alpha\beta}^{(1)} + L_{\alpha\beta}^{(2)}, \\
 L_{\alpha\beta}^{(1)} &= \text{Sp} \left\{ \hat{q} \gamma_\alpha \hat{p}_\parallel \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[\Pi_- L_\ell(u) - \Pi_+ L_{\ell-1}(u) \right] \gamma_\beta (1+\gamma_5) \right\}, \\
 L_{\alpha\beta}^{(2)} &= \text{Sp} \left\{ \hat{q} \gamma_\alpha \hat{p}_\perp \gamma_\beta (1+\gamma_5) \right\} 2L_{\ell-1}^1(u),
 \end{aligned} \quad (18)$$

где были использованы антикоммутирующие свойства γ -матриц Дирака $\gamma_\alpha \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_\alpha$ и $\gamma_5^2 = 1$, а также то, что шпур от их нечетного числа равен нулю.

Вычисление для процессов с участием заряженных частиц в магнитном поле удобно проводить, используя следующие конструкции: безразмерный тензор электромагнитного поля $\varphi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}/B$ и дуально сопряженный к нему $\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma}/2$, а также две отличные от нуля их билинейные комбинации $\Lambda_{\mu\nu} = (\varphi\varphi)_{\mu\nu}$ и $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\mu\nu}$. Эти тензоры находятся полностью либо в продольном, $(a\tilde{\Lambda}b) = a_0b_0 - a_3b_3$ и $(a\tilde{\varphi}b) = a_0b_3 - a_3b_0$, либо в поперечном, $(a\Lambda b) = a_1b_1 + a_2b_2$ и $(a\varphi b) = a_2b_1 - a_1b_2$, подпространствах, поэтому все вычисляемые тензоры также могут быть представлены в виде суммы тензоров, реализованных в этих подпространствах. В этом смысле удобно начать с γ -матрицы, которую можно разбить на продольную и поперечную составляющие: $\gamma_{\parallel\mu} = \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} \gamma_\nu$ и $\gamma_{\perp\mu} = \Lambda_{\mu\nu} \gamma_\nu$, а так как $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, то во всех выражениях можно положить $\gamma_\mu = \gamma_{\parallel\mu} - \gamma_{\perp\mu}$. В частном случае свертки четырехмерного вектора a_μ с γ -матрицей получим: $\hat{a} = \hat{a}_\parallel - \hat{a}_\perp$, где $\hat{a}_\parallel = (a\tilde{\Lambda}\gamma)$ и $\hat{a}_\perp = (a\Lambda\gamma)$. Приведем основные соотношения, которые позволяют вычислять шпуры в продольном и поперечном подпространствах:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \gamma_{\parallel\rho} &= \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} \gamma_{\parallel\rho} + \tilde{\Lambda}_{\nu\rho} \gamma_{\parallel\mu} - \tilde{\Lambda}_{\mu\rho} \gamma_{\parallel\nu}, \\
 \gamma_{\perp\mu} \gamma_{\perp\nu} \Pi_s &= -(\Lambda_{\mu\nu} - s i \varphi_{\mu\nu}) \Pi_s, \\
 \text{Sp} \left[\gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\perp\nu} \right] &= \text{Sp} \left[\gamma_5 \Pi_s \right] = \text{Sp} \left[\gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\perp\nu} \Pi_s \right] = \\
 &= \text{Sp} \left[\gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\perp\nu} \gamma_5 \Pi_s \right] = 0, \\
 \text{Sp} \left[\Pi_s \right] &= 2, \quad \text{Sp} \left[\gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \Pi_s \right] = 2 \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}, \\
 \text{Sp} \left[\gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \gamma_5 \Pi_s \right] &= 2 s \tilde{\varphi}_{\mu\nu}.
 \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда следует, что отличны от нуля лишь шпуры с четным числом как продольных, так и поперечных γ -матриц. При вычислении нуклонного и лептонного шпуров будут полезны выражения, которые следуют из приведенных выше:

$$\begin{aligned}
 \text{Sp} \left[\gamma_{\parallel\delta_1} \gamma_{\parallel\delta_2} \gamma_{\parallel\delta_3} \gamma_{\parallel\delta_4} (a+b\gamma_5) (\Pi_s L_1 - \Pi_{-s} L_2) \right] &= \\
 &= 2a \left[\tilde{\Lambda}_{\delta_1\delta_2} \tilde{\Lambda}_{\delta_3\delta_4} + \tilde{\varphi}_{\delta_1\delta_2} \tilde{\varphi}_{\delta_3\delta_4} \right] L_- + \\
 &+ 2bs \left[\tilde{\Lambda}_{\delta_1\delta_2} \tilde{\varphi}_{\delta_3\delta_4} + \tilde{\varphi}_{\delta_1\delta_2} \tilde{\Lambda}_{\delta_3\delta_4} \right] L_+, \\
 \text{Sp} \left[\gamma_{\parallel\delta_1} \gamma_{\parallel\delta_2} \gamma_{\perp\delta_3} \gamma_{\perp\delta_4} (a+b\gamma_5) \times \right. \\
 &\quad \left. \times (\Pi_s L_1 - \Pi_{-s} L_2) \right] = \\
 &= -2a \tilde{\Lambda}_{\delta_1\delta_2} \left[\Lambda_{\delta_3\delta_4} L_- - i s \varphi_{\delta_3\delta_4} L_+ \right] - \\
 &- 2b \tilde{\varphi}_{\delta_1\delta_2} \left[s \Lambda_{\delta_3\delta_4} L_+ - i \varphi_{\delta_3\delta_4} L_- \right], \\
 \text{Sp} \left[\gamma_{\perp\delta_1} \gamma_{\perp\delta_2} \gamma_{\perp\delta_3} \gamma_{\perp\delta_4} (a+b\gamma_5) \times \right. \\
 &\quad \left. \times (\Pi_s L_1 - \Pi_{-s} L_2) \right] = \\
 &= 2a \left[\Lambda_{\delta_1\delta_2} \Lambda_{\delta_3\delta_4} - \varphi_{\delta_1\delta_2} \varphi_{\delta_3\delta_4} \right] L_- - \\
 &- 2i bs \left[\Lambda_{\delta_1\delta_2} \varphi_{\delta_3\delta_4} + \varphi_{\delta_1\delta_2} \Lambda_{\delta_3\delta_4} \right] L_+.
 \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $L_\pm = L_1 \pm L_2$, а также были использованы следующие свойства тензоров:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Lambda}_{\mu\sigma} \tilde{\Lambda}_{\nu\lambda} - \tilde{\Lambda}_{\mu\lambda} \tilde{\Lambda}_{\nu\sigma} &= \tilde{\varphi}_{\mu\nu} \tilde{\varphi}_{\lambda\sigma}, \\
 \tilde{\varphi}_{\mu\nu} \tilde{\Lambda}_{\lambda\sigma} + \tilde{\varphi}_{\lambda\mu} \tilde{\Lambda}_{\nu\sigma} + \tilde{\varphi}_{\nu\lambda} \tilde{\Lambda}_{\mu\sigma} &= 0.
 \end{aligned}$$

Как видно из структуры нуклонного шпура $N_{\alpha\beta}$ (17), индексы α и β могут одновременно принадлежать либо продольному, либо поперечному подпространству. Результат вычисления соответствующих конструкций может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}
N_{\alpha\beta}^{(\parallel)} &= 2(1-g^2)\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}L_-^{(N)}(U) + 2(1+g^2) \times \\
&\times \left[(v\tilde{\Lambda})_\alpha(v\tilde{\Lambda})_\beta + (v\tilde{\varphi})_\alpha(v\tilde{\varphi})_\beta \right] L_-^{(N)}(U) + \\
&+ 4g \left[(v\tilde{\Lambda})_\alpha(v\tilde{\varphi})_\beta + (v\tilde{\varphi})_\alpha(v\tilde{\Lambda})_\beta \right] L_+^{(N)}(U), \quad (21) \\
N_{\alpha\beta}^{(\perp)} &= 2 \left[(1+g^2)(v\tilde{\Lambda}v) - (1-g^2) \right] \times \\
&\times \left[\Lambda_{\alpha\beta}L_-^{(N)}(U) + i\varphi_{\alpha\beta}L_+^{(N)}(U) \right],
\end{aligned}$$

где $L_\pm^{(N)}(U) = L_k(U) \pm L_{k-1}(U)$ (далее для краткости будет опущен аргумент у функций $L_\pm^{(N)}(U)$) и были использованы следующие коммутационные свойства γ -матриц:

$$\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\perp\nu} = -\gamma_{\perp\nu}\gamma_{\parallel\mu}, \quad \gamma_{\parallel\mu}\Pi_s = \Pi_s\gamma_{\parallel\mu},$$

$$\gamma_{\perp\mu}\Pi_s = \Pi_{-s}\gamma_{\perp\mu}, \quad \gamma_5\Pi_s = \Pi_s\gamma_5.$$

При свертке полученного выражения с лептонным шпуром $L_{\alpha\beta}$ (18) нетривиальный вклад будут давать только его соответствующие продольные и поперечные составляющие, поэтому приведем выражения лишь для требуемых структур:

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta}^{(\parallel)} &= 2 \left[(q\tilde{\Lambda})_\alpha(p\tilde{\Lambda})_\beta + (q\tilde{\varphi})_\alpha(p\tilde{\varphi})_\beta \right] L_-^{(L)} - \\
&- 2 \left[(q\tilde{\Lambda})_\alpha(p\tilde{\varphi})_\beta + (q\tilde{\varphi})_\alpha(p\tilde{\Lambda})_\beta \right] L_+^{(L)} - \\
&- 8 \left[(q\Lambda p)\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} - i(q\varphi p)\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} \right] L^{(L)}, \quad (22) \\
L_{\alpha\beta}^{(\perp)} &= 2(q\tilde{\Lambda}p) \left[\Lambda_{\alpha\beta}L_-^{(L)} - i\varphi_{\alpha\beta}L_+^{(L)} \right] + \\
&+ 2(q\tilde{\varphi}p) \left[\Lambda_{\alpha\beta}L_+^{(L)} - i\varphi_{\alpha\beta}L_-^{(L)} \right] - \\
&- 8 \left[(q\Lambda)_\alpha(p\Lambda)_\beta - (q\varphi)_\alpha(p\varphi)_\beta \right] L^{(L)},
\end{aligned}$$

где $L_\pm^{(L)} = L_\ell(u) \pm L_{\ell-1}(u)$ и $L^{(L)} = L_{\ell-1}^1(u)$. Отметим, что в $L_{\alpha\beta}^{(2)}$ из (18) под шпуром отсутствует проекционный оператор Π_s , который, однако, может быть введен туда с помощью соотношения $\Pi_s + \Pi_{-s} = 1$. Свертка полученных выражений может быть легко проведена, если воспользоваться следующими свойствами введенных выше тензоров:

$$\begin{aligned}
(\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\mu\nu} &= \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}, \quad (\tilde{\Lambda}\tilde{\Lambda})_{\mu\nu} = \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}, \\
(\tilde{\Lambda}\tilde{\varphi})_{\mu\nu} &= (\tilde{\varphi}\tilde{\Lambda})_{\mu\nu} = \tilde{\varphi}_{\mu\nu}, \quad (\varphi\varphi)_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\nu}, \\
(\Lambda\Lambda)_{\mu\nu} &= -\Lambda_{\mu\nu}, \quad (\Lambda\varphi)_{\mu\nu} = (\varphi\Lambda)_{\mu\nu} = -\varphi_{\mu\nu}, \quad (23) \\
\Lambda_{\mu\nu}\Lambda_{\mu\nu} &= \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu} = 2, \\
g_{\mu\nu}\Lambda_{\mu\nu} &= \tilde{\varphi}_{\mu\nu}\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = -2.
\end{aligned}$$

Приведем результаты для свертки:

$$\begin{aligned}
N_{\alpha\beta}^{(\parallel)}L_{\alpha\beta}^{(\parallel)} &= 8 \left[2gL_+^{(N)}L_+^{(L)} + (1+g^2)L_-^{(N)}L_-^{(L)} \right] \times \\
&\times \left[(v\tilde{\Lambda}q)(v\tilde{\Lambda}p) + (v\tilde{\varphi}q)(v\tilde{\varphi}p) \right] + \\
&+ 8 \left[2gL_+^{(N)}L_-^{(L)} + (1+g^2)L_-^{(N)}L_+^{(L)} \right] \times \\
&\times \left[(v\tilde{\Lambda}q)(v\tilde{\varphi}p) + (v\tilde{\varphi}q)(v\tilde{\Lambda}p) \right] - \\
&- 32(1-g^2)L_-^{(N)}L^{(L)}(q\Lambda p), \quad (24) \\
N_{\alpha\beta}^{(\perp)}L_{\alpha\beta}^{(\perp)} &= 8 \left[(1+g^2)(v\tilde{\Lambda}v) - (1-g^2) \right] \times \\
&\times \left[\left(L_+^{(N)}L_+^{(L)} + L_-^{(N)}L_-^{(L)} \right) (q\tilde{\Lambda}p) + \right. \\
&\left. + \left(L_+^{(N)}L_-^{(L)} + L_-^{(N)}L_+^{(L)} \right) (q\tilde{\varphi}p) \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, квадрат S -матричного элемента процесса (1), просуммированный по поляризациям всех частиц, для случая нерелятивистских нуклонов можно записать в форме

$$\sum_{s,s',\sigma=\pm 1} \frac{|S_{if}|^2}{\mathcal{T}} = (-1)^{k+\ell} \frac{8\pi^2 G^2}{L_y^2 L_z^2 V \varepsilon_\ell \omega} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \times \\
\times \int_{-\infty}^{\infty} dP_1 \exp \left\{ -\frac{U+u}{2} \right\} \Phi_{k,\ell}(U, u) \delta^{(4)}(\mathcal{P}), \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{k,\ell}(U, u) &= \frac{1}{8} [N_{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}] = \\
&= \frac{1}{8} \left(N_{\alpha\beta}^{(\parallel)}L_{\alpha\beta}^{(\parallel)} + N_{\alpha\beta}^{(\perp)}L_{\alpha\beta}^{(\perp)} \right).
\end{aligned}$$

Здесь k и ℓ — индексы, нумерующие уровни Ландау соответственно протонов и электронов. Квадраты S -матричных элементов для остальных бета-процессов (2) и (3) могут быть получены из (25), если воспользоваться кроссинг-симметрией рассматриваемых реакций, что в данном случае сводится лишь к замене аргумента функции $\delta^{(4)}(\mathcal{P})$. Таким образом, полученное выражение является универсальным для всех бета-процессов, если под \mathcal{P} понимать комбинацию 4-импульсов, сохраняющуюся в данной реакции. Кроме того, так как функция $\Phi_{k,\ell}(U, u)$ представлена в инвариантном виде, то полученная вероятность бета-процессов справедлива в произвольной системе отсчета и может быть использована для решения задач, в которых среда движется как целое с релятивистской скоростью. Напомним однако, что рассматриваемая техника предполагает движение среды лишь вдоль линий напряженности магнитного поля.

Отдельно приведем выражение для квадратов S -матричных элементов бета-процессов в системе покоя среды ($v = 0$). В этом случае подынтегральная функция в выражении (25) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{k,\ell}(U, u) &= (\omega\varepsilon_\ell + q_3 p_3) \times \\ &\times \left[2g L_+^{(N)}(U) L_+^{(L)}(u) + (1 + g^2) L_-^{(N)}(U) L_-^{(L)}(u) \right] + \\ &+ (\omega p_3 + \varepsilon_\ell q_3) \left[2g L_+^{(N)}(U) L_-^{(L)}(u) + \right. \\ &\quad \left. + (1 + g^2) L_-^{(N)}(U) L_+^{(L)}(u) \right] + \\ &+ 2g^2 (\omega\varepsilon_\ell - q_3 p_3) \left[L_+^{(N)}(U) L_+^{(L)}(u) + L_-^{(N)}(U) L_-^{(L)}(u) \right] + \\ &+ 2g^2 (\omega p_3 - \varepsilon_\ell q_3) \left[L_+^{(N)}(U) L_-^{(L)}(u) + L_-^{(N)}(U) L_+^{(L)}(u) \right] - \\ &- 4 (1 - g^2) (q_1 p_1 + q_2 p_2) L_-^{(N)}(U) L^{(L)}(u), \quad (26) \end{aligned}$$

где $U = 2(P_1^2 + P_2^2)/eB$ и $u = 2(p_1^2 + p_2^2)/eB$ — квадраты безразмерных поперечных импульсов протона и электрона. Кроме того, в функциях L_\pm для наглядности восстановлен аргумент. Отметим, что, ввиду специфики изложенной выше техники вычисления процессов в магнитном поле, полученный результат содержит дополнительные интегрирования по физически неопределенным в магнитном поле составляющим импульса заряженных частиц P_1 и p_1 . Таким образом, полученное для квадратов S -матричных элементов бета-процессов выражение затруднительно сравнивать напрямую с имеющимися в литературе. Однако такое сравнение может быть проведено после его интегрирования по поперечным импульсам заряженных частиц, результаты которого приводятся ниже в (38). Как показал сравнительный анализ, выражение (25) в системе отсчета, где среда покоится как целое, совпадает с результатами, полученными в более ранних работах [15, 17].

5. СКОРОСТИ БЕТА-ПРОЦЕССОВ И ПЕРЕДАВАЕМЫЕ СРЕДЕ ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС

Дальнейшее использование полученного выше квадрата S -матричного элемента определяется конкретной астрофизической задачей, а результирующие выражения уже будут зависеть от того, какой именно бета-процесс рассматривается. Далее будут вычисляться наиболее интересные с точки зрения различных астрофизических приложений макроскопические величины, такие как скорость реакции (число процессов, протекающих в единичном объеме в единицу времени)

$$\Gamma = \frac{1}{V} \int \sum_{i, f} \frac{|S_{if}|^2}{\mathcal{T}} \prod_{i, f} F_i (1 - F_f) dn_i dn_f, \quad (27)$$

а также энергия и импульс, передаваемые от (анти)нейтрино единичному объему среды в единицу времени:

$$\begin{aligned} Q^\mu = (Q, \mathcal{F}) &= \pm \frac{1}{V} \int \sum_{i, f} q^\mu \frac{|S_{if}|^2}{\mathcal{T}} \times \\ &\times \prod_{i, f} F_i (1 - F_f) dn_i dn_f, \quad (28) \end{aligned}$$

где $q^\mu = (\omega, \mathbf{q})$ — 4-импульс (анти)нейтрино и учтено, что реакции поглощения (анти)нейтрино дают в Q^μ положительный вклад, а реакции излучения — отрицательный. Индексы « i » и « f » относятся к начальным и конечным частицам, суммирование (интегрирование) ведется по фазовым объемам dn всех частиц с учетом их функций распределения F , причем все частицы предполагаются фермионами.

В большинстве астрофизических объектов, где бета-процессы играют важную роль, участвующие в них частицы кроме, возможно, (анти)нейтрино находятся в состоянии локального термодинамического равновесия и могут быть описаны функцией распределения Ферми – Дирака:

$$F = \left(\exp \frac{E - \mu}{T} + 1 \right)^{-1}, \quad (29)$$

где E — энергия частицы, μ — ее локальный химический потенциал и T — локальная температура вещества. Отметим, что данное выражение приведено в системе отсчета, где среда покоится как целое (в общем случае $E \rightarrow (vp)$, где v — 4-скорость среды, p — 4-импульс частицы). В отличие от частиц среды, (анти)нейтрино могут быть сильно неравновесными, а их функция распределения определяется множеством факторов, таких как геометрия излучающей области и особенности их распространения в среде. Таким образом, представляется целесообразным проводить суммирование и интегрирование по фазовому пространству (анти)нейтрино отдельно от остальных частиц. Это удобно делать через вспомогательную величину, полученную интегрированием $|S_{if}|^2/\mathcal{T}$ по импульсам и суммированием по уровням Ландау всех частиц среды. Очевидно, что она будет зависеть не только от рассматриваемого бета-процесса, но и различаться для прямой и обратной реакций, для которых $|S_{if}|^2$ совпадают, но статистические факторы частиц различны. Так, в случае (анти)нейтрино, находящегося в конечном состоянии, данная величина будет иметь смысл коэффициента излучения (анти)нейтрино средой в данной реакции:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(em)}(q) \equiv \mathcal{K}(q) &= \sum_{i, f \neq \nu} \int \frac{|S_{if}|^2}{\mathcal{T}} \times \\ &\times \prod_{i, f \neq \nu} F_i (1 - F_f) dn_i dn_f. \quad (30) \end{aligned}$$

Здесь суммирование (интегрирование) ведется по фазовым объемам всех участвующих в процессе частиц, кроме конечного (анти)нейтрино. Аналогичную величину можно ввести и для обратного процесса, в котором (анти)нейтрино находится в начальном состоянии, при этом она будет иметь смысл коэффициента поглощения (анти)нейтрино средой в данной реакции $\mathcal{K}^{(abs)}(q)$. Удобство использования данных коэффициентов состоит в том, что они не зависят от условий конкретной астрофизической задачи и не связаны с особенностями распространения (анти)нейтрино в среде. Однако они непосредственно характеризуют локальную способность самой среды поглощать и излучать (анти)нейтрино. Таким образом, результаты вычисления данных коэффициентов могут быть использованы для любых астрофизических объектов с разной геометрией излучающей области и особенностями распространения (анти)нейтрино в среде.

Как нетрудно показать, в случае равновесной функции распределения для фермионов выполняется следующее соотношение:

$$1 - F = \exp \left\{ \frac{E - \mu}{T} \right\} F.$$

Таким образом, для определенного процесса коэффициенты поглощения и излучения (анти)нейтрино в локально равновесной среде не являются независимыми и для вычислений может быть использован любой из них. Для рассматриваемых бета-процессов данную зависимость можно представить в виде

$$\mathcal{K}^{(abs)}(q) = \exp \left\{ \frac{\omega \mp \delta\mu}{T} \right\} \mathcal{K}(q), \quad (31)$$

где знак минус в экспоненте соответствует процессам с участием нейтрино, а плюс — с антинейтрино, $\delta\mu = \mu_e + \mu_p - \mu_n$ и μ_e, μ_p, μ_n — локальные химические потенциалы электрона, протона и нейтрона в рассматриваемой среде. Кроме того, для вывода данного соотношения был использован закон сохранения энергии частиц в бета-процессах. Для определенности в дальнейших вычислениях будет использоваться коэффициент излучения (анти)нейтрино (30), так как он, в частности, более удобен для описания сред, из которых (анти)нейтрино излучаются свободно.

Если функция распределения (анти)нейтрино $F_\nu(q)$ известна, то по коэффициенту излучения достаточно легко могут быть получены введенные выше скорости реакций и переданный среде 4-импульс как для процессов излучения:

$$\begin{aligned} \Gamma_{em} &= \int [1 - F_\nu(q)] \mathcal{K}(q) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}, \\ Q_{em}^\mu &= - \int q^\mu [1 - F_\nu(q)] \mathcal{K}(q) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (32)$$

так и поглощения (анти)нейтрино:

$$\begin{aligned} \Gamma_{abs} &= \int \exp \left\{ \frac{\omega \mp \delta\mu}{T} \right\} F_\nu(q) \mathcal{K}(q) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}, \\ Q_{abs}^\mu &= \int q^\mu \exp \left\{ \frac{\omega \mp \delta\mu}{T} \right\} F_\nu(q) \mathcal{K}(q) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь, как и выше, знак минус в экспоненте соответствует процессам с участием нейтрино, а плюс — с антинейтрино, и было использовано стандартное выражение для фазового объема (анти)нейтрино $dn_\nu = V d^3q / (2\pi)^3$. Отметим, что в случае локального термодинамического равновесия (анти)нейтрино со средой скорости процессов и передаваемые среде энергия и импульс в точности компенсируются в процессах излучения и поглощения (анти)нейтрино, как следствие того, что в равновесии $\mu_{\nu, \bar{\nu}} = \pm \delta\mu$, и приведенного выше соотношения для равновесных функций распределения фермионов.

6. КОЭФФИЦИЕНТ ИЗЛУЧЕНИЯ БЕТА-ПРОЦЕССОВ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ УМЕРЕННО ВЫРОЖДЕННОЙ СРЕДЕ

При вычислении коэффициента излучения $\mathcal{K}(q)$ в бета-процессах (1)–(3) будем использовать обозначения для 4-импульсов частиц, введенные при получении квадрата S -матричного элемента (25). Как отмечалось выше, информация о конкретном процессе в данном выражении содержится только в аргументе δ -функции:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu^{(1)} &= P_\mu + p_\mu - P'_\mu - q_\mu, & \mathcal{P}_\mu^{(2)} &= P'_\mu + p_\mu - P_\mu - q_\mu, \\ \mathcal{P}_\mu^{(3)} &= P'_\mu - P_\mu - p_\mu - q_\mu. \end{aligned}$$

Здесь верхний индекс у сохраняющегося импульса $\mathcal{P}^{(j)}$ указывает на процесс, задаваемый уравнениями (1)–(3). Фазовые объемы электронов, протонов и нейтронов, находящихся во внешнем магнитном поле, имеют вид

$$\begin{aligned} dn_e &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{L_y L_z}{(2\pi)^2} dp_2 dp_3, & dn_p &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_y L_z}{(2\pi)^2} dP_2 dP_3, \\ dn_n &= \frac{V}{(2\pi)^3} d^3P'. \end{aligned}$$

Здесь отсутствует суммирование по спиновым состояниям частиц, поскольку процедура суммирования

по поляризациям была выполнена при вычислении квадрата S -матричного элемента (25). Таким образом, коэффициент излучения для бета-процессов можно записать как

$$\mathcal{K}^{(j)}(q) = \frac{G^2}{16\pi^5} \int \sum_{k,\ell=0}^{\infty} (-1)^{k+\ell} \frac{\varphi^{(j)}}{\omega \varepsilon_\ell} \Phi_{k,\ell}(U, u) \times \exp\left\{-\frac{U+u}{2}\right\} \delta^{(4)}(\mathcal{P}^{(j)}) d^3p d^3P d^3P', \quad (34)$$

где безразмерные импульсы u и U определены после уравнения (16) и для каждой реакции из набора (1)–(3) введена следующая комбинация, построенная из функций распределения нейтронов F_n , протонов F_p , электронов F_{e^-} и позитронов F_{e^+} :

$$\varphi^{(1)} = F_p F_{e^-} (1 - F_n), \quad \varphi^{(2)} = F_n F_{e^+} (1 - F_p), \quad (35)$$

$$\varphi^{(3)} = F_n (1 - F_{e^-}) (1 - F_p).$$

Дальнейшее вычисление коэффициента излучения бета-процессов требует конкретизации вида функции распределения частиц среды. Будем считать их равновесными, что обычно хорошо выполняется в астрофизических объектах, где данные процессы важны. Равновесные функции распределения зависят лишь от энергии, поэтому $\varphi^{(j)}$ не зависит от поперечных компонент импульсов заряженных частиц:

$$E_k = \sqrt{p_3^2 + m_p^2 + 2eBk}, \quad \varepsilon_\ell = \sqrt{p_3^2 + m_e^2 + 2eB\ell},$$

где m_p и m_e — массы протона и электрона соответственно, и при интегрировании по этим компонентам можно воспользоваться соотношениями

$$\int L_k(x^2) L_\ell(y^2) \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\} \times \delta^{(2)}(x+y-z) d^2x d^2y = \pi \exp\left\{-\frac{z^2}{4}\right\} L_k^{\ell-k}(z^2/4) L_\ell^{k-\ell}(z^2/4) = (-1)^{k-\ell} \pi J_{k,\ell}^2(z^2/4), \quad (36)$$

$$2 \int y L_k(x^2) L_{\ell-1}^1(y^2) \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\} \times \delta^{(2)}(x+y-z) d^2x d^2y = \pi z \exp\left\{-\frac{z^2}{4}\right\} L_{\ell-1}^{k-\ell+1}(z^2/4) L_k^{\ell-k}(z^2/4) = (-1)^{k-\ell+1} 2\pi z \sqrt{\ell/z^2} J_{k,\ell}(z^2/4) J_{k,\ell-1}(z^2/4).$$

Здесь x , y и z — двумерные векторы в поперечном пространстве, интегрирование ведется по всем возможным значениям компонент x и y , а также для удобства введена функция

$$J_{k,\ell}(t) = (-1)^{k-\ell} J_{\ell,k}(t) = \sqrt{k!/ \ell!} t^{(\ell-k)/2} e^{-t/2} L_k^{\ell-k}(t). \quad (37)$$

Интегрирование по поперечным импульсам заряженных частиц приводит к следующему выражению для коэффициентов излучения в бета-процессах:

$$\mathcal{K}^{(j)}(q) = \frac{G^2 e B}{32\pi^4} \int \sum_{k,\ell=0}^{\infty} \frac{I_{k,\ell}(q, p_3, P'_\perp)}{\omega \varepsilon_\ell} \times \varphi^{(j)} \delta(\mathcal{P}_0^{(j)}) \delta(\mathcal{P}_3^{(j)}) dp_3 dP_3 d^3P',$$

$$I_{k,\ell}(q, p_3, P'_\perp) = 2g(\omega + q_3)(\varepsilon_\ell + p_3) \times [J_{k,\ell}^2(v_j) - J_{k-1,\ell}^2(v_j)] - 2g(\omega - q_3) \times (\varepsilon_\ell - p_3) [J_{k,\ell-1}^2(v_j) - J_{k-1,\ell-1}^2(v_j)] + (1+g^2)(\omega + q_3)(\varepsilon_\ell + p_3) [J_{k,\ell}^2(v_j) + J_{k-1,\ell}^2(v_j)] + (1+g^2)(\omega - q_3)(\varepsilon_\ell - p_3) [J_{k,\ell-1}^2(v_j) + J_{k-1,\ell-1}^2(v_j)] + 4g^2(\omega - q_3)(\varepsilon_\ell + p_3) J_{k,\ell}^2(v_j) + 4g^2(\omega + q_3)(\varepsilon_\ell - p_3) J_{k-1,\ell-1}^2(v_j) + 2(1-g^2) \sqrt{\ell/v_j} (q_1 \mathcal{P}_1^{(Nj)} + q_2 \mathcal{P}_2^{(Nj)}) \times [J_{k,\ell}(v_j) J_{k,\ell-1}(v_j) + J_{k-1,\ell}(v_j) J_{k-1,\ell-1}(v_j)], \quad (38)$$

где $\mathcal{P}_\perp^{(N1)} = P'_\perp + q_\perp$, $\mathcal{P}_\perp^{(N2)} = q_\perp - P'_\perp$, $\mathcal{P}_\perp^{(N3)} = P'_\perp - q_\perp$ — комбинации поперечных импульсов электрически нейтральных частиц, соответствующие реакциям (1)–(3), а $v_j = (\mathcal{P}_\perp^{(Nj)})^2 / (2eB)$ — их безразмерный квадрат.

Полученные для коэффициентов излучения выражения упрощаются, если среда является равновесной, а нуклоны — нерелятивистскими. Действительно, в этом случае их характерный импульс будет $P_N \sim \sqrt{m_N T}$, где $m_N \approx 940$ МэВ — масса нуклона [31], что много больше характерного импульса релятивистских лептонов $p_L \sim T$, μ_L (если считать, что средняя энергия (анти)нейтрино $\bar{\omega}_{\nu,\bar{\nu}}$ не сильно превосходит тепловую). Очевидно, что для нерелятивистского лептона его импульс всегда много меньше импульса нуклона, вследствие малости масс первого, поэтому соотношение $P_N \gg p_L$ будет выполняться при условиях:

$$\mu_e^2, \bar{\omega}_{\nu,\bar{\nu}}^2 \ll m_N T \ll m_N^2. \quad (39)$$

Здесь, как обсуждалось выше, для заряженных частиц речь идет лишь о продольных составляющих импульса. Предположение о том, что нуклоны являются нерелятивистскими, может нарушаться в двух случаях. Для невырожденных нуклонов это возможно при высоких температурах $T \gtrsim m_N$, что, однако, противоречит условиям (39). В вырожденном

же случае нуклоны становятся релятивистскими лишь при очень высоких плотностях $\rho \gtrsim 10^{15}$ г/см³, которые в данной работе не рассматриваются.

В используемом приближении, когда $P_N \gg p_L$, δ -функция, аргумент которой содержит продольные импульсы, упрощается. А именно, $\delta(\mathcal{P}_3^{(j)}) \approx \delta(P_3 - P'_3)$, что означает пренебрежение импульсом отдачи тяжелого нуклона вдоль направления магнитного поля. В данном приближении интегрирование по продольному импульсу протона становится тривиальным. Кроме того, поскольку частицы среды считаются находящимися в локальном термодинамическом равновесии, их функции распределения зависят лишь от энергии, т. е. квадратичны по компонентам импульсов частиц. Таким образом, слагаемые в $I_{k,\ell}(q, p_3, P'_\perp)$, которые линейны по p_3, P'_1 и P'_2 , не будут давать вклад в коэффициент излучения в смысле дальнейшего интегрирования и могут быть отброшены. Еще одним упрощением в рассматриваемом приближении является то, что введенные выше безразмерные комбинации поперечных импульсов незаряженных частиц становятся одинаковыми для всех процессов: $v_j \approx v = P'^2_\perp / (2eB)$. Таким образом, при выполнении условий (39) коэффициенты излучения (анти)нейтрино могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(j)}(q) &= \frac{G^2 eB}{32\pi^4 \omega} \times \\ &\times \int \sum_{k,\ell=0}^{\infty} \tilde{I}_{k,\ell}(q, v) \varphi^{(j)} \delta(\mathcal{P}_0^{(j)}) dp_3 d^3P', \\ \tilde{I}_{k,\ell}(q, v) &= (\omega + q_3) [(1 + g)^2 J_{k,\ell}^2(v) + \\ &+ (1 - g)^2 J_{k-1,\ell}^2(v) + 4g^2 J_{k-1,\ell-1}^2(v)] + \\ &+ (\omega - q_3) [4g^2 J_{k,\ell}^2(v) + (1 - g)^2 J_{k,\ell-1}^2(v) + \\ &+ (1 + g)^2 J_{k-1,\ell-1}^2(v)] \pm 2(1 - g^2) \frac{q^2_\perp}{\varepsilon_\ell} \sqrt{\frac{\ell}{v}} \times \\ &\times [J_{k,\ell}(v) J_{k,\ell-1}(v) + J_{k-1,\ell}(v) J_{k-1,\ell-1}(v)]. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь в последнем слагаемом знак минус соответствует реакции (3), а знак плюс — остальным двум процессам.

Дальнейшее упрощение коэффициентов излучения связано с тем, что в рассматриваемой среде существенно более массивные протоны в среднем занимают значительно больше уровней Ландау \bar{k} , чем заряженные лептоны $\bar{\ell}$. Это следует из того, что для нерелятивистских протонов $eB\bar{k} \sim m_p T$, тогда как для релятивистских заряженных лептонов $eB\bar{\ell} \sim \mu_e^2, T^2$. Отсюда при выполнении условий (39) действительно следует неравенство $\bar{k} \gg \bar{\ell}$. Однако, так как \bar{k} и $\bar{\ell}$ — целые числа, то в сильных магнитных

полях, когда $k \sim m_p T / (eB) \sim 1$, данное неравенство нарушается. Поэтому далее наложим дополнительное условие:

$$eB \ll m_p T, \quad (41)$$

которое совместно с (39) гарантирует выполнение неравенства $\bar{k} \gg \bar{\ell}$. В работе [32] показано, что в этом случае при интегрировании функции $J_{k,\ell}^2(v)$, умноженной на функцию, слабо меняющуюся в области $|v - k| \lesssim \sqrt{k(\ell + 1)}$, можно воспользоваться приближением

$$J_{k,\ell}^2(v) \approx \delta(v - k). \quad (42)$$

Зависимость от переменной $v = P'^2_\perp / (2eB)$ кроме $J_{k,\ell}^2(v)$ содержится только в функции распределения нейтрона в виде множителя $\exp w$, где $w = P'^2_\perp / (2m_N T)$. Эта функция должна меняться слабо на отрезке $v \in [k - \sqrt{k\ell}, k + \sqrt{k\ell}]$ (здесь $l = \ell + 1$), который для переменной w преобразуется как $w \in [1 - \sqrt{l/k}, 1 + \sqrt{l/k}]$. В рассматриваемом приближении $\ell \ll k$ и $k \gg 1$, поэтому $\sqrt{l/k} \ll 1$. Таким образом, в требуемой области значений переменных функция распределения нейтронов действительно слабо меняется и можно воспользоваться соотношением (42). Предполагая дальнейшее интегрирование, имеем следующее приближение: $v = P'^2_\perp / (2eB) \approx k$. Отметим, что данное условие по сути означает пренебрежение импульсом отдачи тяжелого нуклона в поперечном к магнитному полю направлении. Отсюда, во-первых, следует, что последнее слагаемое в $\tilde{I}_{k,\ell}(q, v)$ подавлено множителем $\sqrt{\ell/k} \ll 1$ и может быть отброшено. Во-вторых, может быть упрощена оставшаяся δ -функция, зависящая от энергии, так как

$$\begin{aligned} E' - E_k &= m_n + \frac{P'^2_\perp}{2m_n} + \frac{P'^2_3}{2m_n} - m_p - \\ &- \frac{P^2_3}{2m_p} - \frac{eBk}{m_p} \approx m_n - m_p \equiv \Delta, \end{aligned}$$

где было учтено, что после интегрирования $P_3 = P'_3$. Как следствие, в рассматриваемом приближении бета-процессы идут с сохранением энергии тяжелых нуклонов с точностью до разности их масс. Как нетрудно заметить, при этом аргумент δ -функции, зависящей от энергий частиц, перестает зависеть от индекса k , нумерующего уровни Ландау протона:

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{P}_0^{(1)}) &= \delta(\varepsilon_\ell - \omega - \Delta), \\ \delta(\mathcal{P}_0^{(2)}) &= \delta(\varepsilon_\ell - \omega + \Delta), \\ \delta(\mathcal{P}_0^{(3)}) &= \delta(\varepsilon_\ell + \omega - \Delta). \end{aligned} \quad (43)$$

Единственная зависимость от этого индекса, за исключением функций $J_{k,\ell}(v)$, остается в $\varphi^{(j)}$, однако и она может быть исключена, если предположить, что протоны являются невырожденными:

$$\mu_p - m_p \lesssim T. \tag{44}$$

В этом случае $1 - F_p \approx 1$ и функции $\varphi^{(j)}$ для равновесной среды могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &\approx \exp\left\{\frac{\delta\mu - \omega}{T}\right\} F_n (1 - F_{e-}), \\ \varphi^{(2)} &\approx F_n F_{e+}, \\ \varphi^{(3)} &\approx F_n (1 - F_{e-}). \end{aligned} \tag{45}$$

В этом приближении коэффициенты излучения $\mathcal{K}^{(j)}(q)$ удастся просуммировать по уровням Ландау протона, для чего достаточно воспользоваться соотношением [32]

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_{k,\ell}^2(v) = 1.$$

Таким образом, после суммирования по уровням Ландау протона для коэффициентов излучения получаем простые выражения:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(j)}(q) &= \frac{G^2 e B}{(2\pi)^4} \int \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[(2 - \delta_{\ell 0}) (1 + 3g^2) + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\ell 0} (1 - g^2) \frac{q_3}{\omega} \right] \varphi^{(j)} \delta(\mathcal{P}_0^{(j)}) dp_3 d^3 P', \end{aligned} \tag{46}$$

где $\delta_{\ell k}$ — символ Кронекера. Поскольку δ -функции (43) не зависят от импульса нейтрона, результат соответствующего интегрирования удобно записать через концентрацию нейтронов:

$$N_n = \frac{2}{(2\pi)^3} \int F_n d^3 P'.$$

Оставшееся интегрирование по продольному импульсу заряженного лептона тривиально и с учетом закона его дисперсии в магнитном поле $\varepsilon_\ell = \sqrt{m_e^2 + p_3^2 + 2eB\ell}$, приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(j)}(q) &= \frac{G^2}{2\pi} e B N_n \varepsilon_j f_j(\varepsilon_j) \times \\ &\quad \times \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\theta\left(\varepsilon_j - \sqrt{m_e^2 + 2eB\ell}\right)}{\sqrt{\varepsilon_j^2 - m_e^2 - 2eB\ell}} \times \\ &\quad \times \left[(2 - \delta_{\ell 0}) (1 + 3g^2) + \delta_{\ell 0} (1 - g^2) \frac{q_3}{\omega} \right], \end{aligned} \tag{47}$$

где были введены три новые функции:

$$\begin{aligned} f_1(\varepsilon_1) &= \exp\left\{\frac{\delta\mu - \omega}{T}\right\} [1 - F_{e-}(\varepsilon_1)], \quad \varepsilon_1 = \omega + \Delta, \\ f_2(\varepsilon_2) &= F_{e+}(\varepsilon_2), \quad \varepsilon_2 = \omega - \Delta, \\ f_3(\varepsilon_3) &= 1 - F_{e-}(\varepsilon_3), \quad \varepsilon_3 = \Delta - \omega. \end{aligned} \tag{48}$$

Как видно из (47), вклад в коэффициент излучения от основного уровня Ландау заряженного лептона содержит асимметричную часть, пропорциональную q_3/ω . Таким образом, рассматриваемая среда сильнее взаимодействует с (анти)нейтрино, импульс которых направлен против вектора напряженности магнитного поля ($1 - g^2 < 0$). Однако этот эффект становится важным лишь в сильных магнитных полях, так как вклад в данную асимметрию дают только заряженные лептоны, находящиеся на основном уровне Ландау.

Полученное для коэффициента излучения выражение (47) можно просуммировать по ℓ , если воспользоваться соотношением

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\theta(a - \ell)}{\sqrt{a - \ell}} &= \sum_{\ell=1}^n \frac{\theta(a - 1)}{\sqrt{n + \delta - \ell}} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\theta(a - 1)}{\sqrt{p + \delta}} = \\ &= \left[\zeta(1/2, \delta) - \zeta(1/2, a) \right] \theta(a - 1), \end{aligned} \tag{49}$$

где

$$\zeta(z, v) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + v)^{-z}$$

— обобщенная ζ -функция [33] и в параметре $a = n + \delta$ оказалось удобным выделить целую $n = [a]$ и дробную $\delta = \{a\}$ части. Полученное выше выражение для коэффициента излучения (47) может быть приведено к такому виду заменой $a_j = (\varepsilon_j^2 - m_e^2)/(2eB)$, а сам коэффициент после суммирования записан как

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(j)}(q) &= \mathcal{K}_B^{(j)}(q) + \mathcal{K}_0^{(j)}(q) + \mathcal{K}_{inf}^{(j)}(q), \\ \mathcal{K}_B^{(j)}(q) &= \frac{G^2 e B N_n}{2\pi} \left[(1 + 3g^2) + (1 - g^2) \frac{q_3}{\omega} \right] \times \\ &\quad \times \frac{\varepsilon_j f_j(\varepsilon_j)}{\sqrt{\varepsilon_j^2 - m_e^2}} \theta(\varepsilon_j - m_e), \\ \mathcal{K}_0^{(j)}(q) &= -\frac{G^2 e B N_n}{\pi} (1 + 3g^2) \zeta(1/2, a_j) \times \\ &\quad \times \frac{\varepsilon_j f_j(\varepsilon_j)}{\sqrt{2eB}} \theta\left(\varepsilon_j - \sqrt{m_e^2 + 2eB}\right), \\ \mathcal{K}_{inf}^{(j)}(q) &= \frac{G^2 e B N_n}{\pi} (1 + 3g^2) \zeta(1/2, \delta_j) \times \\ &\quad \times \frac{\varepsilon_j f_j(\varepsilon_j)}{\sqrt{2eB}} \theta\left(\varepsilon_j - \sqrt{m_e^2 + 2eB}\right), \end{aligned} \tag{50}$$

где δ_j — дробная часть числа $a_j = (\epsilon_j^2 - m_e^2)/(2eB)$. В полученном выражении выделен вклад от основного уровня Ландау заряженного лептона $\mathcal{K}_B^{(j)}(q)$ и вклад от остальных уровней: $\mathcal{K}_0^{(j)}(q) + \mathcal{K}_{inf}^{(j)}(q)$. Слагаемое $\mathcal{K}_{inf}^{(j)}(q)$ имеет корневые особенности, связанные с поведением функции $\zeta(1/2, \delta)$. Действительно, на интервале значений $\delta \in [0, 1)$ ζ -функция может быть приближена выражением

$$\zeta(1/2, \delta) \approx \frac{1}{\sqrt{\delta}} + \zeta(1/2) - \delta,$$

т. е. обладает корневой особенностью в пределе $\delta \rightarrow 0$. Таким образом, коэффициент излучения содержит слагаемое $\mathcal{K}_{inf}^{(j)}(q)$, которое обращается в бесконечность при энергиях (анти)нейтрино, соответствующих всем целым значениям параметра a_j или $\epsilon_j \ell = \sqrt{2eB\ell + m_e^2}$, где $\ell = 1, 2, 3, \dots$. Тем не менее, существование таких особенностей в коэффициенте излучения не связано с какими-либо физическими свойствами самой среды на данных частотах, а является следствием использованного приближения, в котором пренебрегалось импульсом отдачи тяжелого нуклона. Отметим, что аналогичные результаты были получены ранее для сечений бета-процессов [17, 34, 35], которые также содержат бесконечный набор корневых особенностей при тех же энергиях (анти)нейтрино, что и полученные выше коэффициенты излучения (50). Существование подобного рода бесконечностей не должно вызывать недоразумений, так как скорости процессов и переданные среде энергия и импульс получают интегрированием коэффициента излучения по импульсу (анти)нейтрино с учетом ее функции распределения (см. (32), (33)). Таким образом, физически измеряемые величины остаются конечными, даже если сам коэффициент излучения содержит целый ряд интегрируемых особенностей. Более того, как будет показано ниже, интегральный вклад в данные величины от этого слагаемого мал и, следовательно, им можно пренебречь:

$$\mathcal{K}_{inf}^{(j)}(q) \approx 0. \quad (51)$$

Данная малость является следствием интегрального свойства ζ -функции:

$$\int_0^1 \zeta(1/2, \delta) d\delta = 0.$$

Таким образом, если $\zeta(1/2, \delta)$ интегрируется с функцией, слабо изменяющейся на интервале $\delta \in (0, 1)$, то результат будет много меньше, чем дает интегрирование на том же интервале без

ζ -функции. Именно такая ситуация реализуется при относительно слабом магнитном поле. В противоположном случае сильного магнитного поля доминирующим является вклад $\mathcal{K}_B^{(j)}(q)$ от основного уровня Ландау заряженного лептона, а все остальные вклады, включая $\mathcal{K}_{inf}^{(j)}(q)$, подавлены. Таким образом, можно ожидать, что рассматриваемый вклад будет мал и при произвольной напряженности магнитного поля, что будет подтверждено ниже численными расчетами скоростей реакций и переданных за счет них среде энергии и импульса.

Еще один вклад в коэффициент излучения от заряженных лептонов, находящихся на верхних уровнях Ландау $\mathcal{K}_0^{(j)}(q)$, хотя и не содержит особенностей, но может быть представлен в более простом виде. Действительно, в допустимой области значений $a \geq 1$ для функции $\zeta(1/2, a)$ хорошим приближением является следующее выражение:

$$\zeta(1/2, a) \approx -2\sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Откуда следует, что соответствующий вклад в коэффициент излучения можно представить в простом аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0^{(j)}(q) &\approx \frac{G^2 N_n}{\pi} (1 + 3g^2) \epsilon_j \sqrt{\epsilon_j^2 - m_e^2} f_j(\epsilon_j) \times \\ &\times \left[1 - \frac{eB}{2(\epsilon_j^2 - m_e^2)} \right] \theta(\epsilon_j - \sqrt{m_e^2 + 2eB}). \quad (52) \end{aligned}$$

Отметим, что из приведенного выражения легко могут быть получены предельные случаи. Поскольку вклад в коэффициент излучения от основного уровня Ландау пропорционален напряженности магнитного поля $\mathcal{K}_B^{(j)}(q) \propto B$, в беспольном пределе получим

$$\begin{aligned} \lim_{B \rightarrow 0} \mathcal{K}^{(j)}(q) &= \lim_{B \rightarrow 0} \mathcal{K}_0^{(j)}(q) = \frac{G^2 N_n}{\pi} (1 + 3g^2) \times \\ &\times \epsilon_j \sqrt{\epsilon_j^2 - m_e^2} f_j(\epsilon_j) \theta(\epsilon_j - m_e). \quad (53) \end{aligned}$$

Это выражение совпадает с хорошо известным в литературе, которое, однако, обычно приводится в виде сечений бета-процессов. В приведенном здесь виде оно может быть найдено, например, в работе [5]. Предел сильного магнитного поля получается тоже достаточно легко. Хотя $\mathcal{K}_0^{(j)}(q)$ содержит слагаемое пропорциональное B , оно не дает вклад в коэффициент излучения в рассматриваемом пределе. Действительно, как следует из θ -функции, это слагаемое ограничено: $eB/(\epsilon_j^2 - m_e^2) \leq 1/2$, тогда как ар-

гумент θ -функции стремится к $-\infty$. Таким образом, получаем

$$\lim_{B \rightarrow 0} \mathcal{K}_0^{(j)}(q) = 0, \quad (54)$$

что означает, что в пределе сильного магнитного поля коэффициент излучения определяется только вкладом основного уровня Ландау.

Еще одним следствием из полученных для коэффициентов излучения выражений (50) является кинематическое подавление в рассматриваемой среде бета-распада нейтрона (3) и обратного к нему процесса. В этих реакциях $\epsilon_3 = \Delta - \omega_{\bar{\nu}}$, поэтому из θ -функции следует, что даже в отсутствие магнитного поля $\omega_{\bar{\nu}} \leq \Delta - m_e \approx 0.8$ МэВ. Таким образом, в рассматриваемых процессах могут участвовать лишь антинейтрино малых энергий. При наличии магнитного поля это ограничение усиливается и для электронов, находящихся на верхних уровнях Ландау, заменяется условием $\omega \leq \Delta - \sqrt{m_e^2 + 2eB}$. В результате уже при напряженности магнитного поля $B \gtrsim 2.5 \cdot 10^{13}$ Гс такие электроны не могут участвовать в бета-распаде нейтрона и обратном к нему процессе (3). Данная реакция кинематически разрешена лишь для электронов на основном уровне Ландау и с участием антинейтрино малых энергий. Для большинства астрофизических объектов, где бета-процессы играют важную роль, спектр антинейтрино гораздо более жесткий. Так, например, для сверхновых и внутренней части аккреционных дисков типичная средняя энергия составляет $\bar{\omega}_{\bar{\nu}} \sim 10$ МэВ (см., например, [36, 37]), тогда как за счет бета-распада могут рождаться, а в обратном процессе — поглощаться лишь антинейтрино малых энергий. Следовательно, опять же в интегральном смысле, можно положить

$$\mathcal{K}^{(3)}(q) \approx 0, \quad (55)$$

так как в бета-распаде и обратном к нему процессе может участвовать лишь малая часть всех антинейтрино, которая имеет энергию меньше или порядка МэВ. Отметим, что кинематическое подавление данных реакций является прямым следствием того, что в рассматриваемой среде можно пренебречь импульсом отдачи нуклона.

Поскольку основными нейтрино-нуклонными реакциями в рассматриваемой среде являются процессы (1), (2) с участием соответственно нейтрино и антинейтрино, это позволяет перейти от коэффициентов излучения в отдельных реакциях непосредственно к коэффициенту излучения нейтрино $\mathcal{K}_\nu = \mathcal{K}^{(1)}$ и антинейтрино $\mathcal{K}_{\bar{\nu}} = \mathcal{K}^{(2)}$. Приведем для них результаты вычислений с учетом всех использованных выше предположений относительно свойств среды:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\nu(q) &= K_0 \Phi(b, x_\nu, \beta_\nu) \frac{\exp\{(\delta\mu + \Delta)/T - a_e\}}{\exp(x_\nu/t - a_e) + 1}, \\ \mathcal{K}_{\bar{\nu}}(q) &= K_0 \Phi(b, x_{\bar{\nu}}, \beta_{\bar{\nu}}) \frac{1}{\exp(x_{\bar{\nu}}/t + a_e) + 1}, \\ \Phi(x, b, \beta) &= 2x\sqrt{x^2 - 1} \theta\left(x - \sqrt{1 + 2b}\right) + \\ &+ \frac{bx}{\sqrt{x^2 - 1}} \left[\theta(x - 1) - \theta\left(x - \sqrt{1 + 2b}\right) \right] - \\ &- g_{va} \frac{bx \cos \beta}{\sqrt{x^2 - 1}} \theta(x - 1). \end{aligned} \quad (56)$$

Здесь введены следующие безразмерные величины: $x_{\nu, \bar{\nu}} = (\omega \pm \Delta)/m_e$, $t = T/m_e$, $a_e = \mu_e/T$ и $b = eB/m_e^2 = B/B_0$, $\beta_{\nu(\bar{\nu})}$ — угол между импульсом нейтрино (антинейтрино) и вектором напряженности магнитного поля, а также константы [31]: $g_v \approx 1$, $g_a \approx -1.27$, $g_{va} = (g_a^2 - g_v^2)/(3g_a^2 + g_v^2) \approx 0.11$, $\cos \theta_c \approx 0.97$, $G_F \approx 1.17 \cdot 10^{-11}$ МэВ⁻²,

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{(g_v^2 + 3g_a^2) \cos^2 \theta_c}{2\pi} G_F^2 N_n m_e^2 \approx \\ &\approx 1.44 \cdot 10^{-19} \left(\frac{\rho_{12}}{1 + Y} \right) \text{ МэВ}, \end{aligned} \quad (57)$$

где $Y = N_p/N_n$ и $\rho_{12} = \rho/(10^{12} \text{ г/см}^3)$. Отметим, что данное выражение в отличие от (50) уже не содержит бесконечного набора особых точек, но близко к нему в интегральном смысле. Видно, что существенной модификации коэффициента поглощения за счет магнитного поля следует ожидать при $b \gtrsim x_{\nu, \bar{\nu}}^2$, причем в этой области параметров коэффициент излучения будет линейно расти с увеличением напряженности магнитного поля. Поскольку для сверхновых и аккреционных дисков средняя энергия (анти)нейтрино составляет $\bar{\omega}_{\nu, \bar{\nu}} \sim 10$ МэВ, из $b \gtrsim x_{\nu, \bar{\nu}}^2$ следует условие для напряженности магнитного поля: $B \gtrsim 10^{16}$ Гс, при которой бета-процессы существенно меняются. Таким образом, при получении грубых оценок или в случае магнитного поля существенно меньшей напряженности можно считать, что модификация рассматриваемых процессов относительно мала. Тем не менее, как будет показано ниже, такая модификация может привести к подавлению скорости бета-процессов и передаваемой в них энергии в несколько раз по сравнению с бесполевым случаем уже при $B \sim 10^{15}$ Гс, что может быть важным для некоторых астрофизических задач. Следует также отметить, что наличие в коэффициенте излучения асимметричной части, пропорциональной $\cos \beta$, приводит к макроскопическому эффекту, который отсутствует в бесполевым случае. В области, где (анти)нейтрино не находятся в равновесии со средой, от них передается нескомпенсированный

импульс вдоль силовых линий напряженности магнитного поля. Хотя по сравнению с другими членами данное слагаемое мало, так как подавлено множителем $g_{va} \approx 0.11$, наличие такой нескомпенсированной силы может существенно сказаться на динамике астрофизических объектов [14].

В заключение более подробно остановимся на обосновании предположений, сделанных при вычислении коэффициентов излучения нейтрино и антинейтрино (56). Как отмечалось выше, данные выражения предполагают выполнение условий (39), (41) и (44), которые для удобства изложения приведем еще раз:

$$eB, \mu_e^2, \bar{\omega}_{\nu, \bar{\nu}}^2 \ll m_N T \ll m_N^2, \quad \mu_p - m_p \lesssim T. \quad (58)$$

Рассмотрим ситуации, когда данные условия могут нарушаться. При проведении вычислений среда предполагалась достаточно горячей ($T \gg \bar{\omega}_{\nu, \bar{\nu}}^2/m_N \sim 0.1$ МэВ), что может быть несправедливо для внешних холодных частей рассматриваемых астрофизических объектов. Однако в нерелятивистской плазме при температурах, существенно меньших $T \sim 1$ МэВ, скорости нейтринных процессов становятся слишком малы и взаимодействием (анти)нейтрино со средой можно пренебречь. Другим ограничением, следующим из (58), является условие для магнитного поля: $B \ll B_0 T m_N / m_e^2$ ($B_0 = eB/m_e^2 \approx 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс), которое также может нарушаться во внешних холодных частях сверхновых и аккреционных дисков. Однако, как отмечалось выше, в этих областях взаимодействием (анти)нейтрино со средой можно пренебречь. Для релятивистской плазмы данное условие соответствует напряженности магнитного поля $B \ll 10^{17}$ Гс, что хорошо выполняется для магнитных полей, типичных для этих объектов [4, 6–8].

Еще одним требованием к рассматриваемой среде является ее умеренное вырождение. Действительно, из (58) следует, что параметр вырождения электронов $a_e = \mu_e/T \ll \sqrt{m_N/T}$, а протоны предполагаются невырожденными: $\mu_p - m_p \lesssim T$. Однако эти два условия не являются независимыми, так как химические потенциалы заряженных частиц связаны условием локальной электронейтральности:

$$N_p(\mu_p) = N_{e^-}(\mu_e) - N_{e^+}(\mu_e),$$

где N_p , N_{e^-} и N_{e^+} — концентрации соответственно протонов, электронов и позитронов. В случае произвольного магнитного поля исследование данного соотношения является отдельной сложной задачей, поэтому проведем здесь лишь его упрощенный ана-

лиз. Поскольку для протонов магнитное поле является достаточно слабым и они занимают много уровней Ландау ($B \ll B_0 T m_N / m_e^2$), будем использовать бесполовое выражение для их концентрации. В этом приближении плотность, при которой протоны становятся вырожденными, определяется как

$$\begin{aligned} \rho_* &\approx \frac{m_p}{2^{1/2} \pi^{3/2}} \frac{1+Y}{Y} (m_p T)^{3/2} \approx \\ &\approx 7.94 \cdot 10^{11} \frac{1+Y}{Y} \left(\frac{T}{1 \text{ МэВ}} \right)^{3/2} \text{ г/см}^3. \end{aligned}$$

Поскольку с увеличением плотности степень вырождения всех частиц увеличивается, условием невырожденности протонов является $\rho \lesssim \rho_*$. Из условия электронейтральности следует, что плотности ρ_* соответствуют следующие параметры вырождения ультрарелятивистских электронов:

$$\begin{aligned} a_*^{(0)} &\approx \left(\frac{9\pi}{2} \right)^{1/6} \sqrt{\frac{m_p}{T}} \approx 1.55 \sqrt{\frac{m_p}{T}}, \\ a_*^{(B)} &= \frac{\sqrt{2\pi T}}{eB} m_p^{3/2} \approx 1.61 \frac{B_0 T m_p}{B m_e^2} a_*^{(0)}, \end{aligned}$$

где $a_*^{(0)}$ относится к бесполовому случаю, а $a_*^{(B)}$ — к пределу сильного магнитного поля, когда электроны и позитроны находятся исключительно на основном уровне Ландау. Поскольку в (58) предполагается $B \ll B_0 T m_p / m_e^2$, отсюда следует, что $a_*^{(B)} \gg a_*^{(0)} \sim \sqrt{m_N/T}$. Таким образом, магнитное поле увеличивает степень вырождения электронов. Кроме того, при увеличении плотности первым нарушается условие слабого вырождения электронов: $a_e \ll \sqrt{m_N/T}$, тогда как протоны остаются невырожденными и при большей плотности, вплоть до $\rho \sim \rho_*$. Следовательно, в случае относительно слабого магнитного поля условие умеренного вырождения среды соответствует ограничению для ее плотности:

$$\begin{aligned} \rho \ll \rho_0 &\approx \frac{m_p}{3\pi^2} \frac{1+Y}{Y} (m_p T)^{3/2} \approx \\ &\approx 2.11 \cdot 10^{11} \frac{1+Y}{Y} \left(\frac{T}{1 \text{ МэВ}} \right)^{3/2} \text{ г/см}^3 \approx 0.27 \rho_*. \end{aligned}$$

В случае сильного для заряженных лептонов магнитного поля ограничение для плотности среды еще более ужесточается:

$$\begin{aligned} \rho \ll \rho_B &\approx \frac{m_p}{2\pi^2} \frac{1+Y}{Y} eB (m_p T)^{1/2} \approx \\ &\approx 2.00 \cdot 10^9 \frac{1+Y}{Y} \left(\frac{B}{10^{15} \text{ Гс}} \right) \left(\frac{T}{1 \text{ МэВ}} \right)^{1/2} \text{ г/см}^3, \end{aligned}$$

так как из условия $eB \ll m_N T$ следует, что $\rho_B \ll \rho_0$. Однако необходимо отметить, что в сверхновых и аккреционных дисках большим плотностям среды соответствуют относительно высокие температуры $T \gtrsim 5$ МэВ и химический состав с преобладанием нейтронов $Y \approx 1/4$. Таким образом, характерный масштаб плотности, при котором становятся неприменимы полученные выше выражения для коэффициентов излучения нейтрино и антинейтрино (56), по крайней мере в случае относительно слабого магнитного поля, составляет $\rho_0 \sim 10^{13}$ г/см³. С другой стороны, как показывают расчеты (см., например, [38]), средние длины свободного пробега электронных нейтрино и антинейтрино с характерными энергиями $\bar{\omega}_{\nu, \bar{\nu}} \approx 10$ МэВ составляют

$$\bar{\ell}_{\nu, \bar{\nu}} \approx 4 \text{ км} / \rho_{12}. \quad (59)$$

Отметим, что данное значение соответствует процессам рассеяния на нуклонах и практически не зависит от величины магнитного поля. С учетом бета-процессов длина свободного пробега будет еще меньше. Таким образом, область $\rho \gtrsim 10^{12}$ г/см³ соответствует тому, что нейтрино и антинейтрино захватываются средой и находятся в состоянии, близком к локальному термодинамическому равновесию. В этих областях скорости бета-процессов и передаваемые среде энергия и импульс компенсируются в процессах излучения и поглощения (анти)нейтрино, следовательно, данные реакции не приводят к изменению параметров среды.

7. СКОРОСТИ БЕТА-ПРОЦЕССОВ В ОПТИЧЕСКИ ПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ И ИЗЛУЧАЕМЫЕ В НЕЙТРИНО ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС

Полученные выше коэффициенты излучения нейтрино и антинейтрино (56) позволяют вычислять скорости бета-процессов и передаваемые от (анти)нейтрино среде энергию и импульс при произвольном значении напряженности магнитного поля в различных астрофизических объектах. Однако, как следует из (32), (33), для определения этих величин необходимо знать локальную функцию распределения (анти)нейтрино, а точнее, несколько первых ее моментов. Ситуация упрощается в случае прозрачной для (анти)нейтрино среды, поскольку при этом можно пренебречь их функцией распределения:

$$F_{\nu, \bar{\nu}}(q) \ll 1. \quad (60)$$

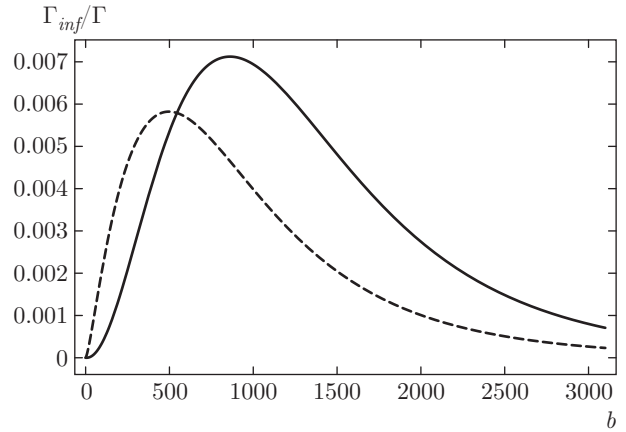


Рис. 1. Относительные вклады слагаемого $\mathcal{K}_{inf}(q)$ в скорости бета-процессов с участием нейтрино (сплошная линия) и антинейтрино (штриховая линия), соответствующие безразмерной температуре $t = 8$ и параметру вырождения электронов $a_e = 3$ в зависимости от напряженности магнитного поля $b = B/B_0$

Несмотря на заметное упрощение, данный случай представляет несомненный интерес, так как реализуется, например, для тонких аккреционных дисков вокруг черных дыр и других объектов, где (анти)нейтрино излучаются свободно. В данном пределе получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu, \bar{\nu}} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathcal{K}_{\nu, \bar{\nu}}(q) d^3q, \\ Q_{\nu, \bar{\nu}}^\mu &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int q^\mu \mathcal{K}_{\nu, \bar{\nu}}(q) d^3q. \end{aligned} \quad (61)$$

Коэффициенты излучения $\mathcal{K}_{\nu, \bar{\nu}}(q)$ зависят лишь от энергии (анти)нейтрино и компоненты его импульса вдоль вектора напряженности магнитного поля, поэтому отличными от нуля будут лишь скорости производства нейтрино и антинейтрино $\Gamma_{\nu, \bar{\nu}}$, излучаемая за счет них из среды энергия $Q_{\nu, \bar{\nu}} \equiv -Q_{\nu, \bar{\nu}}^0$ и импульс $\mathcal{F}_{\nu, \bar{\nu}} \parallel \equiv Q_{\nu, \bar{\nu}}^3$, передаваемый среде вдоль линий напряженности магнитного поля. Компоненты поперечного импульса в этом случае обращаются в нуль ($\mathcal{F}_{\nu, \bar{\nu}} \perp = 0$), что справедливо только для оптически прозрачной среды. В общем случае, когда функция распределения (анти)нейтрино анизотропна, передаваемый среде импульс будет содержать как продольную, так и поперечную компоненты.

Начнем данный раздел с численных оценок, показывающих малость отброшенных ранее вкладов (51) и (55) в коэффициенты излучения нейтрино и антинейтрино. Как показали расчеты, результаты данных оценок аналогичны для всех вычисляемых величин, поэтому дальнейшее рассмотрение бу-

дет проведено на примере скоростей бета-процессов. Для оценок будем использовать параметры среды $t = T/m_e \approx 8$ и $a_e = \mu_e/T \approx 3$, характерные для оболочек сверхновых и внутренней части аккреционных дисков [39, 40]. На рисунках вычисляемые величины приводятся в зависимости от напряженности магнитного поля $b = B/B_0$, которая выражена в единицах критического поля $B_0 \approx 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс. Рассмотрим сначала вклад в коэффициенты излучения (50) от слагаемого $\mathcal{K}_{inf}(q)$, которое содержит корневые особенности. Численные расчеты показывают, что вклад данного слагаемого остается маленьким и не превышает примерно одного процента при допустимых вариациях параметров среды. На рис. 1 приводится относительный вклад слагаемого $\mathcal{K}_{inf}(q)$ в скорости бета-процессов в зависимости от напряженности магнитного поля $b = B/B_0$ для значений безразмерных параметров среды $t = 8$ и $a_e = 3$. Видно, что этот вклад имеет максимум при значениях напряженности $B \gtrsim 10^{16}$ Гс, однако максимальное значение не превышает одного процента. Аналогичное поведение относительного вклада $\mathcal{K}_{inf}(q)$ было получено и при других значениях параметров среды.

Более подробно остановимся на вкладе в коэффициент излучения антинейтрино от процесса бета-распада (3). Как отмечалось выше, в данной реакции могут излучаться лишь антинейтрино низких энергий, поэтому вклад во все интегральные величины много меньше вклада от процесса (2), энергия антинейтрино в котором достигает тепловых значений. Следовательно, относительный вклад бета-распада должен уменьшаться с ростом температуры, что на примере скорости производства антинейтрино $\Gamma_{\bar{\nu}} = \Gamma_2 + \Gamma_3$ продемонстрировано на рис. 2а. Из приведенных графиков видно, что с ростом магнитного поля вклад бета-распада быстро растет, а затем в пределе сильного магнитного поля, когда практически все электроны и позитроны находятся на основном уровне Ландау, становится постоянным. В этом пределе и при достаточно низких температурах $T \approx 2$ МэВ его относительный вклад в скорость производства антинейтрино составляет примерно один процент. Однако, как следует из численных расчетов, при дальнейшем понижении температуры вклад от данного процесса становится значительным и при $T \approx 0.3$ МэВ сравнивается с вкладом от процесса (2). На рис. 2б приведен относительный вклад бета-распада в скорость производства антинейтрино при различных значениях параметра вырождения a_e . Как видно из рисунка, максимальный вклад этого процесса, соответствующий

пределу сильного магнитного поля, растет с увеличением параметра a_e и быстро принимает постоянное значение. Таким образом, именно в вырожденной плазме вклад от данного процесса будет максимальным. Для его оценки можно пользоваться выражениями

$$\frac{\Gamma_3}{\Gamma_2 + \Gamma_3} \Big|_{a_e \gg 1} \approx \begin{cases} 0.1 (1 + bt/a_e) t^{-5}, & b \lesssim 7ta_e, \\ 0.7 t^{-3}, & b \gtrsim 7ta_e, \end{cases} \quad (62)$$

которые позволяют получить значение, отличающееся от точного не более чем в два раза. Отметим, что вклад бета-распада в светимость антинейтрино и передаваемый среде импульс меньше, чем приведенный здесь вклад в скорость производства антинейтрино.

Далее перейдем непосредственно к вычислению скоростей бета-процессов, излучаемой в них энергии и передаваемому среде импульсу. Поскольку коэффициенты излучения нейтрино и антинейтрино (56) зависят только от их энергии и продольной составляющей импульса, интегрировать (61) удобно в сферической системе координат. После интегрирования по телесному углу результат приводится к виду

$$\{\Gamma_{\nu}, Q_{\nu}\} = K_0 \frac{m_e^{\{3,4\}}}{2\pi^2} \left(2 \int_{x_m}^{\infty} (x - \delta)^{\{2,3\}} S_0 f_{\nu} dx + b \int_{\delta}^{x_m} (x - \delta)^{\{2,3\}} S_B f_{\nu} dx \right), \quad (63)$$

$$\{\Gamma_{\bar{\nu}}, Q_{\bar{\nu}}\} = K_0 \frac{m_e^{\{3,4\}}}{2\pi^2} \left(2 \int_{\sqrt{1+2b}}^{\infty} (x + \delta)^{\{2,3\}} S_0 f_{\bar{\nu}} dx + b \int_1^{\sqrt{1+2b}} (x + \delta)^{\{2,3\}} S_B f_{\bar{\nu}} dx \right), \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\nu \parallel} &= \frac{g_{va}}{6\pi^2} K_0 m_e^4 b \int_{\delta}^{\infty} (x - \delta)^3 S_B f_{\nu} dx, \\ \mathcal{F}_{\bar{\nu} \parallel} &= \frac{g_{va}}{6\pi^2} K_0 m_e^4 b \int_1^{\infty} (x + \delta)^3 S_B f_{\bar{\nu}} dx, \end{aligned} \quad (65)$$

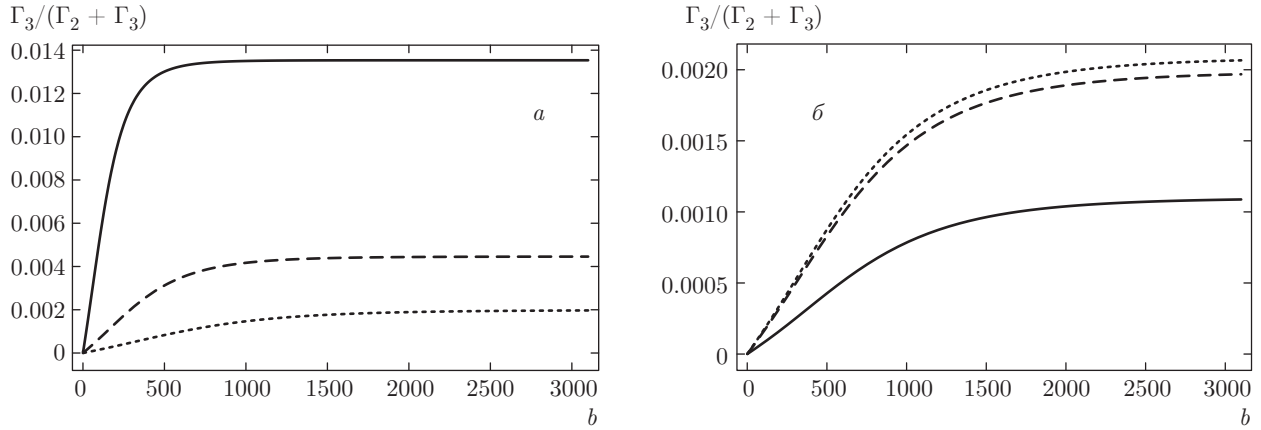


Рис. 2. Относительный вклад бета-процесса в скорость производства антинейтрино в зависимости от напряженности магнитного поля $b = B/B_0$. Рисунок *a* соответствует параметру вырождения электронов $a_e = 3$ и безразмерным температурам $t = 4$ (сплошная линия), 6 (штриховая), 8 (пунктирная). Рисунок *б* соответствует безразмерной температуре $t = 8$ и параметрам вырождения $a_e = 0$ (сплошная линия), 3 (штриховая), 10 (пунктирная)

где $\delta = (m_n - m_p)/m_e = \Delta/m_e \approx 2.53$, $x_m = \max(\delta, \sqrt{1+2b})$ — максимальное из двух значений и были использованы следующие обозначения:

$$S_0 = x\sqrt{x^2-1}, \quad S_B = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$f_\nu = \frac{\exp(\delta\mu/T + \delta/t - a_e)}{\exp(x/t - a_e) + 1}, \quad (66)$$

$$f_{\bar{\nu}} = \frac{1}{\exp(x/t + a_e) + 1}.$$

Полученные выражения еще более упрощаются в случае ультрарелятивистской электрон-позитронной плазмы, когда $t \gg 1$ и $b \gg 1$. В этом пределе скорости производства нейтрино и антинейтрино, а также излучаемая в них энергия зависят не от самого магнитного поля, а от безразмерного параметра $y_b = \sqrt{2b}/t$:

$$\left\{ \frac{\Gamma_\nu}{\Gamma_0}, \frac{Q_\nu}{Q_0} \right\} = \frac{Y}{1+Y} \left(y_b^2 \int_0^{y_b} \frac{y^{\{2,3\}} dy}{\exp(y - a_e) + 1} + 4 \int_{y_b}^\infty \frac{y^{\{4,5\}} dy}{\exp(y - a_e) + 1} \right) \equiv \frac{Y}{1+Y} J_{\{2,3\}}(y_b, a_e), \quad (67)$$

$$\left\{ \frac{\Gamma_{\bar{\nu}}}{\Gamma_0}, \frac{Q_{\bar{\nu}}}{Q_0} \right\} = \frac{1}{1+Y} \left(y_b^2 \int_0^{y_b} \frac{y^{\{2,3\}} dy}{\exp(y + a_e) + 1} + 4 \int_{y_b}^\infty \frac{y^{\{4,5\}} dy}{\exp(y + a_e) + 1} \right) \equiv \frac{1}{1+Y} J_{\{2,3\}}(y_b, -a_e), \quad (68)$$

$$\frac{\mathcal{F}_{\nu\parallel}}{\mathcal{F}_0} = \frac{Y}{1+Y} \int_0^\infty \frac{y^3 dy}{\exp(y - a_e) + 1} \equiv \frac{Y}{1+Y} I_3(a_e), \quad (69)$$

$$\frac{\mathcal{F}_{\bar{\nu}\parallel}}{\mathcal{F}_0} = \frac{1}{1+Y} \int_0^\infty \frac{y^3 dy}{\exp(y + a_e) + 1} \equiv \frac{1}{1+Y} I_3(-a_e). \quad (70)$$

Здесь введены следующие размерные величины:

$$\Gamma_0 = \frac{(3g_a^2 + g_v^2) \cos^2 \theta_c}{8\pi^3} G_F^2 T^5 \frac{\rho}{m_N} \approx 9.64 \cdot 10^{31} t^5 \rho_{12} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (71)$$

$$Q_0 = \frac{(3g_a^2 + g_v^2) \cos^2 \theta_c}{8\pi^3} G_F^2 T^6 \frac{\rho}{m_N} \approx 7.88 \cdot 10^{25} t^6 \rho_{12} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (72)$$

$$\mathcal{F}_0 = \frac{(g_a^2 - g_v^2) \cos^2 \theta_c}{12\pi^3} G_F^2 eB T^4 \frac{\rho}{m_N} \approx 1.85 \cdot 10^{14} b t^4 \rho_{12} \text{ дин} \cdot \text{см}^{-3}. \quad (73)$$

Как видно, наиболее простое выражение получается для продольной составляющей передаваемого среде импульса. Вклад в него дают лишь электроны и позитроны, находящиеся на основном уровне Ландау, поэтому он растет линейно с увеличением напряженности магнитного поля. При больших значениях параметра вырождения электронов a_e зависимость передаваемого среде импульса от этого параметра для нейтрино и антинейтрино дается асимптотическими выражениями:

$$I_3(a_e) \approx \frac{a_e^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} a_e^2 + \frac{7\pi^4}{120} + 3.2 a_e, \quad (74)$$

$$I_3(-a_e) \approx 6 \exp(-a_e).$$

Отметим, что даже при малых значениях параметра a_e относительная ошибка, обусловленная этим приближением, не превышает 6 %.

Как следует из полученных выражений, передаваемый среде импульс относительно мал в случае невырожденной среды. Это можно увидеть, например, из сравнения величины $\mathcal{F}_0 \sim 10^{14} t^4 b$ дин/см³ с плотностью силы, связанной с градиентом магнитного поля $\mathcal{F}_B \sim B^2/(8\pi L) \sim 10^{20} b^2$ дин/см³ (где $L \sim 10^6$ см — характерный масштаб его изменения). Однако в достаточно плотных частях сверхновых и аккреционных дисков газ становится вырожденным и передаваемый среде импульс усиливается коэффициентом, пропорциональным $a_e^4 \rho_{12}$. Кроме того, этим областям соответствует достаточно большая температура $T \approx 5$ МэВ, поэтому передаваемый среде за счет излучения нейтрино импульс становится там одного порядка с плотностью магнитной силы $\mathcal{F}_{\nu, \bar{\nu} \parallel} \sim \mathcal{F}_B$. Также следует заметить, что плотность магнитной силы связана с градиентом магнитного поля, тогда как передаваемый среде импульс зависит лишь от его напряженности. Таким образом, $\mathcal{F}_{\nu, \bar{\nu} \parallel}$ может существенно сказываться на динамике тех областей сверхновых и аккреционных дисков, где магнитное поле большое, но достаточно слабо меняется в пространстве. Так, например, в случае тороидальной конфигурации передаваемый среде импульс будет создавать угловое ускорение, которое ничем не компенсируется, и может приводить к дополнительному усилению существующего магнитного поля [14]. Отметим также, что в импульс, передаваемый среде, вносят существенный вклад нейтрино-электронные процессы [41] (по крайней мере в случае сильного магнитного поля), а также реакции рассеяния нейтрино на нуклонах [38]. Отдельно отметим, что эти вклады имеют тот же знак, что и импульс, передаваемый среде в бета-процессах, поэтому они не компенсируют, а наоборот, усиливают друг друга. Остановимся на данном утверждении чуть более подробно. Результаты цитируемых статей получены в случае частично прозрачной для нейтрино и антинейтрино среды. Таким образом, прямое их сравнение с результатами данной работы не совсем корректно. Очевидное различие состоит в том, что для частично прозрачной среды добавляются вклады от процессов поглощения и рассеяния. Однако, как показал предварительный анализ, для бета-процессов

передаваемый среде импульс направлен вдоль напряженности магнитного поля в случае реакций излучения и имеет противоположный знак для процессов поглощения. При этом в достаточно плотных областях, где передаваемый среде импульс может быть важен, доминирует вклад излучения. Следовательно, даже в случае частично прозрачной для нейтрино и антинейтрино среды полученный выше вывод о направлении импульса, передаваемого среде в бета-процессах, качественно сохранится, хотя его численное значение будет меньше, чем для оптически прозрачной среды.

Зависимость скоростей бета-процессов и излучаемой в них энергии от напряженности магнитного поля не столь очевидна, как для передаваемого среде импульса. С одной стороны, как видно из выражений (67) и (68), в пределе сильного магнитного поля эти величины должны линейно расти при увеличении напряженности, как и передаваемый среде импульс. Однако, как показал численный анализ, в случае слабого магнитного поля первое слагаемое в (67) и (68) растет медленнее, чем уменьшается второе. Таким образом, с ростом напряженности магнитного поля скорости реакций (1), (2) и излучаемая в них энергия сначала уменьшаются, достигая минимума, а затем переходят к асимптотическому линейному росту, что показано на рис. 3 на примере относительных скоростей реакций $\Gamma_{\nu, \bar{\nu}}(b)/\Gamma_{\nu, \bar{\nu}}(0)$ и излучаемой энергии $Q_{\nu, \bar{\nu}}(b)/Q_{\nu, \bar{\nu}}(0)$. Как видно, минимум для скорости производства антинейтрино и излучаемой в них энергии не такой глубокий, как для процесса с участием нейтрино, и достигается при меньшей напряженности магнитного поля. Отметим, что аналогичное поведение было получено ранее при численных расчетах прозрачности [42], скорости нагревания [35] и скорости производства нейтрино и антинейтрино [17].

Отметим еще один важный факт, который следует из рис. 3. Переход к асимптотическому линейному росту для реакции с участием антинейтрино (2) происходит при меньших магнитных полях, чем для процесса (1). Тем не менее, даже для него это соответствует напряженности $B \gtrsim 10^{16}$ Гс, что существенно превышает значения, характерные для сверхновых и аккреционных дисков [4, 6–8]. Следовательно, увеличение магнитного поля в данных объектах приводит не к усилению, а наоборот, к подавлению бета-процессов, которое сильнее проявляется для реакции с участием нейтрино. Кроме того, более сильное подавление наблюдается у излучаемой энергии, чем у скоростей бета-процессов. Отметим также, что, в отличие от передаваемого среде

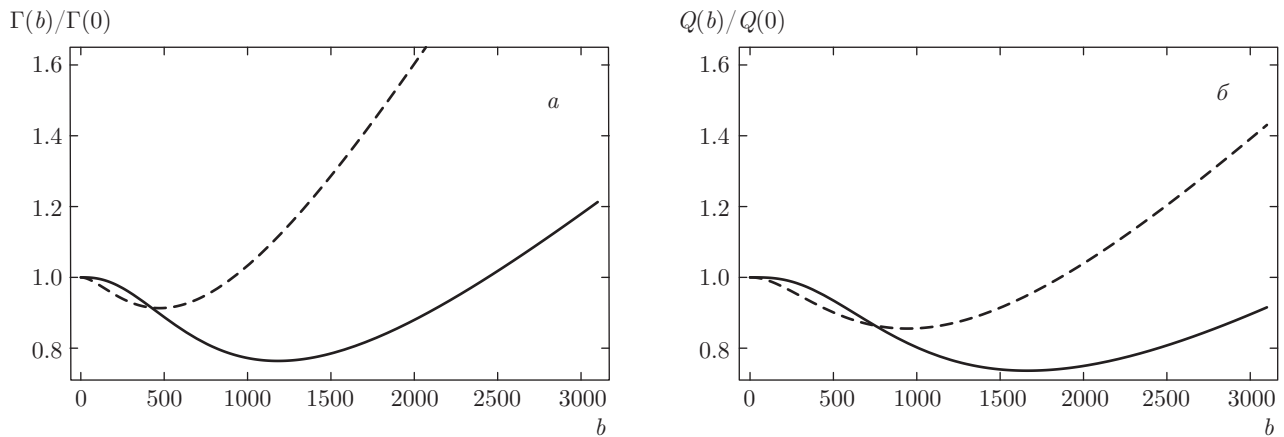


Рис. 3. Относительные скорости процессов (а) и излучаемая в них энергия (б) для процессов с участием нейтрино (сплошные линии) и антинейтрино (штриховые линии), соответствующие безразмерной температуре $t = 8$ и параметру вырождения электронов $a_e = 3$ в зависимости от напряженности магнитного поля $b = B/B_0$

импульса, вклад в данные величины от нейтрино-электронных процессов и реакций рассеяния нейтрино на нуклонах пренебрежимо мал [38, 41].

Рассмотрим отдельно влияние других параметров на скорости процессов (1), (2) и излучаемую в них энергию. Численные расчеты показывают, что зависимость этих величин от температуры среды носит похожий характер для обеих реакций, что продемонстрировано на рис. 4 на примере относительной энергии $Q_{\nu,\bar{\nu}}(b)/Q_{\nu,\bar{\nu}}(0)$. Как можно видеть, с увеличением температуры положение минимума относительной светимости смещается в сторону большей напряженности магнитного поля. Его глубина практически не меняется в каждой из реакций по отдельности, однако для бета-процесса с участием нейтрино глубина минимума больше. Отметим, что зависимость скоростей реакций от температуры среды аналогична приведенной на рис. 4, однако глубина относительного минимума для этих величин чуть меньше.

Иная ситуация складывается с зависимостью скоростей бета-процессов и излучаемой в них энергии от параметра вырождения электронов a_e . Как показал численный анализ, она существенно различна для реакций с участием нейтрино (1) и антинейтрино (2), что показано на рис. 5 на примере относительной энергии $Q_{\nu,\bar{\nu}}(b)/Q_{\nu,\bar{\nu}}(0)$. Как видно из рис. 5б, максимальное подавление реакции с участием антинейтрино происходит в невырожденной плазме ($a_e = 0$). Однако зависимость относительной энергии, излучаемой в этом процессе, от параметра вырождения электронов a_e при фиксированной температуре очень слабая. Аналогичное пове-

дение демонстрирует относительная скорость производства антинейтрино. Необходимо отметить, что это справедливо только для относительных величин, тогда так абсолютные величины существенно зависят от данного параметра посредством $\Gamma_{\bar{\nu}}(0)$ и $Q_{\bar{\nu}}(0)$. Для процесса с участием нейтрино ситуация кардинально иная, поскольку даже относительные величины сильно зависят от степени вырождения электронов a_e . Из рис. 5а видно, что увеличение этого параметра приводит к смещению минимума относительной светимости нейтрино в сторону большей напряженности магнитного поля, а сам минимум становится глубже. Аналогичным образом ведет себя и относительная скорость производства нейтрино, однако глубина минимума этой величины несколько меньше. Таким образом, магнитное поле наиболее существенно подавляет именно процесс (1) с участием нейтрино и это подавление максимально в вырожденной среде.

Представляется интересным рассмотреть подробно случай вырожденной электрон-позитронной плазмы. Напомним, что при получении коэффициентов излучения нейтрино и антинейтрино предполагалось, что ее вырождение должно быть относительно слабым ($a_e \ll \sqrt{m_N/T}$), однако вырожденный случай ($a_e \gg 1$) привлекателен тем, что для скорости производства нейтрино и излучаемой в них энергии могут быть получены простые аналитические выражения:

$$\begin{aligned}
 J_2(y_b, a_e) &\approx \frac{4}{5}a_e^5 - \frac{7}{15}y_b^5, & y_b \leq a_e, \\
 J_2(y_b, a_e) &\approx \frac{1}{3}y_b^2 a_e^3, & y_b \geq a_e,
 \end{aligned}
 \tag{75}$$

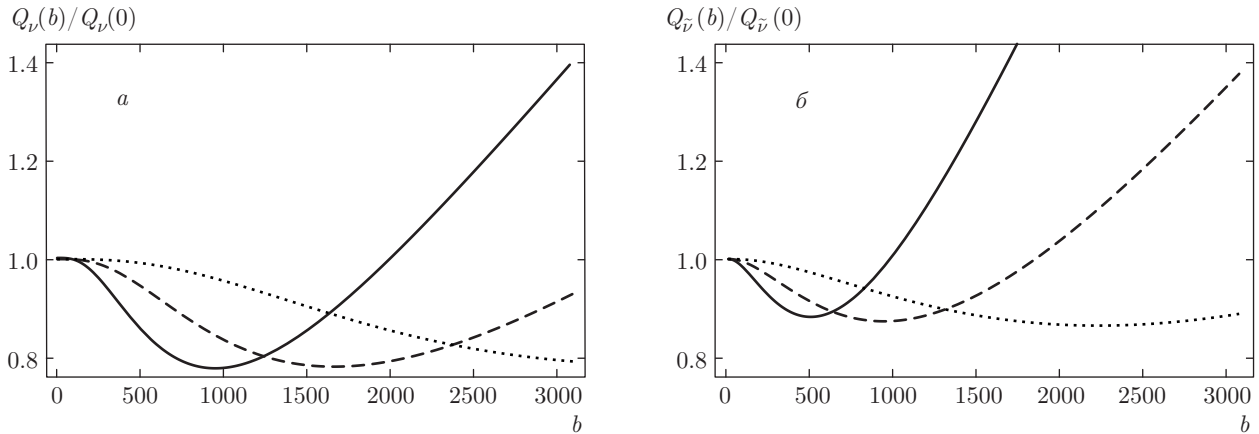


Рис. 4. Относительные светимости нейтрино (а) и антинейтрино (б), соответствующие параметру вырождения электронов $a_e = 3$ и безразмерным температурам $t = 6$ (сплошные линии), 8 (штриховые), 12 (пунктирные) в зависимости от напряженности магнитного поля $b = B/B_0$

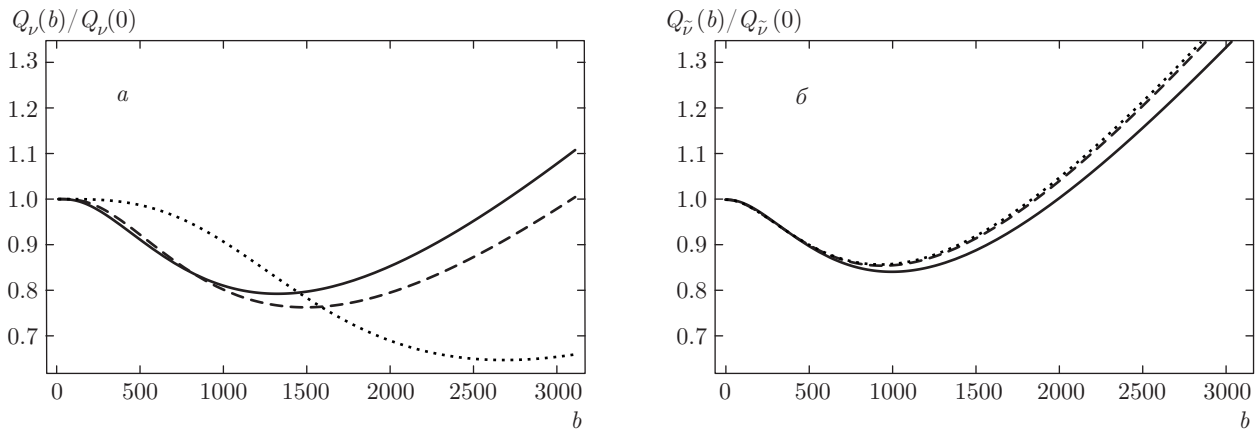


Рис. 5. Относительные светимости нейтрино (а) и антинейтрино (б), соответствующие безразмерной температуре $t = 8$ и параметрам вырождения электронов $a_e = 0$ (сплошные линии), 2 (штриховые), 6 (пунктирные) в зависимости от напряженности магнитного поля $b = B/B_0$

$$\begin{aligned}
 J_3(y_b, a_e) &\approx \frac{2}{3} a_e^6 - \frac{5}{12} y_b^6, & y_b \leq a_e, \\
 J_3(y_b, a_e) &\approx \frac{1}{4} y_b^2 a_e^4, & y_b \geq a_e.
 \end{aligned}
 \tag{76}$$

Легко заметить, что относительная скорость производства нейтрино $\Gamma_\nu(z_b)/\Gamma_\nu(0)$ и излучаемая в них энергия $Q_\nu(z_b)/Q_\nu(0)$ зависят только от одной переменной $z_b = y_b/a_e = \sqrt{2b}m_e/\mu_e$ и эта зависимость в случае вырожденной плазмы имеет универсальный по отношению к μ_e характер. Переход к такому асимптотическому поведению продемонстрирован на рис. 6. Из полученных для вырожденной плазмы выражений также следует, что максимальное подавление магнитным полем процесса (1) происходит при напряженности магнитного поля $B_\nu \approx \mu_e^2/(2m_e^2) B_0$, а величина подавления

относительно бесполевого значения составляет $\Gamma_\nu(B_\nu)/\Gamma_\nu(0) = 5/12 \approx 0.42$ для скорости производства нейтрино и $Q_\nu(B_\nu)/Q_\nu(0) = 3/8 \approx 0.38$ для излучаемой в них энергии.

Для процесса с участием антинейтрино (2) даже в пределе вырожденной электрон-позитронной плазмы не удалось получить асимптотику в аналитическом виде. Более того, переход к такому предельному поведению происходит при слишком высоких температурах, не реализующихся в сверхновых и аккреционных дисках. Как показал численный расчет, удобной переменной для анализа данного процесса является не само магнитное поле, а безразмерный параметр $y_b = \sqrt{2b}/t$. Это связано с тем, что относительная скорость производства антинейтрино $\Gamma_{\bar{\nu}}(y_b)/\Gamma_{\bar{\nu}}(0)$ и излучаемая в них энергия

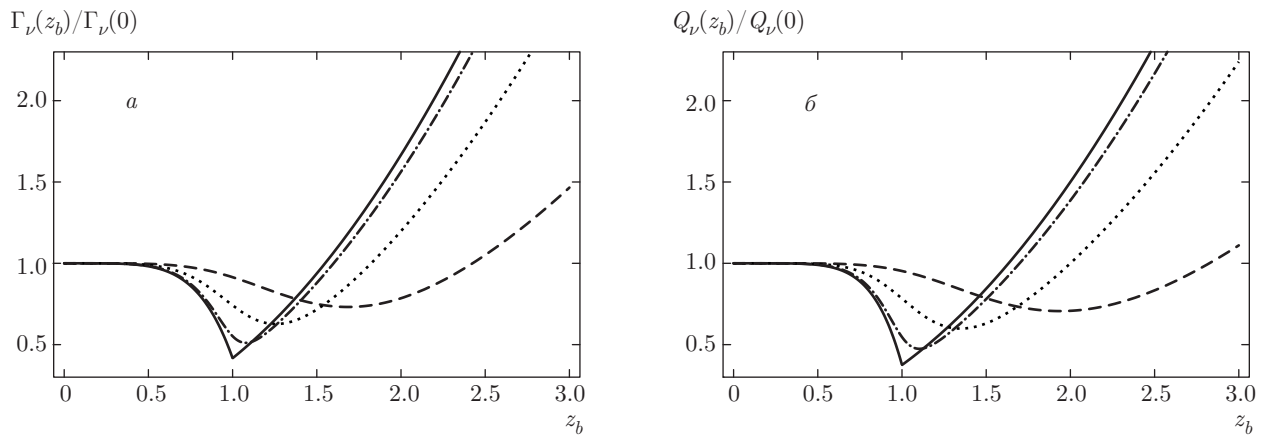


Рис. 6. Относительная скорость производства нейтрино (а) и излучаемая в них энергия (б), соответствующие безразмерной температуре $t = 8$ и параметрам вырождения электронов $a_e = 4$ (штриховые линии), 8 (пунктирные), 20 (штрихпунктирные) в зависимости от безразмерного параметра $z_b = \sqrt{2b} m_e / \mu_e$. Сплошные линии соответствуют асимптотике вырожденной плазмы

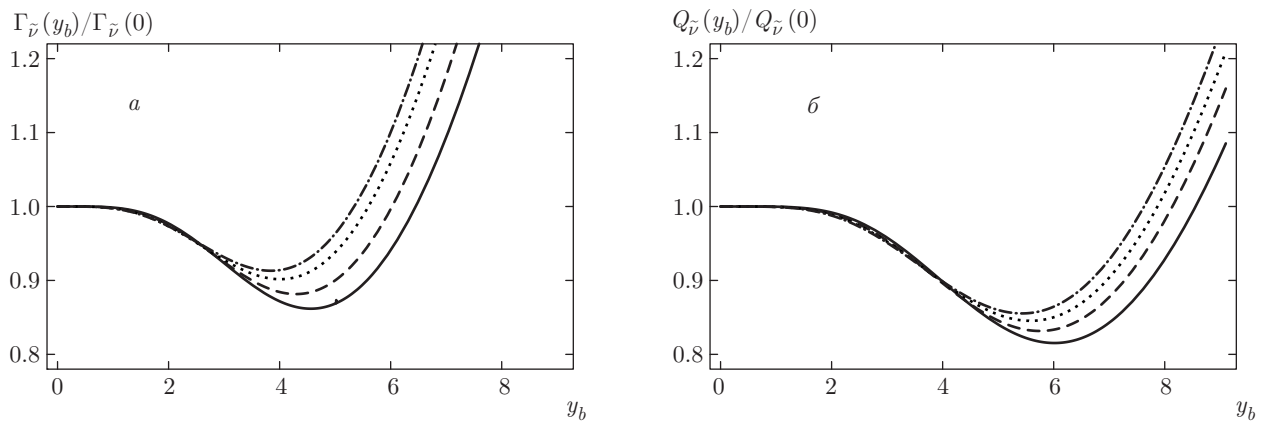


Рис. 7. Относительная скорость производства антинейтрино (а) и излучаемая в них энергия (б) в зависимости от безразмерного параметра $y_b = \sqrt{2b}/t$. Сплошные линии соответствуют асимптотике ультрарелятивистской невырожденной плазмы ($a_e = 0$), в которой наблюдается максимальное подавление процесса (2) магнитным полем. Остальные линии соответствуют следующим значениям безразмерных параметров: $t = 12$ и $a_e = 0$ (штриховые линии), $t = 12$ и $a_e = 3$ (пунктирные линии), $t = 8$ и $a_e = 3$ (штрихпунктирные линии)

$Q_{\bar{\nu}}(y_b)/Q_{\bar{\nu}}(0)$ как функции этой переменной слабо зависят от температуры среды и параметра вырождения электронов, что показано на рис. 7. На нем же приводится асимптотика невырожденной ($a_e = 0$) ультрарелятивистской плазмы, в которой, как отмечалось выше, подавление процесса (2) магнитным полем является наибольшим. Из численного расчета следует, что максимальное подавление скорости производства антинейтрино происходит при напряженности магнитного поля $B_{\Gamma_{\bar{\nu}}} \approx 10t^2 B_0$, а величина подавления в этом случае составляет $\Gamma_{\bar{\nu}}(B_{\Gamma_{\bar{\nu}}})/\Gamma_{\bar{\nu}}(0) \approx 0.86$. Максимальное подавление излучаемой в антинейтрино энергии смещено в сторону больших значений напряженности магнитного

поля $B_{Q_{\bar{\nu}}} \approx 18t^2 B_0$, а само подавление чуть больше $Q_{\bar{\nu}}(B_{Q_{\bar{\nu}}})/Q_{\bar{\nu}}(0) \approx 0.82$. Из сравнения с аналогичными величинами, полученными для процесса (1), следует, что максимальное подавление магнитным полем реакции с участием антинейтрино (2) происходит в невырожденной среде, а само подавление примерно в два раза меньше.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследовались бета-процессы (1)–(3) в среде с произвольным по напряженности магнитным полем. Кратко изложена техника расчета элементарных процессов в такой среде,

позволяющая получать выражения, справедливые в том числе в движущейся системе отсчета. С использованием данной техники рассчитаны квадраты S -матричных элементов бета-процессов. Для них получено выражение, которое имеет универсальный вид для всех реакций и справедливо в системе отсчета, где среда движется как целое. Анализ данного результата показал, что после интегрирования по поперечным импульсам заряженных частиц полученное выражение совпадает с имеющимися в литературе [15, 17] выражениями в случае покоящейся среды.

В условиях умеренно вырожденной релятивистской плазмы с магнитным полем произвольной напряженности получены простые аналитические выражения для коэффициентов излучения нейтрино и антинейтрино, которые полностью определяют излучательную и поглощательную способность такой среды в бета-процессах. Показано, что рассматриваемые условия реализуются в сверхновых с коллапсом центральной части и аккреционных дисках вокруг черных дыр, причем данные реакции являются там основными нейтринными процессами. Отдельно обсуждается, когда в рассматриваемых объектах могут нарушаться условия, которые предполагались при выводе аналитических выражений для коэффициентов излучения нейтрино и антинейтрино. Так, показано, что используемое приближение может нарушаться во внешних холодных ($T \ll 1$ МэВ) частях сверхновых и аккреционных дисков, однако в этих областях взаимодействие нейтрино со средой мало и им можно пренебречь. Также показано, что условие умеренного вырождения нарушается во внутренних плотных ($\rho \gtrsim 10^{13}$ г/см³) областях рассматриваемых объектов, однако там нейтрино и антинейтрино практически находятся в равновесии со средой и их взаимодействие не изменяет параметры вещества. Таким образом, полученные аналитические выражения являются хорошим приближением для описания взаимодействия электронных нейтрино и антинейтрино со средой сверхновых и аккреционных дисков при произвольной напряженности магнитного поля. Ввиду их простоты, они легко могут быть включены в магнитогидродинамическое моделирование этих объектов, а также использоваться для расчета распространения в них нейтрино и антинейтрино.

На основе полученных результатов для случая оптически прозрачной среды рассчитаны скорости производства нейтрино и антинейтрино, излучаемая в них энергия и макроскопический импульс, передаваемый веществу. Данное при-

ближение представляет интерес, так как хорошо выполняется для тонких аккреционных дисков и внешней части оболочки сверхновых. Кроме того, выявленный в работе характер зависимости скоростей бета-процессов и передаваемой в них энергии-импульса от магнитного поля и параметров вещества не претерпит качественных изменений и в более общем случае частично прозрачной для нейтрино и антинейтрино среды. Наиболее простая зависимость от магнитного поля была получена в работе для передаваемого веществу макроскопического импульса. Было показано, что в случае оптически тонкой среды он линейно растет с увеличением напряженности магнитного поля и направлен вдоль его силовых линий. Показано, что данный эффект наиболее существен в вырожденной плазме, т.е. в достаточно плотных, $\rho \gtrsim 10^{12}$ г/см³, частях сверхновых и аккреционных дисков. Также он может быть важен там, где магнитное поле является достаточно сильным, но слабо меняется в пространстве. Отметим, что в передаваемой среде импульс, кроме бета-процессов, могут вносить существенный вклад также нейтрино-электронные процессы и реакции рассеяния на нуклонах. При этом вклады от этих процессов не компенсируют, а усиливают друг друга. В противоположность передаваемому импульсу, скорости бета-процессов и излучаемая в них энергия зависят от напряженности магнитного поля более сложным образом. В пределе сильного поля данные величины, так же как передаваемый импульс, возрастают линейно с ростом его напряженности. Однако, как показано в работе, при характерных для сверхновых и аккреционных дисков значениях $B \lesssim 10^{15}$ Гс данные величины подавляются по сравнению с бесполевым случаем. Максимальное подавление реакции с участием нейтрино (1) происходит в вырожденной среде при напряженности $B_\nu \sim \mu_e^2/(2m_e^2) B_0$, что при умеренном вырождении плазмы попадает в область характерных для рассматриваемых объектов значений. При этом величина подавления может достигать значения 2.5 раза по сравнению с бесполевым случаем. Воздействие магнитного поля на процесс с участием антинейтрино (2) слабее и его максимальное подавление составляет 1.2 раза по сравнению с бесполевым. Однако такое подавление происходит в невырожденной плазме, т.е. в тех областях сверхновых и аккреционных дисков, где плотность не так велика. Напряженность магнитного поля, соответствующая максимальному подавлению процесса (2), составляет $B_{\bar{\nu}} \sim 10t^2 B_0$, что в случае умеренных

температур также попадает в область характерных для рассматриваемых объектов значений. Таким образом, подавление процесса с участием нейтрино и антинейтрино магнитным полем происходит в разных частях сверхновых и аккреционных дисков, а сам эффект может быть достаточно существенным.

Автору приятно поблагодарить А. Я. Пархоменко и А. А. Добрынину за плодотворные дискуссии и помощь в подготовке статьи, Г. С. Бисноватого-Когана и других коллег за полезные советы и постоянный интерес к данной работе. Автор считает своим долгом поблагодарить безвременно ушедшего Н. В. Михеева за мудрые советы и искреннюю помощь во всех вопросах. Автор благодарен рецензенту за сделанные замечания, которые позволили улучшить статью.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-02-06033-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Kumar and B. Zhang, Phys. Rep. **561**, 1 (2014).
2. A. I. MacFadyen and S. E. Woosley, Astrophys. J. **524**, 262 (1999).
3. S. Rosswog, Int. J. Mod. Phys. D **24**, 1530012–52 (2015).
4. M. V. Barkov and S. S. Komissarov, Month. Not. Roy. Astron. Soc. **401**, 1644 (2010).
5. S. W. Bruenn, Astrophys. J. Suppl. **58**, 771 (1985).
6. S. G. Moiseenko and G. S. Bisnovaty-Kogan, Astron. Rep. **59**, 573 (2015).
7. H. Sawai and S. Yamada, Astrophys. J. **817**, 153 (2016).
8. I. Zalamea and A. M. Beloborodov, Month. Not. Roy. Astron. Soc. **410**, 2302 (2011).
9. Л. И. Коровина, Изв. вузов, физика **6**, 86 (1964).
10. L. Fasso-Canuto, Phys. Rev. **187**, 2141 (1969).
11. J. J. Matese and R. F. O'Connell, Phys. Rev. **180**, 1289 (1969).
12. А. И. Студеникин, ЯФ **49**, 1665 (1989).
13. L. B. Leinson and A. Perez, JHEP **9**, 020 (1998).
14. А. А. Гвоздев, И. С. Огнев, Письма в ЖЭТФ **69**, 337 (1999).
15. D. Baiko and D. Yakovlev, Astron. Astrophys. **342**, 192 (1999).
16. D. G. Yakovlev, A. D. Kaminker, O. Y. Gnedin, and P. Haensel, Phys. Rep. **354**, 1 (2001).
17. H. Duan and Y.-Z. Qian, Phys. Rev. D **72**, 023005 (2005).
18. V. L. Kauts, A. M. Savochkin, and A. I. Studenikin, Phys. Atom. Nucl. **69**, 1453 (2006).
19. С. Л. Шапиро, С. А. Тьюколски, *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды*, ч. 2, Мир, Москва (1985).
20. G. G. Raffelt, *Stars as Laboratories for Fundamental Physics*, Chicago, USA (1996).
21. Н. Н. Чугай, Письма в астроном. ж. **10**, 210 (1984).
22. P. Arras and D. Lai, Phys. Rev. D **60**, 043001 (1999).
23. А. А. Соколов, И. М. Тернов, *Релятивистский электрон*, Наука, Москва (1986).
24. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. III, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, под ред. Д. Миртова, Физматлит, Москва (2004).
25. А. А. Гвоздев, И. С. Огнев, Е. В. Осокина, *Нейтронные процессы во внешнем магнитном поле в технике матрицы плотности*, Изд-во ЯрГУ, Ярославль (2012).
26. А. А. Гвоздев, Е. В. Осокина, ТМФ **170**, 423 (2012).
27. H. Bauke, S. Ahrens, C. H. Keitel, and R. Grobe, New J. Phys. **16**, 043012 (2014).
28. K. Bhattacharya and P. B. Pal, Pramana **62**, 1041 (2004).
29. М. С. Андреев, Н. В. Михеев, Е. Н. Нарынская, ЖЭТФ **137**, 259 (2010).
30. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, *Специальные функции (формулы, графики, таблицы)*, Наука, Москва (1977).
31. K. Olive et al., Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014).
32. А. Д. Каминкер, Д. Г. Яковлев, ТМФ **49**, 248 (1981).
33. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Дополнительные главы*, Наука, Москва (1986).
34. E. Roulet, JHEP **1**, 013 (1998).

35. H. Duan and Y.-Z. Qian, *Phys. Rev. D* **69**, 123004 (2004).
36. H. A. Bethe and J. R. Wilson, *Astrophys. J.* **295**, 14 (1985).
37. R. Popham, S. E. Woosley, and C. Fryer, *Astrophys. J.* **518**, 356 (1999).
38. А. А. Гвоздев, И. С. Огнев, *ЖЭТФ* **121**, 1219 (2002).
39. O. Just, M. Obergaulinger, and H.-T. Janka, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **453**, 3386 (2015).
40. W.-X. Chen and A. M. Beloborodov, *Astrophys. J.* **657**, 383 (2007).
41. А. В. Кузнецов, Н. В. Михеев, *ЖЭТФ* **118**, 863 (2000).
42. D. Lai and Y.-Z. Qian, *Astrophys. J.* **505**, 844 (1998).