ЖЭТФ, 2016, том 150, вып. 4 (10), стр. 771–782

TQ-БИФУРКАЦИИ В ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ: ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВЕННЫХ ПЕРЕСТРОЕНИЙ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ

А. В. Макаренко*

Научно-исследовательская группа «Конструктивная кибернетика»
101000, Москва, Россия

Институт проблем управления Российской академии наук
117997, Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 февраля 2016 г.

В дискретных динамических системах определен новый класс бифуркаций и изложены методы их диагностики и анализа свойств. Исследуемые TQ-бифуркации реализуются в дискретных отображениях и связаны с качественным перестроением формы траекторий в расширенном пространстве состояний. В рамках демонстрации основных возможностей инструментария проведен анализ логистического отображения в области расположенной справа от предельной точки удвоений периода. Найдены пять критических значений параметра, при которых происходит качественная перестройка геометрической структуры траекторий отображения. Дополнительно проведено исследование так называемого «отображения следа», возникающего в задачах квантовомеханического описания различных свойств дискретных кристаллических и квазикристаллических решеток.

DOI: 10.7868/S0044451016100138

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие детерминированные динамические системы [1,2], в том числе и с конкретным физическим содержанием [3], имеют «квазислучайное» поведение [4, 5] и представляют собой широкий класс хаотических систем, в которых, в свою очередь, весьма существенно проявляется фундаментальный феномен — бифуркационные перестроения структуры аттрактора.

Концепция бифуркаций в динамических системах впервые была выдвинута Пуанкаре для описания «расщепления» равновесных решений в семействе обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Затем, в связи с широким распространением прикладных задач для теории динамических систем и нелинейных колебаний, бифуркации в основном исследовали изменения качественной структуры орбит в результате малых возмущений системы [2]. Это объясняется тем, что динамические системы, возникающие в приложениях, как правило, содержат параметры (обычно варьируемые), и поэтому очень важно понимать, как качественный фазовый портрет изменяется при варьировании (возмущении) параметров. В итоге трудами многих исследователей была сформирована современная теория бифуркаций [6]. В современной трактовке рассматриваются не только бифуркации положений равновесия и предельных циклов, но и перестройки системы в целом и, прежде всего, ее инвариантных множеств, аттракторов [7]. Следует заметить, что подобная постановка «программы исследований» восходит к работам Андронова.

Чем же важен феномен бифуркаций для исследования хаотических систем? Образование и разрушение структур, смена режимов синхронизации, подавление хаоса через управление, разрушение хаоса и переход к хаосу сопровождаются изменением симметрии и параметров порядка (согласно положениям современной статистической физики) траекторий динамических систем. В основе этого, в свою очередь, лежат те или иные бифуркационные механизмы, реализующиеся в динамических системах [6, 8].

В связи с изложенным выше становится ясно, почему в настоящее время фокус множества исследо-

* E-mail: avm.science@mail.ru

ваний сместился в область совместного рассмотрения явлений бифуркаций в динамических системах и феноменов, ими порождаемых (или их сопровождающих): синхронизации, самоорганизации, управления хаосом. В данном контексте отметим некоторые современные работы, в которых изучаются бифуркации в системе глобально синхронизирующихся осцилляторов при изменении фазового сдвига в связях между ними [9]; вопросы самоорганизации (возникновения фазосинхронных кластеров) в системе слабосвязанных осцилляторов, динамика которых располагается на границе бифуркации Хопфа [10]. В работе [11] на основе модели клеточного автомата типа Изинга исследуются бифуркации и хаотические режимы в обществе по параметру «мнение», а управляющим параметром выступает образование связей между элементами сети. Авторы работы [12] на примере системы связанных осцилляторов Ван дер Поля исследуют бифуркационные механизмы формирования мультистабильности в динамике системы; эти механизмы позволяют описать эффекты синхронизации в достаточно широком классе взаимодействующих систем. В работе [13] изучаются топологические и динамические свойства нейронной сети в зависимости от изменения двух параметров (синаптической задержки и соотношения между потенцированием и депрессией) показано формирование бистабильности в системе, переход между ветвями которой происходит через бифуркацию Хопфа, что оказывает прямое влияние на процессы обучения сети, ее топологическое строение и когнитивные свойства.

Таким образом, анализ бифуркаций, протекающих в динамических системах, является одним из центральных вопросов нелинейной динамики и математического моделирования. На текущий момент теория бифуркаций хорошо развита [6]. Однако это настолько обширная и сложная тема, что она не может считаться методологически завершенной, она постоянно развивается, причем в двух направлениях. С одной стороны, для объяснения различных явлений, демонстрируемых физическими, техническими, биофизическими и социальными системами, необходима адаптация известных бифуркационных механизмов, таких как бифуркации Хопфа, бифуркации удвоения периода, бифуркации вилки и т. п. С другой стороны, происходит поиск новых видов бифуркационных перестроений аттракторов, не укладывающихся в означенные.

Одной из форм математического описания динамических систем являются дискретные отображения

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{f}\left(\mathbf{s}_k, \mathbf{p}\right), \tag{1}$$

где $\mathbf{s}$ — переменная состояния динамической системы, $\mathbf{p}$ — вектор параметров отображения, k — дискретное время. Пусть N — размерность пространства состояний отображения, L — размерность пространства параметров отображения.

Заметим, что дискретные динамические системы в форме (1) являются таким классом объектов, изучение свойств которых важно как с фундаментальной точки зрения, так и с прикладных позиций. При этом отображения (или, иначе, рекуррентные соотношения) применяются как для моделирования собственно динамики систем [3, 4, 14], так и в смежных вопросах, например, при исследовании характеристик магнитных решеток [15,16], анализе различных свойств квазикристаллов [17, 18], изучении хаотизации параметров лучевых траекторий в неоднородных подводных звуковых каналах [19], исследовании динамики заряженных частиц высоких энергий в прямых и изогнутых кристаллах [20].

Хорошо известно, что весьма мощным инструментом исследования рекуррентных соотношений, заданных в виде (1), являются методы символической динамики [1, 2, 21]. При этом возможности символического анализа полностью раскрываются на детерминированных системах вида (1), траектории которых демонстрируют аналогию со случайными процессами [8, 22, 23].

В настоящей статье для дискретных динамических систем определен новый класс бифуркаций и изложены методы их диагностики и анализа свойств. Введенные TQ-бифуркации реализуются в рекуррентных соотношениях и проявляются в виде качественного перестроения формы траекторий в расширенном пространстве состояний [24, 25]. В основе метода лежит формализм символического CTQ-анализа, предложенного автором в работах [26,27] (аббревиатура CTQ обозначает три алфавита, которыми оперирует метод: C, T и Q). Необходимо отметить, что символическая динамика, при всей своей кажущейся внешней простоте, является весьма строго обоснованным инструментом анализа нелинейных динамических систем [21] и позволяет исследовать такие сложные явления в системах, как хаос, странные аттракторы, гиперболичность, структурная устойчивость, управляемость и т. п. (см., например, работы [21–23] и приведенные там ссылки).

В качестве одного из изучаемых примеров, из методических соображений, выбрано логистическое отображение, являющееся эталонным объектом

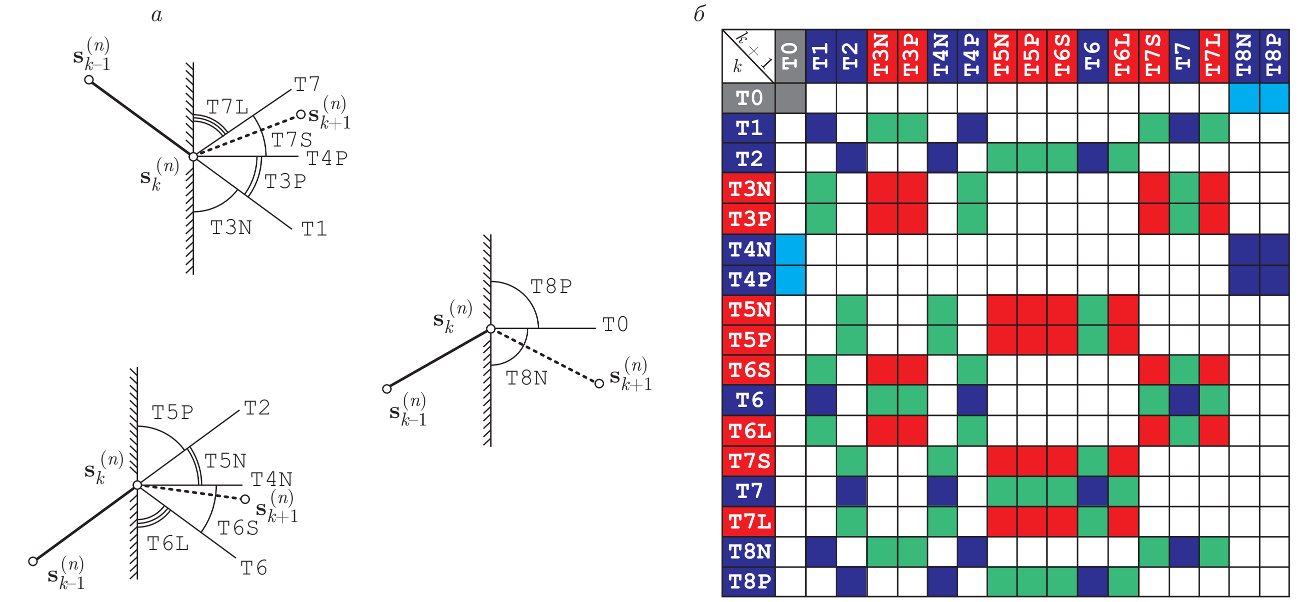

Рис. 1. (В цвете онлайн) Графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ для k-го отсчета и n-й фазовой переменной (a), а также допустимые переходы между символами ($б$)

нелинейной динамики. С учетом универсальности Фейгенбаума многие результаты анализа этой системы распространяются на широкий класс как модельных, так и реальных объектов. Второй пример посвящен исследованию так называемого «отображения следа», возникающего в задачах квантово-механического описания различных свойств дискретных кристаллических и квазикристаллических решеток.

2. СИМВОЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

2.1. Определение Т-алфавита

Свяжем с дискретной динамической системой 1 траекторию ее эволюции, заданную в виде дискретной последовательности (временного ряда) $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$, где фазовая переменная $\mathbf{s}$ системы имеет размерность N, а траектория состоит из K временных отсчетов. При этом каждому k-му отсчету может быть сопоставлен момент времени t_k.

Определим исходное отображение, кодирующее, в терминах конечного Т-алфавита [26, 27], форму n-й компоненты последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$:

$$\begin{gathered}\left\{\mathbf{s}_{k-1}^{(n)}, \mathbf{s}_k^{(n)}, \mathbf{s}_{k+1}^{(n)}\right\} \Rightarrow T_k^{\alpha\varphi}|_n, \\ T_k^{\alpha\varphi} = [T_k^{\alpha\varphi}|_1, \ldots, T_k^{\alpha\varphi}|_N]\,.\end{gathered} \tag{2}$$

Графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ для k-го отсчета и n-й фазовой переменной, приведены на рис. 1a. Строго, отображение (2) задается через соотношения

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{T0} & \Delta s_- = \Delta s_+ = 0, \\
\mathrm{T1} & \Delta s_- = \Delta s_+ < 0, \\
\mathrm{T2} & \Delta s_- = \Delta s_+ > 0, \\
\mathrm{T3N} & \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ < \Delta s_-, \\
\mathrm{T3P} & \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ > \Delta s_-, \\
\mathrm{T4N} & \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ = 0, \\
\mathrm{T4P} & \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ = 0, \\
\mathrm{T5N} & \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ > 0, \quad \Delta s_+ < \Delta s_-, \\
\mathrm{T5P} & \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ > \Delta s_-, \\
\mathrm{T6S} & \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ > -\Delta s_-, \\
\mathrm{T6} & \Delta s_- = -\Delta s_+ > 0, \\
\mathrm{T6L} & \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ < -\Delta s_-, \\
\mathrm{T7S} & \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ > 0, \quad \Delta s_+ < -\Delta s_-, \\
\mathrm{T7} & \Delta s_- = -\Delta s_+ < 0, \\
\mathrm{T7L} & \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ > 0, \quad \Delta s_+ > -\Delta s_-, \\
\mathrm{T8N} & \Delta s_- = 0, \quad \Delta s_+ < 0, \\
\mathrm{T8P} & \Delta s_- = 0, \quad \Delta s_+ > 0,
\end{array} \tag{3}$$

где $\Delta s_- = \mathbf{s}_k^{(n)} - \mathbf{s}_{k-1}^{(n)}$ и $\Delta s_+ = \mathbf{s}_{k+1}^{(n)} - \mathbf{s}_k^{(n)}$.

Таким образом, T-алфавит включает в себя множество символов

$$\mathrm{T}_o^{\alpha\varphi} = \{\mathtt{T0},\, \mathtt{T1},\, \mathtt{T2},\, \mathtt{T3N},\, \mathtt{T3P},\, \mathtt{T4N},\, \mathtt{T4P},\, \mathtt{T5N},\, \mathtt{T5P},\\ \mathtt{T6S},\, \mathtt{T6},\, \mathtt{T6L},\, \mathtt{T7S},\, \mathtt{T7},\, \mathtt{T7L},\, \mathtt{T8N},\, \mathtt{T8P}\}. \quad (4)$$

Как видно из (4), символ $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ кодируется в виде $\mathtt{T}\,i$, где i — правая часть кодов символов алфавита $\mathrm{T}_o^{\alpha\varphi}$. В свою очередь, символ $T_k^{\alpha\varphi}$ кодируется через $\mathtt{T}\,i_1 \cdots i_N$, см. (2). Полный алфавит $\mathrm{T}_o^{\alpha\varphi}|N$, кодирующий форму траектории многомерной последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^{K}$ в целом, состоит из 17^N символов.

2.2. Определение Q-алфавита

Дополнительно к символам $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ вводятся также символы $Q_k^{\alpha\varphi}|_n$:

$$Q_k^{\alpha\varphi}|_n \equiv T_k^{\alpha\varphi}|_n \to T_{k+1}^{\alpha\varphi}|_n,\\ Q_k^{\alpha\varphi} = [Q_k^{\alpha\varphi}|_1,\, \ldots,\, Q_k^{\alpha\varphi}|_n,\, \ldots,\, Q_k^{\alpha\varphi}|_N]\,. \quad (5)$$

Все допустимые переходы составляют множество символов алфавита $\mathrm{Q}_o^{\alpha\varphi} \ni Q_k^{\alpha\varphi}|_n$. Подмножества символов алфавита $\mathrm{Q}_o^{\alpha\varphi}$, отвечающие алфавитам $\mathrm{T}_c^{\alpha\varphi}$, $\mathrm{T}_s^{\alpha\varphi}$ и $\mathrm{T}_0^{\alpha\varphi}$ (см. ниже разбиение (12)), обозначим через $\mathrm{Q}_c^{\alpha\varphi}$, $\mathrm{Q}_s^{\alpha\varphi}$ и $\mathrm{Q}_0^{\alpha\varphi}$. Допустимые переходы обозначены на рис. 1*б*.

Символ $Q_k^{\alpha\varphi}|_n$ кодируется через $\mathtt{Q}\,i\,j$, где i и j — правые части кодов символов алфавита $\mathrm{T}_o^{\alpha\varphi}$ соответственно для k- и $(k+1)$-состояний. В свою очередь, символ $Q_k^{\alpha\varphi}$ кодируется через $\mathtt{Q}\,i_1 \cdots i_n \cdots i_N\, j_1 \cdots j_n \cdots j_N$. Для полного алфавита $\mathrm{Q}_o^{\alpha\varphi}|N$, кодирующего форму траектории последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в целом, справедливо условие $|\mathrm{Q}_o^{\alpha\varphi}|N| = 107^N$.

3. TQ-БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

3.1. Общие положения

Сгруппируем последовательные итерации отображения:

$$\Big\{\mathbf{s},\, \mathbf{f}(\mathbf{s},\mathbf{p}),\, \mathbf{f}^2(\mathbf{s},\mathbf{p})\Big\} \to\\ \to \Big\{\mathbf{f}(\mathbf{s},\mathbf{p}),\, \mathbf{f}^2(\mathbf{s},\mathbf{p}),\, \mathbf{f}^3(\mathbf{s},\mathbf{p})\Big\}, \quad (6)$$

где $\mathbf{f}^w(\mathbf{s},\mathbf{p})$ — композиция функций,

$$\mathbf{f}^w(\mathbf{s},\,\mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\ldots\mathbf{f}(\mathbf{s},\mathbf{p}),\mathbf{p}),\mathbf{p}), \quad \mathbf{f}^0(\mathbf{s},\mathbf{p}) = \mathbf{s}.$$

Исходя из выражений (5) и (2), компоновка (6) однозначно определяет Q-символ, соответствующий состоянию $\mathbf{s}$ динамической системы (1). Зафиксировав вектор параметров $\mathbf{p}$ и варьируя переменную состояния $\mathbf{s}$ отображения в пределах $\mathrm{S}_{\mathbf{p}}^{\mathrm{O}}$ — некоего множества состояний, возможно определить $\left\langle \mathrm{T}^{\alpha\varphi},\, \mathrm{Q}^{\alpha\varphi}\right\rangle_{\mathbf{p}}^{\mathrm{O}}$ — набор T- и Q-символов, входящих в состав траекторий в данной области состояний динамической системы $\mathrm{S}_{\mathbf{p}}^{\mathrm{O}}$, при данном векторе параметров $\mathbf{p}$. Тогда TQ-бифуркацию в системе (1) определим как изменение набора T- и Q-символов в области варьирования переменной состояния $\mathbf{s}$, отвечающее условию

$$\left\langle \mathrm{T}^{\alpha\varphi},\, \mathrm{Q}^{\alpha\varphi}\right\rangle_{\mathbf{a}}^{\mathrm{O}} \xrightarrow[\mathbf{p}=\mathbf{p}_b]{\text{TQ-bif}} \left\langle \mathrm{T}^{\alpha\varphi},\, \mathrm{Q}^{\alpha\varphi}\right\rangle_{\mathbf{b}}^{\mathrm{O}},\\ \left\langle \mathrm{T}^{\alpha\varphi},\, \mathrm{Q}^{\alpha\varphi}\right\rangle_{\mathbf{a}}^{\mathrm{O}} \ne \left\langle \mathrm{T}^{\alpha\varphi},\, \mathrm{Q}^{\alpha\varphi}\right\rangle_{\mathbf{b}}^{\mathrm{O}}, \quad \mathbf{p}_a \ne \mathbf{p}_b, \quad (7)$$

где $\left\langle \mathrm{T}^{\alpha\varphi},\, \mathrm{Q}^{\alpha\varphi}\right\rangle_{\mathbf{a}}^{\mathrm{O}}$ и $\left\langle \mathrm{T}^{\alpha\varphi},\, \mathrm{Q}^{\alpha\varphi}\right\rangle_{\mathbf{b}}^{\mathrm{O}}$ — наборы T- и Q-символов, входящие в состав траекторий соответственно до и после TQ-бифуркации, $\mathbf{p}_b$ — бифуркационное значение вектора параметров. TQ-бифуркации подразделяются на три рода (для иллюстрации см. рис. 2*а*):

I — изменяется набор символов $T^{\alpha\varphi}$, а набор символов $Q^{\alpha\varphi}$ — переходов между неизменными символами $T^{\alpha\varphi}$ — остается неизменным;

II — набор символов $T^{\alpha\varphi}$ остается постоянным, но изменяется набор символов $Q^{\alpha\varphi}$;

III — изменяется как набор символов $T^{\alpha\varphi}$, так и набор символов $Q^{\alpha\varphi}$.

Как следует из изложенного выше, TQ-бифуркации определяют области гомогенной динамики дискретной системы (1) в смысле символического CTQ-анализа, т. е. на уровне формы траектории динамической системы в расширенном пространстве состояний. Смысл этого высказывания иллюстрирует рис. 2*б*, где, в частности, показан один из сценариев перехода между циклами периодов 3 (Γ_C^{TQ}) и 5 (Γ_B^{TQ}) через TQ-бифуркацию II рода.

Потенциально конструктивное применение разработанного подхода к анализу дискретных динамических систем возможно в контексте решения следующих проблем. Во-первых, это задача передачи и кодирования информации в хаотических системах, так как сложность траектории (аттрактора) — их близость к шумовым процессам — является принципиальным моментом для криптографических систем подобного рода. А сложность траектории напрямую связана с ее формой [28], см. также ниже разд. 4.1. Во-вторых, это управление хаотической динамикой и подавление хаотических колебаний при помощи малых внешних воздействий, ибо эффективность управления напрямую зависит от соотно-

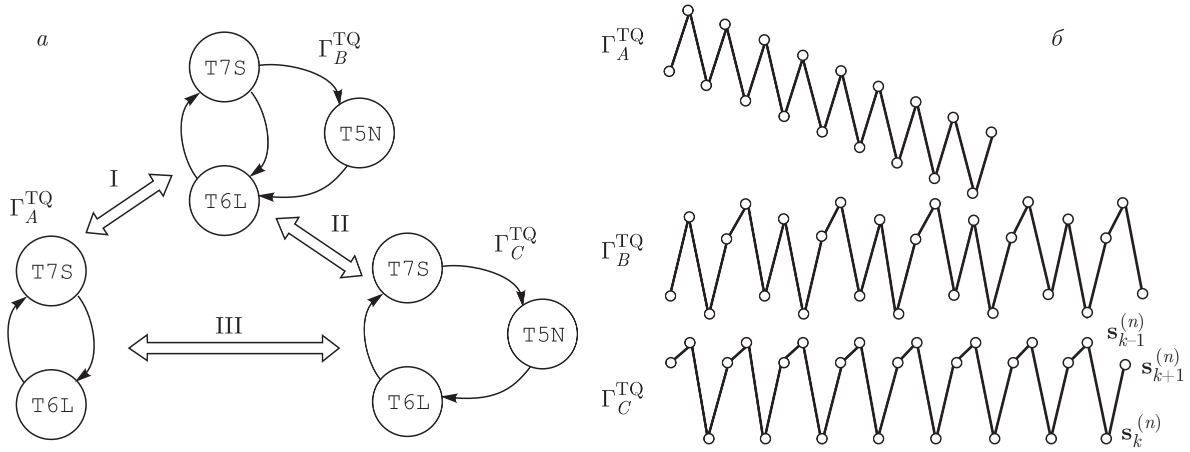

Рис. 2. Иллюстрация сути трех родов TQ-бифуркаций (*а*) и варианты траекторий, соответствующих трем наборам T- и Q-символов (*б*)

шения структуры аттрактора и управляющего воздействия [5,14]. Вопросы, связанные с TQ-бифуркациями и управлением/подавлением хаоса, являются предметом наших настоящих исследований.

Предложенный метод применим не только к системам, эволюционирующим во времени. Изучение TQ-бифуркаций, к примеру в контексте исследования различных решеточных моделей, задаваемых дискретными отображениями, позволяет получить ответы на ряд вопросов. Для случая магнитных решеток (когда фазовые переменные имеют смысл намагниченности на узел [15]) появляется возможность восстановления качественных свойств пространственного профиля намагниченности кристалла и анализа их изменений при варьировании параметров системы (подобную трактовку могут иметь траектории, изображенные на рис. 2*б*, если k принять за пространственный шаг решетки). При исследовании динамики заряженных частиц высоких энергий в изогнутых кристаллах [20] появляется возможность строгого анализа приращений угловых координат частиц при переходе от одной цепочки (решетки) атомов к другой в зависимости от направления кристаллографических осей, радиуса кривизны изгиба кристалла и иных параметров.

3.2. Анализ отображений

Рассмотрим вопросы вычисления бифуркационного значения параметра $\mathbf{p}_b$ и анализа свойств отображений, связанных с TQ-бифуркациями.

Введем обозначения

$$\mathbf{s}_x = \mathbf{s} - \mathbf{f}(\mathbf{s},\,\mathbf{p}), \quad \mathbf{s}_y = \mathbf{f}^2(\mathbf{s},\,\mathbf{p}) - \mathbf{f}(\mathbf{s},\,\mathbf{p}),$$
$$\mathbf{s}_z = \mathbf{f}^3(\mathbf{s},\,\mathbf{p}) - \mathbf{f}^2(\mathbf{s},\,\mathbf{p}). \tag{8}$$

Из (8) выделим для анализа n-ю фазовую переменную и полученные величины представим как декартовы координаты точки в трехмерном пространстве:

$$s_x = \mathbf{s}_x^{(n)}, \quad s_y = \mathbf{s}_y^{(n)}, \quad s_z = \mathbf{s}_z^{(n)},$$
$$P_{\mathrm{Q}\,\mathbf{s}}^{(n)} = \big(s_x, s_y, s_z\big). \tag{9}$$

С учетом (6) несложно видеть, что точка $P_{\mathrm{Q}\,\mathbf{s}}^{(n)}$ определяет символ $Q^{\alpha\varphi}|_n$, соответствующий состоянию $\mathbf{s}$. Введем в рассмотрение плоскость $\mathrm{F}_{\mathrm{T}}^{\prime(n)}$, на которой определим правую декартову систему координат и взаимно однозначно связанную с ней полярную:

$$\mathrm{F}_{\mathrm{T}}^{\prime(n)} \subset \mathbb{R}^2 : \big(s_x, s_y\big) \Leftrightarrow \big(\phi_{s'},\, r_{s'}\big), \tag{10}$$

где $\phi_{s'}$ — полярный угол, а $r_{s'}$ — радиус-вектор. Плоскость $\mathrm{F}_{\mathrm{T}}^{\prime(n)}$ возможно разметить таким образом, что каждая ее точка будет однозначно отвечать единственному символу из алфавита $\mathrm{T}_o^{\alpha\varphi}$. На рис. 3*а* приведена область определения T-символов на плоскости $\mathrm{F}_{\mathrm{T}}^{\prime(n)}$.

С учетом (10) отображение (2) перепишется в виде

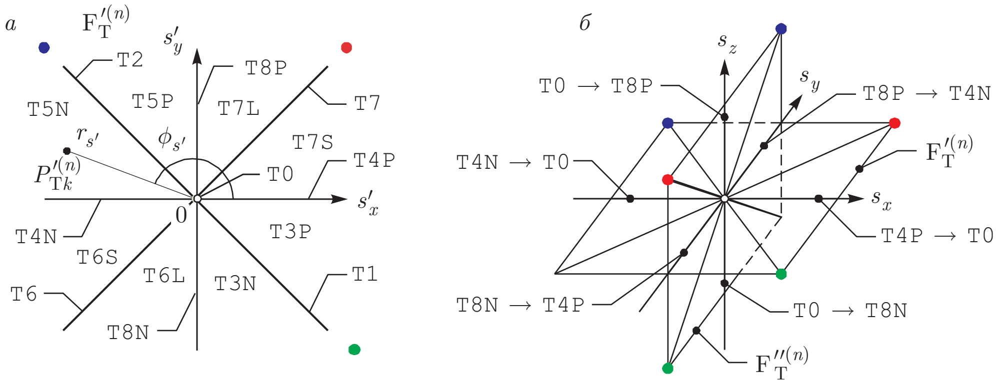

Рис. 3. Разметка плоскости $\mathrm{F}'^{(n)}_{\mathrm{T}}$ (*а*) и разметка и ориентация плоскости $\mathrm{F}''^{(n)}_{\mathrm{T}}$, схема формирования пространства $\mathrm{P}^{(n)}_{\mathrm{TQ}}$ (*б*)

$$
\begin{array}{lll}
\mathtt{T0} & r_{s'} = 0, & \\
\mathtt{T1} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} = 7\,\phi', \\
\mathtt{T2} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} = 3\,\phi', \\
\mathtt{T3N} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} \in (6,\,7)\,\phi', \\
\mathtt{T3P} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} \in (7,\,8)\,\phi', \\
\mathtt{T4N} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} = 4\,\phi', \\
\mathtt{T4P} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} = 0\,\phi', \\
\mathtt{T5N} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} \in (3,\,4)\,\phi', \\
\mathtt{T5P} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} \in (2,\,3)\,\phi', \\
\mathtt{T6S} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} \in (4,\,5)\,\phi', \\
\mathtt{T6} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} = 5\,\phi', \\
\mathtt{T6L} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} \in (5,\,6)\,\phi', \\
\mathtt{T7S} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} \in (0,\,1)\,\phi', \\
\mathtt{T7} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} = 1\,\phi', \\
\mathtt{T7L} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} \in (1,\,2)\,\phi', \\
\mathtt{T8N} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} = 6\,\phi', \\
\mathtt{T8P} & r_{s'} > 0, & \phi_{s'} = 2\,\phi',
\end{array}
\qquad (11)
$$

где $\phi' = \pi/4$. Идея отображения символов Т-алфавита на плоскость $\mathrm{F}'^{(n)}_{\mathrm{T}}$ первоначально была предложена автором в докладе на конференции [29]. Как видно из (11) и рис. 3*а*, все символы Т-алфавита, $\mathrm{T}^{\alpha\varphi}_{o}$, однозначно разделяются на три непересекающихся класса:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}^{\alpha\varphi}_{0} &= \{\mathtt{T0}\}, \\
\mathrm{T}^{\alpha\varphi}_{s} &= \{\mathtt{T1},\,\mathtt{T2},\,\mathtt{T4N},\,\mathtt{T4P},\,\mathtt{T6},\,\mathtt{T7},\,\mathtt{T8N},\,\mathtt{T8P}\}, \\
\mathrm{T}^{\alpha\varphi}_{c} &= \{\mathtt{T3N},\,\mathtt{T3P},\,\mathtt{T5N},\,\mathtt{T5P},\mathtt{T6S},\mathtt{T6L},\mathtt{T7S},\mathtt{T7L}\}.
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

Отметим, что разбиение (12) имеет строгое обоснование через размерность Хаусдорфа [30] областей на плоскости $\mathrm{F}'^{(n)}_{\mathrm{T}}$, занимаемых этими символами.

Дополнительно к плоскости $\mathrm{F}'^{(n)}_{\mathrm{T}}$ введем плоскость $\mathrm{F}''^{(n)}_{\mathrm{T}}$, отвечающую символу $T^{\alpha\varphi}_{k+1}|_n$, на которой также определим правую декартову систему координат и взаимно однозначно связанную с ней полярную:

$$
\mathrm{F}''^{(n)}_{\mathrm{T}} \subset \mathbb{R}^2 : \bigl(s_y,\, s_z\bigr) \Leftrightarrow \bigl(\phi_{s''},\, r_{s''}\bigr). \qquad (13)
$$

Правила разметки этой плоскости аналогичны таковым для плоскости $\mathrm{F}'^{(n)}_{\mathrm{T}}$, но зеркально отраженной по оси s_y, см. рис. 3*б*.

Анализ дискретного отображения вида (1) через представление в координатах изображающей точки $P^{(n)}_{\mathrm{Q}\,\mathbf{s}}$ позволяет однозначно и во взаимосвязи идентифицировать различные его свойства, в том числе неподвижные точки отображения

$$s_x = s_y = s_z = 0,$$

циклы периода два

$$s_x = s_y = -s_z \neq 0, \qquad (14)$$

циклы периода три

$$-\,s_x + s_y + s_z = 0, \quad s_x \neq 0, \quad s_y \neq 0, \quad s_z \neq 0.$$

Отметим, что соотношения (14) задают соответственно следующие уравнения: точки; прямой с выколотой точкой; плоскости с выколотой точкой и разрезанной тремя плоскостями. Для понимания сути соотношений (14) заметим, что координаты s_x, s_y и s_z с точностью до знака представляют собой приращения n-й фазовой переменной отображения $\mathbf{f}(\mathbf{s},\,\mathbf{p})$ при последовательных его итерациях.

Элементарно также обнаруживаются Т- и Q-символы. Например, условия для символов `T5P` и `Q5P6L` записываются следующим образом (см. рис. 3):

$$
\begin{aligned}
&s_x < 0,\ s_y > 0,\ -s_x < s_y, \\
&s_x < 0,\ s_y > 0,\ s_z < 0,\ -s_x < s_y,\ -s_z < s_y.
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

В (14) и (15), задавая S_* — область определения фазовой переменной $\mathbf{s}$, — можно как управлять получаемыми решениями, так и определять область изменения вектора параметров $\mathbf{p}$, в которых эти решения существуют. Таким образом, систематический анализ отображения по составу T- и Q-символов позволяет обнаружить и классифицировать TQ-бифуркации, реализующиеся в нем.

Следует отметить два ключевых момента данного анализа. Во-первых, взаимосвязанная идентификация неподвижных точек отображения, циклов периода два, циклов периода три и TQ-бифуркаций с учетом положений теоремы Шарковского [2] позволяет проводить комплексный анализ системы на предмет свойств хаоса. Во-вторых, подобный анализ, в силу формы базовых выражений, удобно проводить в современных системах компьютерной алгебры (которые де-факто стали стандартным инструментом для большинства физиков, как теоретиков, так и экспериментаторов). Это позволяет существенно экономить время и избегать многих рутинных ошибок.

4. ПРИМЕРЫ

Чтобы сделать восприятие изложенной выше методики обнаружения TQ-бифуркаций в дискретных отображениях более доступным, при построении примеров использовались два непринципиальных упрощения: 1) TQ-бифуркации анализировались только для подмножества символов $\mathrm{T}_c^{\alpha\varphi}$, см. (12); 2) при анализе TQ-бифуркации строились по внешней оболочке аттрактора (притягивающего множества) [1, 5]; внутренняя структура самого аттрактора и внешние по отношению к нему области не рассматривались. Первое ограничение никак не влияет на анализ основных (наиболее вероятных) траекторий, располагающихся в зоне аттрактора, а затрагивает только сепаратрисы (точки равновесия). Оно является чисто техническим и легко снимается посредством расширения анализа на весь T-алфавит, см. (4). Второе ограничение сводится к тому, что анализируются вкупе как траектории собственно аттрактора, так и переходные траектории, располагающиеся непосредственно внутри его внешних границ. Тем не менее оно никак не влияет на полученные результаты: при том или ином значении вектора управляющих параметров аттрактор принципиально не может содержать те или иные T- и/или Q-символы. Естественно, что и второе упрощение возможно снять, но для этого потребуется информация о детальной структуре аттрактора.

4.1. Логистическое отображение

Для демонстрации сути TQ-бифуркаций рассмотрим логистическое отображение, которое является эталонной моделью нелинейной динамики:

$$s_{k+1} = f(s_k,\, \lambda) = 4\,\lambda\, s_k\,(1 - s_k), \tag{16}$$

где $\lambda \in (0,\, 1]$ — управляющий параметр, $s \in (0,\, 1)$ — фазовая переменная системы. Методическое значение этого осциллятора обусловлено тем, что при относительной простоте логистическое отображение порождает широкий спектр сложных, в том числе и хаотических, колебательных режимов [27, 31], переход к которым осуществляется через классический сценарий удвоения периода. С учетом универсальности Фейгенбаума многие результаты распространяются на широкий класс как модельных, так и реальных физических, биофизических, химических и других систем, что обусловливает прикладной интерес к логистическому отображению [31, 32].

Известно, что за предельной точкой удвоений периода $\lambda_\infty = 0.892486418\ldots$ структура динамики (16) необычайно богата (рис. 4*а*): хаотические режимы сменяются циклами различных периодов, которые, в свою очередь, вновь превращаются в хаос; выделяется также значение $\lambda_{3c} = 1/4 + 1/\sqrt{2}$, которое соответствует точке касательной бифуркации (переход к хаосу через перемежаемость). Относительно хаотических режимов, как правило, делается один вывод: с увеличением λ степень хаотичности растет, достигая максимальной величины при $\lambda = 1$. Данный вывод делается на основе анализа показателя Ляпунова (см. рис. 4*б*).

Анализ отображения (16) на основе описанной в статье техники позволяет расширить наши представления о качественном характере колебаний за предельной точкой λ_∞ удвоений периода. Оказывается, что логистический осциллятор в пределах внешней оболочки аттрактора,

$$f(\lambda,\, \lambda) \leqslant s_k \leqslant \lambda, \tag{17}$$

испытывает целый каскад TQ-бифуркаций I и II родов (в контексте подмножества символов $\mathrm{T}_c^{\alpha\varphi}$), которые существенно расширяют допустимые формы траекторий с увеличением параметра λ (рис. 5).

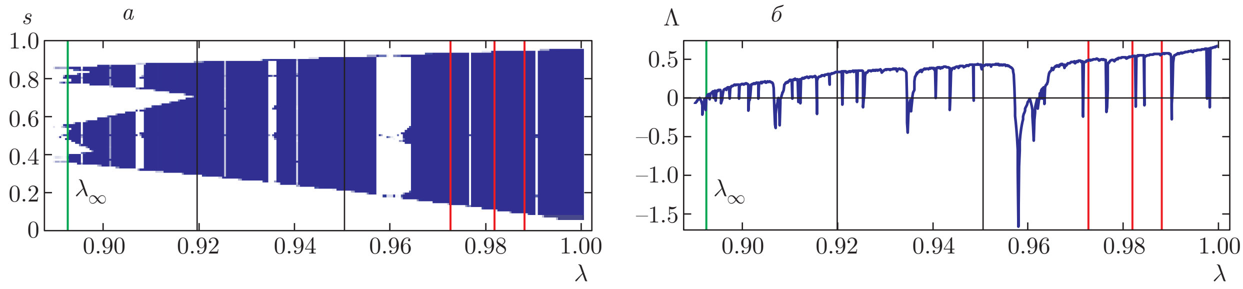

Рис. 4. Логистическое отображение: a — бифуркационная диаграмма; $б$ — показатель Ляпунова Λ

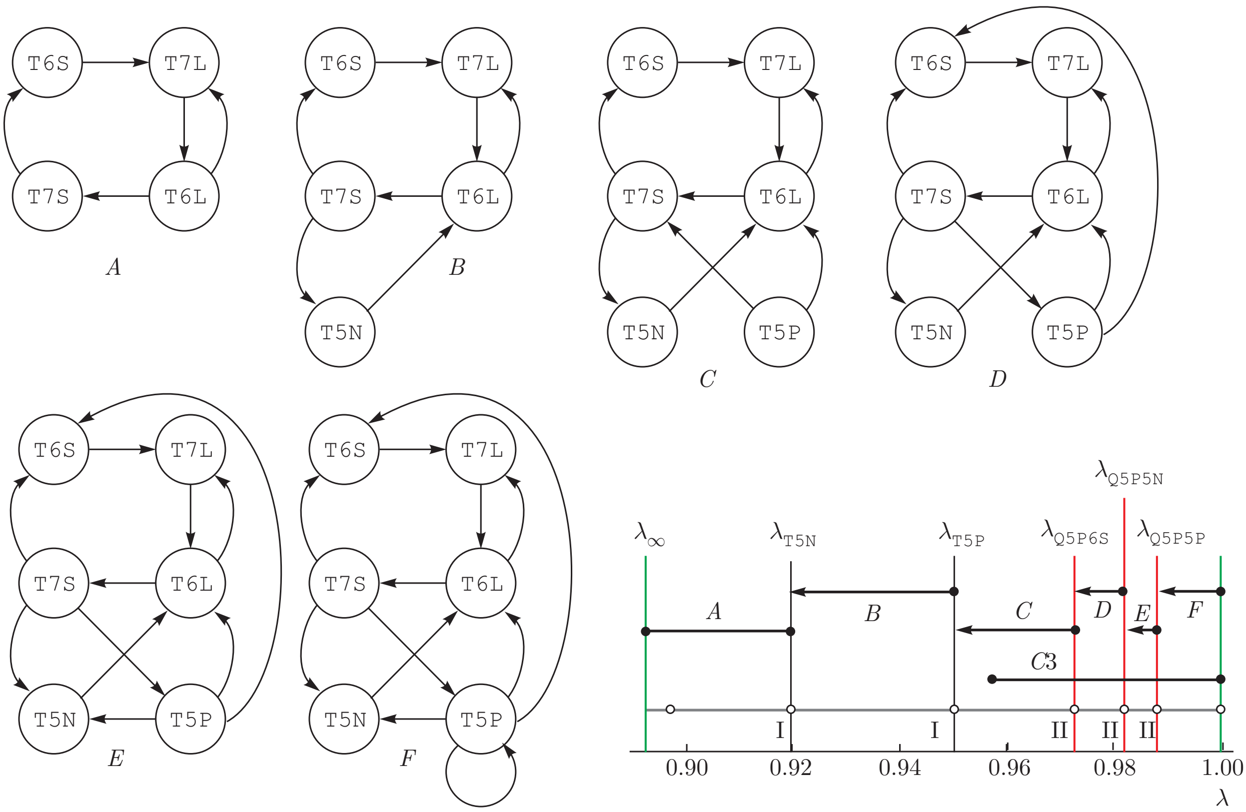

Рис. 5. Диаграмма TQ-бифуркаций логистического отображения справа от точки λ_∞. При обозначении интервалов A–F и $C3$ точка и стрелка имеют смысл соответственно $\lambda = \lambda_*$ и $\lambda \to \lambda_*$, где λ_* — то или иное граничное значение параметра

На интервале

$$\lambda_\infty \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\mathrm{T5N}},$$
$$\lambda_{\mathrm{T5N}} = 0.9196433776070805\ldots,$$
$$\lambda_{\mathrm{T5N}} = \frac{1}{6}\left[1+d_1+d_2\right], \quad d_1 = \left(19-3\sqrt{33}\right)^{1/3}, \tag{18}$$
$$d_2 = \left(19+3\sqrt{33}\right)^{1/3}$$

траектории относятся к типу A. На интервале

$$\lambda_{\mathrm{T5N}} < \lambda \leqslant \lambda_{\mathrm{T5P}},$$
$$\lambda_{\mathrm{T5P}} = 0.95053280974137777\ldots,$$
$$\lambda_{\mathrm{T5P}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times$$
$$\times \left[1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} + c + \sqrt{6\sqrt{3}\,c^{-1} - c^2 - 3}\right)\right]^{1/2}, \tag{19}$$
$$a = \left(\frac{2}{11+3\sqrt{69}}\right)^{1/3},$$
$$b = 2^{2/3}\left(11+3\sqrt{69}\right)^{1/3}, \quad c = \sqrt{b - 10\,a - 1}$$

траектории относятся к типу B. На интервале

$$\begin{gathered}\lambda_{\mathtt{T5P}} < \lambda \leqslant \lambda_{\mathtt{Q5P6S}},\\ \lambda_{\mathtt{Q5P6S}} = 0.9727182637816345\ldots,\\ \lambda_{\mathtt{Q5P6S}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left[1 + \frac{4}{3}\left(1 + 4\,d_1^{-1} + d_1\right)\right]^{1/2}\end{gathered} \tag{20}$$

траектории относятся к типу C. В пределах этого интервала при $\lambda = \lambda_{3c}$ впервые возникают траектории, имеющие минимальный цикл периода 3, которые существуют вплоть до $\lambda = 1$ (см. интервал C3 на рис. 5). На интервале

$$\begin{gathered}\lambda_{\mathtt{Q5P6S}} < \lambda \leqslant \lambda_{\mathtt{Q5P5N}},\\ \lambda_{\mathtt{Q5P5N}} = 0.9819342504466879\ldots\end{gathered} \tag{21}$$

траектории относятся к типу D. Точка $\lambda_{\mathtt{Q5P6S}}$ — один из корней полиномиального уравнения

$$128\lambda^7 - 192\lambda^6 + 32\lambda^5 + 48\lambda^4 - 8\lambda^3 - \\ - 4\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0. \tag{22}$$

На интервале

$$\begin{gathered}\lambda_{\mathtt{Q5P5N}} < \lambda \leqslant \lambda_{\mathtt{Q5P5P}},\\ \lambda_{\mathtt{Q5P5P}} = 0.9880824702836961\ldots,\\ \lambda_{\mathtt{Q5P5P}} = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{1 + 8R_1}\right)\end{gathered} \tag{23}$$

траектории относятся к типу E. Точка R_1 — один из корней полиномиального уравнения

$$256\lambda^8 - 512\lambda^7 + 384\lambda^6 - 192\lambda^5 + 96\lambda^4 - \\ - 32\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0. \tag{24}$$

Окончательное усложнение траекторий внутри аттрактора происходит на интервале $\lambda_{\mathtt{Q5P5P}} < \lambda \leqslant 1$, на котором траектории относятся к типу F.

Из представленных результатов следует, что с увеличением λ усложняется структура аттрактора и растет качественная сложность формы траекторий колебаний, в том числе и в хаотических режимах. Примечательно, что хаотические режимы впервые возникают при $\lambda = \lambda_\infty$, но вплоть до $\lambda = \lambda_{\mathtt{T5N}}$ траектории имеют весьма вырожденную форму в виде набора простых треугольных импульсов различной амплитуды, и только при $\lambda > \lambda_{\mathtt{Q5P5P}}$ форма колебаний становится достаточно «запутанной». Тем не менее колебания логистического осциллятора даже в режиме развитого хаоса являются вырожденными относительно истинно стохастического процесса [5]: сравните структуру траекторий типа F (см. рис. 5) и потенциально допустимый набор Т-символов и переходов между ними (см. рис. 1*б*).

4.2. Отображение следа

При теоретическом исследовании различных решеточных моделей в статистической физике зачастую возникают дискретные отображения вида (1) [33]. Так, приближение Бете–Пайерлса и метод рекуррентных соотношений [15, 16] позволяют свести изучение свойств фазовых переходов и критических явлений в системах к изучению поведения отображений вида (1). В свою очередь, квантовомеханическое приближение при изучении различных свойств дискретных кристаллических и квазикристаллических решеток порождает потребность в анализе свойств и решении дискретных аналогов уравнения Шредингера. Популярный подход к этой задаче предполагает порождение так называемых отображений следа (trace map) [17, 18]. Некоторые из них топологически сопряжены с однопараметрическим отображением на плоскости F_μ:

$$x_{k+1} = x_k\,y_k, \quad y_{k+1} = (x_k - \mu)^2, \tag{25}$$

где $\mu \in [0, 2]$ — управляющий параметр, $x, y \in \in [0, 4]$ — фазовые переменные системы. Исследование характеристик отображений следа важно тем, что последовательность величин x_k, y_k определяет в итоге свойства исследуемого кристалла: является ли он проводником или изолятором, отражает или поглощает излучение и т. п. Помимо этого исследование отображения (25) представляет интерес и с позиций нелинейной динамики и теории хаоса [34].

Анализ системы (25) на основе предложенной в работе техники позволяет дополнить уже известные результаты по изучению этой системы (см., например, работу [35] и приведенные там ссылки). Как показал анализ отображения (25), его траектории в пределах внешней оболочки аттрактора,

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x + y \leqslant 4, \tag{26}$$

по обеим фазовым переменным при всех значениях μ могут содержать полный набор Т-символов. Тем не менее при изменении значений управляющего параметра в системе происходят совместные по обеим фазовым переменным TQ-бифуркации I рода. На рис. 6*а* приведена матрица интервалов параметра μ для существования тех или иных пар символов. Численные значения интервалов следующие:

$$\begin{array}{ll} A:\ 0 \leqslant \mu \leqslant 2, & T:\ 0 \leqslant \mu < 2,\\ Z:\ 0 < \mu \leqslant 2, & H:\ 1/2 < \mu \leqslant 2,\\ R:\ \mu_R < \mu \leqslant 2, & E:\ 1 < \mu \leqslant 2,\\ S:\ \sqrt{2} < \mu \leqslant 2, & B:\ 3/2 < \mu \leqslant 2. \end{array} \tag{27}$$

а

$y \backslash x$	T7S	T7L	T5P	T5N	T6S	T6L	T3N	T3P
T7S					R	A	Z	Z
T7L			T	T	T	Z	E	Z
T5P	S		T					Z
T5N	E	E	T					Z
T6S	Z	T	E					Z
T6L	A	Z	E					A
T3N			E	E	B		A	A
T3P			E	E	H	Z	A	A

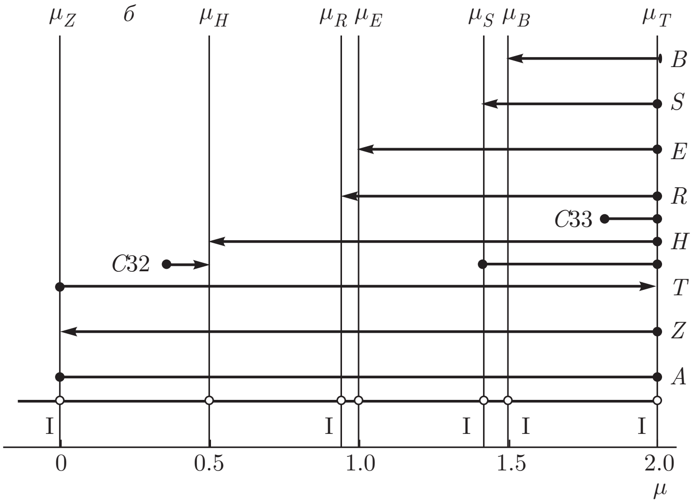

Рис. 6. Отображение (25): *а* — интервалы существования символов; *б* — диаграмма TQ-бифуркаций

Здесь точка $\mu_R = 0.9344372418274018\ldots$ — один из корней полиномиального уравнения

$$2\mu^5 - 16\mu^4 + 42\mu^3 - 31\mu^2 - 24\mu + 26 = 0. \qquad (28)$$

Отметим, что анализ отображения (25) на предмет наличия TQ-бифуркаций II и III родов требует дополнительных исследований.

Дополнительный анализ также показал, что одномоментное по переменным x и y существование циклов периода 2 в системе невозможно. Но одномоментные циклы периода 3 (CP33) существуют в системе в диапазоне значений управляющего параметра

$$\mu_{33} \leqslant \mu \leqslant 2, \quad \mu_{33} = 1.8231182874599805\ldots \qquad (29)$$

Точка μ_{33} — один из корней полиномиального уравнения

$$\mu^{11} - \mu^{10} - 12\mu^9 + \mu^8 + 39\mu^7 + 51\mu^6 - 62\mu^5 - \\ - 160\mu^4 + 120\mu^3 + 160\mu^2 - 512 = 0. \qquad (30)$$

В диапазонах значений параметра μ

$$\begin{gathered} \mu_{32}^1 \leqslant \mu < \frac{1}{2}, \\ \mu_{32}^1 = 0.3533904552829103\ldots, \\ \mu_{32}^2 \leqslant \mu \leqslant 2, \\ \mu_{32}^2 = 1.398425762651376\ldots \end{gathered} \qquad (31)$$

существует также несимметричная одномоментная комбинация циклов ($CP32$): цикл периода 3 по переменной x и цикл периода 2 по y. Точки μ_{32}^1 и μ_{32}^2 — корни полиномиальных уравнений

$$\begin{gathered} \mu^5 - 4\mu^4 + 5\mu^3 + 2\mu^2 - 4\mu + 1 = 0, \\ \mu^5 - 2\mu^4 - 3\mu^3 + 2\mu^2 + 4\mu + 1 = 0. \end{gathered} \qquad (32)$$

Из полученных результатов следует, что траектории невозмущенного отображения ($\mu = 0$) в пределах аттрактора могут содержать только парные T-символы, входящие в интервалы A и T. В то же время траектории классического отображения следа ($\mu = 2$) более сложно устроены: они не могут содержать парные T-символы, входящие в интервал T, но могут иметь множество других комбинаций парных T-символов, а также иметь циклы $C32$ и $C33$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в настоящей работе введен новый класс бифуркаций в дискретных динамических системах. Так называемые TQ-бифуркации, которые реализуются в дискретных отображениях, связаны с качественным перестроением формы траекторий в расширенном пространстве состояний. Изложены также методы диагностики TQ-бифуркаций и анализа их свойств. В основе подхода лежит формализм символического CTQ-анализа, предложенного автором в работах [26, 27].

Потенциально конструктивное применение разработанного подхода к анализу дискретных динамических систем возможно для решения различных физических проблем, например, передачи и кодирования информации в хаотических системах, управления хаотической динамикой и подавления хаотических колебаний при помощи малых внешних воздействий, анализа физических свойств дискретных решеток, например магнитных, изучения динамики заряженных частиц высоких энергий в изогнутых кристаллах. Естественно, что область применения TQ-бифуркаций в дискретных динамических системах не ограничивается только физикой и может быть расширена на любые научно-технические задачи, оперирующие дискретными отображениями.

В рамках демонстрации основных возможностей инструментария проведен анализ логистического отображения в области, расположенной справа от предельной точки удвоений периода. Эта система является эталонной моделью нелинейной динамики. Кроме того, с учетом универсальности Фейгенбаума, многие результаты анализа этой модели распространяются на широкий класс как теоретических, так и реальных объектов [31,32]. Проведенный анализ показал, что с увеличением λ усложняется структура аттрактора и растет качественная сложность формы траекторий колебаний, в том числе и в хаотических режимах. Найдены пять критических значений параметра λ, при которых происходит качественная перестройка геометрической структуры траекторий логистического отображения.

Дополнительно также проведено исследование так называемого отображения следа, возникающего в задачах квантовомеханического описания различных свойств дискретных кристаллических и квазикристаллических решеток [17,18]. Полученные результаты позволили расширить уже известные представления об этой системе [35].

В заключение следует отметить, что предложенные сценарии перестройки геометрической структуры траекторий дискретных отображений ни в коем случае не являются заменой типовых сценариев разрушения хаоса и перехода к хаосу и классических бифуркационных механизмов в динамических системах [1,6–8]. Напротив, анализ TQ-бифуркаций органично интегрируется с ними, позволяя посмотреть на анализируемую систему с несколько иной точки зрения — с точки зрения геометрии ее траектории в расширенном пространстве состояний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс, *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей*, ИКИ, Москва–Ижевск (2002).

2. А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем с обзором последних достижений*, пер. с англ. под ред. А. С. Городецкого, МЦНМО, Москва (2005).

3. С. П. Кузнецов, УФН **181**, 121 (2011).

4. В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова, Г. А. Окрокверцхов, Г. И. Стрелкова, УФН **175**, 163 (2005).

5. А. Ю. Лоскутов, УФН **180**, 1305 (2010).

6. В. И. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников, *Теория бифуркаций*, Итоги науки и техн., серия Соврем. пробл. мат., Фундам. направления, ВИНИТИ, Москва (1986), т. 5.

7. Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа, *Методы качественной теории в нелинейной динамике*, т. II, РХД, Ижевск (2009).

8. R. Gilmore and M. Lefranc, *The Topology of Chaos*, Wiley-Interscience, New York (2002).

9. O. Burylko, Y. Kazanovich, and R. Borisyuk, Phys. Rev. E **90**, 022911 (2014).

10. H. Kori, Y. Kuramoto, S. Jain et al., Phys. Rev. E **89**, 062906 (2014).

11. F. Bagnoli and R. Rechtman, Phys. Rev. E **88**, 062914 (2013).

12. S. Astakhov, N. Fujiwara, A. Gulay et al., Phys. Rev. E **88**, 032908 (2013).

13. Q. Ren, K. M. Kolwankar, A. Samal, and J. Jost, Phys. Rev. E **86**, 056103 (2012).

14. А. Ю. Лоскутов, А. В. Попкова, Письма в ЖЭТФ **94**, 86 (2011).

15. Н. С. Ананикян, Л. Н. Ананикян, Л. А. Чахмахчян, Письма в ЖЭТФ **94**, 40 (2011).

16. J. L. Monroe, J. Stat. Phys. **65**, 255 (1991).

17. A. Romanelli, Physica A **388**, 3985 (2009).

18. Mini-Workshop "*Dynamics of Trace Maps and Applications to Spectral Theory*", ed. by D. Damanik and A. Gorodetski, Oberwolfach Report 03/2011, Oberwolfach (2001).

19. А. Л. Вировлянский, Д. В. Макаров, С. В. Пранц, УФН **182**, 19 (2012).

20. А. И. Ахиезер, Н. Ф. Шульга, В. И. Трутень и др., УФН **165**, 1165 (1995).

21. Р. Боуэн, *Методы символической динамики*, Мир, Москва (1979).

22. C. S. Hsu, *Cell-to-Cell Mapping: a Method of Global Analysis for Nonlinear Systems*, Springer-Verlag, New York (1987).

23. M. Dellnitz and A. Hohmann, Numerische Mathematik **75**, 293 (1997).

24. A. V. Makarenko, School-Seminar “Interaction of Mathematics and Physics: New Perspectives”, Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow (2012).

25. А. В. Макаренко, Наноструктуры. Матем. физика и модел. **8**(2), 21 (2013).

26. А. В. Макаренко, Письма в ЖТФ **38**(4), 1 (2012).

27. А. В. Макаренко, Ж. вычислит. матем. и матем. физ. **52**, 1248 (2012).

28. A. V. Makarenko, IFAC-PapersOnLine **48**, 1049 (2015); arXiv:1506.09103.

29. А. В. Макаренко, в сб. Труды Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (DIFF-14). Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН, Москва (2014), с. 108.

30. В. Гуревич, Г. Волмэн, *Теория размерности*, Гос. изд-во иностр. лит., Москва (1948).

31. E. Mosekilde, Yu. Maistrenko, and D. Postnov, *Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems*, Vol. 42, World Sci. Publ., New York (2002).

32. М. Фейгенбаум, УФН **141**, 343 (1983).

33. Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, Москва (1985).

34. A. N. Sharkovskii, in *Proc. Int. Conf.* “*Low Dimensional Dynamics*”, Oberwolfach, Germany (1993), p. 17.

35. S. S. Belmesova, L. S. Efremova, and D. Fournier-Prunaret, ESAIM: Proceedings and Surveys **46**, 98 (2014).