

МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ПРИ ФРАГМЕНТАЦИИ СФЕРИЧЕСКОГО УДАРНИКА НА СПЛОШНОМ ТОНКОМ ЭКРАНЕ ПРИ ВЫСОКИХ СКОРОСТЯХ УДАРА

*Н. Н. Мягков**

*Институт прикладной механики Российской академии наук
125040, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 6 апреля 2016 г.

Рассматривается задача о фрагментации алюминиевого ударника на тонком сплошном алюминиевом экране при высоких скоростях удара. Отличительной особенностью настоящей работы является то, что численное моделирование фрагментации было выполнено на основе полной системы уравнений механики деформируемого твердого тела методом гладких частиц в трехмерной постановке. Проводится анализ перехода от поврежденности к фрагментации и извлекаются скейлинговые соотношения в терминах скорости удара V , отношения толщины экрана к диаметру ударника h/D и предела прочности σ_p в критерии разрушения для материалов ударника и экрана. Анализ показывает, что критическая скорость удара V_c , которая отделяет области поврежденности и фрагментации ударника, является степенной функцией от σ_p и h/D . Средневзвешенная масса фрагментов в закритической области ($V > V_c$), имеет асимптотику в виде степенной функции от скорости удара с показателем, не зависящим ни от h/D , ни от σ_p . Средние кумулятивные распределения фрагментов по массам в критической точке проявляют свойство масштабной инвариантности при изменении параметров h/D и σ_p . Средние массы наибольшего фрагмента также проявляют свойство масштабной инвариантности при $V > V_c$, но только при изменении параметра σ_p .

DOI: 10.7868/S0044451017010072

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамическая фрагментация, вызванная ударом или взрывом, исследовалась на протяжении ряда лет [1–22]. Типичные экспериментальные ситуации, в которых наблюдается фрагментация, соответствуют столкновению тяжелых ядер в атомной физике [3, 4, 10, 21, 22], столкновению макроскопических тел [1, 7, 11], в том числе столкновению ударника с массивной преградой [1, 5, 17, 19], взрывному разрушению оболочек [13, 15], и разрушению ударника при высокоскоростном пробитии тонкого экрана [2, 6, 9, 12, 14, 20].

Возможность критического поведения в процессе фрагментации впервые анализировалась применительно к задаче, исследующей ядерные столкновения при промежуточных энергиях [3, 4, 10, 21, 22]. Авторы этих работ использовали подход, основанный на подобии наблюдаемого распределения фрагментов и предсказаниями известных теорий

критических явлений, таких как фазовый переход жидкость–пар и перколяция. Эти методы были затем применены к исследованию поведения фрагментации в механических системах [9, 11, 13–19]. В результате численного моделирования было найдено, что при увеличении энергии системы точка перехода от повреждения к фрагментации в твердом теле ведет себя как критическая точка [11]. Существование критического перехода от повреждения к фрагментации было подтверждено для различных типов механических систем как экспериментально [15, 16], так и посредством численного моделирования [8, 9, 11, 13, 14, 17–19].

Переход от поврежденности к фрагментации, или степень разрушения, могут быть охарактеризованы различными путями: массой среднего фрагмента, массой наибольшего фрагмента, флуктуациями массы наибольшего фрагмента и др. [3, 4, 9, 11, 13–19, 21, 22]. В задачах, где присутствует соударение, в качестве контрольного параметра обычно выбирают скорость удара или энергию удара [9, 11–14, 17–19], или общее число образующихся фрагментов [3, 4, 15, 21, 22].

* E-mail: nn_myagkov@mail.ru

Здесь необходимо отметить, что в работах по численному моделированию фрагментации в механических системах фрагментируемый объект описывался или набором тождественных частиц, связанных между собой парным потенциалом (по аналогии с методом молекулярной динамики) [10, 14], или множеством элементов различной формы, связанных друг с другом разными типами невесомых связующих элементов [11, 13, 17–19]. Динамика частиц (элементов), включающая как поступательное, так и вращательное движение, описывалась в этих моделях системой уравнений Ньютона. Из этих методов наиболее распространенными являются метод молекулярной динамики и так называемые модели дискретных элементов (discrete element models).

Отличительной особенностью настоящей работы является то, что численное моделирование фрагментации было выполнено на основе полной системы уравнений механики деформируемого твердого тела (МДТТ) методом гладких частиц (smoothed particle hydrodynamics, SPH) [23–25] в трехмерной постановке. Этот подход, который уже применялся нами в работе [9], позволил в этой работе проверить выводы, сделанные ранее на базе моделей молекулярной динамики и моделей дискретных элементов [10, 11, 13, 14, 17–19].

В настоящей работе мы рассматриваем задачу о фрагментации алюминиевого ударника на тонком сплошном алюминиевом экране, представляющем собой тонкую пластинку, при высоких скоростях удара. Дается количественная характеристика разрушения ударника посредством статистики облака фрагментов. Основное внимание в работе уделено масштабным эффектам, сопровождающим фрагментацию ударника.

2. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ И МОДЕЛИ МАТЕРИАЛА

2.1. Метод SPH

Численное моделирование в трехмерной геометрии было выполнено на основе полной системы уравнений МДТТ методом SPH с помощью лицензионного пакета LS-DYNA [26] версии 971. LS-DYNA является многоцелевой программной системой конечно-элементного анализа, разработанной в Ливерморской национальной лаборатории (США). Она дает возможность решения трехмерных динамических нелинейных задач механики деформируемого твердого тела. Пакет LS-DYNA версии 971 включает в себя расчетный модуль SPH. Метод SPH

является сравнительно новым бессеточным численным методом, чрезвычайно удобным для моделирования высокоскоростных ударных явлений. Довольно полный обзор, включая историю метода, можно найти в работе [23]. В работах [24, 25] метод SPH впервые был распространен на 3D-задачи, включающие упругопластическое поведение материала. Отсутствие сетки позволяет SPH естественно моделировать процессы, очень трудно поддающиеся описанию другими методами, а именно: 1) большие деформации и смешивание материалов; 2) интенсивную фрагментацию и движение облака осколков.

2.2. Задача, которая решалась, и число SPH-частиц, использованных в расчетах

В настоящей работе мы рассматриваем 3D-задачу о фрагментации сферического алюминиевого ударника на тонком сплошном плоском алюминиевом экране, представляющем собой квадратную пластинку, при высоких скоростях удара в зависимости от скорости удара, толщины экрана и величины предела прочности σ_p в критерии разрушения для материалов ударника и экрана (см. ниже разд. 2.4). Во всех расчетах линия движения ударника была перпендикулярна плоскости экрана и нацелена в его центр.

Моделирование (см. рис. 2 в работе [9]) и эксперимент [2, 6, 27] показывают, что характер разрушения ударника на экране зависит от скорости удара. Из баллистики хорошо известно, что ударник пробивает тонкий экран из того же материала при значительно меньших скоростях, чем разрушается сам. При относительно небольших скоростях удара экран пробит и одновременно наблюдается частичное разрушение ударника. При этом наибольшая масса отколовшихся фрагментов ударника много меньше массы наиболее крупного (доминирующего) фрагмента ударника. Этот режим называют обычно повреждением ударника. При более высоких скоростях удара происходит полная дезинтеграция ударника, средняя масса фрагментов становится значительно меньше исходной массы ударника, наблюдается режим фрагментации ударника. Таким образом, можно предположить существование критической скорости удара V_c , выше которой, при $V > V_c$, наблюдается фрагментация ударника.

Известные эксперименты [6, 27] показывают, что после взаимодействия ударника и экрана формируется расширяющийся «пузырь» из фрагментов экрана, содержащий в себе фрагменты ударника. Это также видно на типичной картине (рис. 1), по-

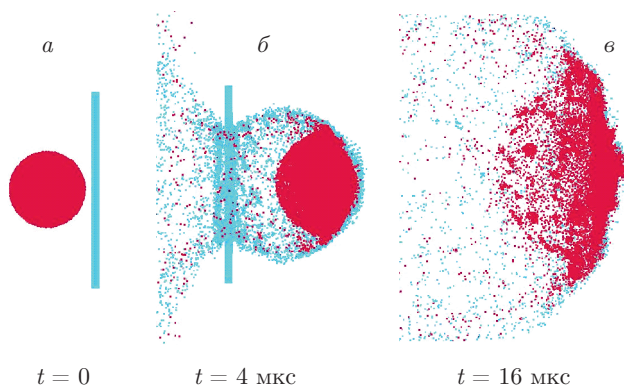


Рис. 1. (В цвете онлайн) Картина соударения алюминиевого ударника диаметром 5.77 мм с алюминиевой пластинкой толщиной 0.63 мм со скоростью 3 км/с в первые моменты после удара. Показано полупространство за плоским сечением, проходящим через центр ударника параллельно плоскости рисунка. Ударник и его фрагменты выделены красным цветом, пластинка и ее фрагменты — голубым

лучаемой в результате численного моделирования. На рис. 1 также видно, что характерные времена разрушения экрана и ударника существенно различны. Через 4 мкс после взаимодействия ударника и экрана (рис. 1б) экран пробит, в то время как ударник сохраняет свою компактность, изменяя форму за счет пластической деформации (при этом наблюдается незначительное повреждение ударника за счет абляции его поверхности). Заметное разрушение ударника (его фрагментацию) можно наблюдать только при больших временах, как это видно на рис. 1в.

В настоящей работе результаты представлены только для фрагментов ударника. Это связано не только с общей картиной фрагментации, которая обсуждалась в предыдущем абзаце. Задача о дроблении ударника на экране при высоких скоростях соударения связана с проблемой защиты космического аппарата (КА) от метеороидов и космического мусора. Известно [28], что для защиты КА используется экранная схема защиты: перед защищаемой стенкой устанавливается тонкий экран. Дробление ударника (имитирующего метеороид или частицу мусора) на экране при высоких скоростях удара, свойственных космическим условиям, приводит к перераспределению импульса удара на большей площади защищаемой стенки, уменьшая, тем самым, вероятность ее пробития. В результате достигается значительное уменьшение суммарной массы защиты (экран плюс стенка) по сравнению с одной стенкой при одном и том же уровне защищенности КА [29], поэтому тра-

диционно исследователей интересуют вопросы, связанные с фрагментацией ударника.

Вычисления в работе были выполнены с ударником сферической формы диаметром $D = 5.77$ мм и экранами размером 15×15 мм для двух наборов параметров: 1) четыре различные толщины экрана — $h = 0.63$ мм ($H = 5$), 0.502 мм ($H = 4$), 0.376 мм ($H = 3$) и 0.251 мм ($H = 2$) (в скобках показано количество слоев SPH-частиц в экране, которое обозначается буквой H) при фиксированном значении $\sigma_p = 1.65$ ГПа; 2) три различные значения σ_p (см. табл. 1) при фиксированной толщине экрана $h = 0.63$ мм ($H = 5$).

Как было показано экспериментально [27], для подобных h/D и одинаковых скоростей удара морфология и внутренняя структура облаков фрагментов будут подобны. Поэтому результаты, полученные в настоящей работе, могут быть обобщены на другие значения толщины экрана h и диаметра ударника D , имеющие такое же отношение h/D .

Число SPH-частиц в ударнике в расчетах было одно и то же и составляло $N_{tot} = 50883$, а общее число SPH-частиц менялось в зависимости от толщины экрана и составляло от 79205 до 121688. Масса одной SPH-частицы в расчетах была одна и та же и составляла $m_0 \approx 5.355 \cdot 10^{-9}$ кг.

2.3. Модели материала

Для того чтобы определиться с выбором уравнения состояния материала (сплав алюминия), надо сделать оценки остаточных температур, остающихся в материале после его разгрузки. Нагрев в рассматриваемой задаче может происходить как за счет необратимого сжатия в ударной волне, так и за счет работы пластических деформаций. Однако оба этих фактора очень неоднородно распределены по объему ударника. В области соударения ударника и преграды они дают наибольшее повышение температуры. При удалении от этой области температура нагрева существенно уменьшается. Сделаем оценки повышения температуры в области соударения, чтобы получить оценку максимально возможных остаточных температур. Максимальная скорость удара при численном моделировании приблизительно составляла 4.5 км/с. Определение остаточной температуры, T_{resad} , при ударном сжатии и последующей адиабатической разгрузке является стандартной процедурой [30]. Считая коэффициент Грюнайзена постоянной величиной, получим оценку $T_{resad} \approx 690$ К (параметры, необходимые для оценки, даны в табл. 1 и 2). При высоких скоро-

Таблица 1. Параметры материала

Материал	ρ_0 , г/см ³	K , ГПа	G , ГПа	σ_{p1} , ГПа	σ_{p2} , ГПа	σ_{p3} , ГПа	k	Γ	α_T , 1/град
Сплав алюминия	2.71	72.8	27.3	1.15	1.65	2.37	1.34	2.0	6.9e-5

Таблица 2. Параметры для модели Джонсона–Кука [32]

	ρ_0 , г/см ³	C_V , кДж/(кг·К)	A , МПа	B , МПа	C	n	m	T_m , К	T_0 , К
Сплав алюминия	2.71	0.875	337	343	0.01	0.41	1.0	875	293

стях нагружения большая часть работы пластических деформаций переходит в тепло. Приращение температуры для адиабатического процесса в этом случае можно оценить следующим образом:

$$\Delta T_{pl} = \frac{\chi}{\rho_0 C_V} \int_0^{\bar{\epsilon}^p} Y d\epsilon \sim \frac{\chi \bar{Y} \Delta \bar{\epsilon}^p}{\rho_0 C_V}, \quad (1)$$

где ρ_0 — начальная плотность материала, C_V — его теплоемкость (табл. 2), $\bar{\epsilon}^p$ — эффективная пластическая деформация, Y — предел текучести, χ — часть пластической работы, конвертируемой в тепло, обычно полагают $\chi = 0.9$. При скорости удара 4.5 км/с в области соударения имеют место следующие оценки: приращение эффективной пластической деформации $\Delta \bar{\epsilon}^p \leq 1.0$ и среднее значение предела текучести на интервале изменения $\bar{\epsilon}^p$ есть $\bar{Y} = 0.35$ ГПа. В результате, из (1) получаем $\Delta T_{pl} \leq 133$ К, что меньше приращения температуры, $T_{resad} - T_0$, за счет ударного сжатия. Таким образом, оценка максимально возможных остаточных температур дает $T_{res} = T_{resad} + \Delta T_{pl} \leq 822$ К. Это значение меньше температуры плавления сплава алюминия, $T_m = 875$ К (табл. 2). Этот результат согласуется с результатами работы [31], где проводилась оценка плавления ударника в аналогичной задаче взаимодействия ударника с экраном в широком диапазоне изменения отношения толщины экрана к диаметру ударника, h/D .

В настоящей работе в качестве определяющих уравнений брали уравнение состояния Ми–Грюнайтзена [30] и модель Джонсона–Кука [32] для предела текучести. Основные данные для сплава алюминия, использованные нами в расчетах, показаны в табл. 1. В таблице обозначено: K — объемный мо-

дуль, G — модуль сдвига, σ_p — динамическое предельное напряжение растяжения, при котором наступает разрыв материала (предел прочности), k — коэффициент в ударной адиабате $S = c_0 + k^*U$, Γ — коэффициент Грюнайтзена, который считается постоянным, α_T — температурный коэффициент объемного расширения. В табл. 1 даны три значения σ_p , которые соответствуют трем вариантам расчетов, выполненных в работе. Как следует из экспериментальных измерений [33], откольная прочность алюминиевых сплавов может меняться в широком диапазоне в зависимости от сплава и скорости деформации. Типичная скорость деформации в нашей численной модели может быть оценена как $\dot{\epsilon}_{char} = V/D \sim 5 \cdot 10^5$ с⁻¹ для типичной скорости удара $V = 3$ км/с. Для скоростей деформации $\dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_{char}$ откольная прочность может меняться в диапазоне от 1.0 до 1.8 ГПа [33] в зависимости от выбора алюминиевого сплава, поэтому, по крайней мере, два значения σ_{p1} и σ_{p2} (табл. 1), взятые для моделирования, физически оправданы.

Модель Джонсона–Кука [32], имеет достаточно простой вид и в то же время учитывает основные эффекты, наблюдаемые в экспериментах при высокоскоростном деформировании металлов: упрочнение за счет накопления пластических деформаций и увеличения скорости деформирования, и разупрочнение за счет нагрева материала. Предел текучести в модели Джонсона–Кука имеет вид

$$Y = (A + B(\bar{\epsilon}^p)^n) (1 + C \ln \dot{\epsilon}^*) (1 - (T^*)^m). \quad (2)$$

Здесь $\bar{\epsilon}^p$ — эффективная пластическая деформация; $\dot{\epsilon}^* = \dot{\bar{\epsilon}}^p / \dot{\epsilon}_0$ — скорость эффективной пластической деформации, где $\dot{\epsilon}_0 = 1$ с⁻¹; $T^* = (T - T_0) / (T_m - T_0)$, где T_0 — начальная температура и T_m — темпера-

тура плавления. Параметры A , B , C , n , m и T_m в (2) являются параметрами материала. В табл. 2 представлены значения этих параметров для сплава алюминия, которые были использованы нами в расчетах.

2.4. Модель разрушения и определение фрагментов

При расчетах брали модель разрыва (откола) по максимальному главному напряжению σ_{max} . Если σ_{max} превышает предельное напряжение растяжения (предел прочности) σ_p , то происходит разрушение, при этом компоненты девиатора напряжений полагаются равными нулю, а отрицательное гидростатическое давление ($P < 0$) не допускается (если в расчетах получены значения давления $P < 0$, то они полагаются равными нулю). Таким образом, материал, в котором произошло разрушение, ведет себя в области разрушения как гранулированный материал.

В настоящее время используются более сложные модели разрушения, учитывающие многостадийность процесса и накопление повреждений. Недостатком этих моделей является их зависимость от большого числа параметров, значения которых необходимо определить из эксперимента. Преимущество принятой нами модели разрушения — ее однопараметричность. Это позволит проследить зависимость получаемых решений от параметра σ_p .

Во всех задачах вычисления проводились до момента времени $t_{st} = 50$ мкс после удара. В работе [9] (где проводилось численное моделирование фрагментации с близким по размеру ударником — $D = 6.35$ мм) было показано, что распределение фрагментов по массам в момент времени $t_{st} = 50$ мкс может рассматриваться как стационарное. Исходными данными для программы поиска фрагментов являлись 3D-координаты всех SPH-частиц в момент времени t_{st} .

Важной характеристикой для поиска фрагментов является радиус влияния r_{inf} , который имеет смысл максимального расстояния, на котором должны находиться две частицы, чтобы они принадлежали одному фрагменту. Напомним, что при расчете методом SPH при задании начальных условий SPH-частицы располагаются, как правило, в вершинах кубической решетки [26]. Следуя нашей предыдущей работе [9], в качестве радиуса влияния в расчетах брали значение $r_{inf} = a\sqrt{3}$, где a — длина ребра кубической решетки.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

3.1. Результаты моделирования фрагментации ударника для различных значений σ_p

Вычисления были выполнены с экраном, имеющим отношение толщины к диаметру ударника $h/D = 0.109$ мм ($H = 5$) для трех различных значений предела прочности σ_p (см. табл. 1).

3.1.1. Зависимость критической скорости удара от σ_p

Как отмечалось выше, для фрагментации ударника, когда средняя масса фрагментов становится значительно меньше исходной массы ударника, необходимо, чтобы скорость удара V превысила критическое значение V_c . Для количественной оценки степени разрушения обычно вычисляют среднюю массу фрагментов $M_{avr} = \langle \overline{M}_2^j / \overline{M}_1^j \rangle$, где \overline{M}_1^j и \overline{M}_2^j обозначают первый и второй моменты распределения фрагментов по массам в j -ом моделировании (3), скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по ансамблю (не менее десяти) моделирований (расчетов), соответствующих одному и тому же значению V . Моделирования, соответствующие одной и той же скорости удара V , отличались друг от друга возмущением, вносимым в начальные условия начальным угловым смещением ударника относительно его оси вращения. Моменты распределения фрагментов по массам, получаемые в одном моделировании, определяются как [3, 11, 21, 22]

$$\overline{M}_k^j(V) = \sum_m m^k n^j(m, V), \quad (3)$$

где $n^j(m, V)$ — число фрагментов ударника с массой m , произведенных в j -ом моделировании (расчете) при скорости удара V . Шляпка над знаком суммы в (3) означает, что суммирование пробегает по всем фрагментам, исключая наибольший фрагмент.

Зависимости нормированной средней массы фрагментов M_{avr}/m_{tot} от скорости удара V для трех различных значений σ_p показаны на рис. 2а. Здесь и далее m_{tot} — исходная масса ударника, $m_{tot} = N_{tot}m_0$ и m_0 — масса одной SPH-частицы (т.е. масса минимального фрагмента, который может образоваться в результате разрушения ударника).

На рис. 2а видно, что при постепенном увеличении V средняя масса фрагментов растет за счет

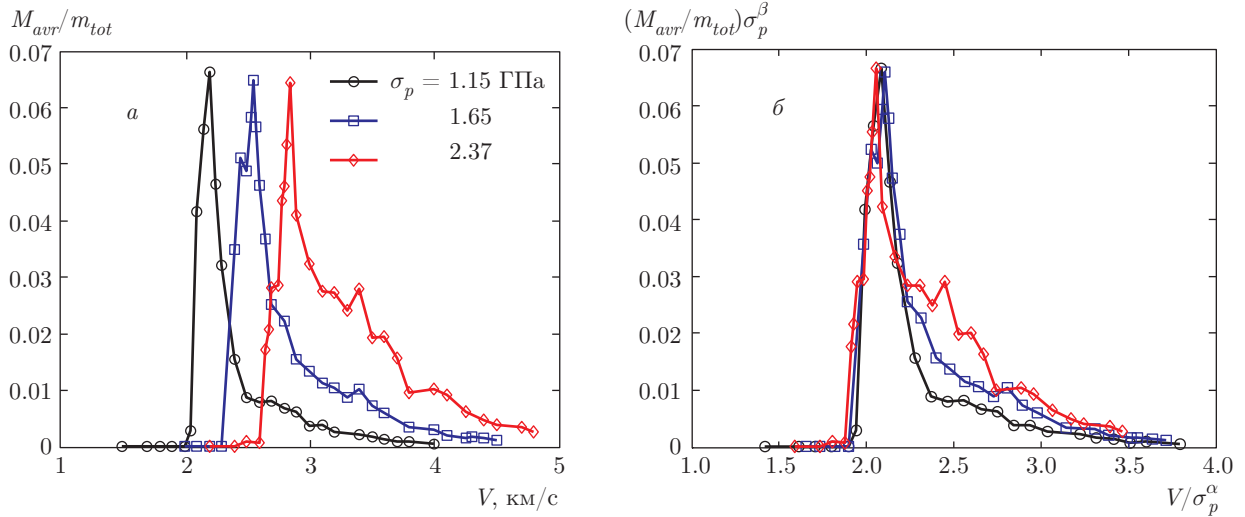


Рис. 2. а) Зависимости нормированной средней массы фрагментов M_{avr}/m_{tot} от скорости удара V для трех значений σ_p из табл. 1. б) Изменение масштаба кривых по двум осям с помощью σ_p . Наилучшее совпадение кривых наблюдается для показателей $\alpha = 0.38$ и $\beta = 0.04$

формирования более крупных фрагментов (напомним, что самый большой фрагмент удаляется из моментов в уравнении (3)). Убывание средней массы фрагментов M_{avr}/m_{tot} при более высоких скоростях обусловлено дроблением доминирующего фрагмента на все более мелкие. Следовательно, положение острого максимума на рис. 2а может быть отождествлено с критическим значением скорости удара V_c , где происходит полное разрушение. Таким образом, при увеличении скорости удара ударник переходит от фазы повреждения ($V < V_c$), которая характеризуется наличием доминирующего фрагмента, к фазе фрагментации ($V > V_c$), где не преобладает ни один крупный фрагмент. Существование перехода от повреждения к фрагментации было подтверждено для различных типов механических систем как экспериментально [15, 16], так и посредством численного моделирования [8, 9, 11, 13, 17, 19]. Критические скорости удара, найденные из рис. 2а: $V_c = 2.2$ км/с, 2.55 км/с и 2.85 км/с соответственно для $\sigma_p = 1.15$ ГПа, $\sigma_p = 1.65$ ГПа, $\sigma_p = 2.37$ ГПа. Можно показать, что M_{avr} вблизи V_c является степенной функцией отклонения V от V_c , т. е.

$$M_{avr} \propto (V - V_c)^{-\gamma} \quad (4)$$

с критическими показателями $\gamma = 0.911$ ($\sigma_p = 1.15$ ГПа), 0.47558 ($\sigma_p = 1.65$ ГПа) и 0.218 ($\sigma_p = 2.37$ ГПа). Видно, что γ зависят от величины предела прочности σ_p . Зависимость критических показателей от критерия разрушения отмечалась ранее в работах [9, 18].

Данные, представленные на рис. 2а, масштабируются по осям с помощью замены $V \rightarrow V(\sigma_p)^\alpha$ и $M_{avr}/m_{tot} \rightarrow (M_{avr}/m_{tot})(\sigma_p)^\beta$. Наилучшее совпадение кривых наблюдается для показателей $\alpha = 0.38$ и $\beta = 0.04$ (рис. 2б), при этом точка максимума соответствует значению $V_c/(\sigma_p)^\alpha \approx 2.1$ (км(ГПа) $^{-\alpha}$ /с). При этом хорошо совпадают как амплитуды кривых, так и критические значения скоростей удара, в противоположность форме кривых, которые плохо согласуются в закритической области ($V > V_c$). Таким образом, из рис. 2б следует зависимость критической скорости от предела прочности материала:

$$V_c \sim \sigma_p^\alpha, \quad \alpha = 0.38 \pm 0.02. \quad (5)$$

Видно, что при увеличении прочности материала критическая скорость фрагментации растет.

3.1.2. Средняя масса наибольшего фрагмента

Если контрольным параметром рассматриваемой задачи является скорость удара V , то количественная характеристика уменьшения средней массы наибольшего фрагмента $\langle M_{max} \rangle / m_{tot}$, показывающая степень фрагментации ударника, часто [11, 13, 19, 22] рассматривается как параметр порядка. При низких скоростях удара, когда наблюдается режим повреждения ударника, $\langle M_{max} \rangle / m_{tot} \sim 1$. При скоростях удара больших критической, $V > V_c$, даже наибольший фрагмент имеет массу значительно меньше массы ударника, $\langle M_{max} \rangle / m_{tot} \ll 1$.

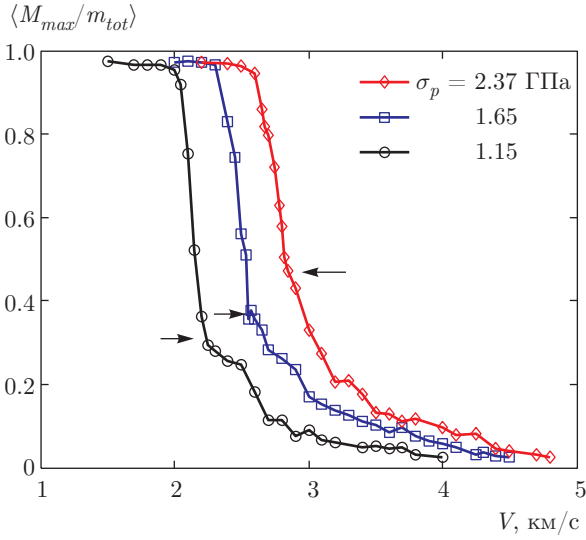


Рис. 3. Средняя масса наибольшего фрагмента в зависимости от скорости удара для трех значений σ_p

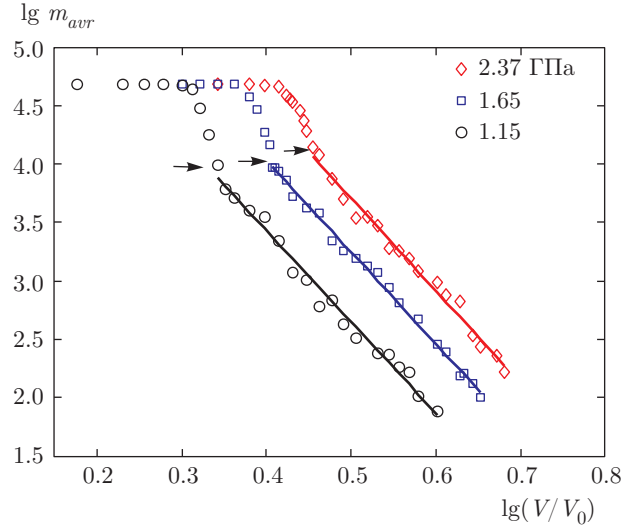


Рис. 5. Зависимости средневзвешенной массы фрагментов от скорости удара V для различных значений σ_p ; $V_0 = 1$ км/с

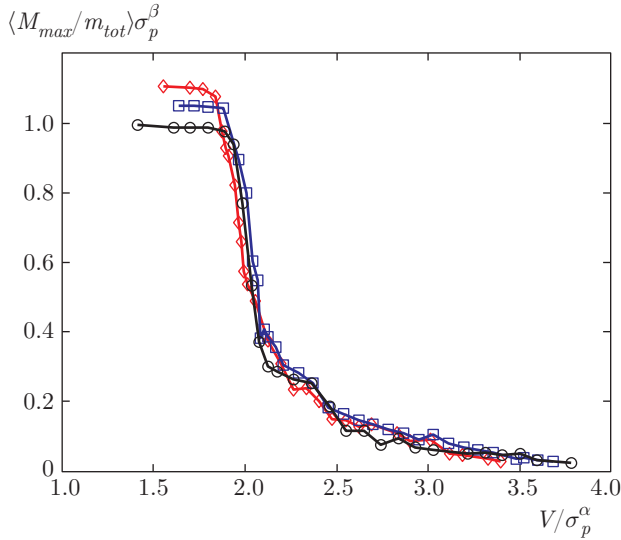


Рис. 4. Изменение масштаба кривых на рис. 3 с помощью σ_p . Показан коллапс кривых для показателей $\alpha = 0.40$ и $\beta = 0.15$

При $V \approx V_c$ наблюдается перегиб в зависимости $\langle M_{max} \rangle / m_{tot}$ от скорости удара V , как это можно наблюдать на рис. 3, где показаны эти зависимости для трех значений σ_p . На рис. 3 стрелками показаны точки, соответствующие критическим скоростям удара $V_c = 2.2, 2.55$ и 2.85 км/с.

Изменение масштаба кривых по осям с помощью степеней σ_p дает хорошее совпадение распределений для $\alpha = 0.4$ и $\beta = 0.15$ (рис. 4) в закритической области ($V > V_c$). Из последнего следует,

что $\langle M_{max}/m_{tot} \rangle \sigma_p^\beta$ зависит только от V/σ_p^α . Таким образом, средние массы наибольшего фрагмента в закритической области, полученные при различных значениях σ_p , должны следовать скейлингу

$$\langle M_{max}/m_{tot} \rangle = \sigma_p^{-\beta} G(V/\sigma_p^\alpha), \quad (6)$$

где $G(x)$ в (6) обозначает масштабную функцию.

3.1.3. Средневзвешенная масса фрагментов в зависимости от скорости удара

Снова обратимся к вычислению средней массы фрагментов, но теперь с учетом наибольшего фрагмента. Определим средневзвешенную массу фрагментов как

$$m_{avr} = \frac{\langle M_2^j(V) \rangle}{M_1(V)m_0}, \quad (7)$$

где первый и второй моменты в (7) определяются как

$$M_k^j(V) = \sum_m m^k n^j(m, V). \quad (8)$$

В правой части (8) обозначения такие же, как и в (3). Отличие (8) от (3) состоит в том, что суммирование в (8) пробегает по всем фрагментам, включая наибольший фрагмент. В этом случае первый момент M_1 является общей массой фрагментов, которая остается неизменной в вычислениях и равной массе ударника m_{tot} (по этой причине M_1 выведена из под знака усреднения в (7)).

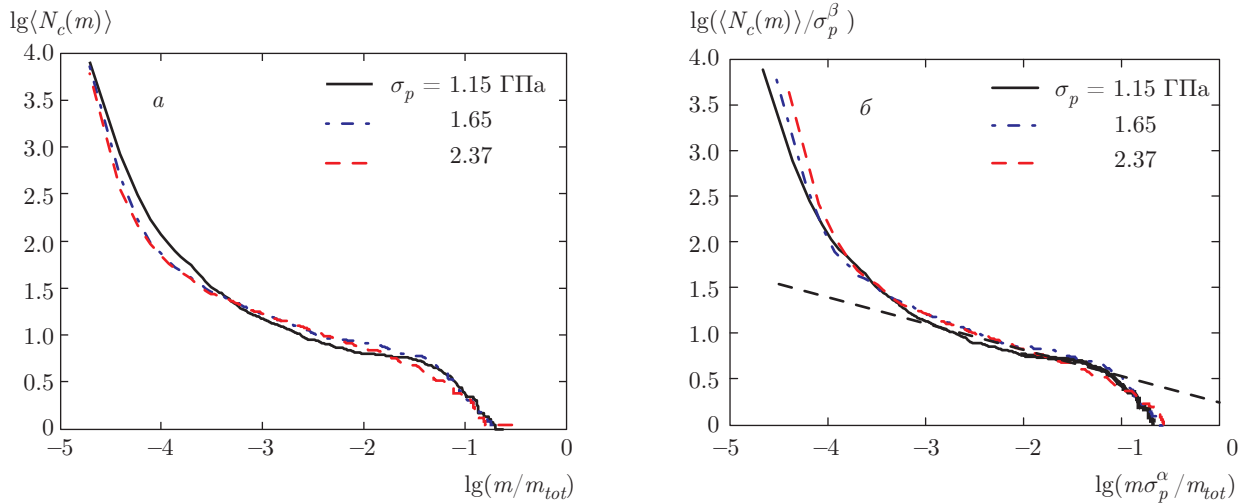


Рис. 6. а) Средние кумулятивные распределения при критической скорости удара для различных значений параметра σ_p . б) Изменение масштаба кривых с помощью степенных функций от σ_p : показан коллапс распределений при $\alpha = 0.85$ и $\beta = 0.4$

На рис. 5 показана зависимость средневзвешенной массы m_{avr} от скорости удара V для различных значений σ_p (показаны на рисунке). Стрелки показывают местоположение критических точек, разделяющих состояние повреждения от состояния фрагментации для всех групп данных. В закритической области ($V > V_c$) каждая группа данных аппроксимировалась (методом наименьших квадратов) прямыми линиями. Видно, что прямые линии на рис. 5 почти параллельны. Аппроксимация дает, что их тангенс угла наклона составляет $-(8.05 \pm 0.25)$. Таким образом, в закритической области средневзвешенная масса фрагмента зависит от скорости удара степенным образом, так что показатель степени не зависит от параметра прочности материала σ_p :

$$m_{avr} \sim V^{-\kappa}, \quad \kappa = 8.05 \pm 0.25. \quad (9)$$

3.1.4. Средние кумулятивные распределения фрагментов по массам в зависимости от σ_p

Важной характеристикой фрагментации является распределение фрагментов по массам. Результаты расчетов удобно представлять в виде кумулятивного распределения

$$N(m) = \int_m^\infty n(m') dm', \quad (10)$$

где $n(m)$ — число фрагментов с массой m . Из (10) следует, что для степенного распределения, $n(m) \sim m^{-\tau}$, имеет место

$$N(m) \sim m^{1-\tau}. \quad (11)$$

Сейчас мы оцениваем зависимость средних кумулятивных распределений от параметра σ_p . Для данного значения скорости удара V среднее кумулятивное распределение строилось по дифференциальному распределению, полученному в результате усреднения по серии из не менее десяти расчетов при этом значении V . Как отмечалось ранее, расчеты, соответствующие одной и той же скорости удара V , отличались друг от друга возмущением, вносимым в начальные условия посредством начального углового смещения ударника относительно его оси вращения.

На рис. 6а показаны средние кумулятивные распределения фрагментов ударника по массам для критических скоростей удара, соответствующих различным значениям σ_p . На рис. 6 обозначено $\langle N_c(m, \sigma_p) \rangle = \langle N(m, V_c(\sigma_p)) \rangle$. Видно, что «критические» распределения расположены довольно близко друг к другу. Лучше всего они совпадают в области малых масс, где они, вообще говоря, должны расходиться из-за неделимости одной SPH-частицы. Изменение масштаба кривых по осям с помощью замены $m \rightarrow m(\sigma_p)^\alpha$ и $\langle N_c(m, \sigma_p) \rangle \rightarrow \langle N_c(m, \sigma_p) \rangle / \sigma_p^\beta$ дает хорошее совпадение распределений для $\alpha = 0.85$ и $\beta = 0.4$ (рис. 6б). Таким образом, кумулятивные распределения по массам в критической точке, полученные при различных значениях σ_p , должны следовать скейлингу

$$\langle N_c(m, \sigma_p) \rangle = \sigma_p^\beta F_1 \left((m/m_{tot}) \sigma_p^\alpha \right), \quad (12)$$

где $F_1(x)$ в (12) обозначает масштабную функцию. Заметное отклонение от скейлинга, как уже отмечалось, имеет место только в области малых масс, вследствие существования неделимой массы SPH-частицы m_0 . На рис. 6б штриховая прямая линия, соответствующая распределению (11) в средней области масс, позволяет предположить о наличии степенного распределения в этой области и определить значение степенного показателя τ , как $\tau = 1.32 \pm 0.02$.

3.2. Результаты моделирования фрагментации ударника для фиксированного значения $\sigma_p = 1.65$ ГПа и различных толщин экрана

Вычисления были выполнены с экранами, имеющими отношение толщины к диаметру ударника $h/D = 0.109, 0.087, 0.065$ и 0.043 и состоящими, соответственно, из $H = 5, 4, 3$ и 2 слоев SPH-частиц, для значения $\sigma_p = 1.65$ ГПа. При представлении результатов вычислений толщину экрана будем характеризовать числом слоев SPH-частиц H , которое связано с h/D соотношением $h/D = 0.0217H$.

3.2.1. Зависимость критической скорости удара от толщины экрана

Так же как и в разд. 3.1.1, вычисляем зависимость нормированной средней массы фрагментов M_{avr}/m_{tot} от скорости удара V . Результаты вычислений представлены на рис. 7 для четырех различных толщин экрана. В этих зависимостях присутствует острый максимум, который определяет критические значения скорости удара $V_c = 2.55$ км/с, 2.65 км/с, 2.75 км/с и 2.95 км/с для толщин экрана соответственно $H = 5, 4, 3$ и 2 . Так же как и в разд. 3.1.1, можно показать, что M_{avr} вблизи критической скорости V_c является степенной функцией отклонения скорости удара от V_c , т. е. имеет вид (4).

На рис. 7а видно, что V_c растет с уменьшением толщины экрана. Однако подобная монотонная зависимость не имеет места для пиковых значений M_{avr}/m_{tot} . Поэтому масштабирование зависимостей с помощью замены $V \rightarrow VH^\alpha$ и $M_{avr}/m_{tot} \rightarrow (M_{avr}/m_{tot})H^\beta$ позволяет совместить максимумы кривых только по оси абсцисс (см. рис. 7б). Наилучший результат наблюдается для показателя $\alpha = 0.165 \pm 0.003$, при этом имеем $V_c H^\alpha = 3.32$ км/с. Отсюда получается зависимость критической скорости от толщины пластины:

$$V_c \sim (h/D)^{-\alpha}, \quad \alpha = 0.165 \pm 0.003. \quad (13)$$

Зависимость (13) качественно согласуется с результатами экспериментов, выполненных [6]: V_c растет с уменьшением толщины экрана. Однако есть количественное расхождение с этими экспериментами. В (13) приближенно можно считать $\alpha \approx 1/6$. Эта величина показателя не совпадает со значением показателя $1/3$ в аналогичной степенной зависимости, полученной в работе [6]. Причина расхождения кроется, по-видимому, в различных критериях фрагментации, представленных в настоящей работе и работе [6]. Максимум кривых, определяющих V_c на рис. 7, соответствует дроблению ударника на несколько равновеликих фрагментов и большого количества более мелких фрагментов. В то время как в работе [6] (см. рис. 1 и 2 в этой работе) абляция ударника с образованием фрагментов значительно меньших по размеру, чем размер ударника, рассматривалась как фрагментация ударника.

3.2.2. Частичная или полная фрагментация ударника в зависимости от скорости удара

На рис. 7 видно, что средняя масса фрагментов M_{avr} в закритической области ($V > V_c$) затухает монотонно при увеличении V при толщинах экрана $H = 5$ и 4 . Однако при дальнейшем уменьшении толщины экрана, при $H = 3$ и 2 , зависимости на рис. 7 имеют при $V > V_c$ локальные максимумы. Чтобы прояснить эту ситуацию, вспомним, что переход от поврежденности к фрагментации, или степень разрушения, могут быть охарактеризованы также массой наибольшего фрагмента, массой второго наибольшего фрагмента и флуктуациями массы наибольшего фрагмента [3, 4, 8, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22]. На рис. 8 и 9 представлены эти величины в зависимости от скорости удара для толщин экрана $H = 5$ и 3 . Флуктуация массы наибольшего фрагмента определялась как

$$\sigma_{m_{max}}^2 = \frac{\langle M_{max1}^j \rangle^2 - \langle M_{max1}^j \rangle^2}{\langle M_{max1}^j \rangle m_{tot}}. \quad (14)$$

Видно качественное различие рис. 8 и 9. Для более толстого экрана (рис. 8) в критической точке ($V_c = 2.55$ км/с) масса второго наибольшего фрагмента (M_{max2}) становится величиной близкой к массе наибольшего фрагмента (M_{max1}), далее они монотонно затухают, приближаясь друг к другу. Флуктуации массы наибольшего фрагмента ($\sigma_{m_{max}}$) при этом также затухают при увеличении скорости удара. Для тонкого экрана (рис. 9) в критической точке ($V_c = 2.75$ км/с) M_{max2} имеет локаль-

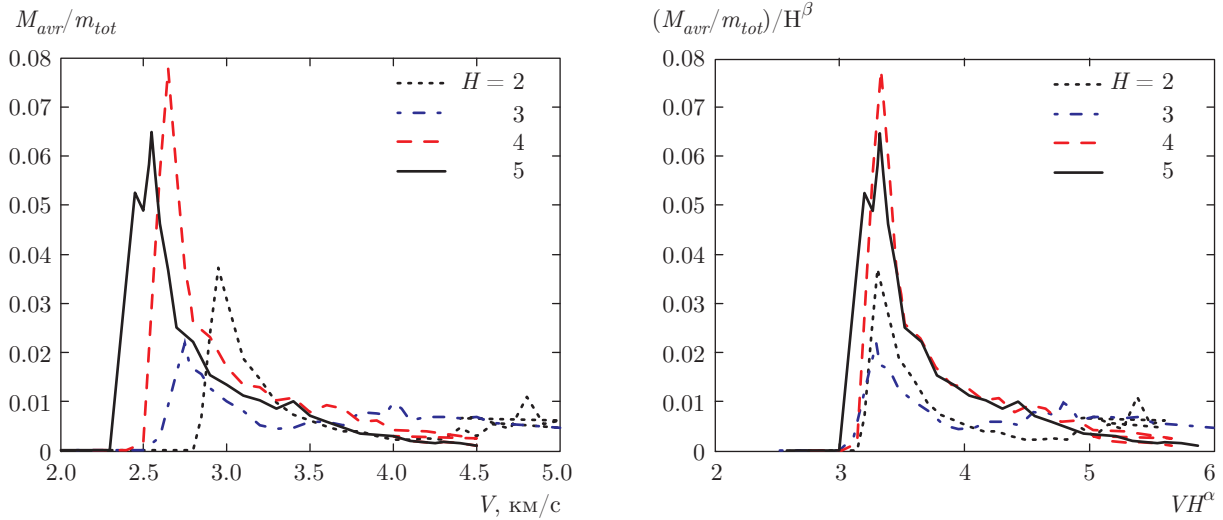


Рис. 7. а) Зависимости нормированной средней массы фрагментов M_{avr}/m_{tot} от скорости удара V для четырех толщин экрана. б) Изменение масштаба кривых с помощью степенных функций от H . Показан случай, когда $\alpha = 0.165$ и $\beta = 0$

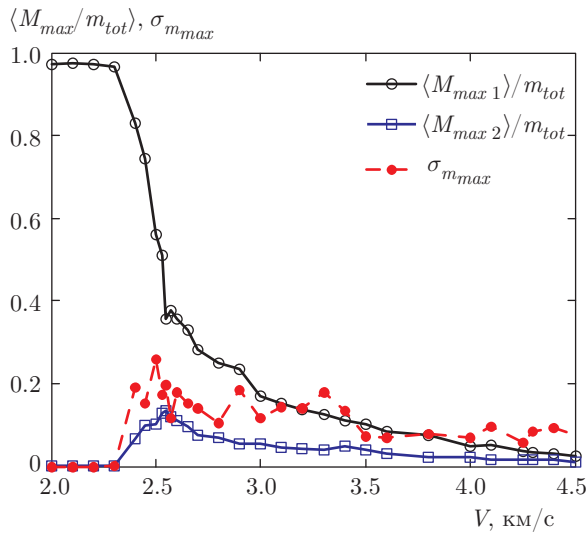


Рис. 8. Зависимости массы наибольшего фрагмента (M_{max1}), массы второго наибольшего фрагмента (M_{max2}) и флуктуации массы наибольшего фрагмента ($\sigma_{m_{max}}$) от скорости удара для экрана толщиной $H = 5$

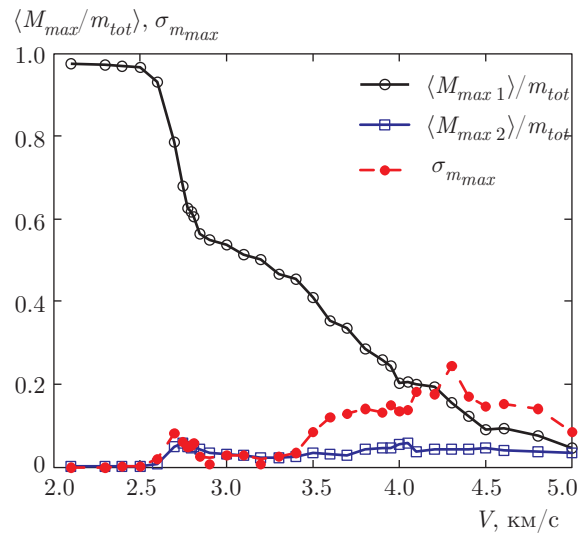


Рис. 9. То же самое, что на рис. 8, но для толщины экрана $H = 3$

ный максимум, но все еще значительно отличается от M_{max1} . При увеличении скорости удара M_{max2} имеет второй локальный максимум в интервале скоростей удара от 4.0 до 4.5 км/с. Только в этом интервале скоростей M_{max1} и M_{max2} становятся близки друг к другу. Флуктуации $\sigma_{m_{max}}$ ведут себя подобным образом, но второй локальный максимум оказывается значительно выше первого. Можно предположить, что в случае, показанном на рис. 9, в кри-

тической точке происходит только частичная фрагментация ударника, а полная фрагментация происходит в области второго локального максимума зависимостей $M_{max2}(V)$ и $\sigma_{m_{max}}(V)$, т.е. в интервале скоростей удара от 4.0 до 4.5 км/с. Это предположение подтверждается непосредственно картинами фрагментации ударника (рис. 10 и 11). Видно, что при равном удалении от критической точки, $V - V_c = 0.15$ км/с, картины фрагментации для толщин $H = 5$ (рис. 10б,в) и $H = 3$ (рис. 11а,б) существенно различны. В последнем случае происходит

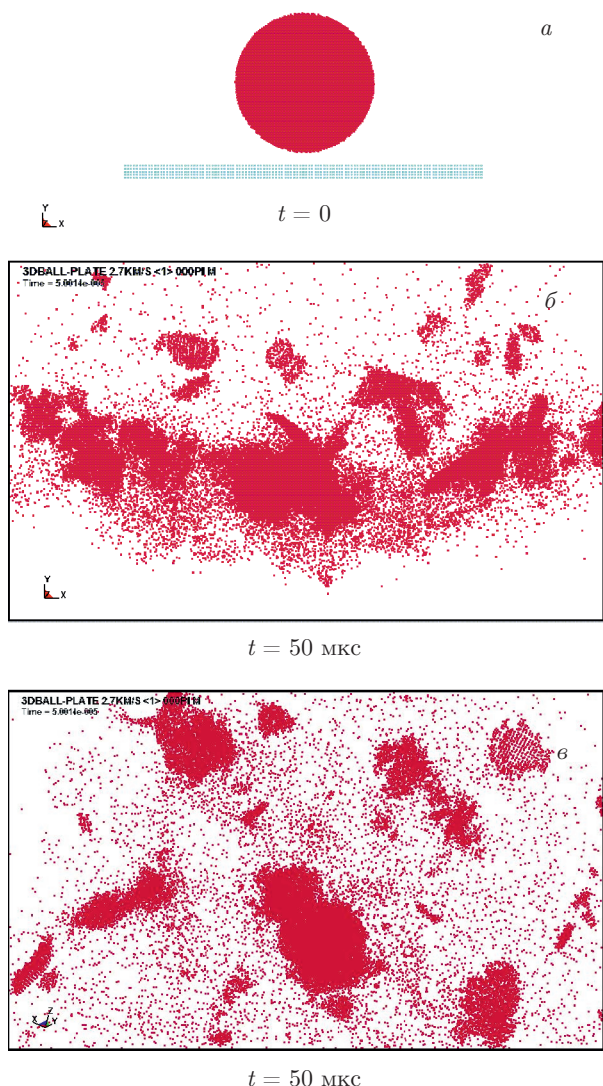


Рис. 10. Разрушение ударника на экране толщиной $H = 5$. Начальная скорость ударника 2.7 км/с; *a, б* — вид сбоку, *в* — вид сверху. Все рисунки даны в одинаковом масштабе, поэтому за рамками рис. *в* оказалась часть облака фрагментов

только частичная фрагментация ударника, которая завершается при скоростях удара $V = 4.5$ км/с (рис. 11*в, г*). Наличие неполной фрагментации ударника при критической скорости удара для толщин экрана $H = 3$ и 2 объясняет наличие немонотонной зависимости пиковых значений M_{avr}/m_{tot} от толщины экрана рис. 7*а*.

3.2.3. Средневзвешенная масса фрагментов в зависимости от скорости удара

Снова обратимся к вычислению средневзвешенной массы фрагментов m_{avr} (7). На рис. 12 показана

зависимость m_{avr} от скорости удара V для различных толщин экрана (показаны на рисунке). Стрелки показывают местоположение критических скоростей удара для всех групп данных. В закритической области ($V > V_c$) каждая группа данных аппроксимировалась (методом наименьших квадратов) прямыми линиями. Видно, что прямые линии на рис. 12 почти параллельны. Аппроксимация дает, что их тангенс угла наклона составляет $-(8.0 \pm 0.15)$. Таким образом, в закритической области средневзвешенная масса фрагментов зависит от скорости удара степенным образом, так что показатель степени не зависит от толщины экрана:

$$m_{avr} \sim V^{-\kappa}, \quad \kappa = 8.0 \pm 0.15. \quad (15)$$

Видно, что в степенных зависимостях (9) и (15) показатели степени перекрываются. Таким образом, в рамках погрешности расчетов можно говорить, что средневзвешенный размер фрагмента имеет универсальную асимптотику вида (15), не зависящую ни от толщины экрана, ни от предела прочности σ_p материала.

В закритической области ($V > V_c$) группы данных, соответствующие различным толщинам экрана, по-разному «выходят» на степенные асимптотики, которые на рис. 12 аппроксимируются прямыми линиями. Видно, что для толщины экрана $H = 5$, выход на асимптотику происходит сразу при $V > V_c$. Для меньших толщин $H < 5$ выход на асимптотику происходит только через конечный интервал скоростей, который растет при уменьшении H . Для $H = 2$ вид предполагаемой асимптотики в виде прямой не показан, из хода кривых угадывается, что это должно произойти при скоростях удара $V > 4.5$ км/с. Это косвенно подтверждает вывод о двух возможных режимах фрагментации ударника при $H < 4$ (или $h/D < 0.087$), о которых говорилось выше.

3.2.4. Средние кумулятивные распределения фрагментов ударника в зависимости от толщины экрана

На рис. 13*а* показаны средние кумулятивные распределения фрагментов ударника по массам при критической скорости удара V_c для различных толщин экрана H . Видно, что «критические» распределения имеют довольно большой разброс. Изменение масштаба кривых по осям с помощью замены $m \rightarrow mH^\alpha$ и $\langle N(m, V_c) \rangle \rightarrow \langle N(m, V_c) \rangle / H^\beta$ дает хорошее совпадение распределений для $\alpha = 0.45$ и $\beta = 1.0$ (рис. 13*б*) для всех толщин экранов, кроме $H = 2$. Таким образом, в критической точке сред-

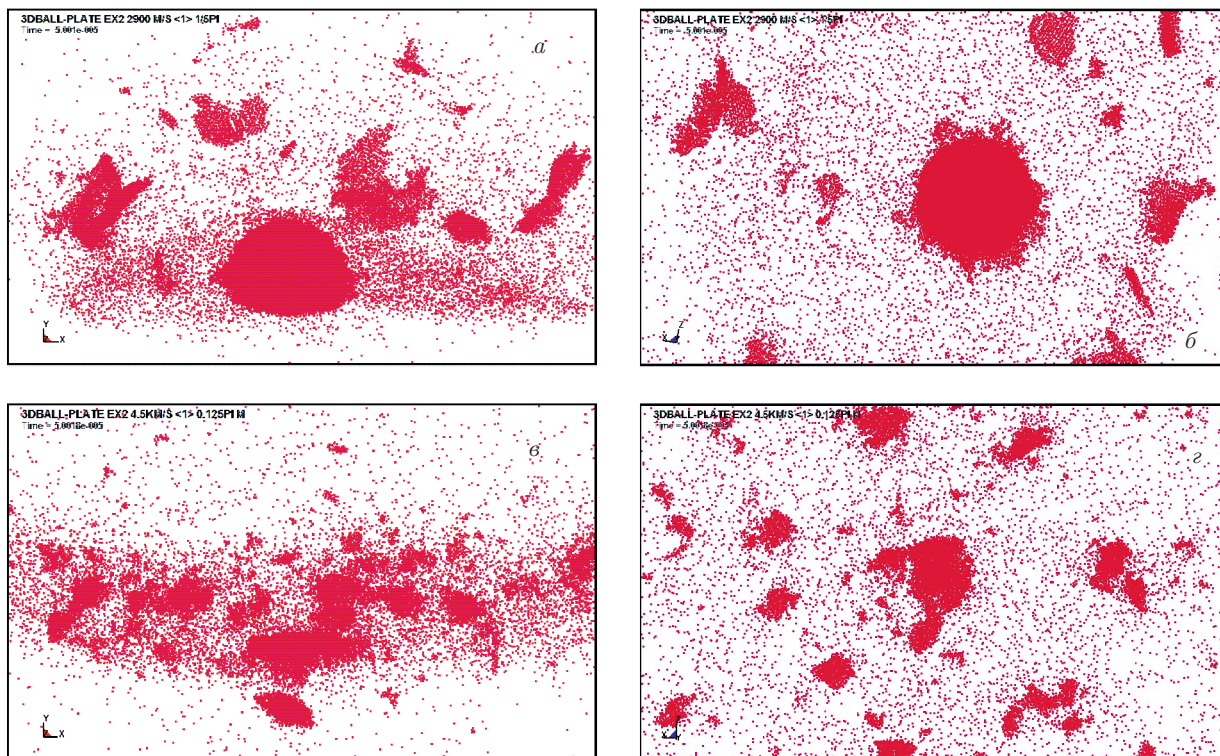


Рис. 11. Разрушение ударника на экране толщиной $H = 3$ через 50 мкс после удара. Начальная скорость ударника: $a, б$ — 2.9 км/с; $г, з$ — 4.5 км/с. Рисунки $a, б$ показывают вид сбоку, $г, з$ — вид сверху. Рисунки построены в том же масштабе, что и рис. 10

ние кумулятивные распределения фрагментов ударника по массам, полученные при различных значениях $5 \geq H > 2$ (или $0.109 \geq h/D > 0.043$) должны следовать скейлингу

$$\langle N_c(m, h/D) \rangle = (h/D)^\beta F_2((m/m_{tot})(h/D)^\alpha), \quad (16)$$

где $F_2(x)$ в (16) обозначает масштабную функцию.

Представляет интерес рассмотреть распределения фрагментов по массам в случае, когда могут реализоваться два режима (частичный или полный) фрагментации ударника, которые имеют место при $H < 4$ ($h/D < 0.087$) (см. разд. 3.2.2). На рис. 14а показаны средние кумулятивные распределения для двух групп данных (толщина экрана $H = 3$), соответствующих различным режимам фрагментации ударника. Первая группа из четырех распределений построена для скоростей удара, близких к критической скорости $V_c = 2.75$ км/с, в интервале от 2.75 до 2.9 км/с. Вторая группа, также состоящая из четырех распределений, построена для скоростей удара в интервале от 4.2 до 5.0 км/с. Вторая группа распределений демонстрирует хорошее совпадение распределений в области средних масс

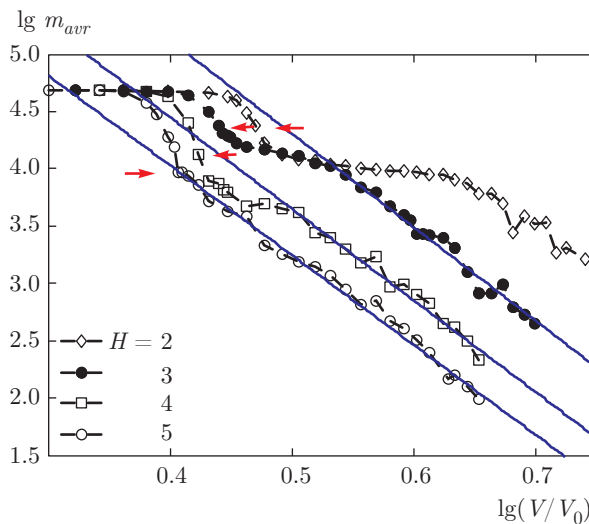


Рис. 12. Зависимости средневзвешенной массы фрагментов m_{avr} от скорости удара V для различных толщин экрана, $V_0 = 1$ км/с

(рис. 14а), имеющих в этой области степенное распределение вида (11). Изменение масштаба кривых с

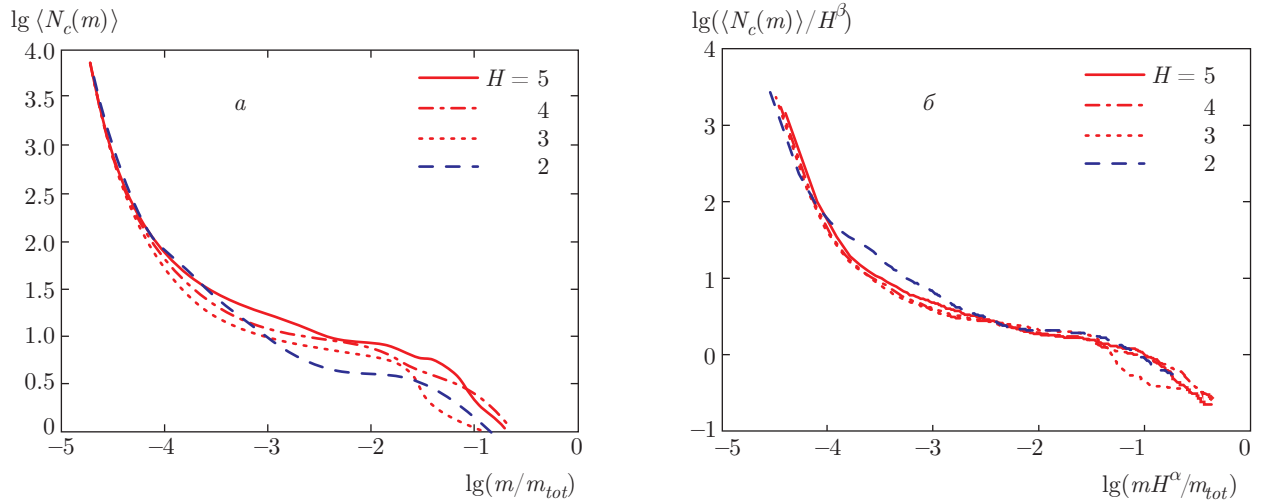


Рис. 13. а) Средние кумулятивные распределения фрагментов ударника при критической скорости удара для различных значений толщины экрана H ; б) изменение масштаба кривых с помощью степенных функций от H : показан коллапс распределений при $\alpha = 0.45$ и $\beta = 1.0$

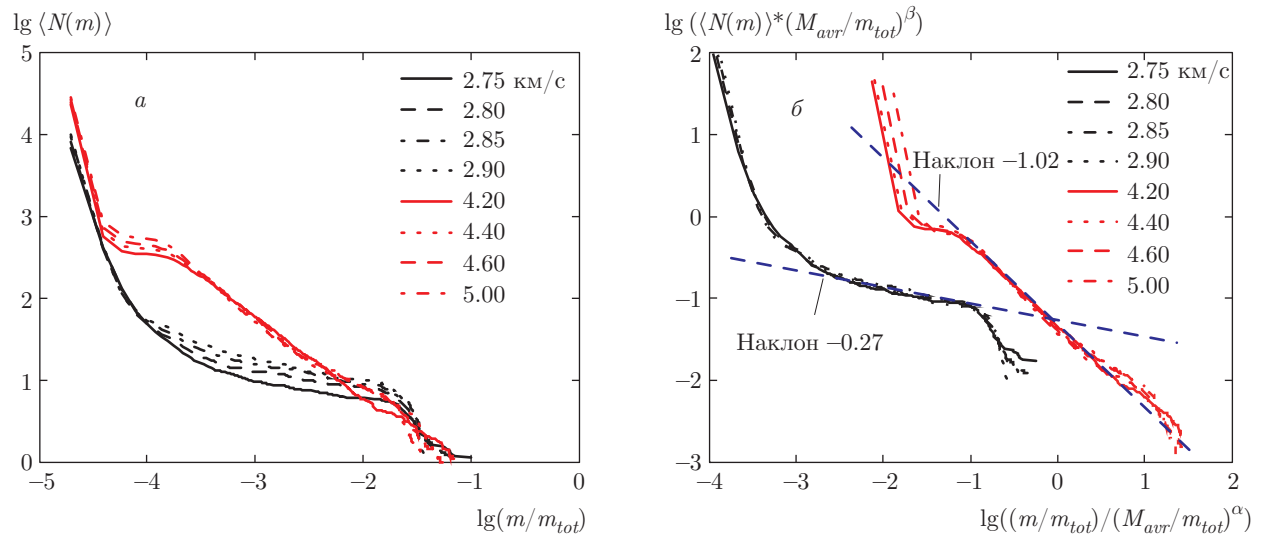


Рис. 14. а) Средние кумулятивные распределения для двух групп данных при толщине экрана $H = 3$, соответствующих различным режимам фрагментации ударника. б) Изменение масштаба кривых с помощью степенных функций от M_{avr} . Показаны коллапсы распределений при $\alpha_1 = 0.45$ и $\beta_1 = 1.1$ (первая группа распределений) и $\alpha_2 = 1.2$ и $\beta_2 = 1.25$ (вторая группа распределений)

помощью степеней средней массы фрагментов M_{avr} , где $M_{avr} = \langle \overline{M}_2^j / \overline{M}_1^j \rangle$ и \overline{M}_k^j определяется из (3), дает хорошее совпадение распределений для первой и второй групп распределений в области средних и больших масс при значениях скейлинговых показателей $\alpha_1 = 0.45$ и $\beta_1 = 1.1$ (первая группа распределений) и $\alpha_2 = 1.2$ и $\beta_2 = 1.25$ (вторая группа распределений) (рис. 14б). Заметное отклонение от скейлинга в области малых масс имеет место вследствие существования неделимой массы SPH-частицы m_0 .

Таким образом, имеет место скейлинговое соотношение вида

$$\langle N(m, V) \rangle = M_{avr}^{-\beta} \Phi_i(m/M_{avr}^{\alpha_i}), \quad (17)$$

где Φ_i ($i = 1, 2$) обозначает масштабную функцию для двух групп распределений. Зависимость от скорости удара V включается в (17) через M_{avr} . Ранее, средняя масса M_{avr} использовалась для масштабных преобразований в работе [17].

На рис. 14б штриховые прямые линии, соответствующие степенному распределению (11) в средней области масс, позволяет определить значение τ , как $\tau = 1.27 \pm 0.02$ и 2.02 ± 0.03 соответственно для первой и второй групп распределений.

4. ВЫВОДЫ

В настоящей работе в трехмерной постановке мы рассматриваем задачу о фрагментации алюминиевого ударника на тонком сплошном алюминиевом экране, представляющем собой тонкую пластинку, при высоких скоростях удара. Дается количественная характеристика разрушения ударника посредством статистики облака фрагментов. Основное внимание в работе уделено масштабным эффектам, сопровождающим фрагментацию ударника.

В известных нам работах по численному моделированию фрагментации в механических системах фрагментируемый объект описывался или набором тождественных частиц, связанных между собой парным потенциалом (по аналогии с методом молекулярной динамики), или множеством элементов различной формы, связанных друг с другом разными типами невесомых связующих элементов. Динамика частиц (элементов), включающая как поступательное, так и вращательное движение, описывалась в этих моделях системой уравнений Ньютона. Из этих методов наиболее распространенными являются метод молекулярной динамики и так называемые модели дискретных элементов (discrete element models) [11, 13, 14, 17, 18].

Отличительной особенностью настоящей работы является то, что численное моделирование фрагментации в настоящей работе было выполнено на основе полной системы уравнений МДГТ методом гладких частиц (SPH) [23–25]. Поведение материалов описывалось уравнением состояния Ми–Грюнайзена и моделью пластичности Джонсона–Кука. В качестве критерия разрушения был выбран простейший критерий по максимальному главному напряжению. В настоящее время используются более сложные модели разрушения, учитывающие многостадийность процесса и накопление повреждений. Недостатком этих моделей является их зависимость от большого числа параметров, значения которых необходимо определить из эксперимента. Преимущество принятой модели разрушения — ее однопараметричность. Это позволило проследить зависимость получаемых решений от предела прочности σ_p в критерии разрушения для материалов ударника и экрана.

Вычисления были выполнены с ударником сферической формы диаметром $D = 5.77$ мм и экранами в виде пластинок размером 15×15 мм, имеющих отношение толщины к диаметру ударника $h/D = 0.109, 0.087, 0.065$ и 0.043 при значении $\sigma_p = 1.65$ ГПа. Также вычисления были выполнены для трех различных значений σ_p (см. табл. 1) для толщины экрана $h/D = 0.109$.

На основе численного моделирования в работе был проведен анализ перехода от поврежденности к фрагментации и извлечены скейлинговые соотношения в терминах скорости удара V , отношения толщины экрана к диаметру ударника h/D и предела прочности σ_p в критерии разрушения для материалов ударника и экрана.

Основные выводы работы могут быть сформулированы следующим образом:

- моделирование показало, что процесс разрушения ударника в зависимости от скорости удара может быть разделен на два состояния, т. е. состояния поврежденности и фрагментации с резким переходом между ними при критическом значении скорости удара V_c . Этот результат согласуется с результатами моделирования, выполненными ранее на основе метода молекулярной динамики и моделей дискретных элементов [10, 11, 13, 14, 19];

- средние кумулятивные распределения фрагментов по массам при критической скорости удара проявляют свойство масштабной инвариантности при изменении параметров h/D и σ_p ;

- средние массы наибольшего фрагмента проявляют свойство масштабной инвариантности в закритической области ($V > V_c$) только при изменении параметра σ_p ;

- показано, что при $h/D < 0.087$ возможны два режима фрагментации ударника: при критической скорости, $V = V_c$, происходит только частичная фрагментация ударника, а полная фрагментация происходит при скоростях удара $V > V_c$. Например, при $h/D = 0.065$ критическая скорость $V_c = 2.75$ км/с, а скорость удара для полной фрагментации оценивается из рис. 9 в интервале от 4.0 до 4.5 км/с;

- критическая скорость фрагментации V_c растет с увеличением предела прочности σ_p как $V_c \sim (\sigma_p)^\alpha$, где $\alpha = 0.38 \pm 0.02$ и также растет с уменьшением толщины экрана как $V_c \sim (h/D)^{-\alpha}$, где $\alpha = 0.165 \pm 0.03$;

- моделирование показывает, что средневзвешенная масса фрагментов m_{avr} (7) при $V > V_c$ имеет асимптотику вида $m_{avr} \sim V^{-\kappa}$ с показателем $\kappa = 8.05 \pm 0.15$, не зависящим ни от толщины экра-

на, ни от предела прочности σ_p материала.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-0565-а). Автор благодарит А. В. Пономарева за помощь в проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. K. Hartmann, *Icarus* **10**, 201 (1969).
2. D. E. Grady and M. E. Kipp, *Int. J. Impact Engng.* **20**, 293 (1997).
3. X. Campi, *J. Phys. A* **19**, L917 (1986).
4. J. Richert and P. Wagner, *Phys. Rep.* **350**, 1 (2001).
5. L. Oddeshede, P. Dimon, and J. Bohr, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3107 (1993).
6. A. J. Piekutowski, *Int. J. Impact Engng.* **17**, 627 (1995).
7. A. Meibom and I. Balslev, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2492 (1996).
8. J. A. Åström, B. L. Holian, and J. Timonen, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3061 (2000).
9. N. N. Myagkov and V. V. Stepanov, *Physica A* **410**, 120 (2014).
10. C. O. Dorso, V. Latora, and A. Bonasera, *Phys. Rev. C* **60**, 034606 (1999).
11. F. Kun and H. Herrmann, *Phys. Rev. E* **59**, 2623 (1999).
12. N. N. Myagkov and T. A. Shumikhin, *Comp. Mech., Comput., Appl. Int. J.* **3**, 35 (2012).
13. F. Wittel, F. Kun, H. J. Herrmann, and B. H. Kröplin, *Phys. Rev. E* **71**, 016108 (2005).
14. N. N. Myagkov and T. A. Shumikhin, *Physica A* **358**, 423 (2005).
15. H. Katsuragi, D. Sugino, and H. Honjo, *Phys. Rev. E* **68**, 046105 (2003); H. Katsuragi, D. Sugino, and H. Honjo, *Phys. Rev. E* **70**, 065103(R) (2004).
16. C. F. Moukarzel, S. F. Fernandez-Sabido, and J. C. Ruiz-Suarez, *Phys. Rev. E* **75**, 061127 (2007).
17. G. Timar, F. Kun, H. A. Carmona, and H. J. Herrmann, *Phys. Rev. E* **86**, 016113 (2012).
18. G. Timar, J. Blömer, F. Kun, and H. J. Herrmann, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 095502 (2010).
19. G. Pal, I. Varga, and F. Kun, *Phys. Rev. E* **90**, 062811 (2014).
20. N. N. Myagkov, T. A. Shumikhin, and L. N. Bezrukov, *Int. J. Impact Engng.* **37**, 980 (2010).
21. X. Campi, *Phys. Lett. B* **208**, 351 (1988).
22. X. Campi, H. Krivine, N. Sator, and E. Plagnol, *Eur. Phys. J. D* **11**, 233 (2000).
23. J. J. Monaghan, *Rep. Prog. Phys.* **68**, 1703 (2005).
24. L. D. Libersky, A. G. Petscheck et al., *J. Comput. Phys.* **109**, 67 (1993).
25. R. F. Stellingwerf and C. A. Wingate, *Int. J. Impact Engng.* **14**, 707 (1993).
26. J. O. Hallquist, *LS-DYNA Theory Manual*. Livermore Software Technology Corporation (2005).
27. A. J. Piekutowski, *Int. J. Impact Engng.* **20**, 639 (1997).
28. F. Schäfer, M. Lambert, E. Christiansen, S. Kibe, H. Stokes, H.-G. Reimerdes, S. A. Meshcheryakov, F. Angrilli, and H. Zengyao, *Proceed. of the 4th European Conference on Space Debris*. 18–20 April (2005), Darmstadt, Germany (2005), p. 39.
29. С. А. Мещеряков, Н. Н. Мягков, в сб. *Современные проблемы механики гетерогенных сред*, ИПРИМ РАН (2006), т. 3, 348.
30. Y. B. Zel'dovich and Y. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Academic, New York (1966).
31. M. Alme and C. Rhodes (Jr), *Int. J. Impact Engng.* **17**, 1 (1995).
32. G. R. Johnson and W. H. Cook, *Proc. 7th Intern. Symp. Ballistics*. (1983), p. 541.
33. G. I. Kanel, S. V. Razorenov, and V. E. Fortov, *Shock-Wave Phenomena and the Properties of Condensed Matter*, Springer, New York (2004).