

НЕЛИНЕЙНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ В СРЕДЕ СИММЕТРИЧНЫХ И НЕСИММЕТРИЧНЫХ МОЛЕКУЛ

С. В. Сазонов^{a}, Н. В. Устинов^{b**}*

*^a Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

*^b Калининградский филиал Московского государственного университета путей сообщения «МИИТ»
236039, Калининград, Россия*

Поступила в редакцию 22 августа 2016 г.

Проведено теоретическое исследование нелинейного распространения предельно коротких электромагнитных импульсов в среде из симметричных и несимметричных молекул, помещенных в статические магнитное и электрическое поля. Несимметричные молекулы отличаются тем, что в стационарных квантовых состояниях обладают ненулевыми постоянными дипольными моментами. Выведена система волновых уравнений для обыкновенной и необыкновенной компонент импульсов. Показано, что эта система сводится в определенных случаях к системе связанных уравнений Островского и к уравнениям, интегрируемым с помощью метода обратной задачи рассеяния, включая векторную версию уравнения Островского–Вахненко. Рассмотрены различные типы решений этой версии. Однозначными являются только решения, представляющие собой суперпозицию периодических решений, тогда как солитонные и бризерные решения неоднозначны.

DOI: 10.7868/S0044451017020043

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейная оптика предельно коротких импульсов (ПКИ) сформировалась к настоящему времени в отдельную бурно развивающуюся ветвь физической науки [1, 2]. К ПКИ относят импульсы длительностью порядка одного периода колебаний. Для таких импульсов теряет смысл понятие огибающей, как и соответствующее ему приближение медленно меняющихся амплитуд и фаз, хорошо зарекомендовавшее себя в оптике квазимонохроматических сигналов [3]. Характерный временной масштаб ПКИ, генерируемых в лабораторных условиях, лежит в пределах от пико- [4] до фемто- [5] и даже сотен аттосекунд [6]. В последнем случае спектр импульса практически целиком перекрывает все квантовые переходы между связанными электронными состояниями, выходя в область инфинитных движений. В таких условиях уже необходимо учитывать процес-

сы ионизации. Эта область исследований подробно освещена в работе [6] и не является предметом настоящей статьи.

В последнее десятилетие набирают силу экспериментальные и теоретические исследования, связанные с генерацией электромагнитного излучения терагерцевого диапазона [7–9]. На сегодняшний день этот частотный диапазон является наименее изученным в плане взаимодействия с веществом. Однако уже сейчас можно говорить о многочисленных приложениях терагерцевого излучения в различных областях техники, включая системы безопасности, восстановления изображений, медицину, связь и т. д. [10].

Интенсивность генерируемых терагерцевых сигналов достигла таких величин, что в пору говорить о развитии «нелинейной терагерцевой оптики» [11]. Часто обсуждаемые терагерцевые сигналы в спектральном смысле являются широкополосными и обладают свойствами ПКИ. Поэтому приобретают актуальность теоретические исследования по нелинейному взаимодействию таких сигналов (назовем их терагерцевыми ПКИ) с различными средами.

* E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

** E-mail: n_ustinov@mail.ru

Одной из наиболее важных здесь задач является построение адекватной теоретической модели среды, взаимодействующей с терагерцевыми ПКИ. Из-за их широкополосного характера во взаимодействии должно участвовать большое число квантовых переходов, захватываемых импульсными спектрами. В таких условиях следует применять модель среды, являющуюся по своему составу многокомпонентной, в простейшем случае — двухкомпонентную модель со значительно разнесенными друг от друга величинами частот квантовых переходов [12–14].

Для генерации терагерцевого излучения оптическим методом используются, в частности, одноосные кристаллы. Квадратичная нелинейность, присущая таким кристаллам, должна проявлять себя в терагерцевом диапазоне при значительно меньших интенсивностях, нежели в видимой области частот. Это связано с тем, что инерционность отклика среды выражена значительно слабее при воздействии на нее терагерцевого импульса, чем в оптическом случае. Может возникнуть даже такая ситуация, когда квадратичная нелинейность наблюдается в терагерцевом диапазоне, но практически полностью отсутствует в видимой области спектра. Иными словами, анизотропия кристалла должна быть значительно сильнее выражена именно на терагерцевых частотах. При этом любопытно рассмотреть случаи как естественной анизотропии, так и анизотропии, наведенной статическими электрическими или магнитными полями. Поскольку анизотропия приводит к эффектам двулучепреломления, необходимо учитывать векторный характер электромагнитного поля терагерцевых ПКИ.

Квадратичная нелинейность среды может быть обусловлена, помимо прочего, наличием у молекул ненулевых дипольных моментов в стационарных состояниях. В этом случае молекулы не обладают сферической симметрией: гамильтониан взаимодействия оптических электронов с атомным остовом неинвариантен относительно полной группы вращений. Поэтому стационарные состояния таких молекул не имеют определенной четности, в результате чего становятся отличными от нуля диагональные элементы оператора дипольного момента. Если разность двух из них, называемая постоянным дипольным моментом (ПДМ) квантового перехода, не равна нулю, то при распространении импульса происходит динамический штарковский сдвиг частоты перехода, который пропорционален напряженности электрического поля импульса. Влияние ПДМ на распространение импульсов достаточно полно исследовано в случае (эффективно) двухуровневых

сред [15–27]. Большое внимание в этих исследованиях было уделено вопросу интегрируемости систем волновых и материальных уравнений в рамках метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [28–32].

Импульсы терагерцевого диапазона, как было отмечено выше, весьма чувствительны к нелинейным свойствам отклика среды, поэтому здесь следует ожидать новых механизмов распространения, не имеющих места в видимой области частот. Поэтому цель настоящей работы состоит в исследовании особенностей нелинейной динамики векторных терагерцевых ПКИ. В качестве модели среды, в которой распространяются импульсы, взята двухкомпонентная среда с наведенной анизотропией, причем молекулы одной из компонент обладают ненулевыми ПДМ.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 предложена модель среды, состоящей из двух сортов четырехуровневых атомов с сильно различающимися частотами разрешенных квантовых переходов. Молекулы сорта 1 являются несимметричными, обладающими ПДМ. В свою очередь, у молекул сорта 2 ПДМ отсутствует. В разд. 3 на основе ряда приближений проведены процедуры исключения материальных переменных и вывода систем связанных нелинейных волновых уравнений для обыкновенной и необыкновенной компонент импульса. Здесь же проведен анализ этих систем в различных предельных случаях. В разд. 4 найдены и проанализированы некоторые точные решения. В разд. 5 подведены основные итоги работы.

2. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть несимметричные молекулы, обладающие ПДМ, помещены в изотропную матрицу с показателем преломления n_m . Электромагнитный импульс распространяется вдоль оси y , перпендикулярной оптической оси z , формируемой постоянными внешними электрическим \mathbf{E}_0 и магнитным \mathbf{B}_0 полями. При этом векторы дипольных моментов несимметричных молекул выстраиваются вдоль \mathbf{E}_0 .

Квантовые уровни несимметричных молекул испытывают в наложенных внешних полях одновременно зеemanовское и штарковское расщепления. Первое снимает вырождение по магнитному квантовому числу, а второе — по его модулю.

Будем считать, что у несимметричных молекул взаимодействуют с полем подаваемого в среду импульса квантовые переходы, изображенные на

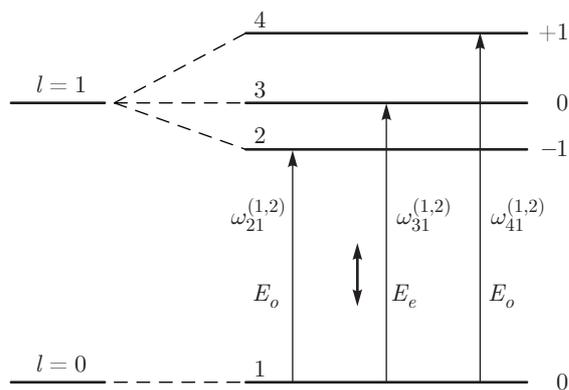


Рис. 1. Схема квантовых переходов в условиях зеемановско-штарковского расщепления, при распространении импульса перпендикулярно магнитному полю для несимметричных (верхний индекс «(1)») и симметричных (верхний индекс «(2)») молекул. Нумерация квантовых уровней ведется снизу вверх по энергетической шкале. Обыкновенная E_o компонента импульса возбуждает переходы $1 \leftrightarrow 2$ и $1 \leftrightarrow 4$, необыкновенная E_e — переход $1 \leftrightarrow 3$. Жирная двойная стрелка соответствует тому, что у несимметричных молекул необыкновенная компонента вызывает еще и динамический штарковский сдвиг квантовых уровней, изменяя частоты переходов

рис. 1. При этом частоты $\omega_{21}^{(1)}$, $\omega_{31}^{(1)}$ и $\omega_{41}^{(1)}$ являются величинами одного порядка с частотой $\omega_0^{(1)}$ нерасщепленного перехода и лежат в видимом диапазоне.

Пусть τ_p — характерный временной масштаб ПКИ. Примем, что $\tau_p \sim 10^{-14}$ с. Тогда с очевидностью справедливо неравенство, вводящее малый параметр $\varepsilon^{(1)}$:

$$\varepsilon^{(1)} \equiv (\omega_0^{(1)} \tau_p)^{-1} \ll 1. \tag{1}$$

Считаем, что вторую компоненту среды образуют частицы, не обладающие дипольными моментами (симметричные молекулы). Примем, что во взаимодействии с импульсом участвуют переходы, подобные изображенным на рис. 1 и отличающиеся от них масштабом собственных частот. Пусть при этом у нерасщепленного перехода характерная частота $\omega_0^{(2)} \sim 10^{13}$ с⁻¹. Тогда справедливо условие

$$\varepsilon^{(2)} \equiv \omega_0^{(2)} \tau_p \ll 1, \tag{2}$$

вводящее малый параметр $\varepsilon^{(2)}$.

Здесь и ниже величины, относящиеся к несимметричным и симметричным молекулам, снабжены верхними индексами в скобках: соответственно «(1)» и «(2)».

Отметим, что четырехуровневая модель, использованная здесь, является простейшей в том смысле,

что она соответствует триpletу Зеемана при наложении на среду внешнего магнитного поля.

В работе [33] также была рассмотрена двухкомпонентная модель среды, состоящей из квантовых переходов, представленных на рис. 1. Однако там условию (1) удовлетворяют переходы симметричных (не обладающих ПДМ) молекул, а условию (2) — переходы несимметричных (с отличными от нуля ПДМ) молекул. Здесь же ситуация в этом смысле прямо противоположна той, что рассмотрена в [33]. Заметим также, что в работе [34], где исследовался случай естественного двулучепреломления, ПДМ молекул не принимался во внимание.

Условия (1) и (2) было впервые предложено использовать для исключения материальных переменных в работах [35, 36]. Смысл условия (1) состоит в относительно слабом взаимодействии импульса с веществом, из-за чего его можно назвать условием оптической прозрачности [13]. Условие (2) означает в приложении к ПКИ то, что спектральная ширина импульса значительно превышает частоты задействованных квантовых переходов. Поэтому это условие можно назвать условием спектрального перекрытия [13].

В рассматриваемой геометрии обыкновенная компонента E_o электрического поля импульса параллельна оси x , а необыкновенная E_e — оси z . Тогда волновые уравнения примут вид

$$\frac{\partial^2 E_{o,e}}{\partial y^2} - \frac{n_m^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_{o,e}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{j=1}^2 P_{o,e}^{(j)}, \tag{3}$$

где c — скорость света в вакууме, $P_{o,e}^{(1)}$ и $P_{o,e}^{(2)}$ — вклады в поляризационные отклики соответственно несимметричных и симметричных молекул; нижние индексы указывают на обыкновенную и необыкновенную составляющие поляризационного отклика среды.

Перейдем к выводу материальных уравнений. Операторы Гамильтона несимметричных ($j = 1$) и симметричных ($j = 2$) молекул запишем в виде

$$\hat{H}^{(j)} = \hat{H}_0^{(j)} + \hat{V}^{(j)}, \tag{4}$$

где $\hat{H}_0^{(j)}$ — операторы энергии молекул в отсутствие ПКИ, $\hat{V}^{(j)}$ — операторы энергии взаимодействия молекул с ПКИ. В электро-дипольном приближении имеем

$$\hat{V}^{(j)} = -\hat{d}_x^{(j)} E_o - \hat{d}_z^{(j)} E_e, \tag{5}$$

где $\hat{d}_x^{(j)}$ и $\hat{d}_z^{(j)}$ ($j = 1, 2$) — декартовы проекции оператора дипольного момента молекул.

Собственные функции оператора энергии $\hat{H}_0^{(1)}$, учитывая аксиальную симметрию молекул с ПДМ относительно оси z , запишем в виде $\Phi_{l,m}^{(1)} = f_{l,m}(z, r) \exp(im\varphi)$. Здесь $f_{l,m}(z, r)$ — вещественные функции координат z и r цилиндрической системы, определяемые конкретной зависимостью $\hat{H}_0^{(1)}$ от этих координат, φ — азимутальный угол, l и m — соответственно орбитальное и магнитное квантовые числа. Поскольку $x = r \cos \varphi$, отличными от нуля в представлении собственных функций $\hat{H}_0^{(1)}$ являются следующие матричные элементы оператора дипольного момента несимметричных молекул:

$$\begin{aligned} d_{21}^{(1)} &= \left(\hat{d}_x^{(1)}\right)_{21} = -\pi e \int_0^\infty r^2 dr \int_{-\infty}^\infty f_{1,-1} f_{0,0} dz, \\ d_{31}^{(1)} &= \left(\hat{d}_z^{(1)}\right)_{31} = -2\pi e \int_0^\infty r dr \int_{-\infty}^\infty z f_{1,0} f_{0,0} dz, \\ d_{41}^{(1)} &= \left(\hat{d}_x^{(1)}\right)_{41} = -\pi e \int_0^\infty r^2 dr \int_{-\infty}^\infty f_{1,+1} f_{0,0} dz, \\ D_{11}^{(1)} &= \left(\hat{d}_z^{(1)}\right)_{11} = -2\pi e \int_0^\infty r dr \int_{-\infty}^\infty z f_{0,0}^2 dz, \\ D_{22}^{(1)} &= \left(\hat{d}_z^{(1)}\right)_{22} = -2\pi e \int_0^\infty r dr \int_{-\infty}^\infty z f_{1,-1}^2 dz, \\ D_{33}^{(1)} &= \left(\hat{d}_z^{(1)}\right)_{33} = -2\pi e \int_0^\infty r dr \int_{-\infty}^\infty z f_{1,0}^2 dz, \\ D_{44}^{(1)} &= \left(\hat{d}_z^{(1)}\right)_{44} = -2\pi e \int_0^\infty r dr \int_{-\infty}^\infty z f_{1,+1}^2 dz, \end{aligned}$$

где e — элементарный заряд, а нумерация квантовых уровней проводится снизу вверх по энергетической шкале (см. рис. 1). Диагональные элементы оператора дипольного момента обозначены заглавными буквами, чтобы отличить их от недиагональных элементов, ответственных за квантовые переходы между стационарными состояниями.

Собственные функции оператора энергии $\hat{H}_0^{(2)}$ обладают сферической симметрией. Поэтому отличными от нуля будут следующие матричные элементы оператора дипольного момента симметричных молекул:

$$\begin{aligned} d_{21}^{(2)} &= \left(\hat{d}_x^{(2)}\right)_{21}, \quad d_{31}^{(2)} = \left(\hat{d}_z^{(2)}\right)_{31}, \\ d_{41}^{(2)} &= \left(\hat{d}_x^{(2)}\right)_{41}. \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемой геометрии обыкновенная компонента поля вызывает сигма-переходы $1 \leftrightarrow 2$ и $1 \leftrightarrow 4$, для которых $\Delta m = \pm 1$, а необыкновенная компонента — пи-переход $1 \leftrightarrow 3$, для которого $\Delta m = 0$. Она же сдвигает за счет эффекта Штарка частоты этих переходов у несимметричных молекул.

Примем во внимание то, что в зеemanовском триплете интенсивность спектральной линии, соответствующей пи-переходу, в два раза превышает интенсивности линий обоих сигма-переходов [37]. Поэтому $d_{31}^{(j)} = d^{(j)}$, $d_{21}^{(j)} = d_{41}^{(j)} = d^{(j)}/\sqrt{2}$ ($j = 1, 2$).

С учетом сказанного выразим квантовые средние обыкновенных и необыкновенных компонент поляризованного отклика среды через плотности n_1 несимметричных и n_2 симметричных молекул, а также через матричные элементы $\rho_{\mu\nu}^{(j)}$ их операторов плотности $\hat{\rho}^{(j)}$:

$$\begin{aligned} P_o^{(j)} &= n_j \text{Sp}(\hat{\rho}^{(j)} \hat{d}_x^{(j)}) = \\ &= \frac{n_j d^{(j)}}{\sqrt{2}} \left(\rho_{21}^{(j)} + \rho_{21}^{(j)*} + \rho_{41}^{(j)} + \rho_{41}^{(j)*} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} P_e^{(j)} &= n_j \text{Sp}(\hat{\rho}^{(j)} \hat{d}_z^{(j)}) = \\ &= n_j \left[d^{(j)} \left(\rho_{31}^{(j)} + \rho_{31}^{(j)*} \right) + \sum_{\mu=1}^4 D_{\mu\mu}^{(j)} \rho_{\mu\mu}^{(j)} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

($j = 1, 2$). Здесь и далее полагаем

$$D_{\mu\mu}^{(2)} = 0$$

($\mu = 1, 2, 3, 4$).

Из уравнений (4), (5) и вида операторов дипольного момента следует, что гамильтонианы несимметричных и симметричных молекул можно представить как

$$\hat{H}^{(j)} = \hat{H}_1^{(j)} - \hbar \hat{\Omega}^{(j)}, \quad (8)$$

где \hbar — постоянная Планка,

$$\hat{H}_1^{(j)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_4^{(j)} - D_{44}^{(j)} E_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_3^{(j)} - D_{33}^{(j)} E_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2^{(j)} - D_{22}^{(j)} E_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1^{(j)} - D_{11}^{(j)} E_e \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\hat{\Omega}^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Omega_o^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_e^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_o^{(j)} \\ \Omega_o^{(j)} & \Omega_e^{(j)} & \Omega_o^{(j)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$\varepsilon_\mu^{(j)}$ — энергия μ -го стационарного состояния, $\Omega_o^{(j)} = d^{(j)} E_o / \sqrt{2} \hbar$, $\Omega_e^{(j)} = d^{(j)} E_e / \hbar$ ($j = 1, 2$).

Эволюция состояния несимметричных ($j = 1$) и симметричных ($j = 2$) молекул описывается квантовомеханическими уравнениями для операторов плотности. С учетом выражений (8) они примут вид

$$\frac{\partial \hat{\rho}^{(j)}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_1^{(j)}, \rho^{(j)}] + i [\hat{\Omega}^{(j)}, \rho^{(j)}]. \quad (11)$$

3. ИСКЛЮЧЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Из уравнений (9)–(11) следует система уравнений для элементов матрицы плотности $\rho^{(1)}$ несимметричных молекул:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{41}^{(1)}}{\partial t} = & -i \left(\omega_{41}^{(1)} - \frac{D_{41} E_e}{\hbar} \right) \rho_{41}^{(1)} + \\ & + i \Omega_o^{(1)} \left(\rho_{11}^{(1)} - \rho_{44}^{(1)} \right) - i \Omega_e^{(1)} \rho_{43}^{(1)} - i \Omega_o^{(1)} \rho_{42}^{(1)}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{31}^{(1)}}{\partial t} = & -i \left(\omega_{31}^{(1)} - \frac{D_{31} E_e}{\hbar} \right) \rho_{31}^{(1)} + \\ & + i \Omega_e^{(1)} \left(\rho_{11}^{(1)} - \rho_{33}^{(1)} \right) - i \Omega_o^{(1)} \rho_{43}^{(1)*} - i \Omega_o^{(1)} \rho_{32}^{(1)}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{21}^{(1)}}{\partial t} = & -i \left(\omega_{21}^{(1)} - \frac{D_{21} E_e}{\hbar} \right) \rho_{21}^{(1)} + \\ & + i \Omega_o^{(1)} \left(\rho_{11}^{(1)} - \rho_{22}^{(1)} \right) - i \Omega_o^{(1)} \rho_{42}^{(1)*} - i \Omega_e^{(1)} \rho_{32}^{(1)*}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{43}^{(1)}}{\partial t} = & -i \left(\omega_{43}^{(1)} - \frac{D_{43} E_e}{\hbar} \right) \rho_{43}^{(1)} - \\ & - i \Omega_e^{(1)} \rho_{41}^{(1)} + i \Omega_o^{(1)} \rho_{31}^{(1)*}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{42}^{(1)}}{\partial t} = & -i \left(\omega_{42}^{(1)} - \frac{D_{42} E_e}{\hbar} \right) \rho_{42}^{(1)} + \\ & + i \Omega_o^{(1)} \rho_{21}^{(1)*} - i \Omega_o^{(1)} \rho_{41}^{(1)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{32}^{(1)}}{\partial t} = & -i \left(\omega_{32}^{(1)} - \frac{D_{32} E_e}{\hbar} \right) \rho_{32}^{(1)} + \\ & + i \Omega_e^{(1)} \rho_{21}^{(1)*} - i \Omega_o^{(1)} \rho_{31}^{(1)}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{44}^{(1)}}{\partial t} = & i \Omega_o^{(1)} \left(\rho_{41}^{(1)*} - \rho_{41}^{(1)} \right), \\ \frac{\partial \rho_{33}^{(1)}}{\partial t} = & i \Omega_e^{(1)} \left(\rho_{31}^{(1)*} - \rho_{31}^{(1)} \right), \\ \frac{\partial \rho_{22}^{(1)}}{\partial t} = & i \Omega_o^{(1)} \left(\rho_{21}^{(1)*} - \rho_{21}^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где $D_{\mu\nu} = D_{\mu\mu}^{(1)} - D_{\nu\nu}^{(1)}$ — ПДМ перехода $\mu \leftrightarrow \nu$, а диагональные элементы матрицы плотности удовлетворяют условию нормировки $\sum_{\mu=1}^4 \rho_{\mu\mu}^{(1)} = 1$.

Частоты $\omega_{41}^{(1)}$, $\omega_{31}^{(1)}$ и $\omega_{21}^{(1)} \sim \omega_0^{(1)}$ разрешенных переходов удовлетворяют условию (1). Поэтому левые части уравнений (12)–(14) малы по сравнению с каждым слагаемым в их правых частях. Кроме того, $D_{\mu 1} E_e / \hbar \ll \omega_0^{(1)}$. Учитывая это неравенство, а также условие (1), перепишем уравнение (12) приближенно в виде

$$\begin{aligned} \rho_{41}^{(1)} = & \frac{\Omega_o^{(1)}}{\omega_{41}^{(1)}} \left(1 + \frac{D_{41} E_e}{\hbar \omega_{41}^{(1)}} + \frac{D_{41}^2 E_e^2}{\hbar^2 \omega_{41}^{(1)2}} \right) \left(\rho_{11}^{(1)} - \rho_{44}^{(1)} \right) - \\ & - \frac{\Omega_e^{(1)} \rho_{43}^{(1)} + \Omega_o^{(1)} \rho_{42}^{(1)}}{\omega_{41}^{(1)}} + \frac{i}{\omega_{41}^{(1)}} \frac{\partial \rho_{41}^{(1)}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь оставлены только те слагаемые, которые соответствуют нелинейности не выше третьего порядка по компонентам напряженности электрического поля импульса.

Будем решать уравнение (19) методом последовательных приближений. В нулевом порядке отбросим последнее слагаемое в правой части этого уравнения, учитывающее временную дисперсию рассматриваемого квантового перехода. Кроме того, нелинейные слагаемые при условии (1) в нулевом порядке также следует отбросить. Ниже примем, что в отсутствие импульса заселен только основной квантовый уровень: $\rho_{11}^{(1)} = 1$, а $\rho_{22}^{(1)} = \rho_{33}^{(1)} = \rho_{44}^{(1)} = 0$ при $E_o = E_e = 0$. Тогда в нулевом порядке по малому параметру $\varepsilon^{(1)}$ имеем $\rho_{41}^{(1)} = \Omega_o^{(1)} / \omega_{41}^{(1)}$. Последовательно подставив это выражение в последнее слагаемое в правой части уравнения (19), во втором порядке получим

$$\begin{aligned} \rho_{41}^{(1)} = & \frac{\Omega_o^{(1)}}{\omega_{41}^{(1)}} \left(1 + \frac{D_{41} E_e}{\hbar \omega_{41}^{(1)}} + \frac{D_{41}^2 E_e^2}{\hbar^2 \omega_{41}^{(1)2}} \right) (\rho_{11}^{(1)} - \rho_{44}^{(1)}) - \\ & - \frac{\Omega_e^{(1)} \rho_{43}^{(1)} + \Omega_o^{(1)} \rho_{42}^{(1)}}{\omega_{41}^{(1)}} + \frac{i}{\omega_{41}^{(1)2}} \frac{\partial \Omega_o^{(1)}}{\partial t} - \\ & - \frac{1}{\omega_{41}^{(1)3}} \frac{\partial^2 \Omega_o^{(1)}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Совершенно аналогично из уравнений (13) и (14) находим

$$\begin{aligned} \rho_{31}^{(1)} = & \frac{\Omega_e^{(1)}}{\omega_{31}^{(1)}} \left(1 + \frac{D_{31} E_e}{\hbar \omega_{31}^{(1)}} + \frac{D_{31}^2 E_e^2}{\hbar^2 \omega_{31}^{(1)2}} \right) (\rho_{11}^{(1)} - \rho_{33}^{(1)}) - \\ & - \frac{\Omega_o^{(1)} \rho_{43}^{(1)*} + \Omega_o^{(1)} \rho_{32}^{(1)}}{\omega_{31}^{(1)}} + \frac{i}{\omega_{31}^{(1)2}} \frac{\partial \Omega_e^{(1)}}{\partial t} - \\ & - \frac{1}{\omega_{31}^{(1)3}} \frac{\partial^2 \Omega_e^{(1)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \rho_{21}^{(1)} = & \frac{\Omega_o^{(1)}}{\omega_{21}^{(1)}} \left(1 + \frac{D_{21} E_e}{\hbar \omega_{21}^{(1)}} + \frac{D_{21}^2 E_e^2}{\hbar^2 \omega_{21}^{(1)2}} \right) (\rho_{11}^{(1)} - \rho_{22}^{(1)}) - \\ & - \frac{\Omega_o^{(1)} \rho_{42}^{(1)*} + \Omega_e^{(1)} \rho_{32}^{(1)*}}{\omega_{21}^{(1)}} + \frac{i}{\omega_{21}^{(1)2}} \frac{\partial \Omega_o^{(1)}}{\partial t} - \\ & - \frac{1}{\omega_{21}^{(1)3}} \frac{\partial^2 \Omega_o^{(1)}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

В правых частях равенств (20)–(22), помимо прочего, содержатся элементы матрицы плотности $\rho_{43}^{(1)}$, $\rho_{42}^{(1)}$ и $\rho_{32}^{(1)}$, соответствующие запрещенным переходам. Легко видеть, что эти элементы квадратичны по напряженности поля импульса. Поэтому при подстановке выражений (20)–(22) в уравнения (15)–(17) ограничимся линейными слагаемыми при учете производных по времени от поля лишь первого порядка:

$$\begin{aligned} \rho_{41}^{(1)} & \approx \frac{\Omega_o^{(1)}}{\omega_{41}^{(1)}} + \frac{i}{\omega_{41}^{(1)2}} \frac{\partial \Omega_o^{(1)}}{\partial t}, \\ \rho_{31}^{(1)} & \approx \frac{\Omega_e^{(1)}}{\omega_{31}^{(1)}} + \frac{i}{\omega_{31}^{(1)2}} \frac{\partial \Omega_e^{(1)}}{\partial t}, \\ \rho_{21}^{(1)} & \approx \frac{\Omega_o^{(1)}}{\omega_{21}^{(1)}} + \frac{i}{\omega_{21}^{(1)2}} \frac{\partial \Omega_o^{(1)}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда, например, уравнение (15) запишется как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{43}^{(1)}}{\partial t} = & -i \left(\omega_{43}^{(1)} - \frac{D_{43} E_e}{\hbar} \right) \rho_{43}^{(1)} + \\ & + i \frac{\omega_{43}^{(1)}}{\omega_{31}^{(1)} \omega_{41}^{(1)}} \Omega_e^{(1)} \Omega_o^{(1)} + \frac{\Omega_e^{(1)}}{\omega_{41}^{(1)2}} \frac{\partial \Omega_o^{(1)}}{\partial t} + \\ & + \frac{\Omega_o^{(1)}}{\omega_{31}^{(1)2}} \frac{\partial \Omega_e^{(1)}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь учтено, что $\omega_{41}^{(1)} - \omega_{31}^{(1)} = \omega_{43}^{(1)}$. Имея в виду также, что $\omega_{43}^{(1)} \ll \omega_{41}^{(1)}, \omega_{31}^{(1)}$, пренебрежем в двух последних малых слагаемых правой части уравнения (24) различием между $\omega_{41}^{(1)}$ и $\omega_{31}^{(1)}$, положив $\omega_{41}^{(1)2} \approx \omega_{31}^{(1)2} \approx \omega_{41}^{(1)} \omega_{31}^{(1)}$. В этих условиях уравнение (24) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_{43}^{(1)} - \frac{\Omega_e^{(1)} \Omega_o^{(1)}}{\omega_{31}^{(1)} \omega_{41}^{(1)}} \right) = & -i \left[\left(\omega_{43}^{(1)} - \frac{D_{43} E_e}{\hbar} \right) \rho_{43}^{(1)} - \right. \\ & \left. - \frac{\omega_{43}^{(1)}}{\omega_{31}^{(1)} \omega_{41}^{(1)}} \Omega_e^{(1)} \Omega_o^{(1)} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Пусть $\omega_{43}^{(1)} \sim D_{43} E_e / \hbar \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$. Тогда при приведенных выше оценках для длительности импульса приходим к условию $\omega_{43}^{(1)} \tau_p \ll 1$, справедливом, очевидно, и для двух других запрещенных переходов. Пренебрегая в такой ситуации правой частью уравнения (25), имеем

$$\rho_{43}^{(1)} = \frac{\Omega_e^{(1)} \Omega_o^{(1)}}{\omega_{41}^{(1)} \omega_{31}^{(1)}}.$$

Совершенно аналогично из уравнений (16) и (17) найдем

$$\rho_{42}^{(1)} = \frac{\Omega_o^{(1)2}}{\omega_{41}^{(1)} \omega_{21}^{(1)}}, \quad \rho_{32}^{(1)} = \frac{\Omega_e^{(1)} \Omega_o^{(1)}}{\omega_{31}^{(1)} \omega_{21}^{(1)}}.$$

Подставив теперь выражения (23) в уравнения (18), после интегрирования получим

$$\rho_{44}^{(1)} = \frac{\Omega_o^{(1)2}}{\omega_{41}^{(1)2}}, \quad \rho_{33}^{(1)} = \frac{\Omega_e^{(1)2}}{\omega_{31}^{(1)2}}, \quad \rho_{22}^{(1)} = \frac{\Omega_o^{(1)2}}{\omega_{21}^{(1)2}}. \quad (26)$$

При этом соотношения (20)–(22) в случае пренебрежения нелинейностью выше третьей степени переписутся в виде

$$\begin{aligned} \rho_{41}^{(1)} = & \frac{\Omega_o^{(1)}}{\omega_{41}^{(1)}} + \frac{D_{41}}{\hbar\omega_0^{(1)2}} E_e \Omega_o^{(1)} + \frac{D_{41}^2}{\hbar^2\omega_0^{(1)3}} E_e^2 \Omega_o^{(1)} - \\ & - 2 \frac{\Omega_e^{(1)2} + 2\Omega_o^{(1)2}}{\omega_0^{(1)3}} \Omega_o^{(1)} + \frac{i}{\omega_0^{(1)2}} \frac{\partial \Omega_o^{(1)}}{\partial t} - \\ & - \frac{1}{\omega_0^{(1)3}} \frac{\partial^2 \Omega_o^{(1)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \rho_{31}^{(1)} = & \frac{\Omega_e^{(1)}}{\omega_{31}^{(1)}} + \frac{D_{31}}{\hbar\omega_0^{(1)2}} E_e \Omega_e^{(1)} + \frac{D_{31}^2}{\hbar^2\omega_0^{(1)3}} E_e^2 \Omega_e^{(1)} - \\ & - 2 \frac{\Omega_e^{(1)2} + 2\Omega_o^{(1)2}}{\omega_0^{(1)3}} \Omega_e^{(1)} + \frac{i}{\omega_0^{(1)2}} \frac{\partial \Omega_e^{(1)}}{\partial t} - \\ & - \frac{1}{\omega_0^{(1)3}} \frac{\partial^2 \Omega_e^{(1)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \rho_{21}^{(1)} = & \frac{\Omega_o^{(1)}}{\omega_{21}^{(1)}} + \frac{D_{21}}{\hbar\omega_0^{(1)2}} E_e \Omega_o^{(1)} + \frac{D_{21}^2}{\hbar^2\omega_0^{(1)3}} E_e^2 \Omega_o^{(1)} - \\ & - 2 \frac{\Omega_e^{(1)2} + 2\Omega_o^{(1)2}}{\omega_0^{(1)3}} \Omega_o^{(1)} + \frac{i}{\omega_0^{(1)2}} \frac{\partial \Omega_o^{(1)}}{\partial t} - \\ & - \frac{1}{\omega_0^{(1)3}} \frac{\partial^2 \Omega_o^{(1)}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь в нелинейных и дисперсионных слагаемых мы пренебрегли различиями частот разрешенных переходов, положив в них $\omega_{41}^{(1)} \approx \omega_{21}^{(1)} \approx \omega_{31}^{(1)} \equiv \omega_0^{(1)}$. Поступая ниже так же и используя явный вид $\Omega_o^{(1)}$ и $\Omega_e^{(1)}$, из уравнений (6), (7), (26)–(29) получим следующие выражения для компонент поляризации несимметричных молекул:

$$\begin{aligned} P_o^{(1)} = & \frac{d^{(1)2} n^{(1)}}{\hbar} \left[\left(\frac{1}{\omega_{21}^{(1)}} + \frac{1}{\omega_{41}^{(1)}} \right) E_o + \right. \\ & + \frac{D_{21} + D_{41}}{\hbar\omega_0^{(1)2}} E_e E_o - \frac{4d^{(1)2}}{\hbar^2\omega_0^{(1)3}} (E_o^2 + E_e^2) E_o + \\ & \left. + \frac{D_{21}^2 + D_{41}^2}{\hbar^2\omega_0^{(1)3}} E_e^2 E_o - \frac{2}{\omega_0^{(1)3}} \frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2} \right], \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} P_e^{(1)} = & D_{11}^{(1)} n^{(1)} + \frac{d^{(1)2} n^{(1)}}{\hbar} \left[\frac{2E_e}{\omega_{31}^{(1)}} + \frac{3D_{31}E_e^2}{\hbar\omega_0^{(1)2}} + \right. \\ & + \frac{D_{21} + D_{41}}{\hbar\omega_0^{(1)2}} E_o^2 - \frac{4d^{(1)2}}{\hbar^2\omega_0^{(1)3}} (E_o^2 + E_e^2) E_e + \\ & \left. + \frac{2D_{31}^2}{\hbar^2\omega_0^{(1)3}} E_e^3 - \frac{2}{\omega_0^{(1)3}} \frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (31) есть статическая поляризация, обусловленная ненулевыми дипольными моментами молекул в основном состоянии. Понятно, что оно не даст вклада при подстановке в уравнения (3) и поэтому не представляет интереса.

Теперь займемся исключением материальных переменных, соответствующих симметричным молекулам. Учитывая, что здесь выполняется условие (2), и что все диагональные элементы оператора дипольного момента равны нулю, пренебрежем в нулевом приближении первым слагаемым в правой части уравнения (11). Тогда решение этого уравнения представимо в виде

$$\hat{\rho}^{(2)} = \hat{U} \hat{\rho}_\infty^{(2)} \hat{U}^+, \quad (32)$$

где $\hat{\rho}_\infty^{(2)}$ — оператор плотности симметричных молекул до импульсного воздействия (при $t \rightarrow -\infty$), а оператор эволюции \hat{U} в общем случае имеет вид хронологической экспоненты от $i \int_{-\infty}^t \hat{\Omega}^{(2)} dt'$ [38].

Будем считать в дальнейшем, что взаимодействие симметричных молекул с импульсом происходит в линейном режиме. Это предположение справедливо, если имеет место неравенство $(\Omega_{o,e}^{(2)} \tau_p)^2 \ll 1$. Очевидно, что оно выполняется при $\tau_p \sim 10^{-14}$ с и $\Omega_{o,e}^{(2)} \sim 10^{12}$ с⁻¹. Тогда оператор эволюции примет приближенный вид

$$\hat{U} = \hat{I} + i \int_{-\infty}^t \hat{\Omega}^{(2)} dt', \quad (33)$$

где \hat{I} — единичный оператор.

При $\omega_0^{(2)} \sim 10^{13}$ с⁻¹ (см. разд. 1) и комнатных температурах T имеем $\hbar\omega_0^{(2)}/k_B T \sim 1$, где k_B — постоянная Больцмана. Поэтому согласно статистике Больцмана следует учесть, что до импульсного воздействия заселены все четыре квантовых уровня симметричных молекул. В то же время очевидно, что $\hbar\omega_{E,B}^{(2)}/k_B T \ll 1$. Поэтому пренебрежем разностями населенностей штарковско-зеemanовских подуровней, считая, что $\rho_{11}^{(2)}(t = -\infty) = w_1$ и $\rho_{\mu\mu}^{(2)}(t = -\infty) = w_2$; $\mu = 2, 3, 4$. Тогда, используя соотношения (10), (32) и (33) и отбрасывая вторые степени электрического поля импульса, получим

$$\begin{aligned} \rho_{41}^{(2)} &= i(w_1 - w_2) \int_{-\infty}^t \Omega_o^{(2)} dt', \\ \rho_{31}^{(2)} &= i(w_1 - w_2) \int_{-\infty}^t \Omega_e^{(2)} dt', \\ \rho_{21}^{(2)} &= i(w_1 - w_2) \int_{-\infty}^t \Omega_o^{(2)} dt'. \end{aligned} \quad (34)$$

Из равенств (6), (7) и (34) следует, что обе компоненты поляризации $P_{o,e}^{(2)}$ обращаются в нуль. Поэтому необходимо перейти от нулевого к первому порядку по параметру $\varepsilon^{(2)}$. При этом, подставив выражения (34) в уравнение (11), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{41}^{(2)}}{\partial t} &= \frac{\partial \rho_{41}^{(2)*}}{\partial t} = \omega_{41}^{(2)}(w_1 - w_2) \int_{-\infty}^t \Omega_o^{(2)} dt', \\ \frac{\partial \rho_{31}^{(2)}}{\partial t} &= \frac{\partial \rho_{31}^{(2)*}}{\partial t} = \omega_{31}^{(2)}(w_1 - w_2) \int_{-\infty}^t \Omega_e^{(2)} dt', \\ \frac{\partial \rho_{21}^{(2)}}{\partial t} &= \frac{\partial \rho_{21}^{(2)*}}{\partial t} = \omega_{21}^{(2)}(w_1 - w_2) \int_{-\infty}^t \Omega_o^{(2)} dt'. \end{aligned}$$

Отсюда и из уравнений (6) и (7) получим, учитывая определения для $\Omega_{o,e}^{(2)}$, следующие выражения для производных компонент поляризационного отклика симметричных молекул:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_o^{(2)}}{\partial t} &= \frac{d^{(2)2} n_2}{\hbar} (\omega_{41}^{(2)} + \omega_{21}^{(2)}) (w_1 - w_2) \int_{-\infty}^t E_o dt', \quad (35) \\ \frac{\partial P_e^{(2)}}{\partial t} &= 2 \frac{d^{(2)2} n_2}{\hbar} \omega_{31}^{(2)} (w_1 - w_2) \int_{-\infty}^t E_e dt'. \quad (36) \end{aligned}$$

Теперь, подставив соотношения (30), (31), (35) и (36) в уравнения (3), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_o}{\partial y^2} - \frac{n_o^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2} &= \frac{4\pi d^{(1)2} n^{(1)}}{\hbar c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \times \\ &\times \left[\frac{D_{21} + D_{41}}{\hbar \omega_0^{(1)2}} E_e E_o - \frac{4d^{(1)2}}{\hbar^2 \omega_0^{(1)3}} (E_o^2 + E_e^2) E_o + \right. \\ &+ \left. \frac{D_{21}^2 + D_{41}^2}{\hbar^2 \omega_0^{(1)3}} E_e^2 E_o - \frac{2}{\omega_0^{(1)3}} \frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2} \right] + \\ &+ \frac{8\pi d^{(2)2} n^{(2)} \omega_0^{(2)}}{\hbar c^2} (w_1 - w_2) E_o, \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_e}{\partial y^2} - \frac{n_e^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2} &= \frac{4\pi d^{(1)2} n^{(1)}}{\hbar c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \times \\ &\times \left[\frac{3D_{31} E_e^2}{\hbar \omega_0^{(1)2}} + \frac{D_{21} + D_{41}}{\hbar \omega_0^{(1)2}} E_o^2 - \frac{4d^{(1)2}}{\hbar^2 \omega_0^{(1)3}} (E_o^2 + E_e^2) E_e + \right. \\ &+ \left. \frac{2D_{31}^2}{\hbar^2 \omega_0^{(1)3}} E_e^3 - \frac{2}{\omega_0^{(1)3}} \frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2} \right] + \\ &+ \frac{8\pi d^{(2)2} n^{(2)} \omega_0^{(2)}}{\hbar c^2} (w_1 - w_2) E_e, \quad (38) \end{aligned}$$

где обыкновенный и необыкновенный показатели преломления определены соответственно выражениями

$$\begin{aligned} n_o &= \sqrt{n_m^2 + \frac{4\pi d^{(1)2} n^{(1)}}{\hbar} \left(\frac{1}{\omega_{21}^{(1)}} + \frac{1}{\omega_{41}^{(1)}} \right)}, \\ n_e &= \sqrt{n_m^2 + \frac{4\pi d^{(1)2} n^{(1)}}{\hbar \omega_{31}^{(1)}}}. \end{aligned}$$

Понятно, что взаимодействие между обеими компонентами поля импульса будет наиболее сильным при $n_o = n_e$. Это соотношение равносильно, очевидно, условию

$$\frac{1}{\omega_{21}^{(1)}} + \frac{1}{\omega_{41}^{(1)}} = \frac{2}{\omega_{31}^{(1)}}.$$

Полагая здесь $\omega_{41}^{(1)} = \omega_0^{(1)} + \omega_E^{(1)} + \omega_B^{(1)}$, $\omega_{21}^{(1)} = \omega_0^{(1)} + \omega_E^{(1)} - \omega_B^{(1)}$ и $\omega_{31}^{(1)} = \omega_0^{(1)}$, придем к равенству $\omega_B^{(1)2} = \omega_0^{(1)} \omega_E^{(1)} + \omega_E^{(1)2}$. Учитывая, что $\omega_E^{(1)} \ll \omega_0^{(1)}$, получим

$$\omega_B^{(1)} = \sqrt{\omega_0^{(1)} \omega_E^{(1)}}. \quad (39)$$

Таким образом, зеемановское расщепление должно быть значительно сильнее штарковского. Взяв, например, $\omega_0^{(1)} \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$, $\omega_E^{(1)} \sim 10^9 \text{ с}^{-1}$, имеем $\omega_B^{(1)} \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$.

Пусть условие (39) выполнено и $n_o = n_e = n$. Заметим далее, что правые части уравнений (37) и (38) содержат только малые (в смысле малости $\varepsilon^{(1)}$ и $\varepsilon^{(2)}$) нелинейные и дисперсионные слагаемые. Тогда, введя «локальное время» $\tau = t - ny/c$, применим к этим уравнениям приближение однонаправленного распространения [39, 40]. В результате из уравнений (37) и (38) получим следующую систему:

$$\frac{\partial^2 E_o}{\partial y \partial \tau} = -2\alpha \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (E_e E_o) + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [(aE_o^2 + bE_e^2) E_o] + g \frac{\partial^4 E_o}{\partial \tau^4} - \sigma E_o, \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 E_e}{\partial y \partial \tau} = -\alpha \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} E_o^2 - \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} E_e^2 + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [(aE_o^2 + qE_e^2) E_e] + g \frac{\partial^4 E_e}{\partial \tau^4} - \sigma E_e, \quad (41)$$

где использованы обозначения

$$\alpha = \frac{\pi d^{(1)2} n^{(1)}}{\hbar^2 c n} \frac{D_{21} + D_{41}}{\omega_0^{(1)2}}, \quad \beta = \frac{6\pi d^{(1)2} n^{(1)} D_{31}}{\hbar^2 c n \omega_0^{(1)2}},$$

$$a = \frac{8\pi d^{(1)4} n^{(1)}}{\hbar^3 c n \omega_0^{(1)3}}, \quad b = a - \frac{2\pi d^{(1)2} n^{(1)} (D_{21}^2 + D_{41}^2)}{\hbar^3 c n \omega_0^{(1)3}},$$

$$q = a - \frac{4\pi d^{(1)2} n^{(1)} D_{31}^2}{\hbar^3 c n \omega_0^{(1)3}}, \quad g = \frac{4\pi d^{(1)2} n^{(1)}}{\hbar c n \omega_0^{(1)3}},$$

$$\sigma = \frac{4\pi d^{(2)2} n^{(2)} \omega_0^{(2)}}{\hbar c n} (w_1 - w_2).$$

Линеаризация системы (40), (41) приводит к дисперсионному уравнению

$$k = \frac{\omega}{c} + g \left(\omega^3 - 3 \frac{\omega_c^4}{\omega} \right), \quad (42)$$

где ω — несущая частота импульса, k — его волновое число, $\omega_c = (\sigma/3g)^{1/4}$ — критическая частота, введенная в [12] и отделяющая спектральные области нормальной ($\partial^2 k / \partial \omega^2 > 0$, $\omega > \omega_c$) и аномальной ($\partial^2 k / \partial \omega^2 < 0$, $\omega < \omega_c$) дисперсий групповой скорости.

Из системы (40), (41) следует, что если на входе в рассматриваемую среду отсутствует обыкновенная компонента импульса ($E_o = 0$), то она будет отсутствовать и в самой среде. В то же время подача на среду импульса, поляризованного в плоскости обыкновенной волны, способна породить в среде необыкновенную компоненту (см. первое слагаемое в правой части уравнения (41)). Это обстоятельство является следствием симметрии рассматриваемой одноосной среды по отношению к отражению в плоскостях, параллельных оптической оси, и отсутствию таковой симметрии при отражении в перпендикулярных плоскостях. В частности, налицо инвариантность при инверсии $E_o \rightarrow -E_o$ и отсутствие таковой при $E_e \rightarrow -E_e$.

В отношении ПКИ неприменимо понятие несущей частоты. Поэтому для них следует использовать понятие не частоты, а всего спектра импульса.

В дальнейшем будем считать, что в качестве характерной частоты ω у ПКИ выступает обратная величина введенного выше их временного масштаба τ_p , т. е. $\omega \sim 1/\tau_p$.

Рассмотрим некоторые частные случаи выведенной системы уравнений. Пусть все молекулы симметричны и, следовательно, все ПДМ равны нулю. Тогда $\alpha = \beta = 0$, $b = q = a$, а система (40), (41) примет вид

$$\frac{\partial^2 E_o}{\partial y \partial \tau} = a \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [(E_o^2 + E_e^2) E_o] + g \frac{\partial^4 E_o}{\partial \tau^4} - \sigma E_o, \quad (43)$$

$$\frac{\partial^2 E_e}{\partial y \partial \tau} = a \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [(E_o^2 + E_e^2) E_e] + g \frac{\partial^4 E_e}{\partial \tau^4} - \sigma E_e. \quad (44)$$

Введем комплексную напряженность $E = E_e + iE_o$ и запишем систему (43), (44) как одно уравнение:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial \tau} = a \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (|E|^2 E) + g \frac{\partial^4 E}{\partial \tau^4} - \sigma E. \quad (45)$$

Если фаза поля E в этом уравнении постоянна, что соответствует фиксированной плоскости поляризации импульса, то поле можно считать без потери общности вещественным. В этом случае, проинтегрировав уравнение (45) по τ , придем к уравнению, полученному в работе [12].

Пусть основная часть спектра ПКИ лежит значительно выше ω_c , так что

$$(\omega_c \tau_p)^4 \ll 1. \quad (46)$$

Это позволяет пренебречь последним слагаемым в правой части уравнения (45). Последующее интегрирование по τ дает комплексное модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза (КДВ):

$$\frac{\partial E}{\partial y} = a \frac{\partial}{\partial \tau} (|E|^2 E) + g \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3}. \quad (47)$$

В противоположном случае имеем

$$(\omega_c \tau_p)^4 \gg 1. \quad (48)$$

При этом спектр импульса лежит в области аномальной дисперсии групповой скорости, и в правой части уравнения (45) следует отбросить предпоследнее слагаемое. В результате приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial \tau} = a \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (|E|^2 E) - \sigma E. \quad (49)$$

Вещественный вариант уравнения (49) был выведен в работах [41, 42] при исследовании распространения скалярных электромагнитных ПКИ в нелинейной изотропной среде. В дальнейшем на него

будем ссылаться как на уравнение Шэфера–Вейна (ШВ). Как и комплексное модифицированное уравнение КдВ, уравнение ШВ интегрируемо в рамках МОЗР [43–45]. В работе [46] к многокомпонентному обобщению уравнения ШВ был применен метод Хироты, что определенно указывает на интегрируемость МОЗР этого обобщения. Заметим, что уравнение (49) представляет собой двухкомпонентное (комплекснозначное) обобщение уравнения ШВ.

Важно, чтобы условия (46) и (48) согласовывались с неравенствами (1) и (2). В каждом случае соответствующий анализ следует проводить отдельно, выписав выражение для ω_c^4 в явном виде через частоты $\omega_0^{(1,2)}$:

$$\omega_c^4 = \frac{d^{(2)2} n^{(2)} (w_1 - w_2)}{3d^{(1)2} n^{(1)}} \omega_0^{(1)3} \omega_0^{(2)}. \quad (50)$$

Пусть, например, $d^{(2)} \sim d^{(1)}$, $n^{(2)} \sim n^{(1)}$, $(w_1 - w_2)/3 \sim 0.1$. Тогда при приведенных выше оценках собственных частот переходов можно заключить, что условие (46) будет выполнено, если спектр ПКИ лежит на границе видимого и ближнего инфракрасного диапазонов. Неравенство же (48) соответствует переходной области между дальним инфракрасным и терагерцевым диапазонами.

Пусть теперь ПДМ отличны от нуля. Тогда при $D_{\mu 1} \sim d_{\mu 1}^{(1)}$ и $d_{\mu 1}^{(1)} |E| / \hbar \omega_0^{(1)} \ll 1$ в уравнениях (40), (41) можно пренебречь кубической нелинейностью. В результате приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial^2 E_o}{\partial y \partial \tau} = -2\alpha \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (E_e E_o) + g \frac{\partial^4 E_o}{\partial \tau^4} - \sigma E_o, \quad (51)$$

$$\frac{\partial^2 E_e}{\partial y \partial \tau} = -\alpha \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} E_o^2 - \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} E_e^2 + g \frac{\partial^4 E_e}{\partial \tau^4} - \sigma E_e. \quad (52)$$

Пусть на входе в среду $E_o = 0$. Тогда система (51), (52) сводится к одному уравнению для необыкновенной составляющей:

$$\frac{\partial^2 E_e}{\partial y \partial \tau} = -\beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} E_e^2 + g \frac{\partial^4 E_e}{\partial \tau^4} - \sigma E_e. \quad (53)$$

Уравнение (53) известно как уравнение Островского и впервые было получено для длинных волн малой амплитуды во вращающейся жидкости конечной глубины [47]. Позднее оно было выведено в работе [34] для распространения ПКИ в одноосном кристалле с естественным двулучепреломлением.

Заметим, что система (51), (52) допускает ПКИ с линейной поляризацией, у которых

$$E_o = \pm \sqrt{2 - \frac{\beta}{\alpha}} E_e. \quad (54)$$

Их динамика тоже описывается уравнением Островского. Таким образом, система (51), (52) является двухкомпонентным обобщением уравнения Островского.

Пусть выполнено условие (46). Тогда, пренебрегая последним слагаемым в правой части (53), после интегрирования по τ приходим к уравнению КдВ для необыкновенной компоненты импульса. При условии же (48) имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 E_e}{\partial y \partial \tau} = -\beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} E_e^2 - \sigma E_e. \quad (55)$$

Уравнение (55) имеет в литературе множество названий. Оно известно как редуцированное уравнение Островского, уравнение Островского–Хантера, уравнение короткой волны, уравнение Вахненко, уравнение Островского–Вахненко (ОВ) (см. обсуждение названий и соответствующие ссылки в работе [48]). Ниже будем ссылаться на уравнение (55) как на уравнение ОВ.

Ряд физических задач, не имеющих прямого отношения к нелинейной оптике, приводил к уравнению ОВ [49–51]. Что касается нелинейной оптики, то это уравнение было получено в работе [52] при исследовании динамики ПКИ в двуосном кристалле в условиях конической рефракции, когда не имеют смысла понятия обыкновенной и необыкновенной волн. Подчеркнем, что здесь уравнение ОВ получено при исследовании распространения ПКИ в условиях двулучепреломления, наведенного параллельными электрическим и магнитным полями (см. условие (39)).

Возвращаясь к системе (51), (52), заметим, что при выполнении условия (46) она переходит в систему типа связанных уравнений КдВ:

$$\frac{\partial E_o}{\partial y} - g \frac{\partial^3 E_o}{\partial \tau^3} = -2\alpha \frac{\partial}{\partial \tau} (E_e E_o), \quad (56)$$

$$\frac{\partial E_e}{\partial y} + 2\beta E_e \frac{\partial E_e}{\partial \tau} - g \frac{\partial^3 E_e}{\partial \tau^3} = -\alpha \frac{\partial}{\partial \tau} E_o^2. \quad (57)$$

Если же выполняется условие (48), то, отбрасывая предпоследние слагаемые в правых частях уравнений (51) и (52), приходим к системе типа связанных уравнений ОВ:

$$\frac{\partial^2 E_o}{\partial y \partial \tau} = -2\alpha \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (E_e E_o) - \sigma E_o, \quad (58)$$

$$\frac{\partial^2 E_e}{\partial y \partial \tau} = -\alpha \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} E_o^2 - \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} E_e^2 - \sigma E_e. \quad (59)$$

Естественно, что функции, выполняемые необыкновенной и обыкновенной составляющими ПКИ в этих

системах, в точности такие же, как в исходной системе уравнений (51), (52).

При $\beta = \alpha$ система (51), (52) может быть представлена в виде двух независимых уравнений Островского:

$$\frac{\partial^2 E_{\pm}}{\partial y \partial \tau} = -\alpha \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (E_{\pm}^2) + g \frac{\partial^4 E_{\pm}}{\partial \tau^4} - \sigma E_{\pm}, \quad (60)$$

где введены обозначения $E_{\pm} = E_e \pm E_o$. Эти уравнения переходят в двух предельных случаях (46) и (48) в уравнения КдВ и ОВ соответственно:

$$\frac{\partial E_{\pm}}{\partial y} = -2\alpha E_{\pm} \frac{\partial E_{\pm}}{\partial \tau} + g \frac{\partial^3 E_{\pm}}{\partial \tau^3}, \quad (61)$$

$$\frac{\partial^2 E_{\pm}}{\partial y \partial \tau} = -\alpha \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (E_{\pm}^2) - \sigma E_{\pm}. \quad (62)$$

Очевидно, что обыкновенная и необыкновенная полевые компоненты выражаются через решения уравнений (60), (61) и (62) с помощью соотношений

$$E_o = \frac{E_+ - E_-}{2}, \quad E_e = \frac{E_+ + E_-}{2}. \quad (63)$$

Равенство $\beta = \alpha$ равносильно следующему условию для ПДМ квантовых переходов несимметричных молекул:

$$D_{21} + D_{41} = 6D_{31}. \quad (64)$$

Как и двухкомпонентное обобщение (51), (52) уравнения Островского, система (58), (59) допускает ПКК с линейной поляризацией, если выполняется условие (54). При этом она сводится к уравнению ОВ вида (62).

4. НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ РЕШЕНИЙ ВЕКТОРНОЙ СИСТЕМЫ ОСТРОВСКОГО – ВАХНЕНКО И ИХ ФИЗИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В предыдущем разделе было показано, что разные предельные случаи системы (40), (41) дают уравнения, интегрируемые в рамках МОЗР. Солитонные решения большинства из этих уравнений хорошо изучены. Однако это не в полной мере относится к уравнению ОВ, которое (см. ниже) тоже интегрируемо МОЗР. Поэтому основное внимание в этом разделе будет обращено на уравнение ОВ. Начнем с обзора полученных для него результатов.

Стационарные решения уравнения ОВ, включая периодические и так называемые однопетлевые решения, были построены в работе [50]. Также в ней

были найдены двухпетлевые решения. Их важной особенностью явилось то, что они обладают свойством структурной устойчивости, как и солитонные решения нелинейных уравнений, интегрируемых МОЗР. Как известно, ключевое свойство таких нелинейных уравнений заключается в возможности их представления в виде условия совместности перепределенной системы линейных уравнений (пары Лакса).

С помощью метода Хироты, тесно связанного с МОЗР, и замены переменных в [53, 54] удалось построить двухпетлевые и многопетлевые решения уравнения ОВ, которые тоже обладали свойствами солитонов. Это обстоятельство определенно указывало на интегрируемость уравнения ОВ в рамках МОЗР. Наконец, интегрируемость уравнения ОВ была установлена в работе [55], где было показано, что оно связано с одним из нелинейных уравнений, интегрируемых МОЗР, посредством замены переменных. Таким уравнением оказалось уравнение Цицейки [56–59], иногда называемое уравнением Додда – Буллофа (см., например, [32]). Преобразование Бэклунда и скалярная пара Лакса для так называемого уравнения Вахненко – Паркеса (ВП), связанного обратимой заменой переменных с уравнением ОВ, были найдены в работе [60]. Матричная и скалярная пары Лакса в терминах исходных переменных продифференцированного уравнения ОВ были получены в [61]. Матричная пара Лакса для продифференцированного уравнения ОВ, которая связана посредством замены переменных с парой Лакса уравнения Цицейки, приведена в работе [52].

Оказалось [61], что уравнение ОВ связано с еще одним нелинейным уравнением, интегрируемым МОЗР, а именно, является коротковолновым пределом уравнения Дегаспериса – Прочези [62, 63]. Это обстоятельство было использовано в работе [64] для построения многопетлевых решений уравнения ОВ. Вопросам корректной разрешимости задачи Коши уравнения ОВ, глобального и локального существования решений, условий для начальных данных, достаточных для разрушения решений за конечное время, посвящены работы [49, 65–69] (см. также ссылки в [69]).

Разные типы решений уравнений ОВ и ВП также обсуждались в работах [70–75]. Так, решения уравнения ВП, рассмотренные в [74], содержат произвольные функции. Дело в том, что это уравнение связано преобразованием Миуры не только с уравнением Цицейки, но также с уравнением Лиувилля. Однако с помощью этих решений не удастся построить решения уравнения ОВ, определенные при

любом τ . Отметим, что при этом так называемые бризерные решения уравнения ОВ остались не исследованными. Ниже мы восполним этот пробел.

Как было отмечено в начале этого раздела, уравнение ОВ связано заменой переменных с уравнением Цицейки

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X \partial T} + \exp(-\theta) - \exp(2\theta) = 0. \quad (65)$$

Это уравнение является условием совместности пары Лакса [59]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial X} &= \hat{L}(\lambda)\psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial T} &= \hat{A}(\lambda)\psi, \end{aligned} \quad (66)$$

где λ — спектральный параметр, $\psi = \psi(X, T, \lambda) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$ — векторное решение,

$$\hat{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial X} & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & \frac{\partial \theta}{\partial X} \end{pmatrix}, \quad (67)$$

$$\hat{A}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \exp(2\theta) \\ \exp(-\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-\theta) & 0 \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Замена переменных $(T, X, \theta) \rightarrow (\tau, y, E_{\pm})$, сводящая уравнение Цицейки (65) к уравнению ОВ (62), имеет вид

$$\begin{aligned} \tau &= - \int^T \exp(-\theta) dT', \\ y &= \frac{3}{\sigma} X, \\ E_{\pm} &= \frac{\sigma}{6\alpha} \frac{\partial \tau}{\partial X}. \end{aligned} \quad (69)$$

При этом функция $\tau = \tau(X, T)$ должна быть решением уравнения ВП

$$\frac{\partial^3 \tau}{\partial X^2 \partial T} + 3 \frac{\partial \tau}{\partial X} \frac{\partial \tau}{\partial T} = 0. \quad (70)$$

Это условие устраняет функциональный произвол в определении переменной τ .

Для нахождения решений уравнения Цицейки будем использовать технику преобразования Дарбу (ПД) [76]. Эта техника позволяет получать бесконечные последовательности решений уравнений, интегрируемых в рамках МОЗР, вместе с соответствующими решениями их пар Лакса.

Пусть $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$ — решение пары Лакса (66) с $\lambda = \mu$. Пара Лакса (66) ковариантна относительно ПД $\{\psi, \theta\} \rightarrow \{\tilde{\psi}, \tilde{\theta}\}$, где $\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3)^T$,

$$\tilde{\psi}_1 = \psi_1 - \frac{2\mu\varphi_1}{2\varphi_1\varphi_3 - \varphi_2^2} \times \frac{\mu^2\varphi_3\psi_1 - \lambda\mu\varphi_2\psi_2 + \lambda^2\varphi_1\psi_3}{\lambda^3 + \mu^3}, \quad (71)$$

$$\tilde{\psi}_2 = \psi_2 - \frac{2\mu}{\varphi_2} \frac{\lambda^2\varphi_3\psi_1 + \mu^2\varphi_2\psi_2 - \lambda\mu\varphi_1\psi_3}{\lambda^3 + \mu^3}, \quad (72)$$

$$\tilde{\psi}_3 = \psi_3 - \frac{2\mu\varphi_3}{\varphi_2^2} \times \frac{-\lambda\mu\varphi_3\psi_1 + \lambda^2\varphi_2\psi_2 + \mu^2\varphi_1\psi_3}{\lambda^3 + \mu^3}, \quad (73)$$

$$\tilde{\theta} = \theta - \frac{1}{2} \ln \left(2 \frac{\varphi_1\varphi_3}{\varphi_2^2} - 1 \right)^2. \quad (74)$$

Следствием ковариантности пары Лакса относительно этого ПД является то, что соотношение (74) определяет новое решение θ уравнения Цицейки (65).

Пусть $\theta = 0$ (нулевой фон). Тогда для компонент векторного решения φ пары Лакса (66) при $\lambda = \mu$, с которым проводится ПД (71)–(74), имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= c_1 \exp \gamma_1 + c_2 \exp(\gamma_2 + 4\pi i/3) + \\ &\quad + c_3 \exp(\gamma_3 + 2\pi i/3), \\ \varphi_2 &= c_1 \exp \gamma_1 + c_2 \exp \gamma_2 + c_3 \exp \gamma_3, \\ \varphi_3 &= c_1 \exp \gamma_1 + c_2 \exp(\gamma_2 + 2\pi i/3) + \\ &\quad + c_3 \exp(\gamma_3 + 4\pi i/3), \end{aligned} \quad (75)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \mu X + \frac{T}{\mu}, \\ \gamma_2 &= \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \mu X + \frac{\exp(4\pi i/3)T}{\mu}, \\ \gamma_3 &= \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right) \mu X + \frac{\exp(2\pi i/3)T}{\mu}, \end{aligned}$$

c_1, c_2 и c_3 — произвольные постоянные. Подставив эти выражения в равенство (74) и положив

$$c_1 = 0, \quad \mu = i\kappa,$$

$$\kappa \in \mathbf{R}, \quad c_3/c_2 > 0,$$

получим вещественное односолитонное решение уравнения Цицейки (65)

$$\theta = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \text{th}^2 \gamma - \frac{1}{2} \right)^2, \quad (76)$$

где

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\kappa X + \frac{T}{\kappa} \right) + \frac{\ln(c_3/c_2)}{2}. \quad (77)$$

Замена переменных (69) переводит решение (76) в стационарное однопетлевое решение уравнения ОВ (62). Обсудим его подробнее. Из (76) и первого выражения (69) имеем

$$\tau + T = \sqrt{3} \kappa \operatorname{th} \gamma.$$

Положив второе слагаемое в правой части равенства (77) равным нулю с помощью соответствующего выбора начала отсчета координаты, перепишем левую часть этого выражения в виде $\tau + T = \tau - \sigma \kappa^2 y / 3 + 2\kappa \gamma / \sqrt{3}$. Затем, перейдя к лабораторным координатам и времени, получим

$$\frac{t - y/v}{2\tau_p} = \frac{3}{2} \operatorname{th} \gamma - \gamma. \quad (78)$$

Здесь мы использовали обозначения $\tau_p = \kappa / \sqrt{3}$,

$$v = \frac{c/n}{1 + c\sigma\tau_p^2/n}. \quad (79)$$

Используя третье выражение (69), найдем

$$E_{\pm} = \frac{9\sigma}{4\alpha} \tau_p^2 \operatorname{sch}^2 \gamma. \quad (80)$$

Таким образом, стационарное решение уравнения ОВ (62) в виде уединенной бегущей волны задается параметрически выражениями (78)–(80). Очевидно, параметр v имеет смысл скорости распространения этой волны, а параметр τ_p задает ее характерную длительность с учетом того, что на «хвостах» импульса поле уменьшается по закону $E_{\pm} \sim \exp(-|t - y/v|/\tau_p)$. Полученное решение является однопараметрическим. В нашем случае в качестве свободного параметра выбрана длительность τ_p импульса.

Снабдив параметр τ_p дополнительными нижними индексами «+» и «-», получим с помощью соотношений (63) решение векторной системы ОВ (58), (59) при $\beta = \alpha$. Это решение имеет два свободных параметра: $\tau_{p\pm}$.

Как видно из (78), производная от γ меняет знак. Поэтому решение (78)–(80) не является однозначным. Его график представляет собой петлю (см. рис. 2). С физической точки зрения возможным путем устранения такой неоднозначности является рассмотрение уравнения Островского (60), отличающегося от уравнения ОВ (62) наличием дисперсионного слагаемого $g\partial^4 E_{\pm} / \partial \tau^4$. Очевидно, влияние этого слагаемого становится существенным в областях

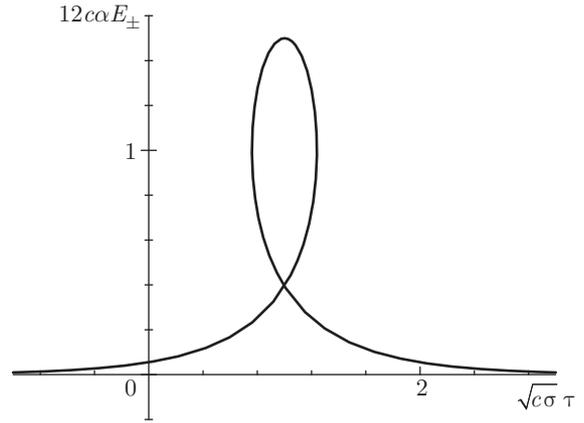


Рис. 2. Профили полей E_{\pm} при значениях параметров однопетлевого решения $\tau_p = 1/\sqrt{3c\sigma}$, $y = \sqrt{c/\sigma}$

сильного укручения профиля волны. О роли дисперсионных слагаемых можно судить по свойствам решений уравнения Островского (см., например, работы [77, 78]). Исследование этого вопроса выходит за рамки настоящей статьи.

Рассмотрим теперь 1-бризерное решение уравнения Цицейки (65). Для его получения необходимо выполнить последовательно два ПД (71)–(74) на нулевом фоне. Первое ПД этой последовательности совпадает с решением φ пары Лакса (66) при $\lambda = \mu$ (см. формулы (75)), а второе — с образом решения φ^* пары Лакса (66) при $\lambda = \mu^*$, который был получен в результате предыдущего ПД. Такая последовательность преобразований дает следующее выражение для 1-бризерного решения уравнения Цицейки:

$$\theta = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\delta_1^2 - 6\mu_R k_1 k_2 \delta_2}{\delta_1^2} \right)^2. \quad (81)$$

Определения величин δ_1 и δ_2 громоздки и приведены в Приложении. Здесь и в дальнейшем мы используем обозначения $\mu_R = \operatorname{Re} \mu$, $\mu_I = \operatorname{Im} \mu$.

Если $\delta_1 = 0$ при некоторых значениях переменных X и T , то решение (81) переходит при замене (69) в неограниченное решение уравнения ОВ. Можно показать, что условие $c_1 c_2 c_3 = 0$ является необходимым для того, чтобы $\delta_1 \neq 0$ при любых значениях X и T . При этом должны также выполняться некоторые ограничения на параметры μ_R и μ_I . Так, если $c_1 = 0$, то эти параметры должны удовлетворять ограничениям

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \left| \frac{\mu_I}{\mu_R} \right| < 1. \quad (82)$$

Однако эти условия не обеспечивают того, чтобы числитель дроби в правой части равенства (81) был

отличен от нуля, т. е. 1-бризерные решения уравнения Цицейки оказываются сингулярными при любых значениях своих параметров. Этим уравнение Цицейки отличается от уравнения синус-Гордона, имеющего ограниченные бризерные решения.

Обсудим подробнее ограниченные 1-бризерные решения уравнения ОВ (62). Положим без потери общности $c_1 = 0$. Тогда из равенства (81) и выражений для δ_1 и δ_2 , приведенных в Приложении, получим следующее выражение для 1-бризерного решения уравнения Цицейки:

$$\theta = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\Delta_1^2 - 12\tau_b\omega_b(\tau_b^2\omega_b^2 - 3)\Delta_2}{\Delta_1^2} \right)^2, \quad (83)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \tau_b\omega_b\Delta_3 + 2(\tau_b^2\omega_b^2 - 2) \cos \gamma_I, \\ \Delta_2 &= \Delta_3 \cos \gamma_I - 4\tau_b\omega_b, \\ \Delta_3 &= 8\tau_b\omega_b \operatorname{ch} \gamma_R + 2\sqrt{3}(\tau_b^2\omega_b^2 + 1) \operatorname{sh} \gamma_R, \\ \gamma_R &= \frac{T}{\tau_b} + \frac{3\tau_b X}{\tau_b^2\omega_b^2 + 1}, \quad \gamma_I = \omega_b T - \frac{3\tau_b^2\omega_b X}{\tau_b^2\omega_b^2 + 1}, \\ \tau_b &= \frac{|\mu|^2}{\sqrt{3}\mu_I}, \quad \omega_b = \frac{\sqrt{3}\mu_R}{|\mu|^2}. \end{aligned}$$

В качестве свободных параметров решения (83) взяты параметры τ_b и ω_b . Абсолютные величины этих параметров определяют характерные длительность и центральную частоту 1-бризерного решения.

Из уравнений (83) и (69) находим

$$\tau = -T + 12\tau_b\omega_b(\tau_b^2\omega_b^2 - 3) \int \frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} dT, \quad (84)$$

$$E_{\pm} = \frac{2\sigma}{\alpha} \tau_b\omega_b(\tau_b^2\omega_b^2 - 3) \int \frac{\partial}{\partial X} \frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} dT. \quad (85)$$

Используя выражения для γ_R и γ_I , из соотношения (84) после перехода к лабораторным координате и времени получим

$$\frac{t - y/v_g}{\tau_b} = -\gamma_R + \omega_b(\tau_b^2\omega_b^2 - 3) \int \frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} dT, \quad (86)$$

$$\omega_b \left(t - \frac{y}{v_{ph}} \right) = -\gamma_I + \tau_b\omega_b^2(\tau_b^2\omega_b^2 - 3) \int \frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} dT, \quad (87)$$

где групповая v_g и фазовая v_{ph} скорости определяются из выражений

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n}{c} + \frac{\sigma\tau_b^2}{\omega_b^2\tau_b^2 + 1}, \quad \frac{1}{v_{ph}} = \frac{n}{c} - \frac{\sigma\tau_b^2}{\omega_b^2\tau_b^2 + 1}. \quad (88)$$

Формулами (85)–(88), (63), а также выражениями для Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 параметрически задается 1-бризерное решение векторной системы ОВ (58), (59) в

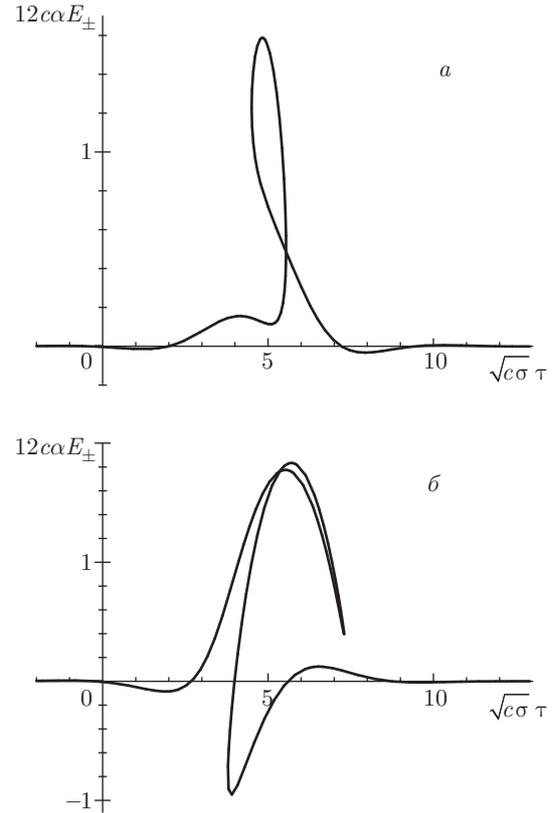


Рис. 3. Профили полей E_{\pm} при значениях параметров бризерного решения $\tau_b = 1.08/\sqrt{\sigma c}$, $\omega_b = 1.27\sqrt{\sigma c}$ (а) и $\tau_b = 1.18/\sqrt{\sigma c}$, $\omega_b = 1.06\sqrt{\sigma c}$ (б)

случае $\beta = \alpha$. При этом свободные параметры τ_b и ω_b снабжаются дополнительными нижними индексами «+» и «-». Таким образом, имеем четыре свободных параметра: $\tau_{b\pm}$ и $\omega_{b\pm}$.

Из условия (82) следует, что $1 < |\tau_b\omega_b| < \sqrt{3}$. В этом случае решение (83) уравнения Цицейки и соответствующее ему ограниченное решение уравнения ОВ (62), полученное с помощью замены (69), содержат всего несколько колебаний поля. Так как числитель дроби в правой части уравнения (83) обращается в нуль при некоторых значениях переменных X и T , то ограниченное 1-бризерное решение уравнения ОВ имеет петлю. Графики 1-бризерного решения при разных значениях параметров представлены на рис. 3.

Таким образом, ограниченное 1-бризерное решение уравнения ОВ является неоднозначным при любых значениях своих параметров. В случае уравнения ШВ имеется область значений параметров 1-бризерного решения, при которых это решение будет ограниченным и однозначным [79].

Итерации ПД (71)–(74) на нулевом фоне позволяют получить вещественные многосолитонные решения уравнения Цицейки. Эти решения описывают взаимодействие солитонных решений вида (76) и бризерных решений вида (81). Выражения для многосолитонных решений уравнения Цицейки были получены в работе [80], однако свойства этих решений, в том числе свойства бризерных решений, подробно исследованы не были. Известные многосолитонные решения уравнения ОВ описывают взаимодействие солитонных решений вида (80).

Однозначные ограниченные решения уравнения ОВ можно получить с помощью замены переменных (69) из вещественных многозонных решений уравнений Цицейки. Рассмотрим простейший случай однозонного решения. С точностью до сдвигов по координатам оно имеет вид

$$\theta = -\frac{1}{2} \ln \left[q^{1/3} \left\{ 1 - \delta K \operatorname{sn}^2 \left(s, \sqrt{K} \right) \right\} \right]^2, \quad (89)$$

где

$$s = \frac{\delta}{\omega} X - \frac{q^{1/3} \omega}{2} T, \quad (90)$$

$$\delta = \frac{4q - 1 + \sqrt{8q + 1}}{4q}, \quad K = \frac{q - 1}{q\delta^2}, \quad (91)$$

ω и q — вещественные постоянные параметры, физический смысл которых будет выяснен ниже.

В дальнейшем нас будут интересовать только вещественные однозонные решения, поэтому параметр q должен удовлетворять условию $q \geq 1$ или $-1/8 \leq q < 0$. Вещественное однозонное решение (89) уравнения Цицейки не имеет сингулярностей только при $q \geq 1$. В этом случае при увеличении параметра q коэффициент K монотонно возрастает, принимая значения в промежутке $[0, 1]$. Если $-1/8 \leq q < 0$, то $K \geq 1$, и при увеличении q коэффициент K монотонно и неограниченно возрастает. В пределе $q \rightarrow -1/8$ ($\delta \rightarrow 3$, $K \rightarrow 1$) однозонное решение переходит в односолитонное решение (76).

Подставив (89) в первую формулу (69) и приняв во внимание равенство

$$\int \operatorname{sn}^2(\tilde{x}, \tilde{k}) d\tilde{x} = \frac{1}{\tilde{k}^2} \left(\tilde{x} - E(\operatorname{am}(\tilde{x}, \tilde{k}), \tilde{k}) \right),$$

где $E(\tilde{\varphi}, \tilde{k})$ — неполный эллиптический интеграл второго рода:

$$E(\tilde{\varphi}, \tilde{k}) = \int_0^{\tilde{\varphi}} \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \tilde{\zeta}} d\tilde{\zeta},$$

$\operatorname{am}(\tilde{x}, \tilde{k}) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{k})$ — обращение эллиптического интеграла первого рода $F(\tilde{\varphi}, \tilde{k})$:

$$\tilde{x} = F(\tilde{\varphi}, \tilde{k}) = \int_0^{\tilde{\varphi}} \frac{d\tilde{\zeta}}{\sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \tilde{\zeta}}},$$

получим

$$\tau = \frac{2\delta}{\omega} \left[E \left(\operatorname{am} \left(s, \sqrt{K} \right), \sqrt{K} \right) - s \right] - q^{1/3} T + f(X). \quad (92)$$

Подстановка этого выражения в (70) дает

$$f(X) = \frac{2\delta}{3\omega^2} \frac{q - 1}{q} X. \quad (93)$$

Тогда из третьей формулы (69) следует

$$E_{\pm} = \frac{\sigma}{9\alpha\omega^2} \frac{q - 1}{q} \left[\delta - 3 \operatorname{sn}^2 \left(s, \sqrt{K} \right) \right]. \quad (94)$$

Равенства (90), (92) и (93) после перехода к лабораторным координатам дают

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2} \left(t - \frac{y}{v_{ph}} \right) &= \\ &= s + \delta \left[E \left(\operatorname{am} \left(s, \sqrt{K} \right), \sqrt{K} \right) - s \right], \end{aligned} \quad (95)$$

где скорость v_{ph} определяется выражением

$$\frac{1}{v_{ph}} = \frac{n}{c} - \frac{2\delta\sigma}{9\omega^2} \frac{2q + 1}{q}. \quad (96)$$

Выражения (94)–(96) определяют периодическое стационарное решение уравнения (62). Это решение однозначно при $q \geq 1$ (рис. 4а). Если $-1/8 \leq q < 0$, то решение становится неоднозначным, приобретая многопетлевой периодический вид (рис. 4б). При $q \rightarrow -1/8$ периодическое решение (94)–(96) переходит в уединенное однопетлевое решение (78)–(80). Как следует из (96), скорости периодического и уединенного неоднозначных петлевых решений меньше линейной фазовой скорости в среде.

Зависимость динамического параметра s от «бегущего времени» $t - y/v_{ph}$ задается параметрическим образом выражением (95). Однако в двух предельных случаях, соответствующих слабонелинейному и сильнонелинейному режимам, эту зависимость удается задать явно. Рассмотрим эти случаи.

Слабонелинейный режим. Степень влияния нелинейности характеризуется параметром q . В рассматриваемом слабонелинейном случае его значение близко к единице. Тогда из (91) и (94)–(96) находим приближенные выражения

$$\begin{aligned} E_{\pm} &= \frac{\sigma}{6\alpha\omega^2} (q - 1) \cos[\omega(t - y/v_{ph})], \\ \frac{1}{v_{ph}} &= \frac{n}{c} - \frac{\sigma}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (97)$$

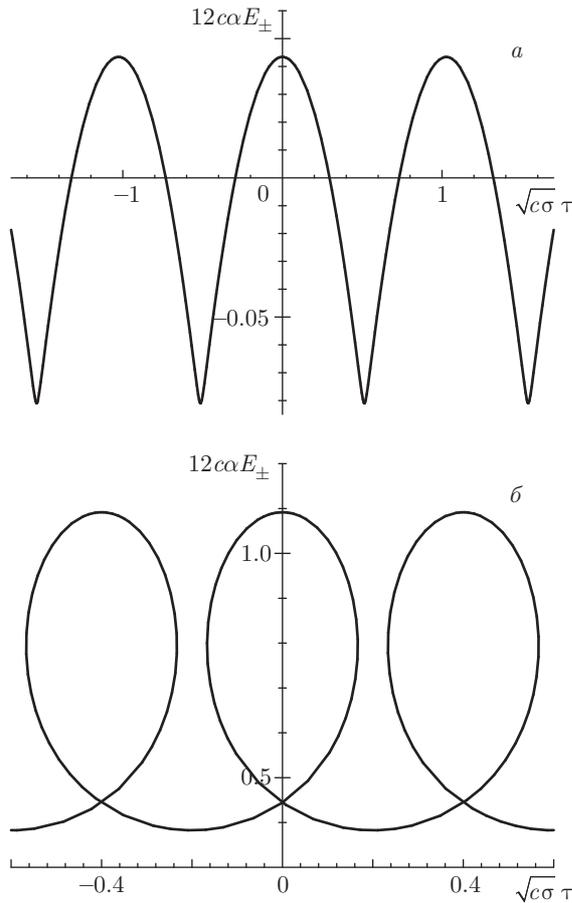


Рис. 4. Профили полей E_{\pm} при значениях параметров стационарного периодического решения $\omega = 4\sqrt{c\sigma}$, $y = 0$, $q = 216$ (а), -0.1 (б)

Из полученных соотношений следует, что введенный выше свободный параметр ω имеет смысл частоты слабонелинейного синусоидального сигнала. При этом параметр v_{ph} является его фазовой скоростью. Это также легко увидеть, написав дисперсионное соотношение, соответствующее линеаризованному уравнению (62): $k = n\omega/c - \sigma/\omega$, где k – волновое число.

Для изучения векторной динамики поля воспользуемся выражениями (63), снабдив свободные параметры ω и q , а также волновое число k нижними индексами «+» и «-» соответственно для компонент E_+ и E_- . Пусть значения ω_+ и ω_- близки друг к другу настолько, что выполняется условие $|\omega_+ - \omega_-| \ll \omega_+, \omega_-$. Кроме того, пусть выполняется равенство $(q_+ - 1)/\omega_+^2 = (q_- - 1)/\omega_-^2$. Тогда из (97) и (63) для обыкновенной и необыкновенной компонент приходим к решениям в виде биений:

$$E_o = -E_m \sin \left[\Delta\omega \left(t - \frac{y}{v_g} \right) \right] \times \sin \left[\omega \left(t - \frac{y}{v_{ph}} \right) \right], \quad (98)$$

$$E_e = E_m \cos \left[\Delta\omega \left(t - \frac{y}{v_g} \right) \right] \times \cos \left[\omega \left(t - \frac{y}{v_{ph}} \right) \right],$$

где

$$E_m = \frac{\sigma}{6\alpha} \frac{q-1}{\omega^2}.$$

Здесь мы также приняли, что $\omega_{\pm} = \omega \pm \Delta\omega/2$, а для групповой скорости v_g справедливо выражение

$$\frac{1}{v_g} = \frac{k_+ - k_-}{\omega_+ - \omega_-} \approx \frac{dk}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\sigma}{\omega^2}.$$

Отсюда следует, что $v_g < c/n$.

Слабонелинейное решение (98) можно рассматривать как генерацию периодической последовательности следующих друг за другом импульсов необыкновенной волны с помощью последовательности обыкновенной составляющей с длительностью $\pi/\Delta\omega$ и тактовой частотой повторения $2\Delta\omega$. Особо подчеркнем, что такое решение в виде периодической последовательности бегущих друг за другом квазимонохроматических импульсов можно получить только из векторного обобщения уравнения ОВ. В скалярном случае таких однозначных решений не существует.

Сильнонелинейный режим. В этом случае $q \gg 1$. Рассмотрим предел $q \rightarrow \infty$. Тогда $\delta \rightarrow 1$, $K \rightarrow 1$. Поскольку $\text{sn}(s, 1) = \text{th}(s)$, из уравнений (94) и (95) следует, что

$$\frac{\omega}{2} \left(t - \frac{y}{\tilde{v}_{ph}} \right) = \text{th}(s),$$

$$E_{\pm} = \tilde{E}_m [1 - 3 \text{th}^2(s)],$$

где

$$\tilde{E}_m = \frac{\sigma}{9\alpha\omega^2},$$

$$\frac{1}{\tilde{v}_{ph}} = \frac{n}{c} - \frac{4\sigma}{9\omega^2}. \quad (99)$$

Отсюда имеем

$$E_{\pm} = \tilde{E}_m [1 - 3\zeta^2],$$

где

$$\zeta = \frac{\omega}{2} \left(t - \frac{y}{\tilde{v}_{ph}} \right).$$

Графиком E_{\pm} является парабола, определенная на интервале $-1 < \zeta < 1$.

Продолжим периодически полученное решение. В результате приходим к формуле

$$E_{\pm} = \tilde{E}_m \sum_{j=-\infty}^{\infty} [1 - 3(\zeta - 2j)^2] \times [\eta(2j + 1 - \zeta) - \eta(2j - 1 - \zeta)], \quad (100)$$

где $\eta(x)$ — функция единичного скачка Хевисайда. Профиль этого решения качественно совпадает с представленным на рис. 4а, имея, правда, разрыв производной в точках $\zeta = 2j - 1$.

Решение (100) также удобно представить в виде ряда Фурье:

$$E_{\pm} = \frac{12}{\pi^2} \tilde{E}_m \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^2} \cos(j\pi\zeta). \quad (101)$$

Поскольку рассматриваемое решение периодически по времени с периодом $4/\omega$, основная частота ряда Фурье равна $\Omega = \pi\omega/2$. Эта частота примерно в полтора раза больше частоты слабонелинейного решения. Видно, что соотношение (99) переходит во второе выражение (97) при замене $\omega \rightarrow 2\Omega/3$, что хорошо согласуется с данным выводом.

Важно отметить, что в спектре периодической волны (100) (или (101)) отсутствует нулевая частота, т. е. эффект оптического детектирования, как и в слабонелинейном режиме, отсутствует. По-видимому, это замечание относится и к общему периодическому решению (94)–(96) при любых значениях параметра q . Такой вывод нетривиален, поскольку наличие квадратичной нелинейности обычно приводит к эффекту детектирования. Этот эффект проявляет себя, например, в ситуации, рассмотренной в работе [33], где для несимметричных молекул выполняется условие (2), а не (1).

По аналогии со слабонелинейным режимом можно использовать суперпозиции (63), где решения E_+ и E_- обладают близкими значениями параметров ω_+ , ω_- и q_+ , q_- . Соответствующие профили полей E_e и E_o представлены на рис. 5. Эти решения, как и в слабонелинейном случае, можно рассматривать как генерацию периодической последовательности квазимонохроматических импульсов необыкновенной компоненты при помощи аналогичной последовательности импульсов обыкновенной волны. Из равенств (101) и (63) следует, что групповая скорость распространения огибающих определяется выражением

$$\frac{1}{\tilde{v}_g} = \frac{n}{c} + \frac{4\sigma}{9\omega^2}.$$

Также легко видеть, что в спектрах обыкновенной и необыкновенной компонент отсутствуют нулевые гармоники.

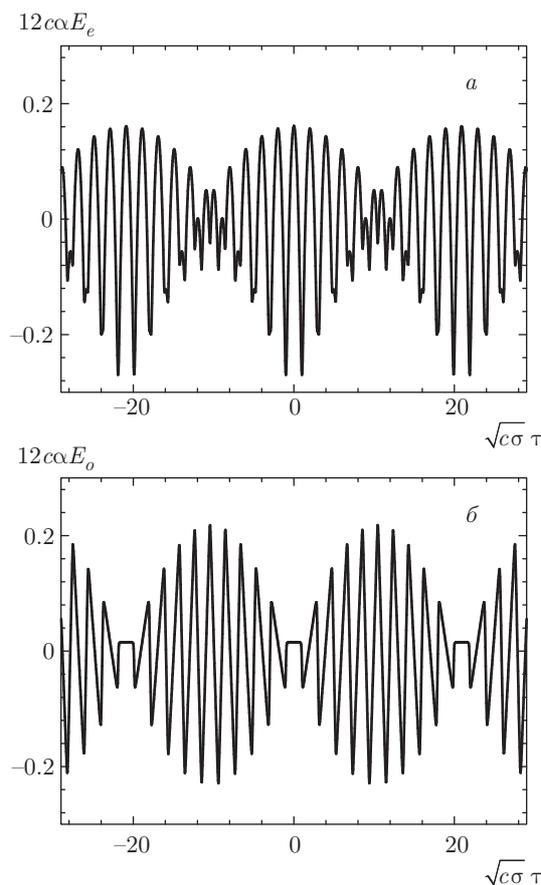


Рис. 5. Профили полей E_e (а) и E_o (б) при $\omega_+ = 2\sqrt{\sigma c}$, $\omega_- = 2.2\sqrt{\sigma c}$, $q_+ = q_- = 81$, $y = 0$

Заметим, что предельное периодическое решение типа (100), составленное из кусков парабол, кратко упоминалось в работе [50]. В настоящей работе решение (100) получено как частный случай общего периодического решения (94)–(96). Кроме того, векторная версия уравнения ОВ позволяет получить решения в виде периодических последовательностей импульсов, что невозможно сделать в случае скалярной версии.

В общем случае (при произвольных значениях ω_{\pm} и q_{\pm}) отношение периодов

$$T_{\pm} = \frac{2}{\omega_{\pm}} F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{K_{\pm}}\right)$$

колебаний компонент E_+ и E_- иррационально. Поэтому представленные здесь решения для E_o и E_e не являются периодическими. Исключения составляют ситуации, когда отношения периодов колебаний компонент E_+ и E_- являются рациональными числами. Это обстоятельство принципиально отличает векторный случай от скалярного.

Как видно из равенства (96), скорости компонент E_+ и E_- , вообще говоря, различаются между собой. Поэтому, согласно соотношениям (63), двух-периодные решения для обыкновенной и необыкновенной составляющих не являются стационарными. При $\omega_+ = \omega_-$ и $q_+ = q_-$ отлична от нуля только необыкновенная компонента. Лишь в этом (скалярном) случае волна является строго периодической и стационарной.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе проведено исследование особенностей нелинейной динамики электромагнитных ПККИ в двухкомпонентной среде, состоящей из примесей симметричных и несимметричных молекул в условиях искусственного двулучепреломления, наведенного статическими электрическим и магнитным полями. Для уравнивания обыкновенного и необыкновенного показателей преломления при распространении перпендикулярно к статическим полям необходимо выполнение условия (39). В этом случае основной вклад в расщепление квантовых состояний несимметричных молекул вносит магнитное поле. При этом среда остается двулучепреломляющей, поскольку показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной компонент будут различаться между собой при распространении ПККИ под произвольными углами к внешним полям.

Полученная здесь система (40), (41) является общей в том смысле, что из нее с помощью предельных процедур следуют уравнения и системы, представляющие интерес с разных точек зрения, в том числе интегрируемые в рамках МОЗР. Среди таковых упомянем двухкомпонентное (комплекснозначное) обобщение (49) уравнения ШВ при отсутствии ПДМ у всех молекул. В случае наличия ПДМ имеем двухкомпонентное обобщение (51), (52) уравнения Островского. Если спектр ПККИ лежит в области нормальной дисперсии групповой скорости, то это обобщение переходит в систему связанных уравнений (56), (57) типа КдВ. В случае же аномальной дисперсии групповой скорости приходим к двухкомпонентному обобщению (58), (59) уравнения ОВ. При выполнении условия (64) двухкомпонентная система Островского (51), (52) в двух упомянутых выше предельных случаях сводится соответственно к двум независимым уравнениям КдВ (61) и ОВ (62) для суммы и разности компонент поля ПККИ. Наконец, динамика линейно поляризованных

ПККИ в случае $E_o = 0$ или при выполнении условия (54) описывается уравнением Островского (53) или уравнением ОВ вида (55) или (62).

Как известно, многокомпонентное обобщение уравнения ШВ интегрируемо с помощью МОЗР [46]. Двухкомпонентное обобщение (49) этого уравнения описывает распространение векторных электромагнитных ПККИ в изотропной среде. Поскольку двухкомпонентное обобщение (58), (59) уравнения ОВ было получено при исследовании нелинейной динамики ПККИ в анизотропной среде, возникает вопрос об интегрируемости многокомпонентных обобщений этого уравнения. Также следует обратить внимание на выяснение интегрируемости уравнения Островского, предельными случаями которого являются уравнения КдФ и ОВ, и его многокомпонентных обобщений, некоторые из которых тоже имеют физические приложения. Одно из обобщений уравнения Островского было получено здесь (см. систему (51), (52)). Кроме того, такие обобщения описывают внутренние волны в сдвиговом потоке [81] и волны в слоистых упругих волноводах [82, 83].

Как показало исследование, проведенное в настоящей работе, условию однозначности удовлетворяют только конечнозонные решения, соответствующие периодическим стационарным решениям скалярной версии ОВ. Однозонному решению соответствуют, вообще говоря, непериодические и нестационарные волны двухкомпонентной (векторной) системы ОВ. Это позволяет, в частности, получить решение, описывающее генерацию периодической последовательности квазимонохроматических импульсов, поляризованных в плоскости необыкновенной волны, с помощью аналогичной последовательности обыкновенных импульсов. Важно отметить также, что решение векторной системы ОВ, описывающее генерацию высших четных и нечетных гармоник, не содержит в спектре постоянной составляющей.

Солитонные решения уравнения ОВ, описывающие взаимодействие однопетлевых солитонов вида (80), и 1-бризерное решение являются многозначными, что не позволяет дать им физическую интерпретацию. По-видимому, это относится ко всем солитонным решениям уравнения ОВ, соответствующим только дискретной части данных рассеяния. Если это предположение верно, то эволюция локализованного начального профиля приводит либо к его дисперсионному расплыванию, либо к возникновению за конечное время сингулярностей (см. обсуждение разрушения решений уравнения ОВ в работах [49, 65, 67, 68]). Локализованные и ограниченные решения в условиях, приводящих в рассмотренной

задаче к уравнению ОВ, образовываться не будут. Однако в других условиях, соответствующих уравнениям КдФ, ШВ или модифицированному уравнению КдФ, выделение таких решений из начального профиля возможно.

Отметим, что система уравнений (40), (41) адекватно описывает распространение электромагнитных ПКИ, спектр которых принадлежит терагерцевому и дальнему инфракрасному диапазонам. Действительно, если бы частота $\omega_0^{(2)}$ соответствовала видимому диапазону, то выполнение условия (2) привело бы к необходимости учета процессов ионизации (переходов в непрерывный спектр) и, как следствие, к радикальному изменению соответствующих физических процессов. Поэтому есть основания утверждать, что некоторые рассмотренные здесь особенности нелинейной динамики ПКИ не могут проявить себя в видимой частотной области, а относятся к терагерцевому диапазону.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-02-00453а).

ПРИЛОЖЕНИЕ

В формуле (81) для 1-бризерного решения уравнения Цицейки имеем

$$\begin{aligned} \delta_1 = & c_1^2 \mu_I k_1 k_2 \exp(2\mu_R \gamma_R) + c_2^2 \mu_R k_2 l_1 \exp(2k_1 \gamma_R) + \\ & + c_3^2 \mu_R k_1 l_2 \exp(2k_2 \gamma_R) + 2c_1 c_2 \mu_R k_1 l_2 \cos \eta_1 \times \\ & \times \exp[(\mu_R + k_1) \gamma_R] + 2c_1 c_3 \mu_R k_2 l_1 \cos \eta_2 \exp[(\mu_R + k_2) \gamma_R] + \\ & + 2c_2 c_3 \mu_I k_1 k_2 \cos(\eta_1 - \eta_2) \exp[(k_2 + k_1) \gamma_R], \\ \delta_2 = & 2 \left\{ c_1^3 c_2 \mu_I k_1 l_2 \cos \eta_1 \exp[(3\mu_R + k_1) \gamma_R] + \right. \\ & + c_1^3 c_3 \mu_I k_2 l_1 \cos \eta_2 \exp[(3\mu_R + k_2) \gamma_R] + \\ & + c_2^3 c_1 \mu_R l_1 l_2 \cos(\eta_1) \exp[(3k_1 + \mu_R) \gamma_R] + \\ & + c_2^3 c_3 \mu_I k_2 l_1 \cos(\eta_1 - \eta_2) \exp[(3k_1 + k_2) \gamma_R] + \\ & + c_3^3 c_1 \mu_R l_1 l_2 \cos \eta_2 \exp[(3k_2 + \mu_R) \gamma_R] + \\ & \left. + c_3^3 c_2 \mu_I k_1 l_2 \cos(\eta_1 - \eta_2) \exp[(3k_2 + k_1) \gamma_R] \right\} - \\ & - c_1^2 c_2^2 (\mu_I k_1 + \mu_R l_1) l_2 \exp[2(k_1 + \mu_R) \gamma_R] - \\ & - c_1^2 c_3^2 (\mu_I k_2 + \mu_R l_2) l_1 \exp[2(\mu_R + k_2) \gamma_R] - \\ & - 2c_2^2 c_3^2 \mu_R \mu_I^2 \exp[2(k_1 + k_2) \gamma_R] + 2c_1 c_2 c_3 \times \\ & \times \left\{ c_1 \mu_R [l_1 l_2 \cos(\eta_1 + \eta_2) - 2\mu_I^2 \cos(\eta_1 - \eta_2)] \times \right. \\ & \times \exp[(2\mu_R + k_2 + k_1) \gamma_R] + c_2 [(3\mu_R k_2 + \mu_I l_2) k_1 \cos \eta_2 + \\ & + \mu_I k_1 l_2 \cos(2\eta_1 - \eta_2)] \exp[(\mu_R + 2k_1 + k_2) \gamma_R] + \\ & \left. + c_3 [\mu_I k_2 l_1 \cos(2\eta_2 - \eta_1) - (\mu_R l_1 + \mu_I k_1) l_2 \cos \eta_1] \times \right. \\ & \left. \times \exp[(k_1 + 2k_2 + \mu_R) \gamma_R] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \eta_1 = & (l_1 - \mu_I) \gamma_I + \nu_1, \quad \eta_2 = (l_2 - \mu_I) \gamma_I + \nu_2, \\ k_1 = & -\frac{\mu_R + \sqrt{3}\mu_I}{2}, \quad k_2 = -\frac{\mu_R - \sqrt{3}\mu_I}{2}, \\ l_1 = & -\frac{\mu_I - \sqrt{3}\mu_R}{2}, \quad l_2 = -\frac{\mu_I + \sqrt{3}\mu_R}{2}, \\ \gamma_R = & X + \frac{T}{|\mu|^2}, \quad \gamma_I = X - \frac{T}{|\mu|^2}, \end{aligned}$$

$c_1, c_2, c_3, \nu_1, \nu_2$ — вещественные постоянные.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Leblond and D. Mihalache, Phys. Rep. **523**, 61 (2013).
2. А. И. Маймистов, КЭ **30**, 287 (2000).
3. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Основы оптики фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1978).
4. D. H. Auston, K. P. Cheung, J. A. Valdmanis, and D. A. Kleinman, Phys. Rev. Lett. **53**, 1555 (1984).
5. K. Nakamura and M. Nakazawa, Opt. Lett. **21**, 68 (1996).
6. F. Krausz and M. Ivanov, Rev. Mod. Phys. **81**, 163 (2009).
7. G. Kh. Kitaeva, Laser Phys. Lett. **5**, 559 (2008).
8. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **96**, 281 (2012).
9. IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol. **1**, No 2, November 2011.
10. П. Г. Крюков, *Фемтосекундные импульсы*, Физматлит, Москва (2008).
11. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **146**, 483 (2014).
12. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **111**, 404 (1997).
13. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **119**, 419 (2001).
14. H. Leblond, S. V. Sazonov, I. V. Mel'nikov, D. Mihalache, and F. Sanchez, Phys. Rev. A **74**, 063815 (2006).
15. L. W. Casperson, Phys. Rev. A **57**, 609 (1998).
16. A. Brown, W. J. Meath, and P. Tran, Phys. Rev. A **63**, 013403 (2000).
17. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, and J. V. Moloney, Physica D **138**, 134 (2000).
18. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **121**, 1012 (2002).

19. А. И. Маймистов, Дж.-Ги Капуто, *Опт. и спектр.* **94**, 275 (2003).
20. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **124**, 803 (2003).
21. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ* **127**, 289 (2005).
22. С. О. Елютин, *ЖЭТФ* **128**, 17 (2005).
23. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *КЭ* **35**, 701 (2005).
24. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *Письма в ЖЭТФ* **83**, 573 (2006); *ЖЭТФ* **130**, 646 (2006).
25. N. V. Ustinov, *Proc. SPIE* **6725**, 67250F-1 (2007); arXiv:0705.2833.
26. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *Опт. и спектр.* **106**, 473 (2009).
27. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ* **142**, 842 (2012).
28. Л. Д. Фаддеев, *УФН* **183**, 487 (2013).
29. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
30. Дж. Л. Лэм, *Введение в теорию солитонов*, Мир, Москва (1983).
31. Р. Буллаф, Ф. Кодри (ред.), *Солитоны*, Мир, Москва (1983).
32. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, Москва (1988).
33. S. V. Sazonov, *Opt. Comm.* **380**, 480 (2016).
34. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, *ЖЭТФ* **123**, 1160 (2003).
35. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, *Письма в ЖЭТФ* **51**, 252 (1990).
36. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущаповский, *ЖЭТФ* **100**, 762 (1991).
37. И. И. Собельман, *Введение в теорию атомных спектров*, Наука, Москва (1977).
38. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1981).
39. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, *J. Phys. A: Math. Gen.* **6**, 1337 (1973).
40. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухорук, *Теория волн*, Наука, Москва (1979).
41. T. Schäfer and C. E. Wayne, *Physica D* **196**, 90 (2004).
42. Y. Chung, C. K. R. T. Jones, T. Schäfer, and C. E. Wayne, *Nonlinearity* **18**, 1351 (2005).
43. R. Beals, M. Rabelo, and K. Tenenblat, *Stud. Appl. Math.* **81**, 125 (1989).
44. M. L. Rabelo, *Stud. Appl. Math.* **81**, 221 (1989).
45. A. Sakovich and S. Sakovich, *J. Phys. Soc. Jpn.* **74**, 239 (2005).
46. Y. Matsuno, *J. Math. Phys.* **52**, 123702 (2011).
47. Л. А. Островский, *Океанология* **18**, 181 (1978).
48. A. Boutet de Monvel and D. Shepelsky, *J. Phys. A: Math. Theor.* **48**, 035204 (2015).
49. J. Hunter, *Lect. Appl. Math.* **26**, 301 (1990).
50. V. A. Vakhnenko, *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, 4181 (1992).
51. R. A. Kraenkel, H. Leblond, and M. A. Manna, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47**, 025208 (2014).
52. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *Письма в ЖЭТФ* **99**, 586 (2014).
53. V. O. Vakhnenko and E. J. Parkes, *Nonlinearity* **11**, 1457 (1998).
54. A. J. Morrison, E. J. Parkes, and V. O. Vakhnenko, *Nonlinearity* **12**, 1427 (1999).
55. M. A. Manna and A. Neveu, *Inverse Problems* **17**, 855 (2001).
56. G. Tzitzéca, *C. R. Acad. Sci. Paris* **144**, 1257 (1907).
57. R. K. Dodd and R. K. Bullough, *Proc. Roy. Soc. London A* **351**, 499 (1976).
58. А. В. Жибер, А. Б. Шабат, *ДАН СССР* **247**, 1103 (1979).
59. А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ* **30**, 443 (1979).
60. V. O. Vakhnenko and E. J. Parkes, *Chaos, Solitons, Fractals* **13**, 1819 (2002).
61. A. N. W. Hone and J. P. Wang, *Inverse Problems* **19**, 129 (2003).
62. A. Degasperis and M. Procesi, in: *Symmetry and Perturbation Theory*, ed. by A. Degasperis and G. Gaeta, World Sci., Singapore (1999), p. 22.
63. A. Degasperis, A. N. W. Hone, and D. D. Holm, *Theor. Math. Phys.* **133**, 1463 (2002).
64. Y. Matsuno, *Phys. Lett. A* **359**, 451 (2006).
65. J. P. Boyd, *Phys. Lett. A* **338**, 36 (2005).

66. A. Stefanov, Y. Shen, and P. G. Kevrekidis, *J. Diff. Eqs.* **249**, 2600 (2010).
67. Y. Liu, D. Pelinovsky, and A. Sakovich, *SIAM J. Math. Anal.* **42**, 1967 (2010).
68. R. H. J. Grimshaw, K. Helfrich, and E. R. Johnson, *Stud. Appl. Math.* **129**, 414 (2012).
69. R. Grimshaw and D. Pelinovsky, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. A* **84**, 559 (2013).
70. Y. A. Stepanyants, *Chaos, Solitons, Fractals* **28**, 193 (2006).
71. E. J. Parkes, *Chaos, Solitons, Fractals* **31**, 602 (2007).
72. A.-M. Wazwaz, *Phys. Scripta* **82**, 065006 (2010).
73. B.-F. Feng, K. Maruno, and Y. Ohta, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 355203 (2012).
74. Y. Ye, J. Song, S. Shen, and Y. Di, *Results Phys.* **2**, 170 (2012).
75. X. H. Liu and C. He, *ISRN Math. Phys.* **2013**, 1 (2013).
76. V. B. Matveev and M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg (1991).
77. V. Varlamov and Y. Liu, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **10**, 731 (2004).
78. G. Gui and Y. Liu, *Comm. Partial Diff. Eqs.* **32**, 1895 (2007).
79. A. Sakovich and S. Sakovich, *J. Phys. A.: Math. Gen.* **39**, L361 (2006).
80. A. V. Mikhailov, *Physica D* **3**, 73 (1981).
81. A. Alias, R. H. J. Grimshaw, and K. R. Khusnutdinova, *Chaos* **23**, 023121 (2013).
82. K. R. Khusnutdinova, A. M. Samsonov, and A. S. Zakharov, *Phys. Rev. E* **79**, 056606 (2009).
83. K. R. Khusnutdinova and K. M. Moore, *Wave Motion* **48**, 738 (2011).