

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НИТЕВИДНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНО-ЗАМАГНИЧЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПЛАЗМЕННЫХ РАССЕЙВАТЕЛЕЙ

*В. А. Еськин, А. В. Ивонинский, А. В. Кудрин\*, Л. Л. Попова*

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 11 августа 2016 г.

Исследуется электромагнитное излучение источников в виде электрической дипольной нити и нити магнитного тока бесконечной длины при наличии в окружающем свободном пространстве гиротропных цилиндрических рассеивателей. Предполагается, что рассеиватели имеют вид бесконечно длинных, продольно замагниченных круговых плазменных цилиндров, параллельных оси нитевидного источника. Для каждого источника рассчитаны поле и диаграмма направленности излучения в случае, когда частота источника равна одной из резонансных частот поверхностных плазмонов цилиндрического рассеивателя. Показано, что наличие даже одиночного резонансного замагниченного плазменного рассеивателя с малым электрическим радиусом или нескольких таких рассеивателей значительно влияет на полное поле нитевидных источников, так что их диаграммы направленности излучения существенно отличаются от диаграмм, имеющих место при отсутствии рассеивателей или наличии изотропных рассеивателей той же формы и размера. Сделан вывод о возможности эффективного управления излучательными характеристиками рассматриваемых источников за счет их резонансного взаимодействия с соседними гиротропными рассеивателями.

DOI: 10.7868/S0044451017020031

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы повышенный интерес вызывают особенности рассеяния электромагнитных волн на различных цилиндрических объектах [1–14]. Такой интерес обусловлен многочисленными приложениями соответствующих структур в ближнепольной микроскопии [1–3], волновой диагностике сред [4], обработке и передаче информации [5–8] и т. д. В большинстве работ по данной проблематике основное внимание уделяется резонансному взаимодействию падающих плоских электромагнитных волн с рассеивателями, причем выявлено много примечательных особенностей поведения рассеянного поля [9–12]. Не меньший интерес представляет ситуация, когда падающее излучение возбуждается электромагнитными источниками, расположенными вблизи рассеивающих объектов [13, 14]. В этом слу-

чае приближение дальней зоны, позволяющее заменить падающее поле плоской волной, оказывается неприменимым, и необходимо точное решение задачи дифракции возбуждаемых источником электромагнитных волн на рассеивателях. Несмотря на значительные успехи в изучении рассеяния электромагнитных волн от заданных источников на негиротропных элементах, соответствующие задачи для гиротропных объектов не получили достаточно подробного рассмотрения.

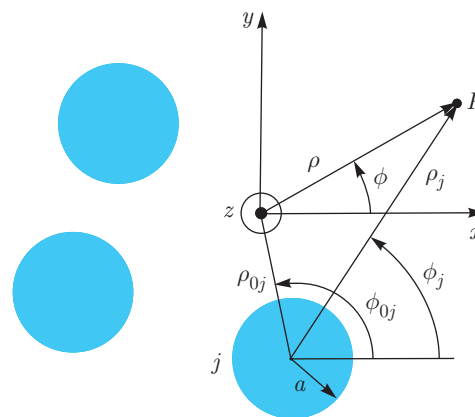
Следует отметить, что задача возбуждения цилиндрических гиротропных структур заданными электромагнитными источниками в принципе обсуждалась в литературе. Эта проблема особенно актуальна для определения поведения поля при наличии направляющих замагниченных плазменных структур, таких как высокочастотные (ВЧ) геликонные разряды [15–18], ориентированные вдоль внешнего магнитного поля дакты плотности в околоземной и лабораторной плазме [19], а также плазменно-волноводные антенные системы в диапазоне очень низких частот [20]. Однако во всех ука-

\* E-mail: kud@rf.unn.ru

занных выше приложениях электромагнитные источники, как правило, располагаются внутри или на границе цилиндрического плазменного объекта. Противоположный случай, когда электромагнитный источник находится в области вне цилиндрических замагниченных плазменных структур, не привлек еще достаточного внимания. Хотя в принципиальном плане такой анализ важен сам по себе, он также может быть полезен для понимания роли, которую играет взаимодействие между электромагнитным источником и замагниченными плазменными рассеивателями в формировании характеристик излучения антенных систем.

В этом контексте стоит отметить, что имеется обширная библиография по взаимодействию электромагнитных волн с гиротропными хиральными средами (см., например, работу [21] и цитируемую в ней литературу). Однако рассеивающие свойства замагниченных плазменных структур в ВЧ-диапазоне обладают некоторыми специфическими особенностями, требующими отдельного рассмотрения.

Целью настоящей работы является исследование излучения электрической дипольной нити или нити магнитного тока бесконечной длины при наличии бесконечно протяженных цилиндрических рассеивателей, параллельных оси нитевидного источника, в случае, когда каждый рассеиватель заполнен холодной бесстолкновительной магнитоактивной плазмой и ориентирован вдоль внешнего однородного постоянного магнитного поля. Напомним, что плазменная среда внутри рассеивателей обладает как анизотропными, так и гиротропными свойствами, зависящими от внешнего магнитного поля. Следует отметить, что перспективные возможности цилиндрических замагниченных плазменных рассеивателей, окружающих электромагнитный источник, для управления его диаграммой направленности были недавно продемонстрированы в [22]. В отличие от работы [22], в которой роль эффектов резонансного многократного рассеяния не была предметом специального рассмотрения, в настоящей статье мы сосредоточимся на случае, когда частота источника совпадает с одной из резонансных частот поверхностных плазмонов цилиндрического рассеивателя. Заметим, что в таких условиях резонансное взаимодействие возбуждаемого источником поля с рассеивателями, заполненными плазмой, должно наиболее сильно влиять на диаграмму направленности излучения электромагнитного источника. Поэтому можно ожидать, что наличие даже одиночного замагниченного плазменного рассеивателя вблизи источника оказывает заметное влияние на диаграмму



**Рис. 1.** Геометрия задачи. Нитевидный источник совмещен с осью  $z$  цилиндрической системы координат  $(\rho, \phi, z)$ ,  $P$  — точка наблюдения,  $\rho_j$  и  $\phi_j$  — соответственно радиальная и азимутальная координаты этой точки в системе координат, связанной с  $j$ -м цилиндрическим рассеивателем, нулевой индекс используется для обозначения положения источника в системе координат  $j$ -го цилиндра

направленности излучения по сравнению со случаем отсутствия рассеивателей.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 2 сформулирована рассматриваемая задача и представлен метод решения. В разд. 3 исследуются диаграммы направленности излучения источников в виде электрической дипольной нити и нити магнитного тока при наличии одиночного рассеивателя, а также диаграмма направленности системы типа Яги–Уда, содержащей три директора и один рефлектор в виде продольно замагниченных плазменных цилиндров, а также возбуждающую нить магнитного тока. В разд. 4 сформулированы выводы, вытекающие из полученных результатов. В Приложении приведен математический вывод возбуждаемых источниками полей, которые используются в теоретическом анализе настоящей работы.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим систему, состоящую из одинаковых цилиндров радиуса  $a$ , заполненных холодной бесстолкновительной магнитоактивной плазмой и расположенных в свободном пространстве. Цилиндры имеют бесконечную длину и ориентированы вдоль оси  $z$  цилиндрической системы координат  $(\rho, \phi, z)$ , как показано на рис. 1. Внешнее постоянное магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  параллельно оси цилиндров. Магнитоактивная плазма внутри каждого цилиндра опи-

сывается тензором диэлектрической проницаемости [23]

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon & -ig & 0 \\ ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная, величины  $\varepsilon$ ,  $g$  и  $\eta$  записываются в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \\ g &= \frac{\omega_p^2 \omega_H}{(\omega^2 - \omega_H^2)\omega}, \\ \eta &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\omega_p$  и  $\omega_H$  — соответственно плазменная частота и гирочастота электронов,  $\omega$  — круговая частота. При записи компонент тензора мы пренебрегли вкладом ионов. Это возможно при условии  $\omega \gg \omega_{LH}$ , где  $\omega_{LH}$  — частота нижнего гибридного резонанса [19].

Будем изучать электромагнитное поле, возбуждаемое нитевидным источником, совмещенным с осью  $z$  системы координат  $(\rho, \phi, z)$ . Опуская временной множитель  $\exp(i\omega t)$ , плотность электрического ( $\mathbf{J}^e$ ) или магнитного ( $\mathbf{J}^m$ ) тока источника в этой системе запишем в виде

$$\mathbf{J}^{e,m} = \mathbf{J}_0^{e,m} (2\pi\rho)^{-1} \delta(\rho), \quad (3)$$

где  $\delta$  — дельта-функция Дирака. Предполагается, что длина волны  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$  в окружающем свободном пространстве много больше, чем радиус  $a$  цилиндра (здесь  $k_0$  — волновое число в вакууме). Заметим, что такие источники, излучающие электромагнитные волны с отличной от нуля компонентой магнитного поля  $H_z$ , представляют повышенный интерес, поскольку возбуждаемые в этом случае волны могут резонансно рассеиваться гиротропными цилиндрами. Далее будем рассматривать электрическую дипольную нить и нить магнитного тока, для которых соответственно

$$\mathbf{J}_0^e = i\omega \mathbf{p}^e = i\omega p_0^e (\mathbf{e}_x \cos \theta + \mathbf{e}_y \sin \theta), \quad \mathbf{J}_0^m = \mathbf{e}_z I_0^m.$$

Здесь  $p_0^e$  — электрический дипольный момент на единицу длины нитевидного источника,  $\theta$  — угол, задающий ориентацию дипольного момента по отношению к осям  $x$  и  $y$  декартовой системы координат (см. рис. 1),  $I_0^m$  — полный магнитный ток соответствующего источника.

Магнитное поле, возбуждаемое описанными выше источниками в отсутствие рассеивающих элементов, имеет единственную ненулевую компоненту, которая представляется в виде

$$H_z^{(f)} = C^{(e)} H_1^{(2)}(k_0 \rho) \sin(\theta - \phi), \quad (4)$$

где

$$C^{(e)} = -\omega p_0^e k_0 / 4 \quad (5)$$

для электрической дипольной нити, в то время как для нити магнитного тока имеем

$$H_z^{(f)} = C^{(m)} H_0^{(2)}(k_0 \rho), \quad (6)$$

где

$$C^{(m)} = -Z_0^{-1} I_0^m k_0 / 4. \quad (7)$$

Здесь и далее  $Z_0$  — волновое сопротивление вакуума,  $H_m^{(2)}$  — функция Ханкеля второго рода порядка  $m$ , индекс « $(f)$ » обозначает, что соответствующая величина относится к полю, возбуждаемому нитевидным источником. Вывод формул (4)–(7) обсуждается в Приложении.

Для отыскания диаграммы направленности излучения необходимо определить полное поле вне цилиндров. Поэтому перейдем к расчету поля, рассеянного плазменными цилиндрами. Для удобства последующих математических выкладок введем вспомогательные системы координат, связанные с рассеивателями (см. рис. 1). Так, радиальную и азимутальную координаты точки наблюдения в системе координат  $j$ -го цилиндра будем обозначать соответственно через  $\rho_j$  и  $\phi_j$ , а соответствующие координаты нитевидного источника — через  $\rho_{0j}$  и  $\phi_{0j}$ .

Поле внутри  $j$ -го цилиндра, а также падающие на этот цилиндр и рассеянные им поля могут быть представлены через азимутальные гармоники в цилиндрических координатах, связанных с осью этого цилиндра:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_j &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{j,m} \exp(-im\phi_j), \\ \mathbf{H}_j &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{j,m} \exp(-im\phi_j), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $m$  — азимутальный индекс ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Величины  $\mathbf{E}_{j,m}$  и  $\mathbf{H}_{j,m}$  выражаются через продольную компоненту магнитного поля  $H_{z;j,m}(\rho_j)$ , которая, в свою очередь, удовлетворяет следующему уравнению в плазменной среде:

$$\frac{d^2 H_{z;j,m}}{d\rho_j^2} + \frac{1}{\rho_j} \frac{dH_{z;j,m}}{d\rho_j} + \left( k_0^2 q^2 - \frac{m^2}{\rho_j^2} \right) H_{z;j,m} = 0. \quad (9)$$

Здесь  $q = [(\varepsilon^2 - g^2)/\varepsilon]^{1/2}$  — поперечное (по отношению к  $\mathbf{B}_0$ ) волновое число необыкновенной волны в

магнитоактивной плазме, а компоненты электрического поля  $E_{\rho;j,m}$  и  $E_{\phi;j,m}$  выражаются через компоненту магнитного поля  $H_{z;j,m}$ :

$$E_{\rho;j,m} = -\frac{Z_0}{k_0(\varepsilon^2 - g^2)} \left( \frac{m\varepsilon}{\rho_j} H_{z;j,m} + g \frac{dH_{z;j,m}}{d\rho_j} \right), \quad (10)$$

$$E_{\phi;j,m} = \frac{iZ_0}{k_0(\varepsilon^2 - g^2)} \left( \frac{mg}{\rho_j} H_{z;j,m} + \varepsilon \frac{dH_{z;j,m}}{d\rho_j} \right). \quad (11)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае обыкновенная волна не может возбуждаться внутри цилиндров.

Компоненты поля внутри  $j$ -го цилиндра представляются в виде

$$E_{\rho;j,m}^{(t)} = -\frac{1}{\varepsilon q^2} \times \\ \times B_{j,m} \left[ \frac{m\varepsilon}{k_0 \rho_j} J_m(k_0 q \rho_j) + q g J'_m(k_0 q \rho_j) \right], \quad (12)$$

$$E_{\phi;j,m}^{(t)} = \frac{i}{\varepsilon q^2} \times \\ \times B_{j,m} \left[ \frac{mg}{k_0 \rho_j} J_m(k_0 q \rho_j) + q \varepsilon J'_m(k_0 q \rho_j) \right],$$

$$H_{z;j,m}^{(t)} = Z_0^{-1} B_{j,m} J_m(k_0 q \rho_j),$$

где  $J_m$  — функция Бесселя порядка  $m$ , индекс « $(t)$ » отмечает компоненты поля, «прошедшего» в цилиндр,  $B_{j,m}$  — амплитудный коэффициент, соответствующий азимутальному индексу  $m$ . Здесь и далее штрих обозначает производную по аргументу.

Для того чтобы описать поле вне цилиндра, в выражениях (9)–(11) следует положить  $\varepsilon = \eta = 1$  и  $g = 0$ . В этом случае величина  $q$  заменяется на единицу. Тогда компоненты азимутальных гармоник поля, рассеянного  $j$ -м цилиндром, которые будут обозначаться индексом « $(s)$ », записываются в выбранной системе координат в виде

$$E_{\rho;j,m}^{(s)} = -D_{j,m} \frac{m}{k_0 \rho_j} H_m^{(2)}(k_0 \rho_j), \\ E_{\phi;j,m}^{(s)} = i D_{j,m} H_m^{(2)'}(k_0 \rho_j), \quad (13) \\ H_{z;j,m}^{(s)} = Z_0^{-1} D_{j,m} H_m^{(2)}(k_0 \rho_j),$$

где  $D_{j,m}$  — коэффициент рассеяния, отвечающий азимутальному индексу  $m$ .

Азимутальные гармоники поля, падающего от нитевидного источника на  $j$ -й цилиндр, могут быть выражены в системе координат, связанной с этим цилиндром, с помощью теоремы сложения Графа для цилиндрических функций [24]:

$$H_n^{(2)}(k_0 \rho) \exp(-in\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{m-n}^{(2)}(k_0 \rho_{0j}) \times \\ \times J_m(k_0 \rho_j) \exp[i(m-n)\phi_{0j} - im\phi_j], \quad (14)$$

где предполагается выполненным условие  $\rho_j < \rho_{0j}$ . В дальнейшем это условие обеспечивается за счет того, что формула (14) используется только для представления падающего поля на границе цилиндра, т. е. при  $\rho_j = a < \rho_{0j}$ . В результате компоненты азимутальных гармоник поля, возбуждаемого источниками, в системе координат  $j$ -го цилиндра представляются в виде

$$E_{\rho;j,m}^{(f)} = -C_{j,m} \frac{m}{k_0 \rho_j} J_m(k_0 \rho_j), \\ E_{\phi;j,m}^{(f)} = i C_{j,m} J'_m(k_0 \rho_j), \quad (15) \\ H_{z;j,m}^{(f)} = Z_0^{-1} C_{j,m} J_m(k_0 \rho_j),$$

где коэффициент  $C_{j,m}$  записывается как

$$C_{j,m} = -\frac{i}{2} Z_0 C^{(e)} \times \\ \times \left\{ H_{m-1}^{(2)}(k_0 \rho_{0j}) \exp[i(m-1)\phi_{0j} + i\theta] + \right. \\ \left. + H_{m+1}^{(2)}(k_0 \rho_{0j}) \exp[i(m+1)\phi_{0j} - i\theta] \right\} \quad (16)$$

для электрической дипольной нити и как

$$C_{j,m} = Z_0 C^{(m)} H_m^{(2)}(k_0 \rho_{0j}) \exp(im\phi_{0j}) \quad (17)$$

для нити магнитного тока. Нетрудно убедиться, что при расчете  $H_{z;j,m}^{(f)}$  на основе соотношения (4) или (6) с использованием формулы (14) величины  $E_{\rho;j,m}^{(f)}$  и  $E_{\phi;j,m}^{(f)}$  даются выражениями, которые могут быть получены из соотношений (10) и (11), если положить  $\varepsilon = \eta = 1$  и  $g = 0$ .

При наличии нескольких цилиндров поле, падающее на каждый рассеиватель, состоит не только из поля, возбуждаемого источником, но и из полей, рассеянных другими цилиндрами. Для нахождения падающего поля, которое в дальнейшем обозначим индексом « $(i)$ », пересчитаем рассеянные поля в систему координат каждого цилиндра с помощью формулы (14). В результате получим

$$\begin{aligned}
 E_{\rho;j,m}^{(i)} &= E_{\rho;j,m}^{(f)} - \\
 &\quad - \frac{m}{k_0\rho_j} \sum_{l \neq j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{l,n} H_{m-n}^{(2)}(k_0\rho_{lj}) \times \\
 &\quad \times J_m(k_0\rho_j) \exp[i(m-n)\phi_{lj}], \\
 E_{\phi;j,m}^{(i)} &= E_{\phi;j,m}^{(f)} + i \sum_{l \neq j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{l,n} H_{m-n}^{(2)}(k_0\rho_{lj}) \times \\
 &\quad \times J'_m(k_0\rho_j) \exp[i(m-n)\phi_{lj}], \\
 H_{z;j,m}^{(i)} &= H_{z;j,m}^{(f)} + \\
 &\quad + Z_0^{-1} \sum_{l \neq j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{l,n} H_{m-n}^{(2)}(k_0\rho_{lj}) \times \\
 &\quad \times J_m(k_0\rho_j) \exp[i(m-n)\phi_{lj}],
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

где  $\rho_{lj}$  и  $\phi_{lj}$  — соответственно радиальная и азимутальная координаты оси  $l$ -го цилиндра ( $l = 1, 2, \dots$ ) в системе координат  $j$ -го цилиндра ( $j \neq l$ ) и предполагается, что  $\rho_j < \rho_{lj}$ .

Для определения коэффициентов поля внутри цилиндров  $B_{j,m}$  и коэффициентов рассеяния  $D_{j,m}$  следует удовлетворить условиям непрерывности тангенциальных компонент поля на границе каждого цилиндра. Для  $j$ -го цилиндра граничные условия при  $\rho_j = a$  записываются в виде

$$E_{\phi;j,m}^{(t)} = E_{\phi;j,m}^{(i)} + E_{\phi;j,m}^{(s)}, \tag{19}$$

$$H_{z;j,m}^{(t)} = H_{z;j,m}^{(i)} + H_{z;j,m}^{(s)}. \tag{20}$$

Применение граничных условий (19) и (20) на поверхности каждого цилиндра последовательно для  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$  дает  $2N(2M + 1)$  неоднородных уравнений для  $N(2M + 1)$  коэффициентов  $B_{j,m}$  и  $N(2M + 1)$  коэффициентов  $D_{j,m}$ , где  $N$  — полное число цилиндров в системе, а  $M$  — максимальное абсолютное значение номера наивысшей учитываемой азимутальной гармоники. Выбор конечного числа азимутальных гармоник вместо бесконечного числа слагаемых, суммируемых по азимутальному индексу, как в строгих формулах (14) и (18), определяется требуемой точностью численных расчетов. Однако можно убедиться, что в случае, когда круговая частота совпадает с одной из резонансных частот поверхностных плазмонов, для обеспечения приемлемой точности достаточно учесть лишь нескольких азимутальных гармоник. Решая описанные выше уравнения, находим коэффициенты  $B_{j,m}$  и  $D_{j,m}$ , необходимые для дальнейших расчетов полного поля и диаграммы направленности излучения.

При наличии в системе лишь одного рассеивателя ( $N = 1$ ) падающее поле совпадает с полем, возбуждаемым источником, так что

$$\begin{aligned}
 E_{\rho;1,m}^{(i)} &= E_{\rho;1,m}^{(f)}, & E_{\phi;1,m}^{(i)} &= E_{\phi;1,m}^{(f)}, \\
 H_{z;1,m}^{(i)} &= H_{z;1,m}^{(f)}.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

В этом случае процедура расчета значительно упрощается и коэффициенты  $B_{j,m}$  и  $D_{j,m}$ , где  $j = N = 1$ , определяются в явном виде:

$$B_{1,m} = C_{1,m} \frac{2i}{\pi Q [\zeta_m H_m^{(2)}(Q) - J_m(\tilde{Q}) H_m^{(2)'}(Q)]}, \tag{22}$$

$$D_{1,m} = -C_{1,m} \frac{\zeta_m J_m(Q) - J_m(\tilde{Q}) J'_m(Q)}{\zeta_m H_m^{(2)}(Q) - J_m(\tilde{Q}) H_m^{(2)'}(Q)}, \tag{23}$$

где

$$\zeta_m = (\varepsilon^2 - g^2)^{-1} [mgQ^{-1} J_m(\tilde{Q}) + q\varepsilon J'_m(\tilde{Q})],$$

$$Q = k_0 a, \quad \tilde{Q} = k_0 q a.$$

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Основной трудностью при представлении результатов численных расчетов является то, что даже для используемой нами простой модели плазменных рассеивателей и нитевидных источников имеется большое число частных случаев, и представление подробных результатов для всех них заняло бы много места. Поэтому далее сосредоточимся на частных случаях, демонстрирующих сильное влияние даже одиночного резонансного рассеивателя или нескольких таких рассеивателей на характеристики излучения нитевидных источников. С этой целью были рассчитаны электромагнитное поле и средний по времени вектор Пойнтинга для некоторых конфигураций источников и рассеивателей.

Численные расчеты были выполнены при  $\omega_p a/c = 0.18$  и  $\omega_p/\omega_H = 6.471$ , где  $c$  — скорость

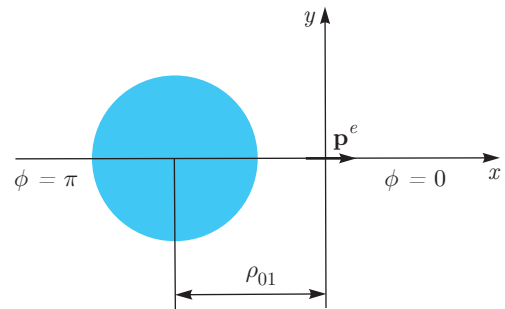
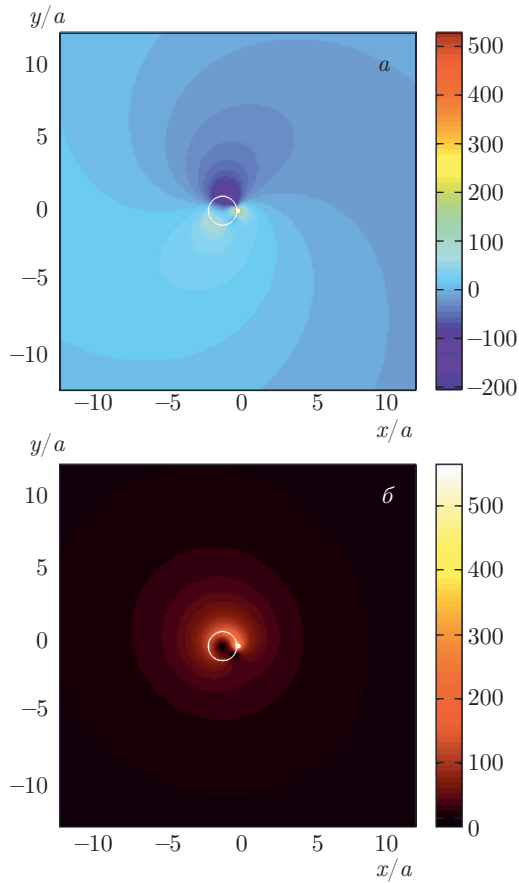
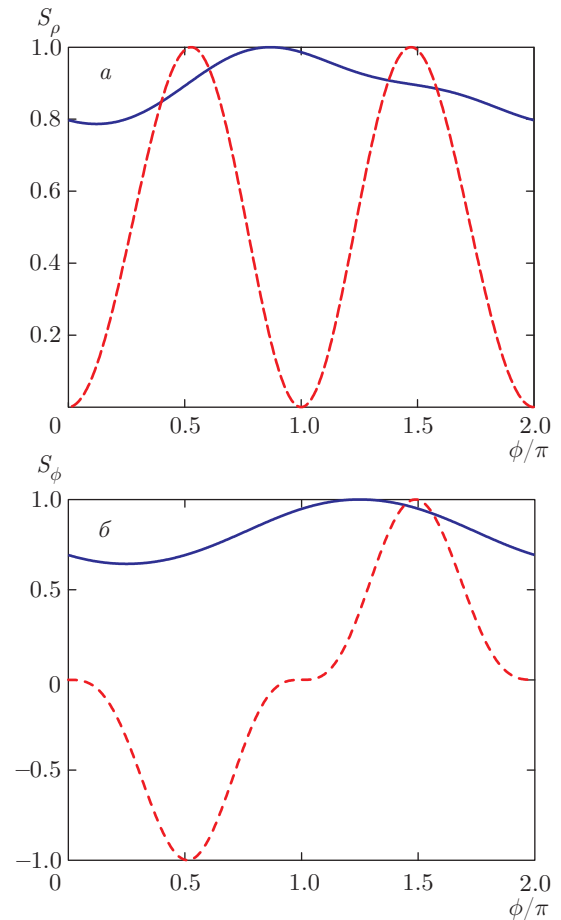


Рис. 2. Электрическая дипольная нить с углом ориентации дипольного момента  $\theta = 0$  на расстоянии  $\rho_{01}$  от оси плазменного цилиндра при  $\phi_{01} = 0$  (без соблюдения масштаба)



**Рис. 3.** (В цвете онлайн) Моментальный снимок (а) и абсолютное значение (б) нормированного полного магнитного поля источника в виде электрической дипольной нити при наличии замагниченного плазменного цилиндра (см. рис. 2) для  $\omega_p a/c = 0.18$ ,  $\omega_p/\omega_H = 6.471$ ,  $\omega = \omega_{SP,1}$ ,  $\theta = 0$ ,  $\phi_{01} = 0$ ,  $\rho_{01} = 1.1a$ . Окружность показывает границу цилиндра, светлая точка в месте расположения источника обозначает область сильного поля, в которой его абсолютное значение не может быть представлено с использованием принятого для рисунка масштаба

света в вакууме. Заметим, что указанные значения могут быть легко реализованы, например, в магнитоактивной плазме ВЧ-разряда в лабораторных условиях. Частота источника  $\omega$  выбрана равной частоте резонанса поверхностного плазмона  $\omega_{SP,m}$  одиночного замагниченного плазменного цилиндра в отсутствие потерь для азимутального индекса  $m = 1$ . Напомним [12], что на частотах резонансов поверхностных плазмонов  $\omega_{SP,m}$  мнимая часть знаменателя в выражении (23) обращается в нуль. В дальнейшем будем рассматривать случай электрически тонких плазменных цилиндров, когда  $k_0 a \ll 1$  и  $k_0 |q| a \ll 1$ . При этом частоты  $\omega_{SP,m}$  для  $m = \pm 1$  даются следующим выражением (см. работу [12] и цитируемую в ней литературу):



**Рис. 4.** Зависимости нормированных радиальной (а) и азимутальной (б) компонент вектора Пойнтинга от азимутального угла  $\phi$  на расстоянии  $\rho = 5 \cdot 10^3 a$  от источника для излучателя в виде электрической дипольной нити и одиночного плазменного цилиндра при  $\omega_p/\omega_H = 6.471$  (сплошные линии) и  $\omega_H = 0$  (штриховые линии) на частотах соответственно  $\omega = \omega_{SP,1}$  и  $\omega = \omega_{SP,1}^{(0)}$ . Остальные параметры те же, что и на рис. 3

$$\omega_{SP,\pm 1} = \frac{1}{2}[(2\omega_p^2 + \omega_H^2)^{1/2} \pm \omega_H]. \quad (24)$$

Для указанных выше параметров имеем  $\omega_{SP,1}/\omega_H = 5.049$ .

Для сравнения результатов, полученных в случае замагниченных плазменных рассеивателей, с результатами, соответствующими случаю изотропной плазмы внутри рассеивателей, мы также выполнили расчеты при прежних значениях плазменной частоты  $\omega_p$  и радиуса цилиндра  $a$ , полагая, что  $\omega_H = 0$  и  $\omega = \omega_{SP,1}^{(0)}$ , где  $\omega_{SP,1}^{(0)}$  — частота резонанса поверхностного плазмона незамагниченного плазменного цилиндра для  $m = 1$ . Заметим, что эта величина, не зависящая от знака  $m$ , может быть получена из

(24), если положить  $\omega_H = 0$ , и составляет  $\omega_{SP,1}^{(0)} = 0.897\omega_{SP,1}$  для выбранных значений параметров.

Обсудим вначале излучение электрической дипольной нити, расположенной на расстоянии  $\rho_{01} = 1.1a$  от оси одиночного цилиндрического рассеивателя. Предполагается, что дипольный момент образует угол  $\theta = 0$  с положительным направлением оси  $x$ , соответствующим значению  $\phi = 0$ , как показано на рис. 2. Для выбранного положения источника имеем  $\phi_{01} = 0$ .

На рис. 3 представлены моментальный снимок и абсолютное значение полного магнитного поля  $\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 H_z$ , нормированного на  $(4\pi)^{-1}\omega\rho_0^e k_0$ , для указанных выше значений параметров источника и плазмы внутри цилиндра. Как видно из рис. 3а, полное поле преимущественно определяется азимутальной гармоникой рассеянного поля с индексом  $m = 1$ . Это наглядно иллюстрируется спиралевидной структурой полного поля, характерной для рассеяния на резонансной частоте соответствующего поверхностного плазмона гиротропного цилиндра [11,12]. В результате пространственная структура абсолютного значения полного поля, показанная на рис. 3б, оказывается практически осесимметричной, в отличие от случая излучения того же источника в отсутствие такого рассеивателя или при наличии изотропного рассеивателя.

Следует отметить, что наряду с совпадением круговой частоты  $\omega$  с резонансной частотой  $\omega_{SP,1}$  формированию описанной структуры поля способствует относительно небольшое расстояние между цилиндром и источником. Действительно, поле источника, возбуждающее плазмонный резонанс цилиндра, достаточно велико на его поверхности при малых значениях  $\rho_{01} - a$ , и амплитуда резонансно рассеянного поля в дальней зоне оказывается много больше первичного возбуждающего поля.

Описанные выше особенности можно также проследить в поведении радиальной и азимутальной компонент вектора Пойнтинга полного поля. Зависимости этих компонент, нормированных на их максимальные значения, от азимутального угла  $\phi$  на расстоянии  $\rho = 5 \cdot 10^3 a$  от источника приведены на рис. 4. Сплошная и штриховая линии соответствуют резонансному рассеянию на замагниченном ( $\omega = \omega_{SP,1}$ ) и немагниченном ( $\omega = \omega_{SP,1}^{(0)}$ ) плазменных цилиндрах. Как видно из рисунка, для выбранных значений параметров гиротропные свойства замагниченного плазменного цилиндра приводят к тому, что угловое распределение компоненты  $S_\rho$ , т. е., по существу, диаграмма направленности излучения источника, весьма слабо зависит от азимутального

угла  $\phi$ , в отличие от хорошо выраженной диаграммы направленности излучения дипольного типа в случае изотропной плазмы внутри цилиндра. Заметим, что диаграмма направленности излучения при  $\omega_H \neq 0$  на рис. 4а слегка асимметрична относительно плоскости  $y = 0$ , проходящей через ось цилиндра и нитевидный источник, что обусловлено гиротропными свойствами рассеивателя. Из рис. 4б также следует, что при наличии замагниченного плазменного цилиндра компонента вектора Пойнтинга  $S_\phi$  не является антисимметричной относительно указанной плоскости, в отличие от случая изотропного рассеивателя. Данное обстоятельство означает, что момент импульса полного поля по отношению к оси источника отличен от нуля благодаря влиянию гиротропного цилиндрического рассеивателя.

Для оценки влияния изменения угла ориентации дипольного момента  $\theta$  на направленность излучения источника в виде электрической дипольной нити при наличии продольно замагниченного плазменного цилиндра были рассчитаны зависимости компонент вектора Пойнтинга от азимутальной координаты  $\phi$  для различных значений угла  $\theta$ . Результаты расчетов для компонент  $S_\rho$  и  $S_\phi$ , нормированных на их соответствующие максимальные значения при  $\theta = 0$ , показаны на рис. 5 в случае, когда частота источника  $\omega$  совпадает с частотой резонанса поверхностного плазмона  $\omega_{SP,1}$ . Как следует из результатов расчетов, изменение угла  $\theta$  не сказывается качественно на направленности излучения рассматриваемой системы и приводит лишь к небольшим сдвигам локальных максимумов и минимумов зависимостей  $S_\rho(\phi)$  и  $S_\phi(\phi)$  при  $\omega = \omega_{SP,1}$  без появления сколько-нибудь заметных лепестков диаграммы направленности. Данный факт дополнительно иллюстрируется соответствующими графиками, представленными на рис. 6 для  $\theta = \pi/2$ . Как и на рис. 4, сплошные и штриховые линии на рис. 6 отвечают резонансному рассеянию на замагниченном и немагниченном плазменных цилиндрах на соответствующих частотах поверхностного плазмонного резонанса. Во избежание недоразумений следует подчеркнуть, что приведенные выше утверждения относятся лишь к рассеянию на электрически тонком плазменном цилиндре на резонансной частоте поверхностного плазмона.

Перейдем теперь к другому примеру, демонстрирующему влияние резонансного гиротропного рассеивателя на диаграмму направленности излучения нити магнитного тока. Взаимное расположение этого источника и замагниченного плазменного цилиндра показано на рис. 7. Как и в предыдущем случае

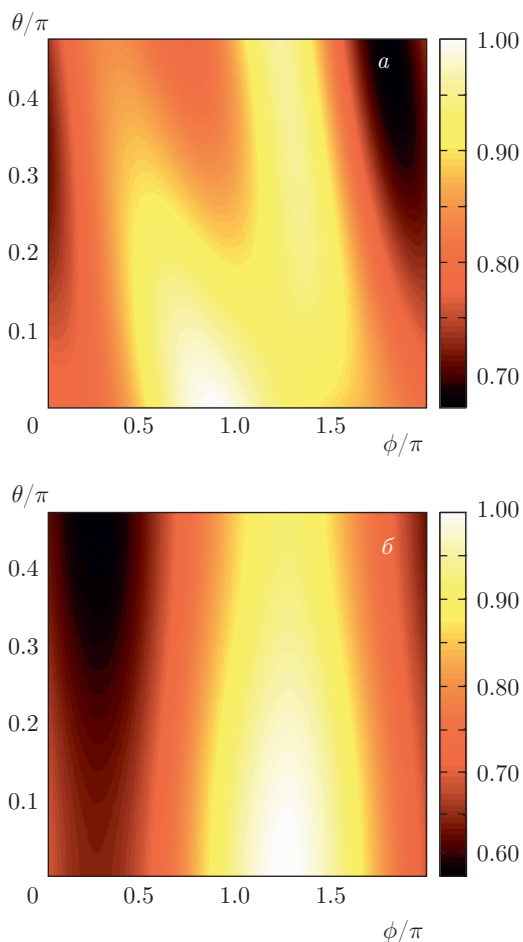


Рис. 5. (В цвете онлайн) Радиальная (а) и азимутальная (б) компоненты вектора Пойнтинга в зависимости от азимутальной координаты  $\phi$  и угла ориентации  $\theta$  электрического дипольного момента на единицу длины нитевидного источника на расстоянии  $\rho = 5 \cdot 10^3 a$  от него при  $\omega_p/\omega_H = 6.471$  на частоте  $\omega = \omega_{SP,1}$ . Компоненты  $S_\rho$  и  $S_\phi$  нормированы на их соответствующие максимальные значения при  $\theta = 0$ . Остальные параметры те же, что и на рис. 3

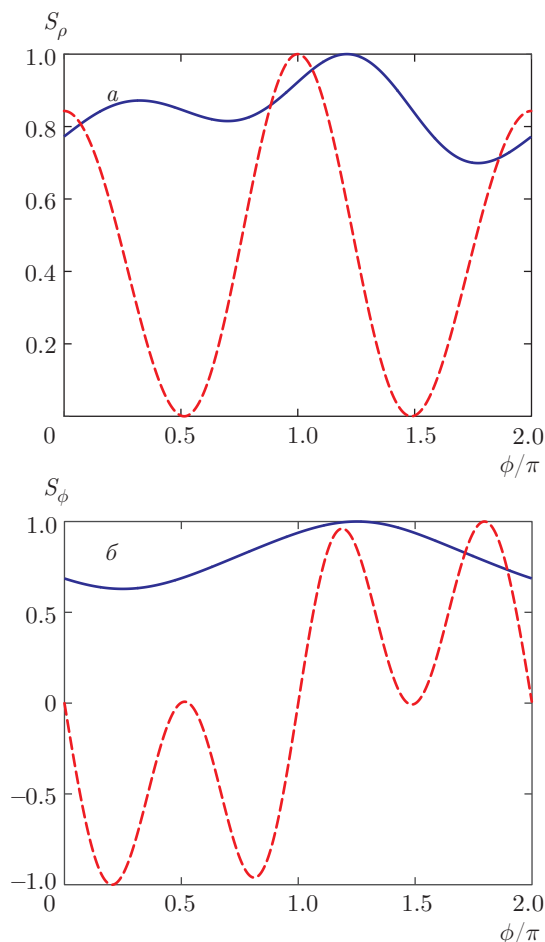


Рис. 6. То же, что и на рис. 4, но для  $\theta = \pi/2$

электрической дипольной нити, здесь снова  $\phi_{01} = 0$ , но расстояние  $\rho_{01}$  между нитью и осью цилиндра теперь увеличено.

На рис. 8 представлены моментальный снимок и абсолютное значение полного магнитного поля, нормированного на  $(4\pi Z_0)^{-1} I_0^m k_0$ , в случае источника в виде нити магнитного тока и одиночного гиротропного цилиндра при  $\rho_{01} = 3a$ ,  $\phi_{01} = 0$ . Зависимости радиальной и азимутальной компонент вектора Пойнтинга полного поля, нормированных на их максимальные значения, от азимутального угла  $\phi$  на расстоянии  $5 \cdot 10^3 a$  от источника показаны на рис. 9. Сплошные и штриховые линии по-прежнему соответствуют случаям замагниченного и незамаг-

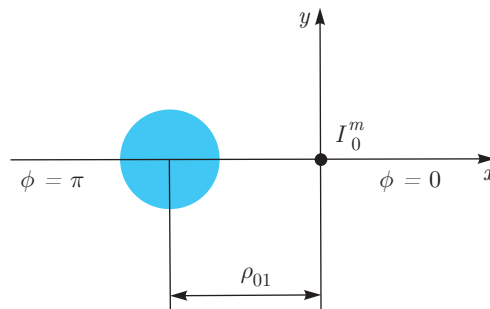
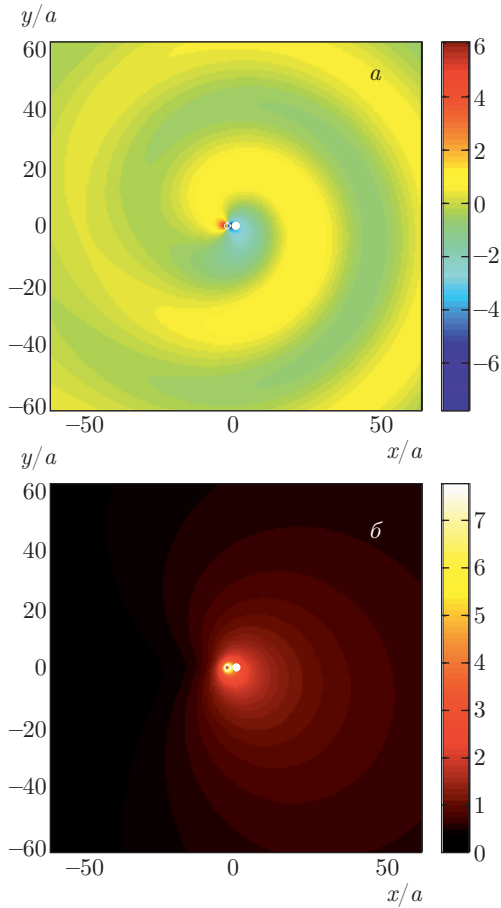


Рис. 7. Нить магнитного тока на расстоянии  $\rho_{01}$  от оси плазменного цилиндра при  $\phi_{01} = 0$  (без соблюдения масштаба)

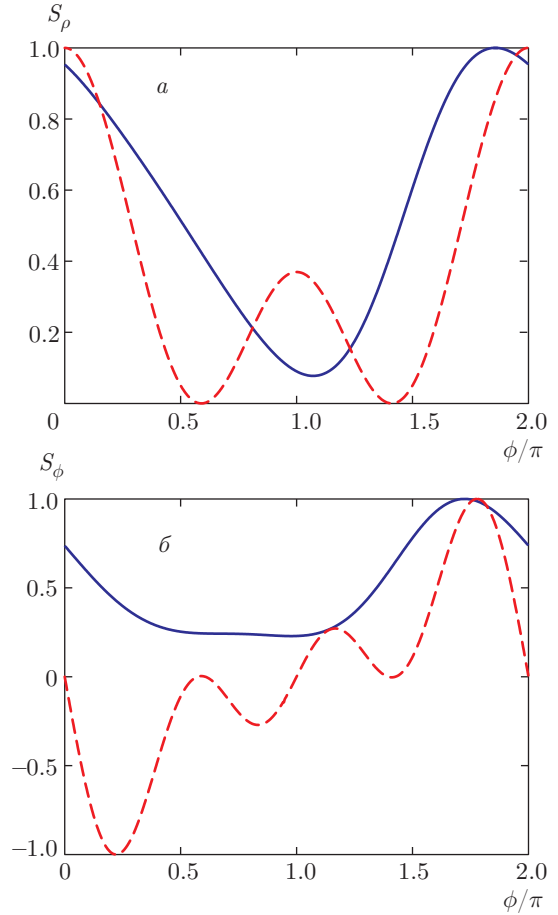
ниченного плазменных цилиндров на резонансных частотах поверхностных плазмонов. Как видно из рисунка, для выбранных значений параметров угловое распределение  $S_\rho$  оказывается весьма близким по форме к кардиоиде, т.е. диаграмме направленности излучения элемента Гюйгенса.



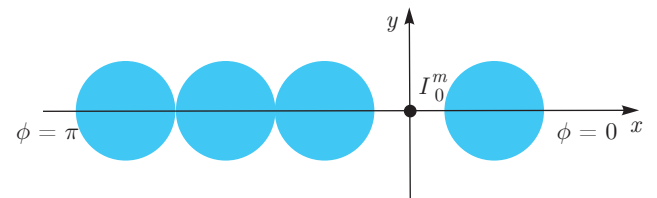


**Рис. 8.** (В цвете онлайн) То же, что и на рис. 3, но для источника в виде нити магнитного тока при  $\rho_{01} = 3a$  (см. пояснения в тексте)

В рассматриваемом случае полное поле и соответствующие диаграммы компонент вектора Пойнтинга определяются сравнимыми вкладами поля источника и рассеянного поля вследствие более высокого значения  $\rho_{01}$ , чем в случаях на рис. 3, 4. Более того, для выбранного значения  $\rho_{01}$  интерференция двух полей оказывается конструктивной в направлении  $\phi = 0$  и деструктивной в противоположном направлении  $\phi = \pi$ , что в конечном счете приводит к формированию диаграммы направленности, характерной для элемента Гюйгенса, вместо ненаправленного излучения нити магнитного тока в отсутствие рассеивателей. Кроме того, видно, что в случае  $\omega_H \neq 0$  направленные свойства оказываются более выраженными по сравнению со случаем размещения изотропного плазменного рассеивателя вблизи источника, когда наблюдается небольшой дополнительный лепесток в направлении  $\phi = \pi$ . Заметим, что асимметрия пространственного рас-



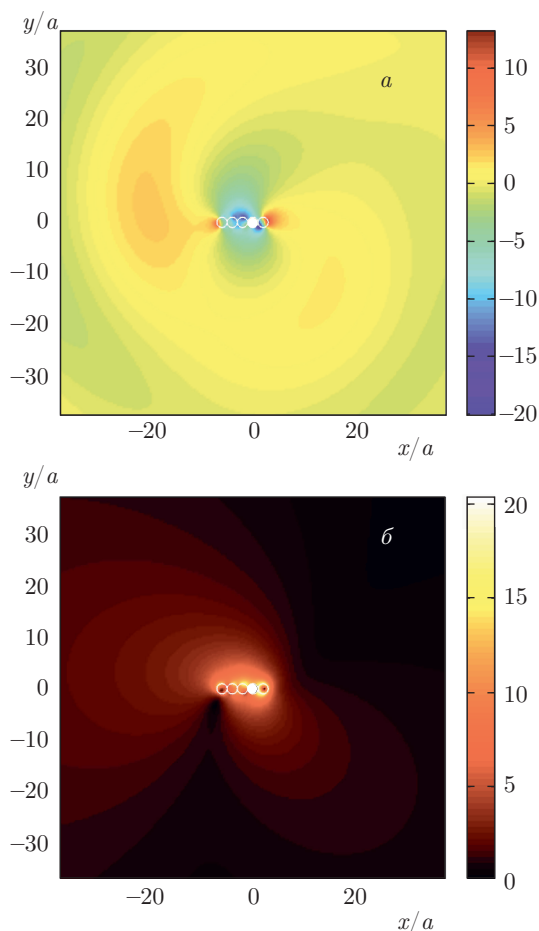
**Рис. 9.** То же, что и на рис. 4, но для источника в виде нити магнитного тока при  $\rho_{01} = 3a$  (см. пояснения в тексте)



**Рис. 10.** Система, содержащая нить магнитного тока наряду с тремя плазменными директорами и одним плазменным рефлектором

пределения компонент вектора Пойнтинга на рис. 9 при наличии гиротропного рассеивателя напоминает соответствующее распределение в случае электрической дипольной нити.

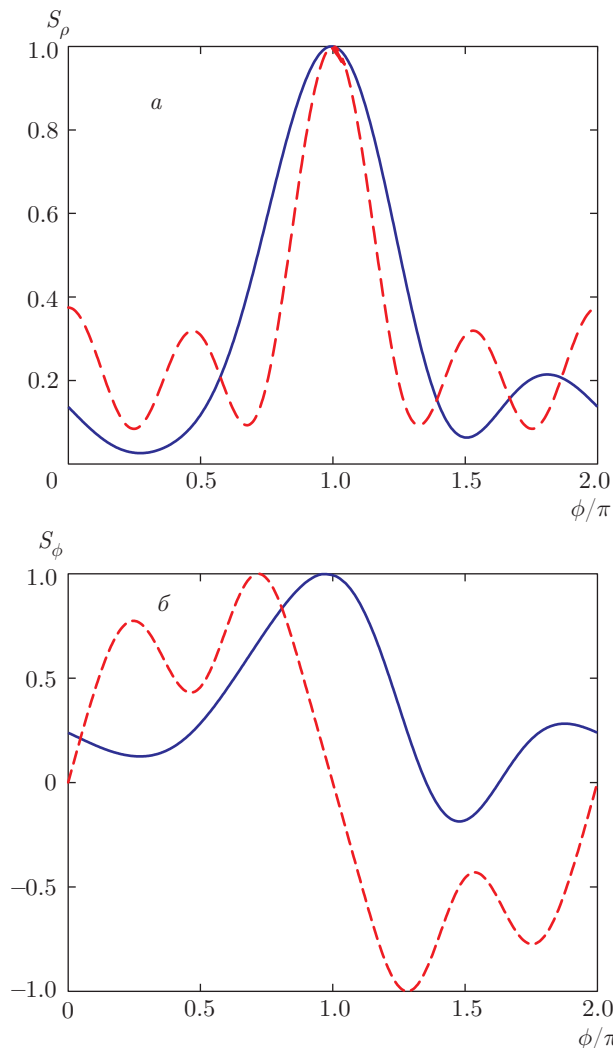
Направленные свойства излучения нитевидных источников могут быть дополнительно повышены за счет размещения вблизи них большего числа замагниченных плазменных рассеивателей. Преде-



**Рис. 11.** (В цвете онлайн) Моментальный снимок (а) и абсолютное значение (б) нормированного полного магнитного поля для системы, изображенной на рис. 10, при  $\omega_p a/c = 0.18$ ,  $\omega_p/\omega_H = 6.471$ ,  $\omega = \omega_{SP,1}$ . Окружности показывают границы плазменных цилиндров, светлая точка обозначает область сильного поля вокруг источника. Использована та же нормировка для поля, что и на рис. 8

монстрируем такую возможность для нити магнитного тока с несколькими рассеивателями, образующими систему типа Яги–Уда, показанную на рис. 10. Она состоит из пяти равноудаленных элементов, а именно, трех плазменных цилиндров, играющих роль директоров, возбуждающего линейного магнитного тока и плазменного цилиндра, играющего роль рефлектора. Для численных расчетов расстояние между осями ближайших элементов принято равным  $2a$ , в то время как параметры плазмы внутри рассеивателей оставлены прежними.

Как и для рассмотренных выше случаев с одиночным плазменным рассеивателем, на рис. 11 и 12 представлены структура поля и диаграмма направленности излучения описанной системы типа Яги–



**Рис. 12.** Нормированные радиальная (а) и азимутальная (б) компоненты вектора Пойнтинга для системы, изображенной на рис. 10, на расстоянии  $\rho = 5 \cdot 10^3 a$  от источника при  $\omega_p/\omega_H = 6.471$  (сплошные линии) и  $\omega_H = 0$  (штриховые линии) на частотах соответственно  $\omega = \omega_{SP,1}$  и  $\omega = \omega_{SP,1}^{(0)}$ . Остальные параметры те же, что и на рис. 11

Уда. Как видно из рис. 11, абсолютное значение полного поля заметно возрастает в направлении  $\phi = \pi$ , вдоль которого расположены цилиндрические директоры. Такая структура поля является результатом интерференции возбуждаемого источником поля и многократно рассеянного поля, обусловленного наличием плазменных цилиндров с гиротропными свойствами в случае резонансного рассеяния. Как видно на рис. 12а, диаграмма направленности излучения рассматриваемой системы имеет один главный лепесток и один боковой лепесток при  $\omega = \omega_{SP,1}$  (сплошная линия), в то время как диаграмма на-

правленности аналогичной системы изотропных цилиндров при  $\omega = \omega_{SP,1}^{(0)}$  (штриховая линия) имеет большее число боковых лепестков при тех же размерах и взаимном расположении рассеивающих объектов. Как и для ранее рассмотренных систем с одним замагниченным плазменным цилиндром, полное магнитное поле имеет ненулевой момент импульса по отношению к оси источника при  $\omega_H \neq 0$ , в отличие от случая, когда внешнее постоянное магнитное поле отсутствует и соответствующий момент импульса равен нулю.

Таким образом, можно утверждать, что резонансное взаимодействие нитевидных электромагнитных источников с расположенными вблизи них замагниченными плазменными объектами может приводить к заметным изменениям излучательных характеристик источников. Следует также подчеркнуть, что описанные выше изменения в диаграммах направленности излучения, обусловленные влиянием гиротропных цилиндрических рассеивателей, не могут быть обеспечены при использовании изотропных рассеивателей того же размера и формы.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследовано излучение источников в виде электрической дипольной нити и нити магнитного тока при наличии замагниченных цилиндрических плазменных рассеивателей, расположенных в окружающем свободном пространстве. Рассчитаны диаграммы направленности излучения таких источников в случае, когда их частота совпадает с одной из резонансных частот поверхностных плазмонов цилиндрических рассеивателей. Показано, что диаграммы направленности излучения нитевидных источников при наличии даже одиночного резонансного замагниченного плазменного рассеивателя с малым электрическим радиусом могут существенно отличаться от диаграмм, имеющих место при отсутствии рассеивателей или наличии изотропного рассеивателя той же формы и размера. В качестве примера влияния структуры с многократным рассеянием на излучение нитевидного источника рассмотрена система, содержащая нить магнитного тока наряду с тремя директорами и одним рефлектором, образованными продольно замагниченными плазменными цилиндрами, и найдены значения параметров, при которых диаграмма направленности излучения такой системы имеет один основной и один боковой лепесток, в отличие от диаграммы направленности аналогичной системы изо-

тропных цилиндрических рассеивателей, имеющей большее количество боковых лепестков.

В представленном выше анализе мы сосредоточились на поверхностных плазмонных резонансах электрически тонких рассеивателей, заполненных бесстолкновительной магнитоактивной плазмой. Поскольку учет малых столкновительных потерь довольно слабо влияет на поверхностные плазмонные резонансы в ВЧ-диапазоне [12], такая модель рассеивателей оказывается адекватной в рассматриваемом случае. Резонансы других типов, рассеяние на которых может демонстрировать некоторые интересные особенности (например, повышенный уровень магнитодипольного излучения цилиндрического рассеивателя в оптическом диапазоне [14]), сильно подавляются и становятся перекрывающимися при наличии даже малых столкновительных потерь в лабораторной плазме [12] и поэтому представляют меньший интерес для плазменных систем, работающих в ВЧ-диапазоне. Тем не менее поиск возможностей повышения отклика замагниченных плазменных рассеивателей на резонансах более высокого порядка остается актуальной задачей. Однако решение этой задачи требует отдельного рассмотрения и выходит далеко за рамки настоящей работы.

Полученные результаты показывают возможность эффективного управления характеристиками излучения рассмотренных систем с помощью резонансного взаимодействия электромагнитных источников и окружающих их гиротропных рассеивателей. Наконец, отметим, что, хотя необходимые условия такого взаимодействия в подобных системах могут быть обеспечены путем подстройки различных параметров источников и рассеивателей, наиболее простым способом ее осуществления на практике является, по-видимому, изменение наложенного на плазменные объекты внешнего магнитного поля.

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-12-00510).

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем основные этапы вывода формул (4)–(7) для полей нитевидных источников в свободном пространстве, опуская для краткости индекс «(f)». Начнем с поля, возбуждаемого электрической дипольной нитью. Поскольку проекция электрического дипольного момента на ось  $z$  равна

нулю, векторный потенциал электрического типа  $\mathbf{A}^e$ , отвечающий такому источнику, имеет лишь две ненулевые компоненты,  $A_x^e$  и  $A_y^e$ , которые удовлетворяют неоднородному волновому уравнению

$$\nabla_{\perp}^2 A_{x,y}^e + k_0^2 A_{x,y}^e = -i\mu_0\omega p_{x,y}^e (2\pi\rho)^{-1} \delta(\rho). \quad (\text{A.1})$$

Здесь  $\nabla_{\perp}^2$  — поперечная (по отношению к оси  $z$ ) часть оператора Лапласа,  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $p_x^e = p_0^e \cos\theta$ ,  $p_y^e = p_0^e \sin\theta$ . Рассматривая уравнение

$$\nabla_{\perp}^2 G + k_0^2 G = -(2\pi\rho)^{-1} \delta(\rho) \quad (\text{A.2})$$

и используя тот факт, что его решение, удовлетворяющее условию излучения на бесконечности, имеет вид [25]

$$G = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k_0\rho), \quad (\text{A.3})$$

мы можем записать решение уравнения (A.1) для  $A_x^e$  и  $A_y^e$  следующим образом:

$$A_{x,y}^e = \frac{1}{4} Z_0 k_0 p_{x,y}^e H_0^{(2)}(k_0\rho). \quad (\text{A.4})$$

Переходя к компонентам  $A_{\rho}^e$  и  $A_{\phi}^e$  вектора  $\mathbf{A}^e$  в цилиндрических координатах в соответствии с известными формулами

$$\begin{aligned} A_{\rho}^e &= A_x^e \cos\phi + A_y^e \sin\phi, \\ A_{\phi}^e &= -A_x^e \sin\phi + A_y^e \cos\phi, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

приходим к выражениям

$$\begin{aligned} A_{\rho}^e &= \frac{1}{4} Z_0 k_0 p_0^e H_0^{(2)}(k_0\rho) \cos(\theta - \phi), \\ A_{\phi}^e &= \frac{1}{4} Z_0 k_0 p_0^e H_0^{(2)}(k_0\rho) \sin(\theta - \phi). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Подставляя эти компоненты в формулу

$$\mathbf{H} = \mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{A}^e, \quad (\text{A.7})$$

получаем

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_z C^{(e)} H_1^{(2)}(k_0\rho) \sin(\theta - \phi), \quad (\text{A.8})$$

где величина  $C^{(e)}$  определяется выражением (5).

Для нити магнитного тока, совмещенной с осью  $z$ , введем векторный потенциал магнитного типа  $\mathbf{A}^m$ . Единственная отличная от нуля компонента  $A_z^m$  этого потенциала удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{\perp}^2 A_z^m + k_0^2 A_z^m = -\epsilon_0 I_0^m (2\pi\rho)^{-1} \delta(\rho), \quad (\text{A.9})$$

откуда следует, что

$$A_z^m = -\frac{i}{4} \epsilon_0 I_0^m H_0^{(2)}(k_0\rho). \quad (\text{A.10})$$

Применение формулы

$$\mathbf{E} = -\epsilon_0^{-1} \nabla \times \mathbf{A}^m \quad (\text{A.11})$$

дает

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_{\phi} \frac{i}{4} k_0 I_0^m H_1^{(2)}(k_0\rho). \quad (\text{A.12})$$

Подставляя электрическое поле, определяемое (A.12), в уравнение Максвелла

$$\mathbf{H} = \frac{i}{\omega\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}, \quad (\text{A.13})$$

записанное для области без источников, получаем магнитное поле

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_z C^{(m)} H_0^{(2)}(k_0\rho), \quad (\text{A.14})$$

где величина  $C^{(m)}$  дается выражением (7).

## ЛИТЕРАТУРА

1. W. A. Challener, C. Peng, A. V. Itagi et al., *Nature Photon.* **3**, 220 (2009).
2. M. Terakawa, S. Takeda, Y. Tanaka, and G. Obara, *Progr. Quant. Electr.* **36**, 194 (2012).
3. H. Wei and H. X. Hu, *Nanophotonics* **1**, 155 (2012).
4. А. Е. Краснок, И. С. Максимов, А. И. Денисюк и др., *УФН* **183**, 561 (2013).
5. L. Novotny and N. van Hulst, *Nature Photon.* **5**, 83 (2011).
6. B. le Feber, N. Rotenberg, and L. Kuipers, *Nature Comm.* **6**, 6695 (2015).
7. A. R. Davoyan and N. Engheta, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 047401 (2013).
8. A. R. Davoyan and N. Engheta, *New J. Phys.* **15**, 083054 (2013).
9. B. S. Luk'yanchuk, A. E. Miroshnichenko, M. I. Tribelsky et al., *New J. Phys.* **14**, 093022 (2012).
10. D. Gao, L. Gao, A. Novitsky, H. Chen, and B. Luk'yanchuk, *Opt. Lett.* **40**, 4162 (2015).
11. V. A. Es'kin, A. V. Ivoninsky, and A. V. Kudrin, *Progr. Electromagn. Res. B* **63**, 173 (2015).
12. V. A. Es'kin, A. V. Ivoninsky, A. V. Kudrin, and C. Krafft, *Phys. Scr.* **91**, 015502 (2016).
13. А. П. Анютин, И. П. Коршунов, А. Д. Шатров, *ЖЭТФ* **146**, 429 (2014).

14. S. Atakaramians, A. E. Miroshnichenko, I. V. Shadrivov et al., *Amer. Chem. Soc. Photon.* **3**, 972 (2016).
15. F. F. Chen and R. W. Boswell, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **25**, 1245 (1997).
16. M. D. Carter, F. W. Baity, G. C. Barber et al., *Phys. Plasmas* **9**, 5097 (2002).
17. A. V. Kudrin and V. A. Es'kin, *Phys. Scr.* **74**, 425 (2006).
18. A. V. Kudrin, V. A. Es'kin, C. Krafft, and T. M. Zaboronkova, *Phys. Scr.* **77**, 055501 (2008).
19. I. G. Kondrat'ev, A. V. Kudrin, and T. M. Zaboronkova, *Electrodynamics of Density Ducts in Magnetized Plasmas*, Gordon and Breach, Amsterdam (1999).
20. A. V. Kudrin, M. Yu. Lyakh, and T. M. Zaboronkova, *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **49**, 1645 (2001).
21. I. Fernandez-Corbaton, M. Fruhnert, and C. Rockstuhl, *Phys. Rev. X* **6**, 031013 (2016).
22. A. D. J. Fernandez-Olvera, D. Melazzi, and V. Lancelotti, *Progr. Electromagn. Res. C* **65**, 11 (2016).
23. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, Наука, Москва (1967).
24. М. Абрамовиц, И. А. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
25. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, Гостехиздат, Москва (1951).