ЖЭТФ, 2016, том 150, вып. 6 (12), стр. 1113–1126

РЕЛАКСАЦИЯ КИРАЛЬНОГО ДИСБАЛАНСА И ГЕНЕРАЦИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В МАГНИТАРАХ

М. С. Дворников *

Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова Российской академии наук
108840, Троицк, Москва, Россия

Национальный исследовательский Томский государственный университет
634050, Томск, Россия

Институт теоретической физики, университет Гамбурга
D-22761, Гамбург, Германия

Поступила в редакцию 1 апреля 2016 г.

Развивается модель генерации магнитного поля в нейтронной звезде, основанная на неустойчивости магнитного поля, вызванной электрослабым взаимодействием между электронами и нуклонами в ядерном веществе. С помощью методов квантовой теории поля вычисляется скорость изменения спиральности электронов при их рассеянии на протонах в плотном веществе нейтронной звезды. Изучается влияние электрослабого взаимодействия между электронами и фоновыми нуклонами на процесс изменения спиральности. Выводится кинетическое уравнение для эволюции кирального дисбаланса. Полученные результаты применяются для описания эволюции магнитного поля в магнитарах.

DOI: 10.7868/S0044451016120000

1. ВВЕДЕНИЕ

Некоторые нейтронные звезды (НЗ) могут обладать сверхсильными магнитными полями $B \gtrsim 10^{15}$ Гс. Подобные НЗ называют магнитарами [1]. Несмотря на длительную историю наблюдений магнитаров и наличие многочисленных теоретических моделей генерации их магнитных полей, в настоящее время не существует общепринятого механизма, объясняющего происхождение магнитного поля в этих компактных звездах.

При построении модели магнитного поля в магнитаре сталкиваются со следующими основными трудностями. Во-первых, необходимо объяснить генерацию магнитных полей, которые являются достаточно сильными $B \gtrsim 10^{15}$ Гс и крупномасштабными $\Lambda_B \sim R_{NS}$, где $R_{NS} \sim 10$ км — радиус НЗ. Некоторые популярные модели [2,3] предсказывают возникновение подобных магнитных полей в течение нескольких секунд после начала коллапса сверхновой (СН). Однако данные модели требуют весьма специфических начальных условий. Во-вторых, неясно, почему магнитное поле, генерируемое за такой короткий промежуток времени, должно быть заключено внутри НЗ в течение $t \gtrsim 10^3$ лет, что является характерным возрастом молодых магнитаров, и только спустя это время магнитное поле выходит за пределы НЗ, где его энергия преобразуется в гамма- или рентгеновское излучение магнитаров [1]. Модель, разработанная в работе [4] для объяснения электромагнитного излучения магнитаров на основе проникновения магнитного поля через трещины в коре НЗ, является довольно катастрофической.

Недавно в работах [5, 6] было предпринято несколько попыток решить проблему генерации магнитного поля в магнитарах с помощью кирального магнитного эффекта [7]. Данный эффект также был использован для генерации тороидальных магнитных полей в НЗ в работе [8]. Альтернативный механизм, объясняющий возникновение сильных космических магнитных полей на основе неустойчивости магнитного поля, вызванной взаимодействием, нарушающим пространственную четность, был предложен в работах [9, 10]. Несколь-

* E-mail: maxdvo@izmiran.ru

ко лет назад данная идея снова была рассмотрена в работе [11].

В работах [12–14] была разработана новая модель генерации магнитных полей в магнитарах. Основным механизмом, лежащим в основе предложенной модели, является усиление затравочного магнитного поля из-за его неустойчивости в ядерном веществе, обусловленной электрон-нуклонным (eN) электрослабым взаимодействием. В рамках данного подхода было получено усиление затравочного магнитного поля $B_0 = 10^{12}$ Гс, которое довольно часто наблюдается в молодых пульсарах, до значений, предсказываемых в магнитарах. Характерный пространственный масштаб магнитного поля оказался сравнимым с радиусом НЗ. Магнитные поля демонстрировали рост в интервале времен (10^3–10^5) лет в зависимости от их пространственных масштабов. Помимо возникновения сильных магнитных полей, в данной модели предсказывается генерация магнитной спиральности в магнитарах [13].

Несмотря на объяснение различных свойств магнитаров в [12–14], некоторые особенности данной модели нуждаются в более тщательном обосновании на основе расчетов с использованием методов квантовой теории поля (КТП). Данная работа посвящена дальнейшему развитию предлагаемого описания генерации магнитных полей в магнитарах.

В настоящей работе исследуются следующие вопросы. В разд. 2 перечисляются ключевые моменты рассматриваемой модели генерации магнитных полей в магнитарах. В разд. 3 изучаются электрон-протонные (ep) столкновения в плотном веществе НЗ. В частности, в разд. 3.1 вычисляется полная вероятность изменения спиральности электрона при ep-рассеянии. Затем в разд. 3.2 выводится кинетическое уравнение для кирального дисбаланса. Релаксация кирального дисбаланса с точки зрения термодинамики исследуется в разд. 3.3. Полученные результаты применяются в разд. 4 для описания генерации магнитных полей в магнитарах. Выводы представлены в разд. 5. В Приложении A приведено точное решение уравнения Дирака для электрона, электрослабо взаимодействующего с веществом НЗ. Некоторые детали вычисления интегралов по фазовому объему представлены в Приложении B. В Приложении C выводятся кинетические уравнения для чисел заполнения релятивистских электронов. Баланс энергии в магнитаре обсуждается в Приложении D.

2. МОДЕЛЬ ГЕНЕРАЦИИ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В МАГНИТАРАХ

В этом разделе кратко описаны характерные особенности модели генерации сильных крупномасштабных магнитных полей в магнитарах на основе неустойчивости магнитного поля из-за нарушающего четность электрослабого eN-взаимодействия.

Как известно, плотное вещество НЗ состоит из ультрарелятивистских электронов и нерелятивистских нуклонов: нейтронов и протонов. Предполагается, что данное вещество обладает нулевой макроскопической скоростью и нулевой поляризацией. Электроны в таком веществе взаимодействуют с нуклонами посредством электрослабых сил, нарушающих четность. В работах [12, 13] было найдено, что в этом случае во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}$ возникает индуцированный аномальный электрический ток электронов $\mathbf{J}$ следующего вида:

$$\mathbf{J} = \Pi \mathbf{B}, \quad \Pi = \frac{2\alpha_{em}}{\pi} \left(\mu_5 + V_5\right), \tag{1}$$

где $\alpha_{em} \approx 7.3 \cdot 10^{-3}$ — постоянная тонкой структуры, $\mu_5 = (\mu_R - \mu_L)/2$ — киральный дисбаланс, $\mu_{R,L}$ — химические потенциалы правых и левых электронов, $V_5 = (V_L - V_R)/2 \approx G_F n_n / 2\sqrt{2}$, $V_{L,R}$ — эффективные потенциалы взаимодействия левых и правых электронов с нуклонами среды (в основном с нейтронами), $G_F \approx 1.17 \cdot 10^{-5}$ ГэВ$^{-2}$ — постоянная Ферми, а n_n — плотность нейтронов. В явном виде $V_{L,R}$ приведены в формуле (26). Ток в соотношении (1) был выведен в работах [12, 13] с использованием точного решения уравнения Дирака для ультрарелятивистского электрона, взаимодействующего с веществом под действием внешнего магнитного поля. Данный ток добавляется к омическому току $\mathbf{J}_{ohm} = \sigma_{cond} \mathbf{E}$, где σ_{cond} — электрическая проводимость вещества, а $\mathbf{E}$ — электрическое поле.

На основании выражения (1) для тока в работе [13] была получена система уравнений для эволюции спектра плотности магнитной спиральности $h(k,t)$, спектра плотности магнитной энергии $\rho_B(k,t)$ и кирального дисбаланса в виде

$$\frac{\partial h(k,t)}{\partial t} = -\frac{2k^2}{\sigma_{cond}} h(k,t) + \frac{8\alpha_{em}\left[\mu_5(t) + V_5\right]}{\pi \sigma_{cond}} \rho_B(k,t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho_B(k,t)}{\partial t} = -\frac{2k^2}{\sigma_{cond}} \rho_B(k,t) + \frac{2\alpha_{em}\left[\mu_5(t) + V_5\right]}{\pi \sigma_{cond}} k^2 h(k,t), \tag{3}$$

$$\frac{d\mu_5(t)}{dt} = \frac{\pi\alpha_{em}}{\mu_e^2\sigma_{cond}} \int dk \left\{ k^2 h(k,t) - \right.$$
$$\left. - \frac{4\alpha_{em}}{\pi} [\mu_5(t) + V_5] \rho_B(k,t) \right\} - \Gamma_f \mu_5(t), \quad (4)$$

где Γ_f — скорость изменения спиральности электронов в ep-столкновениях (см. разд. 3), а μ_e — средний химический потенциал электронного газа. Функции $h(k,t)$ и $\rho_B(k,t)$ связаны с полной магнитной спиральностью $H(t)$ и напряженностью магнитного поля посредством соотношений

$$H(t) = V \int h(k,t)\,dk, \quad \frac{1}{2}B^2(t) = \int \rho_B(k,t)\,dk, \quad (5)$$

где V — нормировочный объем. Интегрирование в формуле (5) ведется по всему диапазону изменения волнового числа k. Необходимо отметить, что в формуле (5) предполагается изотропность спектров.

Уравнения (2) и (3) для $h(k,t)$ и $\rho_B(k,t)$ являются прямым следствием модифицированного уравнения Фарадея (см. уравнение (24) в разд. 4), в котором учтен аномальный ток в соотношении (2). Первые два члена в правой части уравнения (4) для $\mu_5(t)$ следуют из уравнения (2) и из закона сохранения,

$$\frac{d}{dt}\left(n_R - n_L + \frac{\alpha_{em}}{\pi V} H\right) = 0, \quad (6)$$

где $n_{R,L}$ — концентрации правых и левых электронов. Отметим, что формула (6) является следствием из адлеровской аномалии для ультрарелятивистских электронов ([15], с. 386).

Последнее слагаемое в правой части уравнения (4), $\Gamma_f \mu_5$, было учтено феноменологически. Оно основано на том факте, что спиральность электрона изменяется при ep-столкновении. Как правило, электроны являются ультрарелятивистскими в НЗ. Однако они имеют ненулевую массу. Таким образом, в работе [12] была использована следующая оценка для Γ_f:

$$\Gamma_f \sim \left(\frac{m}{\mu_e}\right)^2 \nu_{coll} \sim \left(\frac{m}{\mu_e}\right)^2 \frac{\omega_p^2}{\sigma_{cond}}, \quad (7)$$

где m — масса электрона, ν_{coll} — частота ep-столкновений, а ω_p — плазменная частота в вырожденной плазме. Уравнение (7) получено на основе соотношения между ν_{coll} и σ_{cond} в классической лоренцевой плазме ([16], с. 61).

Таким образом, чтобы завершить теоретическое обоснование основных уравнений модели в работах [12–14], необходимо рассмотреть изменение спиральности электронов при ep-столкновениях в плотном веществе НЗ с использованием методов КТП. Кроме того, небезынтересным является исследование влияния электрослабого взаимодействия между электронами и нуклонами на данный процесс.

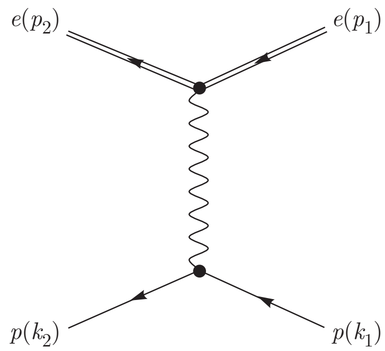

Рис. 1. Диаграмма Фейнмана для ep-рассеяния. Широкие электронные линии обозначают базисные спиноры, соответствующие точному решению уравнения Дирака в формуле (29)

3. ЭЛЕКТРОННО-ПРОТОННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ В ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЕ

В этом разделе исследуется изменение спиральности электронов при рассеянии на протонах в ядерном веществе, состоящем из вырожденных нейтронов, протонов и электронов. Заметим, что при изучении процесса рассеяния точно учитывается электрослабое взаимодействие между электронами и нейтронами. В результате, в разд. 3.1 находится скорость изменения спиральности электронов в рассматриваемом веществе. В разд. 3.2 выводится кинетическое уравнение для кирального дисбаланса. В разд. 3.3 анализируется эволюция кирального дисбаланса с точки зрения термодинамики.

В НЗ спиральность массивного электрона может изменяться при ep- и ee-столкновениях за счет электромагнитного взаимодействия при обмене виртуальным плазмоном, а также при взаимодействии электрона с аномальным магнитным моментом нейтрона. В работе [17] найдено, что скорость ep-реакций в плотном веществе НЗ гораздо выше, чем у остальных. Таким образом, следует учитывать только ep-столкновения.

3.1. Скорость изменения спиральности при ep-столкновениях

Матричный элемент ep-рассеяния за счет электромагнитного взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{M} = \frac{ie^2}{(k_1 - k_2)^2} \bar{u}_e(p_2)\gamma^\mu u_e(p_1) \cdot \bar{u}_p(k_2)\gamma_\mu u_p(k_1), \quad (8)$$

где $e > 0$ — абсолютная величина заряда электрона, $\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$ — матрицы Дирака, $u_{e,p}$ — биспиноры, соответствующие волновым функциям электронов и протонов, а $p^\mu_{1,2} = (E_{1,2}, \mathbf{p}_{1,2})$ и $k^\mu_{1,2} = (\mathcal{E}_{1,2}, \mathbf{k}_{1,2})$ — 4-импульсы электронов и протонов. Импульсы частиц до и после рассеяния имеют индексы 1 и 2. Диаграмма Фейнмана для данного процесса изображена на рис. 1.

Помимо обмена плазмоном с протоном, электрон может электрослабо взаимодействовать с нуклонами вещества НЗ. Чтобы учесть это взаимодействие, в матричном элементе (8) вместо решений уравнения Дирака в вакууме необходимо использовать спиноры, соответствующие точным решениям уравнения Дирака для электрона, взаимодействующего с фоновым веществом, найденные в Приложении А.

Будем интересоваться реакциями, в которых спиральность электрона изменяется на противоположную. Рассмотрим сначала переходы $e_R \to e_L$. В соответствии с уравнением (8) необходимо вычислить следующую величину:

$$J^\mu = (J_0, \boldsymbol{J}) = \bar{u}_-(p_2)\gamma^\mu u_+(p_1). \tag{9}$$

Используя формулы (29) и (32), получаем

$$\begin{aligned} J_0 &= -\frac{mP_0\left[p_1 + p_2 + E_+(p_1) + E_-(p_2) - 2\bar{V}\right]}{2\sqrt{E_{0+}(p_1)E_{0-}(p_2)\left[E_-(p_2) + p_2 - V_R\right]\left[E_+(p_1) + p_1 - V_L\right]}}, \\ \boldsymbol{J} &= -\frac{m\mathbf{P}\left[p_1 - p_2 + E_+(p_1) - E_-(p_2) - 2V_5\right]}{2\sqrt{E_{0+}(p_1)E_{0-}(p_2)\left[E_-(p_2) + p_2 - V_R\right]\left[E_+(p_1) + p_1 - V_L\right]}}, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$P_0 = w^\dagger_-(\mathbf{p}_2)w_+(\mathbf{p}_1), \quad \mathbf{P} = w^\dagger_-(\mathbf{p}_2)\boldsymbol{\sigma}w_+(\mathbf{p}_1). \tag{11}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули, а $\bar{V} = (V_L + V_R)/2$. Для получения формулы (10) используются матрицы Дирака в киральном представлении ([18], с. 387).

Как показано в работе [19], с. 251, при рассмотрении столкновений в релятивистской плазме за счет дальнодействующих кулоновских сил следует пользоваться приближением упругого рассеяния. Таким образом, при исследовании переходов $R \to L$ необходимо считать, что $E_+(p_1) = E_-(p_2)$. При рассмотрении ультрарелятивистских электронов и использовании того факта, что $E_\pm(p_{1,2}) = p_{1,2} + V_{R,L}$ (см. формулу (28)), данное условие эквивалентно $p_1 - p_2 = 2V_5$. Из соотношения (10) получаем, что $\boldsymbol{J} = 0$. Для вычисления P_0 в формуле (11) используется явный вид спиральных амплитуд в соотношении (30). Прямой расчет показывает, что

$$|P_0|^2 = \frac{1}{2}\left[1 - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)\right], \tag{12}$$

где $\mathbf{n}_{1,2}$ — единичные векторы в направлении $\mathbf{p}_{1,2}$.

Таким образом, используя формулы (10) и (12), получаем, что квадрат матричного элемента в соотношении (8) имеет вид

$$|\mathcal{M}|^2 = e^4 m^2 \frac{(p_1 + p_2)^2\left[1 - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)\right]}{8(p_1 - V_5)^2(p_2 + V_5)^2} \times \\ \times \frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + M^2 + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{\left[(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)^2 - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2\right]^2}, \tag{13}$$

где удерживается основной порядок по массе электрона. Заметим, что вклады протонов, которые считаются неполяризованными, в $|\mathcal{M}|^2$ находятся по стандартной схеме (см., например, книгу [20], с. 291).

Полная вероятность рассеяния имеет вид ([20], с. 286)

$$W = \frac{V}{2(2\pi)^8}\int \frac{d^3p_1 d^3p_2 d^3k_1 d^3k_2}{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} \times \\ \times \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)\,|\mathcal{M}|^2 f_e(E_1^+ - \mu_R) \times \\ \times \left[1 - f_e(E_2^- - \mu_L)\right] f_p(\mathcal{E}_1 - \mu_p)\left[1 - f_p(\mathcal{E}_2 - \mu_p)\right], \tag{14}$$

где проведено суммирование по поляризациям протона после рассеяния. Здесь

$$f_{e,p}(E) = \left[\exp(\beta E) + 1\right]^{-1}$$

— распределения Ферми–Дирака электронов и протонов, $\beta = 1/T$ — обратная температура, μ_p — химический потенциал протонов, а V — нормировочный объем. В уравнении (14) предполагается, что электроны до и после рассеяния имеют различные химические потенциалы: μ_R и μ_L. Протоны и электроны принимаются находящимися в тепловом равновесии с одинаковой температурой T. Выражение для полной вероятности соответствует нормировке волновых функций электронов в соотношении (31).

Поскольку вероятность процесса $R \to L$ при ep-столкновении ищется в главном порядке по массе электрона m, а $|\mathcal{M}|^2 \sim m^2$ в формуле (13), можно пренебречь массой электронов при вычислении интегралов по фазовому объему в формуле (14). Кроме того, следует считать, что электронный газ является сильно вырожденным, т. е.

$$
\begin{aligned}
f_e(E_1^+ - \mu_R) &= \theta\left(\mu_R - E_1^+\right), \\
1 - f_e(E_2^- - \mu_L) &= \theta\left(E_2^- - \mu_L\right),
\end{aligned}
$$

где $\theta(z)$ — ступенчатая функция Хевисайда.

Прямое стандартное вычисление интегралов по импульсам электронов и протонов в формуле (14) дает (см. Приложение B)

$$
\begin{aligned}
W(R \to L) &= W_0\left(\mu_R - \mu_L\right)\theta\left(\mu_R - \mu_L\right), \\
W_0 &= \frac{Ve^4}{32\pi^5}\frac{m^2 M}{\mu_e}T\left[\ln\left(\frac{48\pi}{\alpha_{em}}\right) - 4\right],
\end{aligned} \tag{15}
$$

где M — масса протона. Заметим, что при выводе выражения (15) точно учитывалась зависимость от потенциалов взаимодействия электронов с веществом $V_{L,R}$. При рассмотрении переходов $L \to R$ вычисление полной вероятности рассеяния аналогично случаю $R \to L$. Можно показать, что $W(L \to R)$ в этой ситуации полностью совпадает с уравнением (15) с учетом замены $\mu_R \leftrightarrow \mu_L$. Ради краткости соответствующие вычисления не приводятся.

Одним из важных результатов является зависимость W в формуле (15) от химических потенциалов: $W(R \to L) \sim (\mu_R - \mu_L)$. Заметим, что данное свойство не зависит от предположения об упругости ep-столкновений, которое было сделано при выводе формулы (15). Данная зависимость W является следствием выражений для энергии ультрарелятивистских электронов в веществе (28), $E_{1,2}^{\pm} = p_{1,2} + V_{R,L}$, которые должны быть учтены как в дельта-функции, выражающей закон сохранения энергии, $\delta(E_1^+ + \mathcal{E}_1 - E_2^- - \mathcal{E}_2)$, так и в функциях распределения электронов по энергиям. Это приводит к тому, что потенциалы $V_{L,R}$ не входят в множитель $(\mu_R - \mu_L)$ в формуле (15). При учете неупругих эффектов может возникнуть зависимость функции W_0 от $V_{L,R}$.

Протоны предполагаются нерелятивистскими и неполяризованными. Если ввести аналоги потенциалов $V_{L,R}$ для протонов (см. формулу (26)) и обозначить их как $V_{L,R}^{(p)}$, то, используя формулу (28), можно оценить вклад слабого взаимодействия в энергию протонов как

$$
\Delta(\mathcal{E}_{1,2})_{EW} \sim \bar{V}_p \mp k_{1,2}V_5^{(p)}/M,
$$

где

$$
\bar{V}_p = [V_L^{(p)} + V_R^{(p)}]/2, \quad V_5^{(p)} = [V_L^{(p)} - V_R^{(p)}]/2.
$$

Таким образом, видно, что в энергетической дельта-функции в формуле (14)

$$
|\Delta(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)_{EW}| \lesssim p_{F_p}V_5^{(p)}/M \sim 0.1V_5 \ll V_5,
$$

поскольку ферми-импульс протонов в НЗ $p_{F_p} \sim \sim 10^2$ МэВ, а также $M \sim 1$ ГэВ и $V_5^{(p)} \sim V_5$. Как было отмечено выше, для электронов имеем

$$
|\Delta(E_1 - E_2)_{EW}| = 2V_5.
$$

Таким образом, вклад электрослабого взаимодействия через протонную компоненту в закон сохранения энергии пренебрежимо мал по сравнению со вкладом электронов:

$$
|\Delta(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)_{EW}| \ll |\Delta(E_1 - E_2)_{EW}|.
$$

3.2. Кинетика кирального дисбаланса

Исходя из формулы (15) и аналогичного соотношения для переходов $L \to R$, получаем кинетические уравнения для полного числа правых и левых электронов $N_{R,L}$ в виде

$$
\begin{aligned}
\frac{dN_R}{dt} &= -W(R \to L) + W(L \to R) = \\
&= -W_0\left(\mu_R - \mu_L\right), \\
\frac{dN_L}{dt} &= -W(L \to R) + W(R \to L) = \\
&= -W_0\left(\mu_L - \mu_R\right).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Заметим, что уравнения (16) можно также вывести из кинетических уравнений Больцмана для функций распределения правых и левых электронов с учетом интегралов столкновения, описывающих взаимодействия с протонами (см. формулы (39) и (41) в Приложении C).

Вводя концентрации левых и правых электронов $n_{R,L} = N_{R,L}/V$ и используя выражение для $n_{R,L}$ через функцию распределения,

$$
\begin{aligned}
n_{R,L} &= 2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\exp\left[\beta\left(p + V_{R,L} - \mu_{R,L}\right)\right] + 1} \approx \\
&\approx \frac{\left(\mu_{R,L} - V_{R,L}\right)^3}{3\pi^2},
\end{aligned} \tag{17}
$$

получаем, что $d\left(n_R - n_L\right)/dt \approx 2\dot{\mu}_5\mu_e^2/\pi^2$, где учтено, что $\dot{V}_5 = 0$ и $\mu_5 \ll \mu_e$. Окончательно, можно вывести кинетическое уравнение для μ_5:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mu_5}{dt} &= -\Gamma_f\mu_5, \\
\Gamma_f &= \frac{\alpha_{em}^2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{48\pi}{\alpha_{em}}\right) - 4\right]\left(\frac{m}{\mu_e}\right)^2\left(\frac{M}{\mu_e}\right)T,
\end{aligned} \tag{18}
$$

где мы используем формулы (15) и (16).

Необходимо отметить, что величина Γ_f в формуле (7) отличается от использованной в [12–14].

Причина расхождения выражений для Γ_f в формулах (7) и (18) состоит в том, что в работе [12] были использованы результаты работы [17], в которой исследовалось рассеяние неполяризованных электронов на протонах. Однако в рассматриваемой в настоящей работе задаче важны фиксированные поляризации электронов, которые имеют противоположные значения до и после рассеяния. Это объясняет тот факт, например, что коэффициент Γ_f в формуле (18) линеен по T, тогда как в соотношении (7) данная величина пропорциональна T^2.

При изучении эволюции кирального дисбаланса не было учтено влияние магнитного поля, присутствующего в уравнениях (2)–(4). В частности, кинетическое уравнение для μ_5 было выведено в главном ненулевом порядке по α_{em}. Если бы при вычислении матричного элемента в формуле (8) использовались решения уравнения Дирака для электрона, взаимодействующего с фоновым веществом и внешним магнитным полем, как, например, в работах [12,13], то это привело бы к поправкам высшего порядка по α_{em} в Γ_f в соотношении (18).

Отметим также, что недавно Γ_f было вычислено в работе [21]. Значение Γ_f, полученное в [21], не зависит от T, поскольку в данной работе предполагалось, что протоны невырождены. Это предположение справедливо на ранних стадиях эволюции НЗ. В настоящей работе изучается генерация магнитного поля в НЗ, находящейся в состоянии термодинамического равновесия при $t \gtrsim 10^2$ лет после начала коллапса СН (см. разд. 4 ниже). На данном этапе эволюции НЗ протонная компонента вещества является вырожденной. Температуру вырождения для протонов, которые являются нерелятивистскими, можно оценить, исходя из соотношения $T_{deg} \sim n_p^{2/3}/M$, где n_p — концентрация протонов. Полагая $n_p = 9 \cdot 10^{36}$ см$^{-3}$ (см., например, [13] и разд. 4), получаем, что $T_{deg} \sim 10^{10}$ К. Ниже, в разд. 4, предполагается, что начальная температура НЗ $T_0 \le 10^9$ К, т. е. $T_0 \ll T_{deg}$. Таким образом, в нашей модели протоны являются вырожденными с хорошей степенью точности. Необходимо также отметить, что $\Gamma_f \sim \alpha_{em}^2$ в формуле (18), что совпадает с результатом работы [21].

3.3. Термодинамическое описание релаксации кирального дисбаланса

Недавно, в работе [5] было высказано предположение о том, что кинетика кирального дисбаланса в системе левых и правых электронов, электрослабо взаимодействующих с веществом, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mu_5}{dt} = -\Gamma_f(\mu_5 + V_5), \tag{19}$$

а не уравнению (18), которое следует из результатов наших вычислений. Можно, тем не менее, показать, что уравнение (19) противоречит законам термодинамики.

Используя формулу (17), можно переписать уравнение (19) в виде

$$\frac{d}{dt}(n_R - n_L) = -\frac{2\mu_e^2}{\pi^2}\Gamma_f(\mu_5 + V_5). \tag{20}$$

Из формулы (20) следует, что состояние равновесия, в котором $n_{R,L} = \text{const}$, достигалось бы при $\tilde{\mu}_R = \tilde{\mu}_L$, где $\tilde{\mu}_{L,R} = \mu_{L,R} - V_{L,R}$, а не при $\mu_R = \mu_L$, как того требуют законы термодинамики ([22], с. 292). Заметим, что формально введенные величины $\tilde{\mu}_{L,R} = \tilde{\mu}_{L,R}(P,T)$, где P — давление в системе, — химические потенциалы в отсутствие фонового вещества.

Анализ состояния равновесия в системе левых и правых электронов является частным случаем описания равновесия тела во внешнем поле $\mathcal{V}(\mathbf{r})$. Как показано в работе [22], с. 96, равновесие в данном случае достигается, когда полный химический потенциал $\mu = \tilde{\mu}(P,T) + \mathcal{V}$ принимает постоянные значения внутри системы (в нашем случае — внутри НЗ, см. ниже). Результаты работы [22] легко обобщаются на случай системы, состоящей из частиц двух типов: левых и правых электронов. В этой ситуации получаем, что в состоянии равновесия должны совпадать полные химические потенциалы: $\mu_L = \mu_R$.

Химический потенциал определяется как энергия, приобретаемая системой при добавлении туда одной частицы ([22], с. 94). В настоящей работе в качестве системы служит НЗ. Поэтому химический потенциал следует определять по отношению к вакууму, т. е. пространству снаружи НЗ, где нет фонового вещества. Величины $\mu_{L,R}$, используемые в настоящей работе, имеют смысл полных химических потенциалов, включающих в себя взаимодействие с веществом, которое является аналогом внешнего поля. Это, в частности, следует из формул (14) и (17), поскольку энергии левых и правых электронов в функциях распределения отсчитываются от вакуума.

Более того, формальное переопределение химического потенциала, предложенное в работе [5], $\mu_{L,R} \to \tilde{\mu}_{L,R} = \mu_{L,R} - V_{L,R}$, которое имело бы смысл только внутри НЗ, тем не менее, трудноосуществимо на практике. Данное переопределение эквивалентно независимому выбору начала отсчета энергии для левых и правых электронов. Однако при $\Gamma_f \neq 0$ левые и правые частицы сталкиваются с протонами и приходят в состояние термодинамического равновесия. Таким образом, левые и правые частицы не образуют независимых термодинамических систем. Следовательно, невозможно одновременно сдвинуть химические потенциалы на разные значения $V_L \neq V_R$.

Заметим, что в вакууме нет расщепления энергии релятивистских частиц по спиральности, см. формулу (28). Следовательно, снаружи НЗ для левых и правых электронов может быть выбран одинаковый уровень отсчета энергии, поэтому использование полных химических потенциалов $\mu_{L,R}$, включающих взаимодействие с веществом и определенных по отношению к вакууму, является более предпочтительным.

Таким образом, уравнение (19), предложенное в работе [5], не только не подтверждается прямым расчетом вероятности процессов $e_{L,R} \leftrightarrow e_{R,L}$ в разд. 3.1, но и противоречит выводам макроскопической термодинамики.

4. ГЕНЕРАЦИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В МАГНИТАРАХ

В данном разделе будет найдено численное решение уравнений (2)–(4) с учетом новой зависимости Γ_f от T в формуле (18). Ранее подобная задача уже исследовалась в работах [13, 14]. Необходимо кратко напомнить начальные условия для уравнений (2)–(4), соответствующие НЗ.

В качестве начального условия для спектра плотности магнитной энергии выберем колмогоровский спектр: $\rho_B(k,t_0) = \mathcal{C}k^{-5/3}$, где постоянная $\mathcal{C}$ связана с затравочным полем в молодом пульсаре $B(t_0) = B_0 = 10^{12}$ Гс посредством соотношения (5). Интегрирование в формуле (5) происходит по интервалу $k_{min} < k < k_{max}$, где $k_{min} = 2\cdot10^{-11}$ эВ $= R_{NS}^{-1}$, $R_{NS} = 10$ км — радиус НЗ, $k_{max} = \Lambda_B^{-1}$, а Λ_B — минимальный масштаб магнитного поля, который является свободным параметром. Начальный спектр плотности магнитной энергии выбирается в виде $h(k,t_0) = 2q\rho_B(k,t_0)/k$, где $0 \leq q \leq 1$ — параметр, определяющий начальную спиральность: $q = 0$ соответствует нулевой спиральности, а $q = 1$ — максимальной. Выберем начальное значение кирального дисбаланса следующим образом: $\mu_5(t_0) = 1$ МэВ. Заметим, что эволюция магнитного поля практически не зависит от величины $\mu_5(t_0)$ из-за большого Γ_f.

Концентрации электронов, протонов и нейтронов считаются равными $n_e = n_p = 9\cdot10^{36}$ см$^{-3}$ и $n_n = 1.8\cdot10^{38}$ см$^{-3}$. Это соответствует $\mu_e = 125$ МэВ для релятивистских электронов. Вещество с подобными параметрами может присутствовать в НЗ.

Чтобы учесть энергетический баланс в системе, состоящей из магнитного поля и фонового вещества, необходимо перенормировать параметр Π в формуле (1) (см. Приложение D):

$$\Pi \to \Pi\left[1 - \frac{B^2}{B_{eq}^2(T)}\right], \tag{21}$$

где B и B_{eq} определены в формулах (5) и (43). Замена в формуле (21) позволяет также устранить чрезмерный рост магнитного поля при $t \gg t_0$. Перенормировка, аналогичная (21) для $B \ll B_{eq}$, была также использована в работе [14].

Будем рассматривать эволюцию магнитного поля в НЗ, находящейся в состоянии теплового равновесия, которое имеет место при $t_0 < t \lesssim 10^6$ лет, где $t_0 \sim 10^2$ лет. Если исследуется НЗ с достаточно малой массой $M < 1.44M_\odot$, где $M_\odot = 2\cdot10^{33}$ г — масса Солнца, то, как показано в работе [23], в данном временном интервале НЗ остывает за счет излучения нейтрино в модифицированных урка-процессах. Это приводит к зависимости температуры от времени [23, 24]

$$T(t) = T_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/6}, \tag{22}$$

где $T_0 = (10^8\text{–}10^9)$ К — температура, соответствующая $t = t_0$. Для более массивных НЗ остывание за счет излучения нейтрино может происходить быстрее, чем это следует из формулы (22). Более того, в работе [23] найдено, что для НЗ с массой $M = 1.3M_\odot$ при $t_0 = 10^2$ лет температура в центре НЗ $T_0 = 4\cdot10^8$ К в случае полного отсутствия сверхтекучести нейтронной компоненты, и $T_0 = 3\cdot10^8$ К — если сверхтекучесть существует только в коре НЗ. В ситуации, когда сверхтекучесть представлена также и в ядре НЗ, T_0 может быть значительно меньше 10^8 К. Таким образом, мы будем рассматривать достаточно легкую НЗ либо не находящуюся целиком в сверхтекучем состоянии, либо когда сверхтекучесть имеет место только в коре НЗ. Используя результаты работы [17], можно получить зависимость проводимости от времени $\sigma_{cond}(t) = \sigma_0\,(t/t_0)^{1/3}$, где $\sigma_0 = 2.7\cdot10^8\cdot(T_0/10^8\text{ К})^{-2}$ МэВ — проводимость при $t = t_0$. Также необходимо учесть новую зависимость Γ_f от времени в формуле (18):

$$\Gamma_f = 1.6\cdot10^{11}\ \text{с}^{-1}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/6}, \tag{23}$$

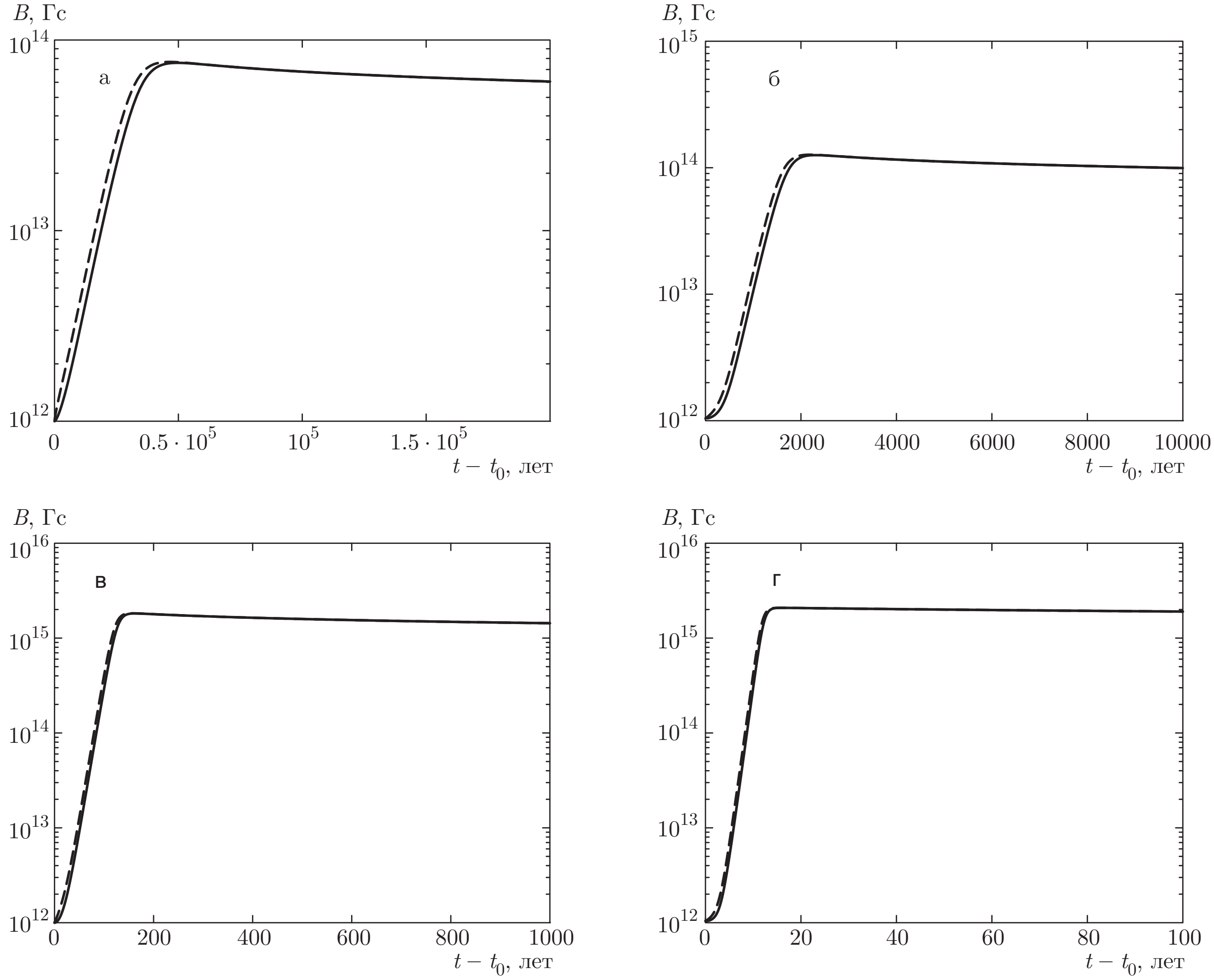

Рис. 2. Зависимость магнитного поля в магнитаре от $t - t_0$ для различных k_{max} и T_0. Сплошные линии соответствуют магнитным полям с нулевой начальной спиральностью ($q = 0$), а штриховые линии — полям с максимальной начальной спиральностью ($q = 1$): *а* — эволюция магнитного поля для $k_{max} = 2 \cdot 10^{-10}$ эВ ($\Lambda_B = 1$ км) и $T_0 = 10^8$ K; *б* — рост магнитного поля при $k_{max} = 2 \cdot 10^{-9}$ эВ ($\Lambda_B = 10^2$ м) и $T_0 = 10^8$ K; *в* — эволюция магнитного поля для $k_{max} = 2 \cdot 10^{-10}$ эВ ($\Lambda_B = 1$ км) и $T_0 = 10^9$ K; *г* — рост магнитного поля при $k_{max} = 2 \cdot 10^{-9}$ эВ ($\Lambda_B = 10^2$ м) и $T_0 = 10^9$ K

где используются соотношение (22) и выбранная концентрация электронов.

На рис. 2 показана зависимость напряженности магнитного поля от времени на основе численного решения уравнений (2)–(4) с выбранными начальными условиями. На рис. 2 видно, что магнитное поле демонстрирует экспотенциальный рост на начальном этапе эволюции. Данный рост поля генерируется электрослабым eN-взаимодействием и определяется ненулевым параметром V_5.

Рост поля происходит при $t - t_0 \sim (10–10^5)$ лет в зависимости от Λ_B и T_0. Наибыстрейший рост наблюдается при $T_0 = 10^9$ K, что соответствует наименьшей σ_{cond} также для мелкомасштабных полей. Данный факт может быть объяснен исходя из уравнения Фарадея

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\Pi}{\sigma_{cond}} (\nabla \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma_{cond}} \nabla^2 \mathbf{B}, \qquad (24)$$

которое эквивалентно уравнениям (2) и (3). Из уравнения (24) следует, что характерное время роста магнитного поля имеет вид $t \sim \sigma_{cond} \Lambda_B / \Pi$, что и объясняет отмеченную выше особенность. Заметим, что время роста поля до максимального значения $t \sim (10^3–10^5)$ лет при $T_0 = 10^8$ K, см. рис. 2*а* и 2*б*, близко к наблюдаемому возрасту молодых магнитаров [1].

Максимальная напряженность магнитного поля $B_{max} \sim (10^{14}–10^{15})$ Гс определяется начальной тепловой энергией. После достижения B_{max} поле начинает медленно убывать. Это объясняется продолжающейся потерей энергии из-за излучения нейтрино. Заметим, что B_{max} на рис. 2*а* меньше, чем на рис. 2*б*. Данный факт следует из того, что временной масштаб поля на рис. 2*а* больше и, соответственно, нейтрино успевают унести больше энергии из НЗ. Необходимо отметить, что $B_{max} \sim 10^{15}$ Гс на рис. 2*в* и 2*г* соответствуют предсказаниям магнитных полей в магнитарах [1].

На рис. 2 также показана эволюция магнитных полей с различной начальной спиральностью. Видно, что различия в поведении таких полей существенны только при малых временах эволюции. Данный факт согласуется с результатами работы [13].

Заметим, что новая зависимость Γ_f от времени в формуле (23) существенно не влияет на эволюцию магнитных полей по сравнению с результатами работ [13, 14]. Как было найдено в работе [12], почти любое $\mu_5(t_0)$ быстро стремится к нулю из-за большого Γ_f. Следовательно, несмотря на то, что $\Gamma_f(t_0)$ отличается от использованного в работах [13,14], нельзя ожидать существенного различия в поведении поля при $t \gtrsim t_0$. При больших временах эволюции, $t \gg t_0$, $\Gamma_f(t)$ будет стремиться к нулю быстрее чем в работах [13,14]. Однако в этом временном диапазоне основное влияние на рост поля оказывает перенормировка Π в формуле (21).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что в данной работе были изучены *ep*-столкновения в плотном веществе НЗ. В частности, в разд. 3 было рассмотрено рассеяние поляризованных электронов на неполяризованных протонах. В разд. 3.1 была вычислена полная скорость изменения спиральности электрона при столкновении с протоном, в которой было точно учтено электрослабое взаимодействие между электронами и нейтронами вещества НЗ. Кинетическое уравнения для кирального дисбаланса было выведено в разд. 3.2. Релаксация кирального дисбаланса с точки зрения термодинамики была проанализирована в разд. 3.3. Полученные результаты были использованы в разд. 4 для описания генерации магнитных полей в магнитарах.

Заметим, что изначально модель генерации магнитного поля в магнитарах на основе электрослабого eN-взаимодействия была сформулирована в работе [12]. Затем, в работах [13, 14] данная модель была скорректирована. Однако скорость изменения спиральности при *ep*-столкновениях была оценена в [12, 13], исходя из качественных соображений классической физики ([16], с. 61). Как известно, спин частицы является сугубо квантовым объектом. Именно поэтому его эволюция должна изучаться соответствующим образом. В настоящей работе были использованы методы КТП для вычисления скорости изменения спиральности. Этим можно объяснить отличие полученных результатов от результатов работ [12, 13], см. формулы (18) и (7).

Еще одним важным результатом, полученным в данной работе, является исследование влияния электрослабого взаимодействия электронов с нейтронами на процесс изменения их спиральности при столкновениях с протонами. Используя метод точных решений уравнения Дирака во внешнем поле (см. Приложение A), считая что рассеяние упругое и, что электроны ультрарелятивистские, мы нашли, что эффективные потенциалы $V_{L,R}$ не входят в явном виде в выражение для полной вероятности процессов $e_{L,R} \leftrightarrow e_{R,L}$ в формуле (15). Отсюда следует, что кинетическое уравнение для кирального дисбаланса (18) совпадает с таковым, использованным в работах [12–14], в противоположность недавнему утверждению в работе [5]; см. уравнение (19). Более того, выведенное нами кинетическое уравнение (18) подтверждается законами термодинамики; см. разд. 3.3. Таким образом, именно электрослабое eN-взаимодействие инициирует рост магнитного поля в модели, предложенной в работах [12–14].

Наконец, аккуратный учет закона сохранения энергии в Приложении D позволил видоизменить перенормировку параметра Π в формуле (21) по сравнению с результатами работы [14]. Это привело к более корректному описанию эволюции магнитного поля в магнитарах в разд. 4, особенно при $B \sim \sim B_{eq}$. Тем не менее, параметры генерируемого поля, $B_{max} \sim (10^{14}–10^{15})$ Гс и время роста поля до максимального значения $\lesssim 5 \cdot 10^4$ лет, согласуются с астрофизическими предсказаниями для магнитаров [1].

Интересно также сравнить результаты настоящей работы с результатами недавнего исследования [6], в котором предсказывается генерация сверхсильных, $B \sim 10^{18}$ Гс, магнитных полей в магнитарах за счет комбинации кирального магнитного и кирально-вихревого [25] эффектов в электрон-нейтринном веществе в течение примерно 10^{-23} с. Заметим, что пространственный масштаб магнитного поля, предсказываемый в работе [6], составляет около 10^{-12} см. В работе [6] утверждается, что пространственный масштаб поля может увеличиться за счет механизма, аналогичного обратному каскаду энергии [26]. Однако никаких количественных оценок увеличения масштаба поля в работе [6] не приводится. Кроме того, в работе [27] было показано, что мелкомасштабные магнитные поля будут эффективно диссипировать за время порядка нескольких секунд за счет явления пересоединения магнитных силовых линий. Таким образом, применение результатов [6] для объяснения магнитных полей магнитаров выглядит сомнительным. Аналогичное возражение может быть высказано и в отношении результатов работы [5], поскольку в данной работе также предсказывается генерация мелкомасштабных магнитных полей. Как следует из результатов численного моделирования в разд. 4, магнитные поля, предсказываемые в рамках нашей модели, являются крупномасштабными, что делает их невосприимчивыми к диссипационным процессам типа магнитного пересоединения.

Автор выражает признательность В. Г. Багрову и В. Б. Семикозу за плодотворные дискуссии. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №15-02-00293), ДААД (грант № 91610946) и в рамках программы повышения конкурентоспособности ТГУ.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Решение уравнения Дирака для электрона, слабо взаимодействующего с ядерным веществом

В этом Приложении приведено точное решение уравнения Дирака для электрона, электрослабо взаимодействующего с ядерным веществом, состоящим из нейтронов и протонов. Следует отметить, что аналогичная проблема также исследовалась в работе [28]. Тем не менее, здесь данное решение представлено в виде, удобном для последующих вычислений.

Рассмотрим электронейтральное вещество НЗ, состоящее из нейтронов, протонов и электронов. Предполагается, что данное вещество находится в состоянии покоя и не поляризовано. Уравнение Дирака для пробного электрона, описываемого биспинорной волновой функцией ψ, который электрослабо взаимодействует с нейтронами и протонами, имеет вид

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - m - \gamma^0\left(V_L P_L + V_R P_R\right)\right]\psi = 0, \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} V_L &= \frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[n_n - n_p(1-4\xi)\right](1-2\xi), \\ V_R &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[n_n - n_p(1-4\xi)\right]2\xi, \end{aligned} \tag{26}$$

— эффективные потенциалы взаимодействия левой и правой киральных проекций с веществом, $n_{n,p}$ — постоянные и однородные плотности нейтронов и протонов, $\xi = \sin^2\theta_W \approx 0.23$ — параметр Вайнберга, $P_{L,R} = (1 \mp \gamma^5)/2$ — киральные проекторы, а $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Будем искать решение уравнения (25) в виде

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}}\exp[-iEt + i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})]u, \tag{27}$$

где u — постоянный биспинор. Тогда, используя уравнение (25), получаем спектр энергии в форме

$$\begin{aligned} E &= \bar{V} + E_0, \quad \bar{V} = \frac{V_L + V_R}{2}, \\ E_0^2 &= (p - sV_5)^2 + m^2, \quad V_5 = \frac{V_L - V_R}{2}, \end{aligned} \tag{28}$$

где $s = +1$ для правых электронов и $s = -1$ для левых электронов. Заметим, что в формуле (28) не учитываются позитронные степени свободы. Если электроны ультрарелятивистские, то из соотношения (28) следует, что $E_\pm = p + V_{R,L}$.

Используя киральное представление для матриц Дирака ([18], с. 387), можно найти базисные биспиноры в виде

$$\begin{aligned} u_+ &= N_+ \begin{pmatrix} w_+ \\ -\dfrac{m}{E_+ + p - V_L} w_+ \end{pmatrix}, \\ u_- &= N_- \begin{pmatrix} -\dfrac{m}{E_- + p - V_R} w_- \\ w_- \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{29}$$

где $w_\pm$ — спиральные амплитуды ([20], с. 110),

$$\begin{aligned} w_+(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos\dfrac{\vartheta}{2} \\ e^{i\phi/2}\sin\dfrac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}, \\ w_-(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2}\sin\dfrac{\vartheta}{2} \\ e^{i\phi/2}\cos\dfrac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь ϕ и ϑ — сферические углы, задающие направление вектора $\mathbf{p}$. Спиноры $w_\pm$ являются собственными векторами оператора спиральности: $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\, w_\pm = \pm|\mathbf{p}|w_\pm$.

Если нормировать волновую функцию электрона следующим образом —

$$\int d^3x\, \psi^\dagger \psi = 1 \tag{31}$$

— то нормировочные константы $N_\pm$ в формуле (29) равны

$$N_\pm = \sqrt{\frac{E_\pm + p - V_{L,R}}{2E_{0\pm}}}, \tag{32}$$

где $E_\pm$ и $E_{0\pm}$ даны в уравнении (28).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Вычисление интегралов по фазовому объему

В данном Приложении вычисляются интегралы по импульсам электронов и протонов в формуле (14). Поскольку в приближении упругого рассеяния вклады электронов и протонов в матричный элемент (13) факторизуются, вычисление интегралов в формуле (14) можно проводить независимо.

Сначала вычислим интеграл по электронным импульсам:

$$I_e = \int \frac{d^3p_1 d^3p_2\, (p_1+p_2)^2\, [1 - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)]}{16\, (p_1 - V_5)^2\, (p_2 + V_5)^2} \times \\ \times \delta^3 (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{q})\, \delta (p_1 - p_2 + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + V_R - V_L) \times \\ \times \theta (\mu_R - p_1 - V_R)\, \theta (p_2 + V_L - \mu_L), \tag{33}$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$. В формуле (33) предполагается, что электроны сильновырожденные и ультрарелятивистские. Используя законы сохранения, можно привести соотношение (33) к виду

$$I_e = \pi \frac{|\mathbf{q}|^2 - V_5^2}{4|\mathbf{q}|} \times \\ \times \frac{(\mu_R - \mu_L)\, \theta (\mu_R - \mu_L)}{(\mu_R - \bar{V})\, (\mu_L - \bar{V})} \approx \\ \approx \frac{\pi|\mathbf{q}|}{4\mu_e^2} (\mu_R - \mu_L)\, \theta (\mu_R - \mu_L), \tag{34}$$

где предполагалось, что $\mu_{L,R} \gg \bar{V}$, $\mu_L \approx \mu_R \approx \mu_e$, и $|\mathbf{q}| \gg V_5$. Важным следствием из формулы (34) является то, что V_5 не входит в разность химических потенциалов в числителе.

Интеграл по импульсам протонов

$$I_p = \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 + M^2 + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{\left[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 + \omega_p^2\right]^{3/2}} \times \\ \times f_p(\mathcal{E}_1 - \mu_p)\, [1 - f_p(\mathcal{E}_2 - \mu_p)] \tag{35}$$

может быть вычислен с помощью замены переменных: $\mathbf{q} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1$. Заметим, что в формулу (35) была введена плазменная частота в вырожденном веществе [29] $\omega_p^2 = 4\alpha_{em}\mu_e^2/3\pi$, чтобы избежать инфракрасной расходимости. Считая, что протоны вырождены и имеют небольшую ненулевую температуру, а также что вещество НЗ электронейтрально, можно преобразовать формулу (35) к виду

$$I_p = 16 \mu_e M \pi^2 T \left[\ln \left(\frac{48\pi}{\alpha_{em}} \right) - 4 \right]. \tag{36}$$

Используя формулы (34) и (36), приходим к уравнению (15).

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Кинетические уравнения для чисел заполнения левых и правых электронов

В данном Приложении выводятся кинетические уравнения (16) на основе уравнения Больцмана с интегралом столкновений.

В отсутствие внешних полей кинетические уравнения для пространственно-однородных функций распределения левых и правых электронов $f_{L,R} = f_{L,R}(\mathbf{p}_{L,R}, t)$ имеют вид

$$\frac{\partial f_{L,R}}{\partial t} = J_{coll}\, [f_{L,R}], \tag{37}$$

где $J_{coll}\, [f_{L,R}]$ — интегралы столкновений. Поскольку в разд. 3.1 и 3.2 исследуются столкновения, в которых спиральность электронов изменяется на противоположную, $J_{coll}\, [f_{L,R}]$ представимы в следующей форме [30]:

$$\begin{aligned} J_{coll}\, [f_L] = & \int \frac{d^3p_R}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{M}_{R\to L}|^2}{2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \times \\ & \times (2\pi)^4 \delta^4 (p_L + k_2 - p_R - k_1) \times \\ & \times (1 - f_L)\, f_R\, [1 - f_p(\mathbf{k}_2)]\, f_p(\mathbf{k}_1) - \\ & - \int \frac{d^3p_R}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{M}_{L\to R}|^2}{2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \times \\ & \times (2\pi)^4 \delta^4 (p_L + k_1 - p_R - k_2) \times \\ & \times f_L\, (1 - f_R)\, [1 - f_p(\mathbf{k}_2)]\, f_p(\mathbf{k}_1), \\ J_{coll}\, [f_R] = & \int \frac{d^3p_L}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{M}_{L\to R}|^2}{2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \times \\ & \times (2\pi)^4 \delta^4 (p_L + k_1 - p_R - k_2) \times \\ & \times (1 - f_R)\, f_L\, [1 - f_p(\mathbf{k}_2)]\, f_p(\mathbf{k}_1) - \\ & - \int \frac{d^3p_L}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{M}_{R\to L}|^2}{2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \times \\ & \times (2\pi)^4 \delta^4 (p_L + k_2 - p_R - k_1) \times \\ & \times f_R\, (1 - f_L)\, [1 - f_p(\mathbf{k}_2)]\, f_p(\mathbf{k}_1), \end{aligned} \tag{38}$$

где $f_p(\mathbf{k}_{1,2})$ — функции распределения протонов до и после столкновения, которые определены в разд. 3.1, а $\mathcal{M}_{L\to R}$ и $\mathcal{M}_{R\to L}$ — матричные элементы соответствующих процессов, нормировка которых совпадает с формулой (8). В соотношении (38) учтено усреднение по поляризациям протонов.

Интегрируя уравнения (37) по p_L и p_R с учетом формулы (38) и умножая полученный результат на $V/(2\pi)^3$, получаем кинетические уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dN_L}{dt} &= W\left(R \to L\right) - W\left(L \to R\right), \\ \frac{dN_R}{dt} &= W\left(L \to R\right) - W\left(R \to L\right) \end{aligned} \tag{39}$$

для полных чисел заполнения левых и правых электронов, определенных согласно соотношению

$$N_{L,R}(t) = V \int \frac{d^3 p_{L,R}}{(2\pi)^3} f_{L,R}(\mathbf{p}_{L,R}, t). \tag{40}$$

Полные вероятности переходов в формуле (39) имеют вид

$$\begin{aligned} W\left(R \to L\right) &= \frac{V}{2(2\pi)^8} \int d^3p_L d^3p_R d^3k_1 d^3k_2 \times \\ &\times \frac{|\mathcal{M}_{R\to L}|^2}{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} \delta^4\left(p_L + k_2 - p_R - k_1\right) \times \\ &\times \left(1 - f_L\right) f_R \left[1 - f_p(\mathbf{k}_2)\right] f_p(\mathbf{k}_1), \\ W\left(L \to R\right) &= \frac{V}{2(2\pi)^8} \int d^3p_L d^3p_R d^3k_1 d^3k_2 \times \\ &\times \frac{|\mathcal{M}_{L\to R}|^2}{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} \delta^4\left(p_L + k_1 - p_R - k_2\right) \times \\ &\times f_L \left(1 - f_R\right) \left[1 - f_p(\mathbf{k}_2)\right] f_p(\mathbf{k}_1). \end{aligned} \tag{41}$$

В первом приближении можно заменить $f_{L,R}$ в формуле (41) на равновесные функции распределения электронов $f_e(E - \mu_{L,R})$, которые использованы в разд. 3.1. В этом случае видно, что формулы (39) и (41) совпадают соответственно с соотношениями (16) и (14).

ПРИЛОЖЕНИЕ D

Источник энергии, обеспечивающий рост магнитного поля

В данном Приложении рассмотрен механизм преобразования тепловой энергии фермионов вещества в энергию растущего магнитного поля.

Несмотря на тот факт, что фермионы в НЗ сильно вырождены, они обладают ненулевой температурой. Например, по прошествии $t \sim 10^2$ лет после взрыва СН температура может достигать $T \gtrsim 10^8$ К. В работе [14] было выдвинуто предположение, что рост магнитного поля, предсказанный в работах [12, 13], может быть обеспечен передачей тепловой энергии от фермионов вещества. Чтобы обосновать возможность данного процесса, необходимо рассмотреть уравнение, описывающее сохранение энергии в магнитной гидродинамике ([31], с. 331):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon_T + \frac{B^2}{2}\right) = -(\nabla \cdot \boldsymbol{q}), \tag{42}$$

где ρ — масса единицы объема вещества НЗ, ε_T — внутренняя энергия единицы объема, $\mathbf{v}$ — скорость, а $\boldsymbol{q}$ — плотность потока энергии.

Можно представить ε_T в виде $\varepsilon_T = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon_T$, где ε_0 — не зависящая от температуры внутренняя энергия вырожденного газа, а $\delta\varepsilon_T$ — тепловая поправка. В работе [14] было показано, что магнитное поле может черпать энергию из $\delta\varepsilon_T$. Кроме того, в работе [14] было найдено, что

$$\delta\varepsilon_T = \frac{B_{eq}^2}{2} = \left[\frac{M_N(p_{F_n} + p_{F_p})}{2} + \mu_e^2\right]\frac{T^2}{2}, \tag{43}$$

где M_N — масса нуклонов, а $p_{F_{p,n}}$ — импульсы Ферми для протонов и нейтронов.

Интегрируя уравнение (42) по объему НЗ V и предполагая, что $\boldsymbol{q} = 0$ на поверхности НЗ, а также принимая во внимание формулу (43), получаем закон сохранения

$$\frac{d}{dt}\left(\delta\varepsilon_T + \rho_B\right) = 0, \quad \rho_B = \frac{1}{2V}\int B^2 d^3x. \tag{44}$$

Соотношение (44) показывает, что рост магнитного поля происходит благодаря уменьшению тепловой поправки ко внутренней энергии. В уравнении (44) учтено, что $\dot{\varepsilon}_0 = 0$.

Используя уравнение (44), можно обосновать перенормировку параметра Π в формуле (21). Если пренебречь остыванием НЗ за счет излучения нейтрино, то, интегрируя уравнение (44) с соответствующим начальным условием, можно получить, что

$$B^2 + B_{eq}^2(T) = B_{eq}^2(T_0),$$

где учтено, что $B_{eq}(T_0) \gg B_0$ в типичной НЗ. Следовательно, температура вещества НЗ будет зависеть от растущего магнитного поля как

$$T^2 = T_0^2[1 - B^2/B_{eq}^2(T_0)],$$

где использовалась формула (43). Затем, используя температурную зависимость проводимости $\sigma_{cond} \propto \propto 1/T^2$ [17], находим, что проводимость становится зависящей от растущего магнитного поля:

$$\sigma_{cond} \to \sigma_{cond}\left[1 - \frac{B^2}{B_{eq}^2(T_0)}\right]^{-1}. \tag{45}$$

Необходимо отметить, что данную зависимость достаточно учесть в уравнениях (2)–(4) только в слагаемых, содержащих $\mu_5 + V_5$, поскольку только они ответственны за неустойчивость магнитного поля. В работе [32] было показано, что по прошествии примерно 10^2 лет после взрыва СН излучение нейтрино в модифицированных урка-процессах дает основной вклад в остывание НЗ. Если принять во внимание также и этот канал остывания НЗ, то необходимо заменить $B_{eq}^2(T_0)$ на $B_{eq}^2(T)$ в формуле (45). Данная модификация уравнений (2)–(4) эквивалентна формуле (21). Таким образом, усиление магнитного поля, предсказываемое в нашей модели, учитывает остывание НЗ за счет излучения нейтрино.

Следует заметить, что при выводе закона сохранения в формуле (44) предполагалось, что $\boldsymbol{q} = 0$. Данное предположение эквивалентно пренебрежению излучением фотонов с поверхности НЗ. Следовательно, если считать, что $\boldsymbol{q} \neq 0$, т. е. излучение с поверхности НЗ присутствует, то часть начальной тепловой энергии будет расходоваться в этом канале остывания НЗ. Таким образом, напряженность магнитного поля B_{max}, полученная в разд. 4, будет несколько завышенной. Однако, как показано в работе [32], излучение фотонов с поверхности НЗ является второстепенным (по сравнению с излучением нейтрино, которое, как уже было отмечено выше, точно учитывается в нашей модели) каналом остывания НЗ во временном интервале 10^2 лет $\lesssim t \lesssim 10^6$ лет, который использовался в разд. 4. Следовательно, если при выводе аналога закона сохранения (44) считать, что $\boldsymbol{q} \neq 0$, то это приведет к не слишком сильному расхождению в величине B_{max} по сравнению с разд. 4.

Интересно отметить, что, несмотря на охлаждение НЗ из-за роста магнитного поля, второй закон термодинамики не нарушается. Данный факт может быть проверен с использованием уравнения переноса тепла в магнитной гидродинамике ([31], с. 335), которое, кстати, следует из уравнения (42):

$$\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\, s\right] = \kappa \nabla^2 T + \frac{1}{\sigma_{cond}} (\nabla \times \mathbf{B})^2, \qquad (46)$$

где s — энтропия единицы массы, а κ — коэффициент теплопроводности. Заметим, что в уравнении (46) отброшен тензор вязких напряжений. Интегрируя уравнение (46) по объему НЗ, получаем закон изменения полной энтропии S в виде ([33], с. 273)

$$\frac{dS}{dt} = \int \kappa \frac{(\nabla T)^2}{T^2}\, d^3x + \int \frac{(\nabla \times \mathbf{B})^2}{T\sigma_{cond}}\, d^3x, \qquad S = \int \rho s\, d^3x. \qquad (47)$$

Из формулы (47) следует, что $\dot{S} > 0$, т. е. второй закон термодинамики не нарушается.

В конце данного Приложения необходимо отметить, что магнитное охлаждение хорошо известно в науке и технике. Во-первых, можно упомянуть радиационное охлаждение электронов в сильном магнитном поле с образованием двухуровневой системы фермионов с противоположно направленными спинами [34]. Во-вторых, отметим магнитокалорический эффект, который имеет множество технологических приложений [35].

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Mereghetti, J. A. Pons, and A. Melatos, Space Sci. Rev. **191**, 315 (2015).
2. R. C. Duncan and C. Thompson, Astrophys. J. **392**, L9 (1992).
3. J. Vink and L. Kuiper, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. Lett. **370**, L14 (2006).
4. C. Thompson, M. Lyutikov, and S. R. Kulkarni, Astrophys. J. **574**, 332 (2002).
5. G. Sigl and N. Leite, J. Cosmol. Astropart. Phys. **01**, 025 (2016).
6. N. Yamamoto, Phys. Rev. D **93**, 065017 (2016).
7. V. A. Miransky and I. A. Shovkovy, Phys. Rep. **576**, 1 (2015).
8. J. Charbonneau and A. Zhitnitsky, J. Cosmol. Astropart. Phys. **08**, 010 (2010).
9. A. Vilenkin, Phys. Rev. D **22**, 3067 (1980).
10. V. A. Rubakov, Progr. Theor. Phys. **75**, 366 (1986).
11. A. Boyarsky, O. Ruchayskiy, and M. Shaposhnikov, Phys. Rev. Lett. **109**, 111602 (2012).
12. M. Dvornikov and V. B. Semikoz, Phys. Rev. D **91**, 061301 (2015).
13. M. Dvornikov and V. B. Semikoz, J. Cosmol. Astropart. Phys. **05**, 032 (2015).
14. M. Dvornikov and V. B. Semikoz, Phys. Rev. D **92**, 083007 (2015).
15. С. Вайнберг, *Квантовая теория поля. Том 2. Современные приложения*, Физматлит, Москва (2003).

16. А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, Москва (1978).

17. D. C. Kelly, Astrophys. J. **179**, 599 (1973).

18. К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля*, т. 2, Мир, Москва (1984).

19. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, 2-е изд., Физматлит, Москва (2002).

20. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, 3-е изд., Наука, Москва (1989).

21. D. Grabowska, D. B. Kaplan, and S. Reddy, Phys. Rev. D **92**, 085035 (2015).

22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика. Часть 1*, 5-е изд., Физматлит, Москва (2002).

23. O. Y. Gnedin, D. G. Yakovlev, and A. Y. Potekhin, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **324**, 725 (2001).

24. C. J. Pethick, Rev. Mod. Phys. **64**, 1133 (1992).

25. D. E. Kharzeev, J. Liao, S. A. Voloshin et al., Progr. Part. Nucl. Phys. **88**, 1 (2016).

26. С. Д. Данилов, Д. Гурарий, УФН **170**, 921 (2000).

27. S. G. Moiseenko and G. S. Bisnovatyi-Kogan, Int. J. Mod. Phys. D **17**, 1411 (2008).

28. A. Grigoriev, S. Shinkevich, A. Studenikin et al., Grav. Cosmol. **14**, 248 (2008).

29. E. Braaten and D. Segel, Phys. Rev. D **48**, 1478 (1993).

30. С. де Гроот, В. ван Леувен, Х. ван Верт, *Релятивистская кинетическая теория*, Мир, Москва (1983).

31. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, 4-е изд., Физматлит, Москва (2003).

32. D. G. Yakovlev and C. J. Pethick, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **42**, 169 (2004).

33. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, 5-е изд., Физматлит, Москва (2003).

34. И. М. Тернов, В. Г. Багров, О. Ф. Дорофеев, Изв. вузов, сер. физика, вып. 10, 63 (1968).

35. B. F. Yu, Q. Gao, B. Zhang et al., Int. J. Refrig. **26**, 622 (2003).