

# ПЕРЕВОРОТ СПИНА ЗА СЧЕТ СПИН-ОРБИТАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СТАЛКИВАЮЩИХСЯ МЕДЛЕННЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

*П. В. Сасоров<sup>a</sup>, И. В. Фомин<sup>a,b\*</sup>*

<sup>a</sup> *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук  
125047, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Московский физико-технический институт, Государственный университет  
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 5 июля 2016 г.

Приведены аналитические вычисления амплитуды рассеяния точечных заряженных частиц, учитывающие спин-орбитальное взаимодействие. Рассмотрены два случая, характерных для водородоподобной плазмы: рассеяние электрона на тяжелом ионе и рассеяние электрона на свободном электроном. Результаты получены с учетом области малых энергий столкновения, меньших  $\alpha^2 m_e c^2$ , где  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры.

DOI: 10.7868/S0044451016120000

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При описании динамики плазмы вопрос ее спин-поляризации обычно не рассматривается. То, что такой подход является общепринятым, хорошо видно по монографиям [1, 2]. Однако характерное время релаксации макроскопической спин-поляризации плазмы превышает время установления максвелловской функции распределения приблизительно в  $\alpha^{-4}$  раз, где  $\alpha = e^2/\hbar c$  — постоянная тонкой структуры. В случае, когда значительную роль играют процессы ионизации и рекомбинации, характерные времена релаксации спина превышают время установления максвелловской функции распределения приблизительно в  $\alpha^{-3}$  раз. Поэтому при определенных способах создания плазмы она будет спин-поляризованной. Причина отмеченного выше пренебрежения эффектами спин-поляризации в их слабом влиянии на обычно рассматриваемые свойства плазмы.

Свойства поляризации газов и плазмы изучались в ряде работ. В работах [3, 4] рассматривалось воздействие оптической ориентации атомов на электропроводность плазмы и интенсивность ее излучения. Это явление было обнаружено в гелиевой

плазме при оптической ориентации в ней метастабильных атомов гелия. Создание слабоионизированной плазмы с сильной степенью спин-поляризации приводит к избытку метастабильных по спину атомов и ионов. Подобная плазма может иметь существенное практическое значение. Избыток метастабильных атомов и ионов приводит к своеобразной консервации энергии возбужденных атомов и ионов. Благодаря данной консервации возникают нестандартные каналы химических реакций в такой плазме. Свойства подобной плазмы практически не обсуждались в литературе, за исключением, возможно, работы [5]. Одним из способов создания такой спин-поляризованной плазмы является использование ферромагнитных катодов в тлеющем разряде [6, 7].

Холодный газ из метастабильных атомов, существующих за счет сильной спин-поляризации системы связанных электронов, проявляет разнообразные физические свойства. Создание и исследование такого газа является одним из важнейших направлений современных физических исследований [8–11]. Релаксация в подобном газе изучается во многих теоретических работах, например в [12].

Мы считаем, что исследования в области спин-поляризованной плазмы частично сдерживаются недостаточным теоретическим обоснованием. Например, скорость релаксации спин-поляризации

\* E-mail: fominalsha@gmail.com

плазмы является важным нерешенным вопросом. Мы поставили задачу получить надежную оценку скорости релаксации в спин-поляризованной плазме для случая, когда заряженные частицы в основном взаимодействуют за счет их кулоновского поля. Оказалось, что в литературе имеется пробел, не позволяющий решить эту задачу путем совмещения результатов известных работ. При этом следует отметить, что для случая холодной плотной квантовой жидкости, когда плотность возбужденных состояний невелика, имеются эффективные методы теоретического исследования кинетики [13].

Из сказанного выше следует, что для экспериментального исследования свойств спин-поляризованной плазмы лучше всего подходит холодная, идеальная и сильно разреженная плазма, для которой выполнены условия

$$e^2 n_e^{1/3} \ll E_T = p_T^2 / 2m_e \ll \alpha^2 m_e c^2.$$

Здесь  $n_e$  — объемная концентрация электронов,  $E_T$  и  $p_T$  — их характерные энергии и импульсы. Поэтому эту область параметров плазмы следует исследовать отдельно.

Кинетические свойства такой плазмы исследовались в недавней работе [14]. Она частично заполняет отмеченный выше пробел в теории. В работе [14] был получен интеграл столкновений в кинетическом уравнении для электронов, учитывающем их возможную спин-поляризацию и возможность переверота спина при столкновениях электронов друг с другом и с ионами плазмы. Составное кинетическое уравнение, полученное в этой работе, описывает не только динамику усредненной по спину концентрации электронов  $n$  в фазовом пространстве  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ , но и динамику вектора  $\mathbf{s}$ . Вектор  $\mathbf{s}$  параметризует локальную в фазовом пространстве спиновую матрицу плотности [15] и также, в общем случае, зависит от  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ . Более стандартный вывод интеграла столкновений для кинетического уравнения с учетом спиновых переменных (см., например, монографию [16]) опирается на квантово-механическую теорию возмущений. Поэтому он ограничен случаем, когда амплитуды рассеяния получены в первом борновском приближении. Выведенное таким образом кинетическое уравнение не может быть использовано для относительно холодной плазмы, с типичными энергиями электронов, меньшими  $\alpha^2 m_e c^2$ . Тем не менее, преимущество кинетического уравнения [16] состоит в возможности описания вырожденной плазмы с числами заполнения квантовомеханических состояний порядка 1. Преимущество же подхода [14] состоит в отказе от теории возмущений по силе взаи-

модействия в парных столкновениях. При этом возникает неизбежное требование относительной редкости таких столкновений, что исключает применимость этого подхода к вырожденной по Ферми плазме. Последнее ограничение не является, однако, обременительным при рассмотрении разреженной плазмы. В работе [14] использовались только общие свойства амплитуд рассеяния. Ее выводы применимы для любого газа, составленного из одного сорта фермионов со спином 1/2 и одного сорта тяжелых бесспиновых частиц.

Основной целью данной работы является вычисление амплитуд рассеяния электронов на ионах и друг на друге с учетом переверота спина при спин-орбитальном взаимодействии, в области энергий  $E_T \ll \alpha^2 m_e c^2$ . В классической серии работ [17–22] для получения конкретных выражений для этих амплитуд рассеяния используется, в конце концов, первое борновское приближение. Результатом такого приближения является то, что полученные амплитуды не могут быть использованы в области параметров плазмы, отмеченной выше. Классическая работа [23] посвящена вычислению точных амплитуд рассеяния заряженных частиц друг на друге без использования теории возмущений, но в ней рассматривались только бесспиновые частицы.

Статья построена следующим образом. Сначала рассматривается взаимодействие электрона с ионом. Ион считается очень массивным по отношению к электрону, а его гироманнитное отношение полагается равным нулю. Далее рассматривается взаимодействие электрона с электроном. В Заключение сформулированы основные результаты данной работы.

## 2. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНА В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ

В полностью ионизованной водородоподобной плазме можно выделить два основных процесса рассеяния: рассеяние электрона на ионе и взаимное рассеяние двух электронов. В данном разделе подробно рассмотрим первый процесс. Для этого мы воспользуемся известным решением уравнения Шредингера для кулоновского поля притяжения [15] и найдем к нему поправку, вызванную спин-орбитальным взаимодействием.

### 2.1. Уравнение Шредингера для кулоновского притяжения электрона

Вначале рассмотрим гамильтониан в разложении по степеням  $1/c$ , определяющий поведение нере-

лятивистского электрона в кулоновском поле притяжения [15]:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e} + e\Phi - \frac{\hat{\mathbf{p}}^4}{8m_e^3c^2} - \frac{e\hbar}{4m_e^3c^2} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot [\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{p}}] - \frac{e\hbar^2}{8m_e^2c^2} \operatorname{div} \mathbf{E}. \quad (1)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{p}}$  — оператор импульса,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  — вектор, составленный из матриц Паули,  $\Phi = -e/r$  — потенциал кулоновского притяжения,  $e = -|e|$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ . В данном гамильтониане (1) третье слагаемое,  $-\hat{\mathbf{p}}^4/8m_e^3c^2$ , соответствует релятивистским поправкам, а пятое слагаемое,  $-(e\hbar^2/8m_e^2c^2) \operatorname{div} \mathbf{E}$ , — неоднородности источников электрического поля. Эти слагаемые являются малыми ( $\sim \alpha^2$ ) и, в отличие от четвертого слагаемого,  $-(e\hbar/4m_e^3c^2) \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot [\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{p}}]$ , не оказывают влияния на спиновую часть волновой функции. Поэтому мы опустим эти малые добавки к гамильтониану. Нас будут интересовать слагаемые, соответствующие кулоновскому и спин-орбитальному взаимодействию. В случае столкновения электрона с ионами малое гиромагнитное отношение ионов позволяет считать последние бесспиновыми частицами. Поэтому мы не будем рассматривать спин-спиновое взаимодействие электрона с ионом.

Перейдем к атомной системе единиц, в которой  $|e| = 1$ ,  $\hbar = 1$ ,  $m_e = 1$ . Тогда оператор спин-орбитального взаимодействия можно представить в виде

$$\hat{V} = -\frac{e\hbar}{4m_e^3c^2} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot [\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{p}}] = \frac{\alpha^2}{2r^3} (\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}), \quad (2)$$

где  $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}/2$  — оператор спина, а  $\hat{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$  — оператор момента импульса. Тогда с учетом написанного выше гамильтониан можно записать в упрощенном виде:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2} - \frac{1}{r} + \hat{V}. \quad (3)$$

Гамильтониан (3) сохраняет квадрат полного момента  $\hat{\mathbf{j}}^2 = (\hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{s}})^2$ , проекцию полного момента  $\hat{j}_z$ , квадрат орбитального момента  $\hat{\mathbf{l}}^2$  и полную энергию, которая определяется импульсом  $p$  частицы на бесконечности. Все эти операторы коммутируют, поэтому имеет смысл рассматривать волновые функции состояния рассеяния с заданными квантовыми числами  $j$ ,  $j_z$ ,  $l$  и  $p$ . В данном случае есть два типа состояний с разными четностями, для которых  $l = j + 1/2$  либо  $l = j - 1/2$ , см. [15]. При этом оператор  $\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}$  является диагональным в таком представлении с заданными квантовыми числами и имеет общую с операторами  $\hat{\mathbf{l}}^2$ ,  $\hat{\mathbf{j}}^2$  систему собственных

функций. Это позволяет провести разделение переменных в гамильтониане (3) на радиальные и угловые. Двухкомпонентная волновая функция при определенных собственных значениях  $\hat{\mathbf{j}}^2$ ,  $\hat{\mathbf{l}}^2$  и  $\hat{j}_z$  имеет вид [25]

$$\Psi_{j,l,j_z,p}(\mathbf{r}, \sigma) = \frac{1}{r} X_{j,l,p}(r) \begin{pmatrix} \gamma_+ Y_{l,j_z-1/2}(\phi, \theta) \\ \gamma_- Y_{l,j_z+1/2}(\phi, \theta) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma = \pm 1/2$  — спиновая координата,  $Y_{l,m}(\phi, \theta)$  — сферические функции, определенные, например, в [15], а  $\gamma_{\pm} = \sqrt{(l \pm \chi j_1 + 1)(2l + 1)}$ , где  $\chi = \pm 1$  в соответствии со знаком  $\pm$  в соотношении  $j = l \pm 1/2$ . Радиальная часть волновой функции  $X_{j,l,p}(r)$  удовлетворяет радиальному уравнению Шредингера:

$$X''_{j,l,p}(r) + \left[ p^2 + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{\alpha^2}{r^3} (\mathbf{l}\mathbf{s}) \right] \times X_{j,l,p}(r) = 0, \quad (5)$$

которое возникает при подстановке волновой функции (4) в уравнение Шредингера с гамильтонианом (3). В уравнении (5) символом  $(\mathbf{l}\mathbf{s})$  обозначено собственное значение оператора  $\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ , принимающее следующие значения:

$$(\mathbf{l}\mathbf{s}) = \begin{cases} l/2, & j = l + 1/2, \quad l > 0, \\ -(l+1)/2, & j = l - 1/2, \quad l > 0, \\ 0, & j = 1/2, \quad l = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Уравнение (5) надо дополнить граничным условием. Функция  $X_{j,l,p}(r)$  должна быть регулярной в нуле, а ее нормировочный множитель определен так, чтобы ее асимптотика при  $r \rightarrow +\infty$  имела бы вид [15]

$$X_{j,l,p}(r)|_{r \rightarrow +\infty} = 2 \sin \left( pr + \frac{1}{p} \ln(2pr) - \frac{\pi}{2} l + \delta^{\pm}(l) \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (7)$$

В формуле (7) парциальная фаза рассеяния  $\delta^{\pm}(l)$  зависит от  $p$ ,  $l$  и  $j$ . Зависимость от  $j$  обозначена знаком  $\pm$ , соответствующим знаку в соотношении  $j = l \pm 1/2$ . Введенная таким образом радиальная волновая функция отвечает нормировке на  $2\pi \delta(p - p')$ .

Кулоновский потенциал, который мы рассматриваем в (1), является дальнедействующим. Это приводит к указанным выше аддитивным логарифмическим поправкам типа  $\ln(pr)$  в аргументах функций  $\sin$  и  $\exp$ . Такие слабые зависимости не влияют

на приводимые ниже формулы, хотя о них надо помнить.

### 2.2. Теория возмущений при малых энергиях столкновений

Возвращаясь к уравнению (5), отметим, что первые три слагаемых в квадратных скобках могут быть одного порядка, а четвертое слагаемое мало, порядка  $\alpha^2$ . Это позволяет учитывать его с помощью теории возмущений по отношению к остальным слагаемым. В качестве невозмущенных волновых функций мы рассматриваем точное решение уравнения Шредингера в кулоновском поле притяжения. Такой подход позволяет отказаться от требования малости кулоновского слагаемого и учесть область малых энергий, когда энергия столкновения меньше или порядка  $\alpha^2 m_e c^2$  в физических единицах.

Опустим для наглядности индексы  $j, l, p$  у функции  $X_{j,l,p}(r)$ . Будем придерживаться этого упрощения и дальше в случаях, когда это не вызывает недопонимания. Уравнение (5), невозмущенное спин-орбитальным взаимодействием,

$$X''(r) + \left[ p^2 + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] X(r) = 0, \quad (8)$$

имеет два линейно независимых решения,  $X_1$  и  $X_2$ , выражаемых через вырожденные гипергеометрические функции [15, 17, 23]. Физическое решение  $X_1$ , регулярное в нуле и имеющее правильную асимптотику на бесконечности (7), для случая кулоновского притяжения имеет вид

$$X_1 = \frac{e^{\pi/2p} |\Gamma(l+1-i/p)|}{(2l+1)!} (2pr)^{l+1} \times e^{-ipr} F\left(\frac{i}{p} + l + 1, 2l + 2, 2ipr\right), \quad (9)$$

где  $F(\alpha, \gamma, z)$  — вырожденная гипергеометрическая функция, ряд Тейлора которой в нуле начинается как  $F(\alpha, \gamma, z) = 1 + \alpha z/\gamma + \dots$ . Далее нам потребуются асимптотика этой кулоновской функции  $X_1$  при  $r \rightarrow \infty$ :

$$X_1|_{r \rightarrow \infty} = 2 \sin\left(pr + \frac{1}{p} \ln(2pr) - \frac{\pi}{2}l + \delta_c(l)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad (10)$$

где

$$\delta_c(l) = \arg \Gamma(l+1-i/p). \quad (11)$$

Удобно определить второе независимое решение  $X_2$  через его асимптотику при  $r \rightarrow \infty$ :

$$X_2|_{r \rightarrow \infty} = 2 \cos\left(pr + \frac{1}{p} \ln(2pr) - \frac{\pi}{2}l + \delta_c(l)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right). \quad (12)$$

Это решение выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию  $z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma, 2 - \gamma, z)$  и имеет особенность в нуле. Явное выражение для этой функции нам не понадобится.

Воспользуемся относительной малостью спин-орбитального взаимодействия и рассмотрим первый порядок теории возмущений применительно к (5). Найдем решение уравнения

$$X''(r) + \left[ p^2 + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] X(r) = \frac{\alpha^2}{r^3} (\mathbf{ls}) X_1(r), \quad (13)$$

имеющее правильную асимптотику в нуле и асимптотику вида

$$X(r)|_{r \rightarrow \infty} = 2 \sin\left(pr + \frac{1}{p} \ln(2pr) - \frac{\pi}{2}l + \delta^\pm(l)\right) \quad (14)$$

на бесконечности. Будем искать решение уравнения (13) методом «вариации постоянных» в виде

$$X = a(r)X_1 + b(r)X_2 \quad (15)$$

с граничными условиями

$$a(\infty) = 1, \quad b(0) = 0. \quad (16)$$

Эта стандартная процедура дает

$$X = X_1 + X_1 \alpha^2 (\mathbf{ls}) \int_r^\infty \frac{X_1 X_2}{W} \frac{dr}{r^3} + X_2 \alpha^2 (\mathbf{ls}) \int_0^r \frac{X_1^2}{W} \frac{dr}{r^3}, \quad (17)$$

где  $W = X_1 X_2' - X_1' X_2$  — вронскиан, являющийся константой для радиального уравнения Шредингера (8). В нашем случае  $W = -4p$ . Рассмотрим поведение решения (17) на бесконечности:

$$X|_{r \rightarrow \infty} = X_1 + X_2 \alpha^2 (\mathbf{ls}) \int_0^\infty \frac{X_1^2}{W} \frac{dr}{r^3}. \quad (18)$$

Сравнивая полученное выражение (18) с правильной асимптотикой (14) решений уравнения (13), получаем определение для фазы рассеяния  $\delta^\pm(l)$  и для фазы переворота спина  $\delta_s(l)$  в случае кулоновского притяжения:

$$\begin{aligned} \delta^\pm(l) &= \delta_c(l) + \alpha^2(\mathbf{Is})\delta_s(l) = \\ &= \delta_c(l) + \alpha^2(\mathbf{Is}) \int_0^\infty \frac{X_1^2}{W} \frac{dr}{r^3}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь числа  $(\mathbf{Is})$  определяются формулой (6), а знак верхнего индекса у  $\delta^\pm(l)$  определяется знаком  $\pm$  в соотношении  $j = l \pm 1/2$  в формуле (6). Напомним, что величину  $\delta_s(0)$  можно положить равной нулю. Подставив в (19) определенные выше явные выражения для  $X_1$  и  $W$ , получаем явную формулу для  $\delta_s(l > 0)$  в первом неисчезающем порядке по  $\alpha^2$ :

$$\begin{aligned} \delta_s(l > 0) &= \int_0^\infty \frac{X_1^2}{W} \frac{dr}{r^3} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(2p)^{2l+1} e^{\pi/p} |\Gamma(l+1 - i/p)|^2}{((2l+1)!)^2} \times \\ &\times \int_0^\infty r^{2l-1} \left| F\left(\frac{i}{p} + l + 1, 2l + 2, 2ipr\right) \right|^2 dr. \end{aligned} \quad (20)$$

Интеграл в (20) сходится при  $l > 0$ .

Этот результат является точным в пределе  $\alpha^2 \ll \ll 1$ . При  $p \gg 1$  его можно сильно упростить. Это упрощение соответствует переходу к теории возмущений, основанной на плоских волнах, т.е. к первому борновскому приближению [15]. Нас в данной работе интересует другой предельный случай  $p \ll 1$ , не исследованный ранее. При  $p \ll 1$  есть два предельных подслучая, когда выражение (20) сильно упрощается. Они перекрываются по своим областям применимости. Первый из этих подслучаев соответствует не очень большому  $l > 0$ , таким, что  $l \ll 1/p$ , при  $p \ll 1$ . При этом основной вклад в интеграл (20) дает область  $r \sim l(l+1)$ . В данной области имеет место удобная асимптотика для (9) [15]:

$$X_1(r)|_{p \rightarrow 0} = \sqrt{4\pi p r} J_{2l+1}(\sqrt{8r}). \quad (21)$$

Использование асимптотики (21) позволяет вычислить поправку  $\delta_s(l)$  к фазе рассеяния в этом предельном подслучае:

$$\begin{aligned} \delta_s(l)|_{p \rightarrow 0} &= -16\pi \int_0^\infty J_{2l+1}^2(x) \frac{dx}{x^3} = \\ &= -\frac{\pi}{l(l+1)(2l+1)}, \quad l > 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Второй подслучай определяется условием  $l \gg 1$ . В области больших орбитальных чисел мы можем использовать «квазиклассическую» асимптотику для гипергеометрических функций, входящих в (20). Итак, при  $l \gg 1$  и  $p \ll 1$  имеем согласно [15]:

$$\begin{aligned} X_1 &\simeq \\ &\simeq \begin{cases} 0, & r < r_0, \\ 2\sqrt{p} \left( p^2 + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right)^{-1/4} \sin \Phi(r), & r > r_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\Phi(r) = \frac{\pi}{4} + \int_{r_0}^r \sqrt{p^2 + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}} dr, \quad (24)$$

а

$$r_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + l(l+1)p^2}}{p^2}$$

соответствует радиусу  $r > 0$ , при котором подынтегральное выражение в (24) обращается в нуль. Заметим, немного упрощая, что в области  $r > r_0$  относительная поправка к асимптотическому выражению (23), пропорциональная  $\hbar$  в обычных единицах, равна по порядку величины  $\mathcal{O}(p)$  в используемых здесь единицах. Точная волновая функция  $X_1$  — порядка  $(2r)^{l+1} \sqrt{p}/(2l+1)!$  при  $r < r_0$ . Асимптотика на больших расстояниях  $r \rightarrow \infty$  волновой функции (23), (24) соответствует общим формулам (10), (11). При этом парциальные фазы  $\delta_c(l)$ , соответствующие (23), (24), отличаются от точных (11) лишь на малые поправки порядка  $\mathcal{O}(p)$  и  $\mathcal{O}(1/l)$ , когда  $p \ll 1$  и  $l \gg 1$ .

Подставляя асимптотику (23) в формулу (20), получаем для фазы переворота спина выражение

$$\begin{aligned} \delta_s(l)|_{l \gg 1} &= -\frac{1}{2} \int_{r_0}^\infty \frac{dr}{r^3 \sqrt{p^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{r}}} = \\ &= -\frac{p^3}{2} \left[ u^2 + u^3 \left( \arctg u + \frac{\pi}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$u = \frac{1}{p\sqrt{l(l+1)}}.$$

Приведенное выражение справедливо при  $l \gg 1$ . Оно имеет следующие асимптотики в областях больших и малых  $u$ :

$$\delta_s(l)|_{l \gg 1} = -\frac{p^3}{2} \begin{cases} u^2 + \pi u^3/2 + \mathcal{O}(u^4), & u \rightarrow 0, \\ \pi u^3 + 1/3 + \mathcal{O}(u^{-2}), & u \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (26)$$

Заметим, что две асимптотики (22) и (26) имеют общую область применимости при  $1 \ll l \ll 1/p$ . В этой области главные члены этих асимптотических разложений совпадают. Подводя итог, можно сказать, что коэффициент в фазе переворота спина в поле кулоновского притяжения,  $\delta_s(l)$ , в пределе малых энергий  $p \ll 1$  имеет вид

$$\delta_s(l > 0) = - \begin{cases} \frac{p}{2l(l+1)}, & l \gg 1/p, \\ \frac{\pi}{l(l+1)(2l+1)}, & l \ll 1/p. \end{cases} \quad (27)$$

Правильная форма перехода от одной асимптотики в (27) к другой описывается «квазиклассической» формулой (25) при  $l \sim 1/p \gg 1$ .

Также нам далее потребуется асимптотическое выражение для кулоновских парциальных фаз рассеяния,  $\delta_c(l)$ , в пределе  $p \ll 1$ . Раскладывая точное выражение (11) с помощью формулы Стирлинга, получаем

$$\begin{aligned} \delta_c(l)|_{p \ll 1} &= \arg \Gamma \left( l + 1 - \frac{i}{p} \right) \Big|_{p \ll 1} = \\ &= - \left( l + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{1}{p(l+1)} + \\ &+ \frac{\ln p + 1}{p} - \frac{\ln(1 + p^2(l+1)^2)}{2p} + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

### 2.3. Амплитуда переворота спина медленного электрона в кулоновском поле притяжения

Рассмотрим амплитуду рассеяния,  $f_\beta^\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ , соответствующую гамильтониану (3). Она определяется асимптотикой при  $r \rightarrow \infty$  системы стационарных волновых функций рассеяния (с фиксированным исходным импульсом  $\mathbf{p}$  и проекцией спина  $\beta$  до столкновения) на больших расстояниях от рассеивающего центра (тяжелого иона), расположенного в точке  $\mathbf{r} = 0$  [15]:

$$\psi_{\mathbf{p}\beta}^\alpha(\mathbf{r}) \Big|_{r \rightarrow \infty} = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \delta_\beta^\alpha + \frac{f_\beta^\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{p}') e^{ipr}}{r}. \quad (29)$$

Здесь  $\mathbf{p}' = p\mathbf{r}/r$ , а  $\alpha$  — проекция спина на бесконечности. Нам надо выразить амплитуду рассеяния  $f_\beta^\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  через определенные выше в уравнении (19) парциальные фазы рассеяния  $\delta^\pm(l)$ .

Для описания связи между парциальными фазами рассеяния и амплитудой рассеяния удобно ввести оператор амплитуды рассеяния  $\hat{f}$ . Он тесно связан с  $S$ -матрицей рассеяния [15], которая преобразует угловую и спиновую части асимптотики падающей на рассеивающий центр волны в такие же параметры расходящейся волны. Наиболее общий вид оператора амплитуды рассеяния для спина 1/2 с учетом спин-орбитального взаимодействия имеет вид [15]

$$\hat{f} = a(\hat{\mathbf{l}}^2) + \frac{1}{2} b(\hat{\mathbf{l}}^2) (\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}), \quad (30)$$

где  $a, b$  — функции, зависящие только от оператора  $\hat{\mathbf{l}}^2$  и от параметра  $p$ . Подействовав оператором  $\hat{f}$  на выражение для плоской волны, разложенной по парциальным волнам, можно получить формулы для вычисления амплитуды через фазы рассеяния [15, 26]:

$$f_\beta^\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = A(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta_\beta^\alpha + B(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \hat{\boldsymbol{\sigma}}_\beta \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \quad (31)$$

где  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{p} \times \mathbf{p}'$ ;

$$A(\theta) = \frac{1}{2ip} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ (l+1) \left( e^{2i\delta^+(l)} - 1 \right) + l \left( e^{2i\delta^-(l)} - 1 \right) \right] P_l(\cos \theta), \quad (32)$$

$$B(\theta) = \frac{1}{2p} \sum_{l=1}^{\infty} \left( e^{2i\delta^+(l)} - e^{2i\delta^-(l)} \right) P_l^1(\cos \theta), \quad (33)$$

где  $\theta$  — угол рассеяния:  $\theta = \arccos(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' / (pp'))$ .  $A(\theta)$  и  $B(\theta)$  зависят только от энергии столкновения, т. е. от  $p$ , и от угла рассеяния  $\theta$ . Напомним, что парциальные фазы рассеяния  $\delta^\pm(l)$  зависят от  $p$ .

Подставим в (32) выражение для фазы рассеяния (19) и учтем собственные значения оператора  $\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ , (6). Удерживая только первый порядок разложения по  $\alpha^2$ , получаем для скалярной амплитуды  $A(\theta)$ :

$$A(\theta) = \frac{1}{2ip} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ (2l+1) \left( e^{2i\delta_c(l)} - 1 \right) \right] P_l(\cos \theta). \quad (34)$$

Выражение (34) после суммирования, как это и должно быть, полностью совпадает с точной амплитудой рассеяния бесспиновой частицы кулонов-

ским полем другой, тяжелой бесспиновой частицы [17, 23]<sup>1)</sup>:

$$A(\theta) = -\frac{1}{2p^2 \sin^2(\theta/2)} \frac{\Gamma(1+i/p)}{\Gamma(1-i/p)} \times \exp\left(-\frac{2i}{p} \ln \sin \frac{\theta}{2}\right). \quad (35)$$

Для амплитуды переворота спина  $B(\theta)$  получаем аналогично:

$$B(\theta) = \frac{i\alpha^2}{2p} \sum_{l=1}^{\infty} e^{2i\delta_c(l)} (2l+1) \delta_s(l) P_l^1(\cos \theta). \quad (36)$$

Здесь, как и в (34), мы удержали только линейные члены разложения <sup>2)</sup> по  $\alpha^2$  в  $\exp(2i\delta^\pm(l))$ .

При вычислении  $B(\theta)$  мы по-прежнему ограничимся лишь предельным случаем  $p \ll 1$ . При этом будем использовать парциальные фазы рассеяния, полученные в разд. 2.2. Бесконечный ряд в выражении (36) сходится при любых  $0 < \theta < \pi$ , однако он не является абсолютно сходящимся. Это утверждение является прямым следствием точных выражений для асимптотик для  $\delta_c(l)$  (28) и  $\delta_s(l)$  (27) и известных асимптотик для  $P_l^1(\cos \theta)|_{l \rightarrow \infty}$ , описанных, например, в [27]. Такое свойство формулы (36) приводит к некоторым качественным свойствам асимптотики  $B(\theta)$  при  $p \ll 1$ . Для их выявления учтем, что ряд в (36) сходится только из-за наличия достаточно быстро осциллирующих с изменением  $l$  множителей в членах суммы. В области  $l \sim 1/p$  частота этих осцилляций может стать малой. Поэтому в сумме (36) есть две разные области:  $l \sim 1$  и  $l \sim 1/p$ , дающие качественно различные вклады в асимптотику  $B(\theta)|_{p \rightarrow \infty}$ . Разобьем сумму для  $B$  на две части, соответствующие областям с малыми и большими  $l$ . Границу между этими областями  $l_0$  поставим в области, где справедливы обе асимптотики (22) и (25) для  $\delta_s(l)$ , т. е.  $1 \ll l_0 \ll 1/p$ . Для определенности положим  $l_0 = p^{-5/6}$ . Итак мы можем написать

$$B(\theta) = B_0(\theta) + B_1(\theta), \quad (37)$$

<sup>1)</sup> Этот результат не требует, в отличие от других результатов этого раздела, условия  $p \ll 1$ .

<sup>2)</sup> Полученная таким образом (удержанием только первого порядка теории возмущений по величине спин-орбитального взаимодействия) амплитуда  $f_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  с очевидностью не удовлетворяет условию унитарности. Для восстановления унитарности можно частично учесть в  $A(\theta = 0)$  слагаемые, пропорциональные  $\alpha^4$ . Этого можно добиться путем использования оптической теоремы в приложении к полученным нами ниже амплитудам. Мы не будем здесь останавливаться на этом.

где

$$B_0(\theta) = \frac{i\alpha^2}{2p} \sum_{0 < l \leq l_0} e^{2i\delta_c(l)} (2l+1) \delta_s(l) P_l^1(\cos \theta), \quad (38)$$

$$B_1(\theta) = \frac{i\alpha^2}{2p} \sum_{l > l_0} e^{2i\delta_c(l)} (2l+1) \delta_s(l) P_l^1(\cos \theta). \quad (39)$$

В формуле (38) мы можем использовать для  $\delta_s(l)$  асимптотику (22), а в формуле (39) — асимптотику (25).

Вычисление  $B(\theta)$  начнем с вычисления  $B_0(\theta)$  по формуле (38). В эту сумму входят такие  $l$ , что  $pl \ll 1$  при  $p \ll 1$ . Поэтому вместо выражения (28) для кулоновской фазы  $\delta_c(l)$  при  $p \ll 1$  можно использовать его асимптотику:

$$e^{2i\delta_c(l)}|_{pl \ll 1} \approx -i(-1)^l \exp\left(\frac{2i}{p}(\ln p + 1)\right) \times \exp(ip(l+1)^2). \quad (40)$$

Таким образом, выражение для  $B_0(\theta)$  принимает вид

$$B_0(\theta) = -\frac{\alpha^2 \pi}{2p} \exp\left(\frac{2i}{p}(1 + \ln p)\right) \times \sum_{0 < l \leq l_0} \frac{(-1)^l}{l(l+1)} P_l^1(\cos \theta) + \dots \quad (41)$$

Сумма, входящая в эту формулу, продолженная до бесконечного числа членов, сходится, поэтому продолжение этой суммы до бесконечности вносит лишь маленькую поправку. Сумма же

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l(l+1)} P_l^1(\cos \theta) = -\operatorname{tg} \frac{\theta}{4}$$

вычисляется аналитически при  $0 \leq \theta < \pi$  при использовании производящей функции для  $P_l^1(\cos \theta)$ . Таким образом,

$$B_0(\theta) = \frac{\alpha^2 \pi}{2p} \exp\left(\frac{2i}{p}(1 + \ln p)\right) \operatorname{tg} \frac{\theta}{4} + \dots \quad (42)$$

При получении выражения (41) из определения (38) и асимптотики (40) мы опустили под знаком суммы множитель  $\exp(ip(l+1)^2)$ . Почему и когда это можно сделать? Дело в том, что выражение под знаком суммы является быстро осциллирующим при росте  $l$ , благодаря множителю  $\exp(i(\pi \pm \theta)l)$ . Поэтому эта сумма определяется только небольшим числом первых членов. При этом множитель  $\exp(ip(l+1)^2)$

можно опустить, если  $p \ll 1$ . Исключение составляет область  $\theta \approx \pi$ , где отмеченный быстро осциллирующий множитель начинает действовать только при  $l \sim (\pi - \theta)^{-1}$ . Условие того, что множитель  $\exp(ip(l+1)^2)$  может быть заменен на 1 вплоть до таких больших  $l$ , имеет вид  $\pi - \theta \gg \sqrt{p}$ . Это и есть условие применимости формулы (42).

Переходя к вычислению  $B_1(\theta)$ , сделаем следующее упрощение. При больших  $l$  и не очень маленьких  $\theta$  или  $\pi - \theta$  воспользуемся следующей асимптотикой присоединенных полиномов Лежандра:

$$P_l^1(\cos \theta)|_{l \sin \theta \gg 1} \sim -\sqrt{\frac{l}{2\pi \sin \theta}} \left( e^{i\phi(l, \theta)} + e^{-i\phi(l, \theta)} \right), \quad (43)$$

где  $\phi(l, \theta) = (l+1/2)\theta + \pi/4$ . Тогда сумму  $B_1(\theta)$  можно переписать в виде двух слагаемых:

$$B_1(\theta) = -\frac{i\alpha^2}{2p} \sum_{l>l_0} (2l+1)\delta_s(l) \sqrt{\frac{l}{2\pi \sin \theta}} \times \\ \times [\exp(2i\delta_c(l) + i\phi(l, \theta)) + \exp(2i\delta_c(l) - i\phi(l, \theta))]. \quad (44)$$

При этом

$$2i\delta_c(l) \pm i\phi(l, \theta) \equiv iS^\pm(l, p, \theta) = -i(2l+1) \times \\ \times \arctg \frac{1}{p(l+1/2)} \pm i \left( l + \frac{1}{2} \right) \theta \pm i\frac{\pi}{4} + \frac{2i}{p}(\ln p + 1) - \\ - \frac{i}{p} \ln \left( 1 + p^2 \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 \right) + \mathcal{O}(p) + \mathcal{O}(l^{-1}), \quad (45)$$

где предполагается, что  $p \rightarrow 0$ , а  $l \rightarrow \infty$ . Последний множитель в (44) представляет из себя сумму двух экспонент, второе слагаемое в нем — быстро осциллирующий множитель для всех  $l > l_0$ . То же самое можно сказать и про первое слагаемое за исключением области  $l$ , где  $\partial_l S^+ \approx 0$ . Поэтому основной вклад в полную сумму (44) дает только первое слагаемое, причем основной вклад в это слагаемое дает область значений  $l$ , для которых  $\partial_l S^+ \approx 0$  при заданных  $\theta$  и  $p$ . В этой области  $l$  сомножитель  $\exp(iS^+(l, p, \theta))$  является плавной функцией  $l$ . Поэтому суммирование по  $l$  можно заменить на интегрирование. Таким образом,

$$B_1(\theta) \approx -\frac{i\alpha^2}{2p} \int_{l_0}^{\infty} (2l+1)\delta_s(l) \times \\ \times \sqrt{\frac{l}{2\pi \sin \theta}} e^{iS^+(l, p, \theta)} dl. \quad (46)$$

По причинам, отмеченным выше, этот интеграл можно оценить с помощью метода стационарной фазы, опуская при этом малые поправки в (45). Стационарная точка  $l = l_p$  определяется условием

$$\partial_l S^+(l, p, \theta)|_{l=l_p} = \left( \theta - 2 \arctg \frac{1}{p(l+1/2)} \right) \Big|_{l=l_p} = 0.$$

Отсюда имеем

$$l_p = -\frac{1}{2} + \frac{1}{p} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}. \quad (47)$$

Для реализации метода стационарной фазы надо также знать, что

$$\partial_l^2 S^+|_{l=l_p} = 2p \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Последнее означает, что в интеграл (46) основной вклад вносит следующая область значений  $l$ :

$$|l-l_p| \sim \delta = |\partial_l^2 S^+(l_p)|^{-1/2} = \left( \sqrt{2p} \sin(\theta/2) \right)^{-1} \gg 1.$$

Это оправдывает замену суммирования (44) интегрированием. Кроме того, равенство (47) оправдывает использование асимптотики (43). Окончательно получаем для  $B_1(\theta)$ :

$$B_1(\theta) = -\alpha^2 \frac{1}{2 \sin \theta} \left[ 1 + \frac{\theta + \pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right] \times \\ \times \exp \left[ \frac{2i}{p} \left( 1 + \ln p + \ln \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]. \quad (48)$$

Из условия применимости этого выражения  $1 \ll \delta \ll l_p$  следует, в частности, что  $\pi - \theta \gg \sqrt{p}$ , помимо того, что  $p \ll 1$ . Заметим, что это условие применимости совпадает с условием применимости выражения (42) для  $B_0(\theta)$ , а  $|B_1(\theta)|$  становится порядка  $|B_0(\theta)|$  как раз при  $\pi - \theta \sim \sqrt{p} \ll 1$ .

Таким образом,

$$B(\theta) = \frac{\alpha^2 \exp \left( \frac{2i}{p} (1 + \ln p) \right)}{2p} \left[ \pi \operatorname{tg} \frac{\theta}{4} - \right. \\ \left. - p \frac{1 + \frac{\theta + \pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \exp \left( \frac{2i}{p} \ln \sin \frac{\theta}{2} \right) + \dots \right], \quad (49)$$

если  $p \ll 1$ , а  $\pi - \theta \gg \sqrt{p}$ . Формально первое слагаемое в (49) является лидирующим из-за предположенной малости  $p$ . Однако второе слагаемое расходуется при  $\theta \rightarrow 0$ . Поэтому в асимптотическом разложении  $B(\theta)$  (49) мы удерживаем оба эти вклада, рассматривая их равноправно. Следующие поправки,

отмеченные многоточием, малы относительно одного из удержанных вкладов либо по параметру  $p$ , либо по параметру  $\theta$  при малых углах рассеяния.

Рассмотрим для полноты картины поведение  $B(\theta)$  вблизи точки  $\theta = \pi$ . При  $\pi - \theta \ll \sqrt{p} \ll 1$  мы можем использовать в (36) асимптотику для присоединенных полиномов Лежандра  $P_l^1(\cos \theta)$  при  $l(\pi - \theta) \ll 1$ :

$$P_l^1(\cos \theta) \Big|_{l(\pi-\theta) \ll 1} = (-1)^l l(l+1) \frac{\pi - \theta}{2},$$

асимптотику (40) для невозмущенных парциальных фаз  $\delta_c(l)$  и асимптотику (27) для парциальных фаз  $\delta_s(l)$  при  $l \ll 1/p$ . В результате получаем при  $\pi - \theta \ll \sqrt{p} \ll 1$ :

$$\begin{aligned} B(\theta) &= -\frac{\alpha^2 \pi}{4p} (\pi - \theta) \exp\left(\frac{2i}{p}(1 + \ln p)\right) \times \\ &\times \sum_{l=1}^{\sim 1/p} \exp(ip(l+1)^2) \Big|_{p \rightarrow 0} = \\ &= -\alpha^2 \frac{(1+i)\pi^{3/2}}{8\sqrt{2}} p^{-3/2} (\pi - \theta) \times \\ &\times \exp\left(\frac{2i}{p}(1 + \ln p)\right). \end{aligned} \quad (50)$$

Видно, что сходимость суммы в (50) определяется областью  $l \sim 1/\sqrt{p}$ , что оправдывает использование асимптотик, справедливых при  $l \ll 1/p$ .

Таким образом,  $B(\theta)|_{\theta \rightarrow \pi} \rightarrow 0$ , и в  $f_\beta^\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  нет никакой особенности при  $\theta = \pi$ , по крайней мере в лидирующем члене, если  $p \ll 1$ . Отметим, что расходимость в амплитуде  $B(\theta)$  (49) при  $\theta \rightarrow 0$ , связана, как и в амплитуде  $A(\theta)$ , с дальнедействующим характером кулоновского поля. В плазме имеет место дебаевское экранирование заряда ионов на расстояниях больших дебаевского радиуса  $r_D$ . Он обычно существенно больше атомных масштабов. Таким образом, взаимодействие заряженных частиц в плазме является «короткодействующим». С учетом этого обстоятельства нужно считать, что фактически  $B(\theta = 0) = 0$ . Область углов  $\theta$  около  $\theta = 0$ , где  $B(\theta)$  плавно обращается в нуль, определяется условием  $\theta \sim \theta_{min} = (p^2 r_D)^{-1}$  (при условии, конечно, что  $r_D \gg p^{-2} \gg 1$ ). Последнее условие автоматически выполнено, например, если кинетическая энергия электрона в плазме много больше средней энергии кулоновского взаимодействия электронов с ионами.

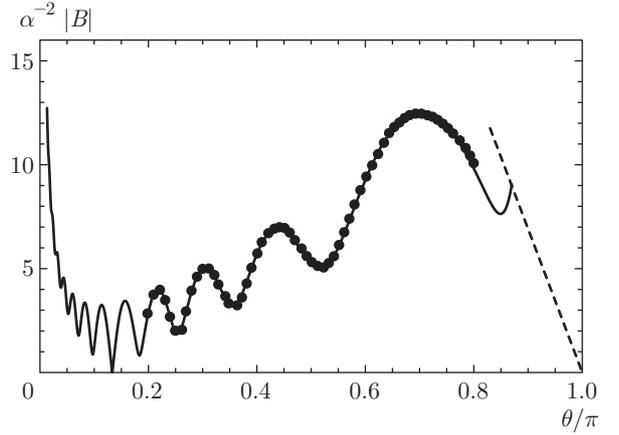


Рис. 1. Нормированный модуль амплитуды переворота спина  $\alpha^{-2}|B(\theta)|$  в зависимости от угла рассеяния  $\theta$  при  $p = 0.1$ . Точки — точная сумма (36) с точными парциальными фазами (20), сплошная линия — асимптотическая формула (49), штриховая линия — асимптотика (50) при  $\theta \rightarrow \pi$

Формулы (49) и (50) вместе с (31) и (35) определяют искомую амплитуду  $f_\alpha^\beta(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  рассеяния медленных электронов на неподвижных ионах с учетом спин-орбитального взаимодействия. Чтобы получить формулы (49) и (50) в физических единицах, нужно входящую в эти формулы амплитуду  $B$  заменить на  $m_e e^2 \hbar^{-2} B$ , а импульс  $p$  — на  $m_e^{-1} e^{-2} \hbar p$ .

Для лучшего понимания полученных результатов сплошной линией на рис. 1 показан модуль амплитуды  $B(\theta)$ , как функция  $\theta$ , для  $p = 0.1$ , построенный по нашей основной формуле (49). Вклад, соответствующий  $B_1(\theta)$ , т. е. второму слагаемому в (49), определяет левую часть кривой на рис. 1. Согласно приведенным выше аналитическим выкладкам, он соответствует амплитуде переворота спина на классической траектории электрона. Вклад, соответствующий  $B_0(\theta)$ , т. е. первому слагаемому в (49), определяет правую часть кривой на рис. 1. Этот вклад, лидирующий при малых  $p$  и умеренных  $\theta$ , не связан с классическими траекториями электрона. Фактически амплитуда (49) является суммой амплитуд двух различающихся физически процессов. В результате в области, где они имеют сопоставимые абсолютные величины, возникает интерференционный эффект, хорошо видный на рис. 1. Этот эффект не является следствием упрощений, использованных при оценке  $B(\theta)$ . Штриховой линией на этом же рис. 1 показана асимптотика (50), справедливая при  $\theta \rightarrow \pi$ .

Интересно сопоставить численные результаты, полученные по точным формулам (20) и (36), с

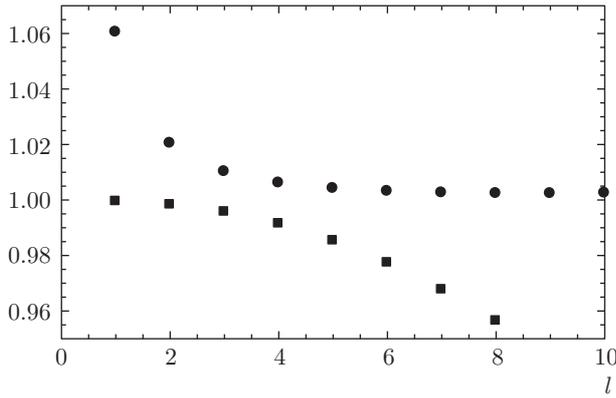


Рис. 2. Зависимости от  $l$  отношения асимптотического выражения (22) для парциальных фаз  $\delta_s(l)$  к точным (20) при  $p = 0.1$  (квадраты) и отношения асимптотического выражения (25) к точным (20) (кружки)

аналитической асимптотикой (49). Для этого имеет смысл сначала сопоставить парциальные фазы  $\delta_s(l)$ , полученные по точным формулам (20), с парциальными фазами  $\delta_s(l)$ , полученными по асимптотическим формулам (22) и (25). На рис. 2 в качестве иллюстрации показаны отношения асимптотических парциальных фаз (22) и (25) к точным фазам (20) для  $l = 1, \dots, 10$  и  $p = 0.1$ . При этом интегрирование в (20) велось вплоть до  $r = 10^3$ . Из-за этого приходится ограничиться в сумме (36) не очень большими  $l$  и, соответственно, не очень маленькими  $\theta$ . Видно, что в области  $l = 3, 4, 5$  две асимптотики почти совпадают, как и должно быть, с точностью порядка 1–2%. Кроме того, квазиклассическая асимптотика (25) отличается от точной формулы меньше, чем на 0.3%, при  $l > 6$ . Последнее позволяет при численном расчете заменить при  $p = 0.1$  точные парциальные фазы в сумме (36) на квазиклассические (25), оставив в этой сумме численные выражения, рассчитанные по точным формулам (20), только для  $l < 7$ . Рассчитанные таким образом «точные» значения  $B(\theta)$  для дискретного набора углов  $\theta$  и  $p = 0.1$  показаны на рис. 1 черными точками. Мы ограничили область изменения  $\theta$  для «точных» амплитуд рассеяния со стороны малых  $\theta$  из-за того, что при малых  $\theta$  требуется суммирование до чрезвычайно больших  $l$ . В данном расчете мы ограничились суммированием до  $l = 100$ . Лидирующий член в (49) определяет асимптотику  $B(\theta)$  при  $p \rightarrow 0$ . Из рис. 1 видно качество наших асимптотических формул для  $B(\theta)$ . При таких и меньших  $p$  не так просто численно найти  $B(\theta)$  по точным формулам (20) и (36) в области углов рассеяния  $\theta$ , где доминирует квазиклассический вклад, т. е. при  $\theta \ll p$ . Тем не ме-

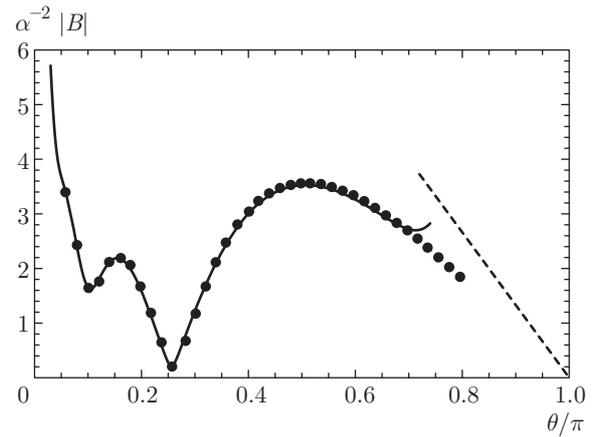


Рис. 3. Нормированный модуль амплитуды переворота спина  $\alpha^{-2}|B(\theta)|$  в зависимости от угла рассеяния  $\theta$  при  $p = 0.3$ . Точки — точная сумма (36) с точными парциальными фазами (20), сплошная линия — асимптотическая формула (49), штриховая линия — асимптотика (50) при  $\theta \rightarrow \pi$

нее, разумная амплитуда (и фаза) осцилляций, вызванных интерференцией основного процесса рассеяния с квазиклассическим при умеренных  $\theta$ , косвенно указывают на то, что рассчитанный нами квазиклассический вклад количественно правильно отражает вклад больших  $l$  в полную амплитуду  $B(\theta)$ .

Точно такое же сопоставление, как и на рис. 1, проведено на рис. 3, но для  $p = 0.3$ . Видно, что даже для таких, весьма умеренных  $p$ , наши асимптотические формулы, полученные для предела  $p \ll 1$ , весьма неплохо описывают рассчитанные численно амплитуды рассеяния.

#### 2.4. Полное сечение переворота спина при рассеянии медленных электронов на неподвижных ионах

Интересно вычислить полное сечение переворота спина при рассеянии медленного электрона с импульсом  $\mathbf{p}$  на неподвижном ионе, основываясь на аналитических формулах разд. 2.3. Рассмотрим начальное состояние, чистое по спину, с  $s_z = 1/2$  и импульсом  $\mathbf{p}$ , имеющим угол  $\theta_i$  с осью  $z$ . Найдем полное сечение того, что после рассеяния электрон будет находиться в состоянии  $s_z = -1/2$ . С учетом экранирования кулоновского поля в плазме на больших расстояниях  $r_D$  от данного иона и формул (29) и (31) такое полное сечение  $\Sigma$  равно

$$\begin{aligned}\Sigma &= \int |f_1^0(\mathbf{p}, p\mathbf{n})|^2 d\Omega_{\mathbf{n}} = \\ &= \int |B(\theta)|^2 |(\hat{\sigma}_1^0 \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}, p\mathbf{n}))|^2 d\Omega_{\mathbf{n}} = \\ &= \pi (1 + \cos^2 \theta_i) \int_0^\pi |B(\theta)|^2 \sin \theta d\theta.\end{aligned}$$

Здесь интегрирование ведется по полному телесному углу  $4\pi$  направлений единичного вектора  $\mathbf{n}$ , а  $\theta$ , как и раньше, — угол рассеяния. Пренебрегая поправками, малыми по сравнению с  $\ln(p^2 r_D)$ , при  $p \ll 1$  мы можем написать:

$$\Sigma = \pi (1 + \cos^2 \theta_i) \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} |B(\theta)|^2 \sin \theta d\theta, \quad (51)$$

где теперь в качестве  $B(\theta)$  можно использовать аналитическую асимптотику (49), а  $\theta_{min} = (p^2 r_D)^{-1}$  и  $\theta_{max} = \pi - \sqrt{p}$ . Ограничения асимптотики (49), связанные с  $\theta_{min}$  и  $\theta_{max}$ , обсуждались в разд. 2.3. Учитывая то, что интерференционный вклад  $\text{Re}(B_0(\theta)B_1^*(\theta))$  в (51) является быстро осциллирующим при  $p \ll 1$  и поэтому дающим относительно малый вклад в полный интеграл в (51), мы можем переписать (51) с той же логарифмической точностью по  $\ln \theta_{min}^{-1}$  как

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma}{\pi (1 + \cos^2 \theta_i)} &= \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} |B_0(\theta)|^2 \sin \theta d\theta + \\ &+ \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} |B_1(\theta)|^2 \sin \theta d\theta \approx \\ &\approx \frac{\alpha^4 \pi^2}{4p^2} \int_0^\pi \text{tg}^2 \frac{\theta}{4} \sin \theta d\theta + \frac{\alpha^4}{4} \int_{\theta_{min}}^1 \frac{d\theta}{\theta} = \\ &= \frac{\alpha^4 \pi^2}{2p^2} (3 - 4 \ln 2) + \frac{\alpha^4}{4} \ln(p^2 r_D). \quad (52)\end{aligned}$$

Заметим, что относительная погрешность оценки второго интеграла в (52) порядка  $1/\ln(p^2 r_D)$ .

Восстанавливая в последней формуле физические единицы, получаем для полного сечения переворота спина медленного электрона при его рассеянии на неподвижном ионе в плазме:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \frac{\pi e^4}{4 m_e^2 c^4} (1 + \cos^2 \theta_i) \times \\ &\times \left[ \frac{\pi^2 m_e^2 e^4}{p^2 \hbar^2} (6 - 8 \ln 2) + \ln \frac{p^2 r_D}{m_e e^2} \right]. \quad (53)\end{aligned}$$

Отметим, что в формулах (52) и (53) две составляющие. Второе слагаемое соответствует амплитуде переворота спина на классической траектории электрона,  $B_1$ , а первое слагаемое обусловлено  $B_0$ , не связанным с классической траекторией электрона. Напомним, что формула (53) получена в предположении  $p\hbar \ll m_e e^2$  и что логарифм во втором слагаемом много больше 1. Заметим, что  $\pi^2(6 - 8 \ln 2) \approx 4.5$ .

### 3. ВЗАИМНОЕ РАССЕЯНИЕ ДВУХ ЭЛЕКТРОНОВ С ПЕРЕВОРОТОМ СПИНА

Переходя к вычислению амплитуды переворота спина при рассеянии медленных электронов друг на друге, рассмотрим для начала рассеяние друг на друге «неожиданных» электронов. Одна из побудительных причин для этого — максимально, насколько это возможно, воспользоваться результатами предыдущего раздела. Поскольку мы повторяем логику вычислений, сделанных выше, сократим пояснения.

#### 3.1. Общие соотношения и определения

Если координаты и спиновые переменные двух электронов обозначить как  $\mathbf{r}_1, \alpha, \mathbf{r}_2$  и  $\beta$ , то асимптотики полного набора стационарных волновых функций рассеяния можно записать следующим образом, вводя координаты в системе центра инерции:

$$\begin{aligned}\psi_{\mathbf{p}_1 \delta; \mathbf{p}_2 \gamma}^{\alpha \beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= e^{i\mathbf{P}_{12} \cdot \mathbf{R}_{12}} \times \\ &\times \left[ e^{i\mathbf{p}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12}} \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta + \frac{e^{ip_{12} r_{12}}}{r_{12}} f_{\delta \gamma}^{\alpha \beta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) \right]. \quad (54)\end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \delta$  и  $\gamma$  — импульсные и спиновые квантовые числа состояния данной волновой функции до рассеяния, а

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{12} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}_{12} = \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{2}, \\ \mathbf{R}_{12} &= \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \quad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,\end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}'_{12} &= p_{12} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}, \quad \mathbf{p}'_1 = \frac{1}{2} \mathbf{P}_{12} + \mathbf{p}'_{12}, \\ \mathbf{p}'_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{P}_{12} - \mathbf{p}'_{12}.\end{aligned} \quad (56)$$

Эти соотношения вводят обозначения, связанные с системой центра инерции: полный и приведенный импульсы, координату центра инерции и приведенную координату, импульсы после рассеяния, определенные направлением рассеяния в системе центра

инерции и т. п., а также фактически вводят определение амплитуды рассеяния  $f_{\delta\gamma}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$ . Ее вычисление является важной промежуточной целью этого раздела. Для реальных тождественных электронов в кинетическое уравнение, согласно [14], входит антисимметризованная амплитуда рассеяния, определенная следующим образом:

$$F_{\delta\gamma}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) = f_{\delta\gamma}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) - f_{\delta\gamma}^{\beta\alpha}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}'_1). \quad (57)$$

Интересующий нас гамильтониан взаимодействия двух нетождественных точечных заряженных частиц одинаковой массы со спином  $1/2$  в системе их центра инерции можно записать в следующем виде:

$$\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}_{12}^2 + \frac{1}{r_{12}} + \hat{V}_{ee}, \quad (58)$$

где

$$\hat{V}_{ee} = -\frac{3\alpha^2}{2r_{12}^3} \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}, \quad (59)$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2, \quad \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}}_{12} \times \hat{\mathbf{p}}_{12}.$$

Здесь  $\hat{\mathbf{S}}$  — полный спин,  $\hat{\mathbf{L}}$  — суммарный орбитальный момент. Гамильтониан (58) отличается от гамильтониана (3) коэффициентом перед квадратом импульса, знаком перед потенциалом, а также знаком и коэффициентом в  $\hat{V}_{ee}$ . Эти расхождения минимальны и позволяют действовать аналогично приведенному выше случаю притяжения.

Оператор спин-орбитального взаимодействия  $\hat{V}_{ee}$ , входящий в (58), можно получить переходом в систему центра инерции гамильтониана Брейта [24], оставляя там только спин-орбитальную часть и переходя к атомной системе единиц, используемой тут. Эта спин-орбитальная часть исходно имеет вид<sup>3)</sup>

$$V_{ee} = \frac{e^2\hbar}{4m^2c^2r_{12}^3} [-(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 + 2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2) \cdot [\mathbf{r}_{12} \times \hat{\mathbf{p}}_1] + (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 + 2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1) \cdot [\mathbf{r}_{12} \times \hat{\mathbf{p}}_2]]. \quad (60)$$

Возможность пренебрежения спин-спиновым взаимодействием при  $p_{12} \ll 1$  будет обсуждена ниже.

Гамильтониан (58) коммутирует с полным моментом  $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ , а значит, с  $\hat{\mathbf{J}}^2$  и  $\hat{J}_z$ . Кроме того, гамильтониан,  $\hat{\mathbf{J}}^2$  и  $\hat{J}_z$  коммутируют с  $\hat{\mathbf{S}}^2$  и  $\hat{\mathbf{L}}^2$ , причем последние два оператора коммутируют друг с другом. Это означает, что стационарные волновые функции могут быть выбраны так, чтобы они

<sup>3)</sup> См. уравнение (83.17) в [24].

соответствовали определенным значениям  $\hat{J}_z$ ,  $\hat{\mathbf{J}}^2 = J(J+1)$ ,  $\hat{\mathbf{S}}^2 = S(S+1)$ ,  $\hat{\mathbf{L}}^2 = L(L+1)$  и, конечно,  $\hat{H} = p_{12}^2$ . При этом  $L$  принимает значения  $L = 0, 1, \dots$ , а  $S$  принимает значения 0 или 1. Согласно правилу сложения моментов при  $S = 0$  имеем  $J = L$ , а при  $S = 1$  имеется три состояния с заданным  $L$ . Для них  $J = 0, \pm 1$ . В этих состояниях оператор  $\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$  принимает определенное значение  $(\mathbf{LS})$ , которое задается следующими правилами:

$$(\mathbf{LS}) = \begin{cases} 0 & \text{при } S = 0, \quad J = L, \\ L & \text{при } S = 1, \quad J = L + 1, \\ -1 & \text{при } S = 1, \quad J = L, \quad L > 0, \\ -1-L & \text{при } S = 1, \quad J = L - 1, \quad L > 0. \end{cases} \quad (61)$$

Радиальная волновая функция  $X_{J,S,L,p}(r)$  таких состояний удовлетворяет при этом следующему радиальному уравнению Шредингера:

$$\frac{d^2}{d\rho^2} X + \left[ p_\rho^2 - \frac{2}{\rho} - \frac{L(L+1)}{\rho^2} + \frac{3}{4} \alpha^2 \frac{(\mathbf{LS})}{\rho^3} \right] X = 0. \quad (62)$$

Здесь  $\rho = r_{12}/2$ , а  $p_\rho = 2p_{12}$ .

### 3.2. Парциальные фазы рассеяния медленных электронов друг на друге с переворотом спина

Решение уравнения (62), имеющее правильную асимптотику при  $\rho \rightarrow 0$ , можно представить при  $\rho \rightarrow \infty$  в следующем виде:

$$X|_{\rho \rightarrow \infty} = 2 \sin \left( p_\rho \rho - \frac{1}{p_\rho} \ln(2p_\rho \rho) - \frac{\pi}{2} L + \delta(L, (\mathbf{LS})) \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\rho} \right). \quad (63)$$

Этим вводится определение парциальных фаз рассеяния  $\delta(L, (\mathbf{LS}))$ , которые, кроме перечисленных аргументов, зависят еще и от  $p_\rho$  (или от  $p_{12}$ ). Так же как и в разд. 2.2, найдем  $\delta(L, (\mathbf{LS}))$  по теории возмущений, рассматривая уравнение (62), невозмущенное спин-орбитальным взаимодействием:

$$\frac{d^2}{d\rho^2} X + \left[ p_\rho^2 - \frac{2}{\rho} - \frac{L(L+1)}{\rho^2} \right] X = 0.$$

Его решение, имеющее правильную асимптотику в нуле, можно представить в виде

$$X_1 = \frac{e^{-\pi/2p_\rho} |\Gamma(L+1+i/p_\rho)|}{(2L+1)!} (2p_\rho\rho)^{L+1} e^{ip_\rho\rho} \times \\ \times F\left(\frac{i}{p_\rho} + L + 1, 2L + 2, -2ip_\rho\rho\right). \quad (64)$$

Оно имеет следующую асимптотику при  $r \rightarrow \infty$ :

$$X_1|_{\rho \rightarrow \infty} = 2 \sin\left(p_\rho\rho - \frac{1}{p_\rho} \ln(2p_\rho\rho) - \frac{\pi}{2}L + \delta_c(L)\right) + \\ + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad (65)$$

где

$$\delta_c(L) = \arg\Gamma(L+1+i/p_\rho). \quad (66)$$

При этом

$$\delta_c(L)|_{p_\rho \ll 1} = \left(L + \frac{1}{2}\right) \arctg \frac{1}{p_\rho(L+1)} - \frac{1 + \ln p_\rho}{p_\rho} + \\ + \frac{\ln(1+p_\rho^2(L+1)^2)}{2p_\rho}. \quad (67)$$

Действуя точно так же, как и в разд. 2.2, получаем следующее, точное в первом порядке по  $\alpha^2$ , выражение для парциальных фаз рассеяния:

$$\delta(L, (\mathbf{LS})) = \delta_c(L) + \alpha^2 (\mathbf{LS}) \delta_s(L) = \\ = \delta_c(L) + \frac{3\alpha^2 (\mathbf{LS})}{16p_\rho} \int_0^\infty X_1^2 \frac{d\rho}{\rho^3}. \quad (68)$$

Таким образом,

$$\delta_s(L > 0) = \frac{3}{16p_\rho} \int_0^\infty X_1^2 \frac{d\rho}{\rho^3} = \\ = \frac{3}{8} \frac{(2p_\rho)^{2L+1} e^{-\pi/p_\rho} |\Gamma(L+1+i/p_\rho)|^2}{(2L+1)!^2} \times \\ \times \int_0^\infty r^{2L-1} \left| F\left(\frac{i}{p_\rho} + L + 1, 2L + 2, -2ip_\rho\rho\right) \right|^2 d\rho. \quad (69)$$

Важным обстоятельством является то, что квазиклассическое приближение, т.е. использование при  $p_\rho \rightarrow 0$  асимптотического предела для  $X_1$  в виде

$$X_1 \simeq \begin{cases} 0, & \rho < \rho_0, \\ 2\sqrt{p_\rho} \left(p_\rho^2 - \frac{2}{\rho} - \frac{L(L+1)}{\rho^2}\right)^{-1/4} \sin \Phi(\rho), & \rho > \rho_0, \end{cases} \quad (70)$$

где

$$\Phi(\rho) = \frac{\pi}{4} + \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{p_\rho^2 - \frac{2}{\rho} - \frac{L(L+1)}{\rho^2}} d\rho, \quad (71) \\ \rho_0 = \frac{1 + \sqrt{1 + L(L+1)p_\rho^2}}{p_\rho^2},$$

является оправданным при всех  $L$ . Этим случай кулоновского поля отталкивания отличается от случая притяжения.

Таким образом, имеем следующее выражение для парциальных фаз  $\delta_s$  при  $p_\rho \ll 1$  и всех  $L > 0$ :

$$\delta_s(L > 0) = \frac{3}{8} \int_{\rho_0}^\infty \frac{d\rho}{\rho^3 \sqrt{p_\rho^2 - L(L+1)\rho^{-2} - 2\rho^{-1}}} = \\ = \frac{3p_\rho^3}{8} \left[ u^2 + u^3 \left( \arctg u - \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (72)$$

где опять

$$u = \frac{1}{p_\rho \sqrt{L(L+1)}}.$$

Напомним, что  $\delta_s(0) = 0$  по определению. Исходя из выражения (72), можно сказать, что фаза переворота спина в поле кулоновского отталкивания,  $\delta_s(l)$ , в пределе малых энергий  $p_\rho \ll 1$  имеет следующие асимптотики:

$$\delta_s(L) = \begin{cases} \frac{3p_\rho}{8L(L+1)}, & L \gg 1/p, \\ \frac{p_\rho^3}{8}, & L \ll 1/p. \end{cases} \quad (73)$$

Переход от одной асимптотики к другой осуществляется при  $L \sim 1/p_\rho$  по формуле (72).

Отметим, что при больших моментах ( $l$  или  $L$ ) парциальные фазы  $\delta_s$  ведут себя одинаково и при притяжении (27), и при отталкивании (73), если пренебречь знаками и различием общих численных коэффициентов порядка 1. В то же время, при небольших моментах  $L \sim 1$  парциальные фазы (73) сильно подавлены при  $p_\rho \ll 1$  по сравнению с (27) из-за дополнительного множителя порядка  $p_\rho^3$ . Это является следствием сильного влияния кулоновского барьера при отталкивании, когда  $p_\rho \ll 1$ .

### 3.3. Амплитуда рассеяния медленных электронов друг на друге с переворотом спина

Рассмотрим теперь связь между парциальными фазами рассеяния  $\delta(L, (\mathbf{LS}))$  и амплитудой рассеяния  $f_{\delta\gamma}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$ , являющейся нашей локальной целью. Общая теория такой связи, включающая рассмотрение рассеяния частицы со спином 1

на бесспиновой частице, подробно изложена в книге [26]. Мы несколько модифицируем этот подход, учитывая то, что мы в точности знаем гамильтониан взаимодействия, а также, что более важно, используя малость ( $\propto \alpha^2$ ) отклонения от скалярного рассеяния, не чувствующего спинов частиц.

Для рассмотрения этих вопросов удобно ввести оператор амплитуды рассеяния  $\hat{f}$ , соответствующий  $f_{\delta\gamma}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$  и тесно связанный с  $S$ -матрицей рассеяния [15, 26]<sup>4)</sup> при фиксированном  $p_{12}$ :

$$\hat{f} = \frac{1}{2ip_\rho} (\hat{M} - 1). \quad (74)$$

В нашем случае  $\hat{f}$  можно представить как функцию коммутирующих друг с другом и с гамильтонианом операторов  $\hat{\mathbf{L}}^2$ ,  $\hat{\mathbf{S}}^2$  и  $\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ . Они действуют, как и  $\hat{f}$ , только на угловые и спиновые переменные при  $\rho \rightarrow \infty$ . Оператор  $\hat{J}_z$  не учитывается, поскольку гамильтониан от него не зависит. Самый общий вид такой зависимости  $\hat{f}$  в нашем случае имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{f}(\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{\mathbf{S}}^2, \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}) &= \left(1 - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{S}}^2\right) \bar{a}(\hat{\mathbf{L}}^2) + \\ &+ \frac{1}{2}\hat{\mathbf{S}}^2 a(\hat{\mathbf{L}}^2) + (\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}) b(\hat{\mathbf{L}}^2) + \\ &+ (\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}})^2 c(\hat{\mathbf{L}}^2). \end{aligned} \quad (75)$$

Здесь  $\bar{a}$ ,  $a$ ,  $b$  и  $c$  — неизвестные заранее функции от  $\hat{\mathbf{L}}^2$ . Первое слагаемое в правой части (75) действует только на синглетные состояния (с  $S = 0$ ), остальные — только на триплетные (с  $S = 1$ ). Все более высокие степени операторов  $\hat{\mathbf{S}}^2$  и  $\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$  сводятся к уже выписанным в (75) из-за того, что  $\hat{\mathbf{S}}$  есть сумма спинов  $\hat{\mathbf{s}}_1$  и  $\hat{\mathbf{s}}_2$  частиц со спином  $1/2$ .

Подставляем теперь правой и левой частью уравнения (74) на рассмотренные выше парциальные волны непрерывного спектра при заданных  $L$ ,  $S$  и  $(\mathbf{LS})$ . С учетом (75) получим

$$\bar{a}_L = \frac{1}{2ip_\rho} (e^{2i\delta(L,0)} - 1), \quad S = 0, \quad (76)$$

$$\begin{aligned} a_L + (\mathbf{LS}) b_L + (\mathbf{LS})^2 c_L &= \\ &= \frac{1}{2ip_\rho} (e^{2i\delta(L,(\mathbf{LS}))} - 1), \quad S = 1. \end{aligned} \quad (77)$$

Уравнение (76) для синглетных состояний «отщепилось», как и должно быть, от уравнения для триплетных состояний. Заметим, что в нашем случае

$\delta(L, 0) = \delta_c(L)$  (66) и эта фаза не зависит от наличия спин-орбитального взаимодействия. Систему уравнений (77) для триплетных состояний можно легко решить с необходимой нам точностью по  $\alpha^2$ , воспользовавшись общей структурой точных фаз  $\delta(L, (\mathbf{LS}))$ , получаемых по теории возмущений. В соответствии с (68) имеем

$$\delta(L, (\mathbf{LS})) = \delta_c(L) + \alpha^2 (\mathbf{LS}) \delta_s(L) + \mathcal{O}(\alpha^4). \quad (78)$$

Подставляя теперь уравнение (78) в уравнение (77) и раскладывая экспоненты по малости аргументов, получаем

$$\begin{aligned} a_L + (\mathbf{LS}) b_L + (\mathbf{LS})^2 c_L &= \frac{1}{2ip_\rho} (e^{2i\delta_c(L)} - 1) + \\ &+ \frac{1}{p_\rho} \alpha^2 (\mathbf{LS}) \delta_s(L) e^{2i\delta_c(L)} + \mathcal{O}(\alpha^4). \end{aligned} \quad (79)$$

Формула (79) написана для триплетных состояний и является системой из трех уравнений, определяемых тройкой собственных значений  $(\mathbf{LS})$ . Набор из трех 1 и две тройки чисел  $(\mathbf{LS})$  и  $(\mathbf{LS})^2$  являются линейно независимыми тройками чисел при всех  $L$ . Поэтому эта система уравнений имеет очевидное решение:

$$a_L = \frac{1}{2ip_\rho} (e^{2i\delta_c(L)} - 1) + \mathcal{O}(\alpha^4) = \bar{a}_L + \mathcal{O}(\alpha^4), \quad (80)$$

$$b_L = \frac{\alpha^2}{p_\rho} \delta_s(L) e^{2i\delta_c(L)} + \mathcal{O}(\alpha^4), \quad (81)$$

$$c_L = \mathcal{O}(\alpha^4). \quad (82)$$

Ограничиваясь первым порядком разложения по  $\alpha^2$ , как и в уравнениях (34)–(36), мы отбрасываем в дальнейшем  $c_L$ . В этом приближении  $\bar{a}_L = a_L$ . Теперь оператор амплитуды рассеяния  $\hat{f}$  полностью определен. Подействовав им, как в [15], на угловую часть разложения плоской волны (54) по парциальным волнам, т. е. на  $\delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta \sum_L (2L+1) P_L(\cos \theta)$ , получим

$$\hat{f}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) = A(\theta) + (\hat{\mathbf{S}} \cdot \boldsymbol{\nu}) B(\theta), \quad (83)$$

где

$$A(\theta) = \frac{1}{2ip_\rho} \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) (e^{2i\delta_c(L)} - 1) P_L(\cos \theta), \quad (84)$$

$$B(\theta) = \frac{i\alpha^2}{p_\rho} \sum_{L=1}^{\infty} (2L+1) e^{2i\delta_c(L)} \delta_s(L) P_L^1(\cos \theta). \quad (85)$$

Здесь  $\boldsymbol{\nu}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{p}_{12} \times \mathbf{p}'_{12}$ , угол  $\theta$  определяется соотношением

<sup>4)</sup> Во избежание путаницы с обозначением полного спина  $S$ -матрицу будем обозначать как  $\hat{M}$ .

$\cos \theta = (\mathbf{p}_{12} \cdot \mathbf{p}'_{12}) / (p_{12} p'_{12})$ . Напомним, что в уравнении (83)  $\hat{f}$  еще остается оператором, но теперь только по спиновым переменным. С учетом спиновых переменных можно развернуть выражение (83) как

$$f_{\delta\gamma}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) = A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta + B(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) (\delta_\delta^\alpha \hat{\sigma}_\gamma^\beta + \delta_\gamma^\beta \hat{\sigma}_\delta^\alpha) \cdot \boldsymbol{\nu}. \quad (86)$$

При вычислении (85) мы, как и в случае электронного рассеяния, рассмотрим здесь только асимптотику  $p_\rho \ll 1$ .

Сумма (84) соответствует скалярной амплитуде рассеяния, упомянутой выше в (35), с учетом двойки, возникающей при замене  $p_\rho = 2p_{12}$ :

$$A(\theta) = \frac{1}{8p_{12}^2 \sin^2(\theta/2)} \frac{\Gamma(1 - i/2p_{12})}{\Gamma(1 + i/2p_{12})} \times \exp\left(\frac{i}{p_{12}} \ln \sin \frac{\theta}{2}\right). \quad (87)$$

Благодаря кулоновскому отталкиванию, основной вклад в сумму (85) при  $p_{12} \ll 1$  вносят только большие  $L \gg 1$ , и можно ограничиться методом стационарной фазы для ее количественной оценки. В выражение (85) входят асимптотические парциальные фазы (67) и (72), полученные для  $p_\rho \ll 1$ . Используя асимптотику (43) при фиксированном угле  $\theta$  и  $L \rightarrow \infty$ , мы можем записать:

$$B(\theta) = -\frac{i\alpha^2}{p_\rho} \sum (2L+1) \delta_s(L) \sqrt{\frac{L}{2\pi \sin \theta}} \times [\exp(2i\delta_c(L) + i\phi(L, \theta)) + \exp(2i\delta_c(L) - i\phi(L, \theta))], \quad (88)$$

где  $\phi(L, \theta) = (L + 1/2)\theta + \pi/4$ . При этом

$$2\delta_c(L) \pm \phi(L, \theta) \equiv S^\pm(L, p_\rho, \theta) = (2L+1) \times \arctg \frac{1}{p_\rho(L+1/2)} + \frac{1}{p_\rho} \ln \left(1 + p_\rho^2 \left(L + \frac{1}{2}\right)^2\right) \pm \left(L + \frac{1}{2}\right) \theta \pm \frac{\pi}{4} - 2 \frac{\ln p_\rho + 1}{p_\rho} + \mathcal{O}(p) + \mathcal{O}(L^{-1}). \quad (89)$$

Последний множитель в (88) представляет собой сумму двух экспонент. Первое слагаемое — быстро осциллирующий множитель для всех  $L$ . То же самое можно сказать и про второе слагаемое, за исключением области  $L$ , где  $\partial_L S^- \approx 0$ . Поэтому основной вклад в полную сумму (88) дает только второе слагаемое, причем основной вклад во второе слагаемое дает область значений  $L$ , для которых  $\partial_L S^- \approx 0$

при заданных  $\theta$  и  $p_\rho$ . В этой области  $L$  множитель  $\exp(iS^-(L, p_\rho, \theta))$  является плавной функцией  $L$ . Это позволяет заменить суммирование по  $L$  на интегрирование. Таким образом,

$$B(\theta) \approx -\frac{i\alpha^2}{p_\rho} \int_{l_0}^{\infty} \times (2L+1) \delta_s(L) \sqrt{\frac{L}{2\pi \sin \theta}} e^{iS^-(L, p_\rho, \theta)} dL. \quad (90)$$

По причинам, отмеченным выше, этот интеграл можно оценить с помощью метода стационарной фазы. Стационарная точка  $L = L_p$  определяется условием

$$\partial_L S^-(L, p_\rho, \theta) \Big|_{L=L_p} = \left(2 \arctg \frac{1}{p_\rho(L+1/2)} - \theta\right) \Big|_{L=L_p} = 0,$$

откуда

$$L_p = -\frac{1}{2} + \frac{1}{p_\rho} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}. \quad (91)$$

Для реализации метода стационарной фазы надо знать также, что

$$\partial_L^2 S^- \Big|_{L=L_p} = -2p_\rho \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Окончательно получаем для  $B(\theta)$ , делая обратную замену к импульсу  $p_{12}$  (при условии, что  $p_{12} \ll 1$  и  $\pi - \theta \gg \sqrt{p_{12}}$ ):

$$B(\theta) = -\frac{3\alpha^2}{4 \sin \theta} \left[1 + \frac{\theta - \pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right] \times \exp\left\{-\frac{i}{p_{12}} \left[1 + \ln(2p_{12}) + \ln \sin \frac{\theta}{2}\right]\right\}. \quad (92)$$

Обратим внимание, что в этом приближении  $B(\theta) \propto \pi - \theta$  при  $\theta \rightarrow \pi$ . Поэтому уточнение  $B(\theta)$  в области  $\pi - \theta$ , меньшей или порядка  $\sqrt{p}$ , неактуально из-за того, что в данном случае это даст только поправку следующего порядка по  $p_{12} \ll 1$ .

Формулы (57), (86), (87) и (92) полностью описывают амплитуду рассеяния двух электронов друг на друге с точностью до  $\mathcal{O}(\alpha^4)$  при  $p_{12} \ll 1$ . Чтобы получить формулу (92) в физических единицах, нужно, как раньше, входящую в эти формулы амплитуду  $B$  заменить на  $m_e e^2 \hbar^{-2} B$ , а импульс  $p_{12}$  на  $m_e^{-1} e^{-2} \hbar p_{12}$ .

Остановимся здесь на причинах, почему можно пренебречь спин-спиновым взаимодействием при оценке амплитуды переворота спина при рассеянии

электронов на электронах, когда  $p_{12} \ll 1$ . Можно сказать, ссылаясь на уравнение Брейта в [24], что спин-спиновое взаимодействие вызывает добавку к  $\hat{V}_{ee}$  (см. (59)) вида  $\alpha^2 \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 / r_{12}^3$ , в то время как спин-орбитальное взаимодействие имеет вид  $\alpha^2 \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}} / r_{12}^3$ . Видно, что эти два взаимодействия имеют одинаковую зависимость от  $r_{12}$ . Поэтому коэффициент в поправках к парциальным фазам типа  $\delta_s$  для спин-спинового взаимодействия будет такого же порядка, как и вычисленный в разд. 3.2 коэффициент  $\delta_s$  для рассеяния электронов на электронах. Однако при вычислении спин-орбитальной поправки  $B(\theta)$  (85) к амплитуде рассеяния возникает множитель  $(2L + 1)$ , порожденный в конечном итоге множителем  $\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$  в выражении для  $\hat{V}_{ee}$ . В случае спин-спинового взаимодействия такого растущего с ростом  $L$  множителя нет. Он заменится на число порядка 1. Как мы показали, сумма в (85) из-за наличия быстро осциллирующих сомножителей определяется областью больших  $L \sim 1/p_{12} \gg 1$ . Поэтому аналогичная сумма для спин-спинового взаимодействия будет содержать дополнительный малый множитель  $p_{12} \ll 1$ . Таким образом, мы можем пренебречь спин-спиновым взаимодействием, если оставляем в (92) только лидирующий член в пределе  $p_{12} \ll 1$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовались амплитуды рассеяния точечных заряженных частиц друг на друге с учетом их спин-орбитального взаимодействия. Получены точные формулы для таких амплитуд в первом порядке теории возмущений по силе спин-орбитального взаимодействия, т. е. в первом порядке по  $\alpha^2$ . При этом в качестве невозмущенных волновых функций взяты точные волновые функции в кулоновском поле. Последнее означает, что эти формулы справедливы и при  $\hbar p / (m_e e^2) \ll 1$ , или  $\alpha m_e c / p \gg 1$ . Эти формулы содержат бесконечные суммы по парциальным амплитудам. Последние были вычислены в пределе  $\hbar p / (m_e e^2) \ll 1$ , в котором удалось также просуммировать отмеченные бесконечные ряды и получить достаточно простые аналитические выражения для амплитуд рассеяния. Ответственные за переворот спина при рассеянии части амплитуд приведены в формулах (31), (49) и (50) для рассеяния электронов на протонах, и в формулах (57), (86) и (92) для электрон-электронного рассеяния. Подчеркнем, что приведенные аналитические формулы для амплитуд переворота спина при рассея-

нии точечных заряженных частиц справедливы при  $p / (m_e c) \ll \alpha \ll 1$ .

Случай электрон-протонного рассеяния более громоздок из-за интерференции двух слагаемых, возникающих за счет разных областей углового момента  $l$ , дающих вклад в окончательную амплитуду. Для этого случая мы сопоставили на рис. 1 и 3 наши аналитические формулы, справедливые при ограничении  $p / (m_e c) \ll \alpha \ll 1$ , с численными расчетами по точным формулам, справедливым при слабом ограничении  $\alpha^2 \ll 1$ .

В формуле (53) в качестве иллюстрации приведено полное сечение переворота спина электрона при рассеянии на протонах в плазме. В ней ярко проявляется наличие двух составляющих. Заметим, что при электрон-электронном рассеянии один из таких вкладов отсутствует. Это вызвано отталкиванием электронов друг от друга при невозмущенном рассеянии. Это же обстоятельство допускает, как это объяснено выше, возможность пренебрежения в рассматриваемом пределе  $\hbar p / (m_e e^2) \ll 1$  спин-спиновым взаимодействием между электронами.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 15-01-06195а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
3. В. Н. Севастьянов, Р. А. Житников, *ЖЭТФ* **56**, 1508 (1969).
4. Р. А. Житников, *УФН* **104**, (1971).
5. V. V. Yankov, *Phys. Scripta* **57**, 460 (1998).
6. А. Б. Ваганов, *УФН* **119**, 257 (1976).
7. С. К. Sinclair, P. A. Adderley, B. M. Dunham et al., *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **10**, 023501 (2007).
8. J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels et al., *Science* **292**, 476 (2001).
9. D. S. Naik and C. Raman, *Phys. Rev. A* **71**, 033617 (2005).
10. E. W. Streed, A. P. Chikkatur, T. L. Gustavson et al., *Rev. Sci. Instr.* **77**, 023106 (2006).
11. D. Comparat, A. Fioretti, G. Stern et al., *Phys. Rev. A* **73**, 043410 (2006).

12. P. O. Fedichev, M. W. Reynolds, U. M. Rahmanov et al., *Phys. Rev. A* **53**, 1447 (1996).
13. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, *УФН* **66**, 177 (1958).
14. П. В. Сасоров, И. В. Фомин, *ЖЭТФ* **147**, 1271 (2015).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Физматлит, Москва (2004).
16. В. П. Силин, *Введение в кинетическую теорию газов*, Либроком, Москва (2013).
17. N. F. Mott, *Proc. Roy. Soc. (London) A* **124**, 425 (1929); **A 135**, 429 (1932).
18. C. Möller, *Ann. der Phys.* **406**, 531 (1932).
19. Н. Мотт, Г. Месси, *Теория атомных столкновений*, Изд-во иностр. лит., Москва (1951).
20. W. H. McMaster, *Amer. J. Phys.* **22**, 351 (1954).
21. G. Ford and C. Mullen, *Phys. Rev.* **108**, 447 (1957).
22. P. Stehle, *Phys. Rev.* **110**, 1458 (1958).
23. W. Gordon, *Z. Phys.* **48**, 180 (1928).
24. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Физматлит, Москва (2006).
25. И. И. Собельман, *Введение в теорию атомных спектров*, Физматгиз, Москва (1963).
26. А. Г. Ситенко, *Теория рассеяния*, Вища школа, Киев (1975).
27. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике (для научных работников и инженеров)*, Наука, Москва (1974).