

# ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ ВАЙДЬЯ В ДИАГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

В. А. Березин<sup>a\*</sup>, В. И. Докучаев<sup>a,b\*\*</sup>, Ю. Н. Ерошенко<sup>a\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> Институт ядерных исследований Российской академии наук  
117312, Москва, Россия

<sup>b</sup> Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 августа 2016 г.

Исследован переход от исходных координат  $(v, r)$  метрики Вайдья со световой координатой  $v$  к наиболее «физичным» диагональным координатам  $(t, r)$ . Найдено точное решение для соответствующего метрического тензора в случае линейной зависимости массовой функции метрики Вайдья от световой координаты  $v$ . В диагональных координатах вблизи горизонта видимости аккрецирующей черной дыры Вайдья обнаружена узкая область (ширина которой пропорциональна скорости роста массы черной дыры), в которой метрика качественно отличается от метрики Шварцшильда и не может быть представлена как ее малое возмущение. Показано, что в этом случае вне горизонта видимости недостаточно одного набора диагональных координат  $(t, r)$  для покрытия всей области изменения исходных координат  $(v, r)$ , а требуются как минимум три набора диагональных координат, области изменения которых разделены сингулярными поверхностями, на которых компоненты метрики имеют особенности: либо  $g_{00} = 0$ , либо  $g_{00} = \infty$ . На этих сингулярных поверхностях тензор энергии-импульса расходится, однако соответствующие приливные силы оказываются конечными, что следует из анализа уравнений девиации геодезических. Поэтому эти сингулярные поверхности являются исключительно координатными сингулярностями, которые можно назвать «ложными огненными стенами» (false firewalls), поскольку на них отсутствуют физические особенности. Рассмотрено также преобразование от исходных координат к другим диагональным координатам  $(\eta, y)$ , в которых решение получается в явном виде, а расходимость тензора энергии-импульса отсутствует.

DOI: 10.7868/S0044451017030087

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Метрика Вайдья описывает пространство-время, создаваемое сферически-симметричным радиальным потоком излучения. Эта метрика имеет вид [1–3]

$$ds^2 = \left[ 1 - \frac{2m(z)}{r} \right] dz^2 + 2dz dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1)$$

В частности, метрика Вайдья описывает нестационарную аккрецирующую либо излучающую черную

дыру. В этой метрике  $m(z)$  — произвольная массовая функция, зависящая в случае аккреции от координаты  $z = -v$ , где  $v$  — опережающая световая координата, либо в случае излучения от координаты  $z = u$ , где  $u$  — запаздывающая световая координата. В случае  $m(z) = m_0 = \text{const}$  метрика (1) описывает черную дыру Шварцшильда массой  $m = m_0$ . Здесь и далее мы используем единицы измерения для скорости света  $c = 1$ , для постоянной Всемирного тяготения  $G = 1$ .

Метрика Вайдья (1) — одно из немногих известных точных решений в общей теории относительности — имеет множество важных астрофизических и теоретических приложений. В частности, она применяется для описания квантового испарения черных дыр [4–11] или излучения астрофизических объектов [12–17]. Эта метрика также рассматривается в исследованиях гравитационного коллапса и формирования голых сингулярностей [18–29].

\* E-mail: berezin@inr.ac.ru

\*\* E-mail: dokuchaev@inr.ac.ru

\*\*\* E-mail: eroshenko@inr.ac.ru

Существует, однако, проблема интерпретации физических результатов, полученных в этой метрике, поскольку она записана через координаты  $(z, r)$ , в которых  $z$  не является непосредственно физически измеримой величиной. Известно, что в некоторых простых случаях можно найти формулы перехода к дважды нулевым координатам  $(v, u)$  [30], но переход к более физическим диагональным координатам представляет математические трудности, и явный вид соответствующего преобразования координат в общем случае неизвестен [31].

В данной работе исследуются координатные преобразования от стандартных координат метрики Вайдья  $(z, r)$  к диагональным координатам в случае линейной массовой функции  $m(z) = -\alpha z + m_0$ ,  $dm/dz = -\alpha = \text{const}$ , где параметр  $\alpha > 0$  характеризует темп аккреции или излучения. Используя этот анзац, мы решаем задачу преобразования метрики Вайдья к диагональным координатам полностью аналитически, вычисляя все метрические коэффициенты. Метрика Вайдья (1) с линейной функцией масс уже рассматривалась ранее в множестве работ в самых различных аспектах [4, 5, 32–36]. Однако в этих работах не был получен вид метрики Вайдья в диагональных координатах. Первое такое решение получено нами в работе [37], где использовались специальные диагональные координаты  $(\eta, y)$  (они обсуждаются ниже в разд. 3). В данной работе мы получим решение также и для другого, наиболее физического выбора диагональных координат  $(t, r)$ .

Переход к диагональным координатам приближает задачу Вайдья к реальной физической ситуации, так как они соответствуют результатам физических измерений, которые мог бы выполнить статический наблюдатель. В диагональных координатах видно, как выглядит для статического наблюдателя процесс аккреции на черную дыру или, в более общем виде, какую физическую структуру имеет пространство-время при наличии радиального потока излучения. Таким образом, эта постановка задачи максимально приближена к физически реализуемой.

Как оказалось, даже в области вне гравитационного радиуса  $r > 2m$  в  $R$ -области одного набора диагональных координат  $(t, r)$  или  $(\eta, y)$  недостаточно для покрытия всей области изменения исходных координат  $(v, r)$  в метрике (1), а требуется несколько наборов диагональных координат, области изменения которых разделены поверхностями с особенностями метрики либо  $g_{00} = 0$ , либо  $g_{00} = \infty$ . Эти наборы служат картами, которые покрывают все многообразие с учетом физического ограничения  $m \geq 0$ .

На границах этих карт имеет место расходимость тензора энергии-импульса, которая, однако, не связана с наличием физических каустик в распределении аккрецируемого излучения. Исследование уравнений девиации геодезических показывает, что приливные силы на граничных поверхностях конечны, поэтому указанные поверхности являются по своей природе координатными сингулярностями, которые можно назвать «ложными огненными стенами» (false firewalls).

Исходная метрика Вайдья (1) геодезически не полна и требует аналитического расширения для описания глобальной геометрии пространства-времени. Одно из расширений было сделано В. Израэлем [38] в достаточно общей форме для глобальной геометрии вечного пространства-времени с бесконечными лестницами из черных и белых дыр. Другие подходы применялись в работах [6, 39], где строились дополнительные области пространства-времени, и в работах [18, 40, 41], где применялись специальные массовые функции. Использование новых диагональных координат позволило нам выявить глобальную структуру пространства-времени для метрики Вайдья с линейной массовой функцией  $m(z)$ . Основным инструментом исследования стали точные выражения для радиальных световых геодезических. В результате было построено геодезически полное (с физическим ограничением  $m \geq 0$ ) пространство-время и построены соответствующие конформные диаграммы Картера – Пенроуза.

## 2. МЕТРИКА ВАЙДЬЯ В ДИАГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ $(t, r)$

В данном разделе в качестве диагональных координат выберем координаты кривизн  $(t, r, \theta, \phi)$ , в которых метрика имеет следующий вид [42]:

$$ds^2 = e^{\nu(t,r)} dt^2 - e^{\lambda(t,r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2)$$

или, если переобозначить для удобства коэффициенты —

$$ds^2 = f_0(t, r) dt^2 - \frac{dr^2}{f_1(t, r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3)$$

где  $f_0(t, r)$  и  $f_1(t, r)$  — некоторые функции, определяемые из уравнений Эйнштейна. Введем массовую функцию  $M_1(t, r)$ , по определению связанную с  $\lambda$  и  $f_1(t, r)$  следующим образом:

$$e^{-\lambda(t,r)} = f_1(t, r) = 1 - \frac{2M_1(t, r)}{r}. \quad (4)$$

**2.1. Переход к диагональным координатам**

Будем искать преобразование от координат исходной метрики Вайдья к диагональным координатам:

$$z = z(t, \tilde{r}), \quad r = \tilde{r}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (1) и приравнявая получающиеся коэффициенты соответствующим коэффициентам в (3), имеем систему уравнений

$$f_0 = f_1 \dot{z}^2, \quad z' = -\frac{1}{f_1}. \tag{6}$$

Перепишем второе из этих уравнений в виде

$$z' = -\frac{1}{1 - 2m(z)/r} \tag{7}$$

и умножим его на  $dm/dz$ :

$$\frac{dm}{dz} z' = M'_1 = -\frac{dm/dz}{1 - 2m(z)/r}. \tag{8}$$

Будем рассматривать случай линейной массовой функции

$$m(z) = -\alpha z + m_0. \tag{9}$$

При аккреции  $z = -v$  и  $m = \alpha v + m_0$ . В случае излучения  $z = u$  и  $m = -\alpha u + m_0$ . Следовательно, в обоих случаях  $\alpha > 0$  и  $dm/dz = -\alpha$ . Тогда уравнение (8) принимает вид

$$M'_1 = \frac{\alpha}{1 - 2M_1/r}. \tag{10}$$

Обозначив

$$y = 1 - \frac{2M_1(t, r)}{r}, \tag{11}$$

запишем решение уравнения (10) в следующем неявном виде:

$$-\int \frac{y dy}{y^2 - y + 2\alpha} = \ln \frac{r}{r_0} + \phi(t). \tag{12}$$

Рассмотрим сначала случай  $\alpha < 1/8$ . Вычислив интеграл в (12), получим

$$\frac{r}{r_0} B(t) = \Psi(y), \tag{13}$$

где введены обозначения

$$\Psi(y) = |y - y_1|^{y_1/(y_2 - y_1)} |y - y_2|^{-y_2/(y_2 - y_1)} \tag{14}$$

и

$$y_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 8\alpha}}{2}, \quad y_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 8\alpha}}{2}, \tag{15}$$

а  $B(t) = e^{\phi(t)} > 0$  — некоторая неизвестная пока функция.

Найдем теперь коэффициент  $f_0$ . Дифференцируя уравнение (13) по  $t$  и подставляя

$$\dot{y} = -\frac{2\dot{M}_1}{r} = \frac{2\alpha\dot{z}}{r}, \tag{16}$$

получим

$$\frac{r^2}{2\alpha r_0^2} = \frac{d\Psi}{dy} \frac{\dot{z}}{\dot{B}(t)}. \tag{17}$$

Функция  $\Psi(y)$  имеет особые точки  $y = y_1$  и  $y = y_2$ , поэтому вся область изменения  $-\infty < y < 1$  делится на четыре части

$$\begin{aligned} -\infty < y < 0, & \quad 0 < y < y_1, \\ y_1 < y < y_2, & \quad y_2 < y < 1, \end{aligned} \tag{18}$$

в каждой из которых необходимо проводить отдельный расчет. Заметим, что свободные параметры  $r_0$  и  $t_0$  могут быть разными в разных областях, а связь между ними должна устанавливаться путем сшивки решений. Время допускает следующее переопределение:  $d\tilde{t}^2 = \dot{B}^2 dt^2$ , поэтому можно выбрать

$$\dot{B} = \pm\alpha, \quad B(t) = \pm\alpha(t - t_0), \tag{19}$$

где знак в каждом конкретном случае определяется из условия  $\dot{z} > 0$ :

$$B(t) = \begin{cases} \alpha(t - t_0), & y < 0, \\ -\alpha(t - t_0), & 0 < y < y_1, \\ \alpha(t - t_0), & y_1 < y < y_2, \\ -\alpha(t - t_0), & y > y_2. \end{cases} \tag{20}$$

Во всех областях (18) из (6) получаем одинаковое выражение:

$$f_0 = y\dot{z}^2 = \frac{1}{y} |y - y_1|^{2y_2/(y_2 - y_1)} \times |y - y_2|^{-2y_1/(y_2 - y_1)}. \tag{21}$$

Таким образом, нами в параметрическом виде найдены все метрические коэффициенты: (21),  $f_1 = y$  и (13), где  $y$  — параметр.

Дифференциальное преобразование к новым координатам имеет вид

$$dz(t, r) = f_0^{1/2} f_1^{-1/2} dt - f_1^{-1} dr. \tag{22}$$

В работе [31] было указано, что выражение для дифференциала, аналогичное (22), могло быть получено путем вычисления интегрирующего множителя.



Рассмотрим теперь входящие (движущиеся к центру) лучи и найдем время движения фотона до пересечения им горизонта видимости. Отметим, что это событие пересечения происходит под глобальным горизонтом событий и, следовательно, недоступно наблюдению извне горизонта событий. Входящий радиальный луч подчиняется уравнению  $v = \text{const}$ , которое в координатах  $(t, r)$  имеет вид  $dt = -dr/\sqrt{f_0 f_1}$ . Подставляя  $f_1 = y$  и найденное согласно (21)  $f_0$ , получаем

$$\Delta t = 2M_1 \int_y^{y_i} \frac{1}{(1-x)^2} dx |x - y_1|^{-y_2/(y_2-y_1)} \times \\ \times |x - y_2|^{y_1/(y_2-y_1)} = M_1(1-x)^{-2} \times \\ \times F_1 \left[ 2; \frac{y_2}{y_2-y_1}, -\frac{y_1}{y_2-y_1}; 3, \frac{1-y_1}{1-x}, \frac{1-y_2}{1-x} \right] \Big|_{x=y}^{x=y_i}, \quad (28)$$

где  $F_1[\dots]$  — гипергеометрическая функция Апшеля,  $y_i$  и  $y$  — соответственно начальное и конечное значения параметра  $y = 1 - 2M_1/r$ . При вычислении (28) учтено, что рассматривается луч с  $v = \text{const}$ , и поэтому  $M_1(v)$  можно вынести из-под знака интеграла. Из выражения (28) видно, что световой луч достигает поверхности  $y = y_2$  за конечное координатное время  $\Delta t$ , а поверхности  $y = y_1$  за бесконечное время  $\Delta t = \infty$ . Следовательно, луч может пересечь горизонт видимости  $y = 0$ , если начальная точка его траектории выбрана при  $y < y_1$ . Отметим, что частичным аналогом  $\Delta t \rightarrow \infty$  является бесконечное время достижения гравитационного радиуса черной дыры Шварцшильда пробными частицами, что обусловлено сингулярным поведением шварцшильдовских координат на горизонте событий. Отличие рассматриваемого здесь случая состоит в том, что  $\Delta t \rightarrow \infty$  имеет место на поверхности  $y = y_1$  вне горизонта видимости, что обусловлено влиянием на метрику аккрецируемого вещества.

В пределе медленной аккреции  $\alpha \rightarrow 0$  (но  $\alpha \neq 0$ ) при  $y_i \ll y_1$ ,  $y = 0$  получаем время движения до пересечения горизонта видимости

$$\Delta t \simeq -2M_1 \ln \alpha. \quad (29)$$

В случае предельного перехода к метрике Шварцшильда с  $\alpha = 0$  левая ветвь решения (13) (кривые 1 и 2 на рис. 1) вырождается, и необходимо выбирать правую ветвь (кривую 5) решения при  $y_1 < y < y_2$ . Это связано с тем, что, как мы отмечали выше, вблизи горизонта видимости аккреция качественно меняет геометрию. Если таким образом сделать предельный переход (выбрать

правую ветвь), то  $y_1 \rightarrow 0$ ,  $y_2 \rightarrow 1$ ,  $y_1/(y_2 - y_1) \rightarrow 0$ ,  $y_2/(y_2 - y_1) \rightarrow -1$  и (28) переходит в точное выражение для времени движения фотона в метрике Шварцшильда.

### 2.3. Геометрический и физический смысл поверхностей $y = y_1$ и $y = y_2$

Чтобы выяснить происхождение линий  $y = y_1$  и  $y = y_2$ , которые отсутствуют в решении Шварцшильда при  $\alpha = 0$ , изучим поверхности  $y = \text{const}$ . Вычислим сначала квадрат нормали к этим поверхностям. Поскольку он является инвариантом, это можно сделать в любой метрике, проще всего — в исходной метрике Вайдья (1). Обозначим его  $Y$ :

$$Y = \gamma^{ik} y_{,i} y_{,k} = \frac{(1-y)^3}{4m^2} (y - y_3)(y - y_4), \quad (30)$$

где  $y_3, y_4$  даются формулами (27).

Вычислим инвариант  $Y$  вдоль исходящего светового луча, подставив в (30) выражение  $m = r(1-y)/2$  и  $r(y)$  из (26):

$$Y = \frac{(1-y)}{D^2} |y - y_3|^{(y_4-3y_3)/(y_4-y_3)} \times \\ \times |y - y_4|^{(3y_4-y_3)/(y_4-y_3)} \times \\ \times \text{sign}(y - y_3) \text{sign}(y - y_4). \quad (31)$$

Прежде всего мы видим, что отсутствуют какие-либо особенности на линиях  $y = y_1$  и  $y = y_2$ . Обнаруженные ранее особенности при  $y = y_1$  и  $y = y_2$  имеют чисто координатную природу, они соответствуют окончанию действия систем координат на линиях  $y = y_1$  и  $y = y_2$ . На самом деле, на этих поверхностях заканчивается действие отдельных систем координат — эти поверхности являются границами координатных карт, покрывающих полное многообразие, а для покрытия всего пространства-времени в диагональных координатах требуется несколько наборов координат. Кроме того, в показателе степени  $y_4 - 3y_3 \geq 0$  при  $\alpha < 3/64$  и  $y_4 - 3y_3 < 0$  при  $\alpha > 3/64$ , а  $3y_4 - y_3 > 0$  всегда. Значит, на линиях  $y = y_3$  и  $y = y_4$  инвариант  $Y$  меняет знак и может обращаться в нуль и в бесконечность. Если двигаться вдоль входящего светового луча, когда  $m = \text{const}$ , то инвариант (30) обращается в нуль при  $y = y_3$  и  $y = y_4$ . Тем не менее, линии  $y = y_3$  и  $y = y_4$  также не являются физическими особенностями метрики, это устранимые координатные особенности, как мы покажем в разд. 3.

Для того чтобы прояснить физический смысл поверхностей  $y = y_1$  и  $y = y_2$ , вычислим тен-



зор энергии-импульса, используя полученные точные решения. Первые три уравнения Эйнштейна в метрике (2) в общем случае имеют вид [42]

$$8\pi T_0^1 = -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r}, \quad (32)$$

$$8\pi T_0^0 = -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (33)$$

$$8\pi T_1^1 = -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}. \quad (34)$$

Обозначим  $F \equiv \sqrt{f_0 f_1}$ . Для радиального движения фотонов к центру имеем

$$k^\mu = (a, b, 0, 0), \quad a > 0, \quad g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = f_0 a^2 - \frac{b^2}{f_1} = 0,$$

$$k^\mu = a(1, -F, 0, 0), \quad k_\mu = a(f_0, F/f_1, 0, 0).$$

Тензор энергии-импульса

$$T_\mu^\nu = \gamma k_\mu k^\nu, \quad T_0^0 = \gamma a^2 f_0, \quad T_0^1 = -\gamma a^2 f_0 F.$$

Из (32) получаем

$$\gamma a^2 = \frac{\dot{M}_1}{4\pi r^2 f_0 F}, \quad (35)$$

затем

$$T_0^0 = -T_1^1 = \frac{\dot{M}_1}{4\pi r^2 F}, \quad T_0^1 = -\frac{\dot{M}_1}{4\pi r^2}. \quad (36)$$

Случай  $\dot{M}_1 > 0$  соответствует аккреции, а  $\dot{M}_1 < 0$  — излучению. Подставляя (36) в (33), получаем

$$M_1' = \frac{\dot{M}_1}{F} = 4\pi r^2 T_0^0. \quad (37)$$

Обратимся теперь к частному случаю линейной зависимости  $M_1(z)$ . Подставляя в (36)

$$\dot{M}_1 = \frac{dm}{dz} \dot{z} = -\alpha \frac{f_0^{1/2}}{f_1^{1/2}} \quad (38)$$

и поднимая индекс, получаем

$$T^{00} = \frac{\alpha}{4\pi r^2 f_0 f_1}, \quad T^{01} = -\frac{\alpha}{4\pi r^2 f_0^{1/2} f_1^{1/2}}. \quad (39)$$

Рассмотрим эти выражения вдоль входящего светового луча. В этом случае  $v = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$  и, следовательно,  $r^2 = (2m)^2/(1-y)^2$  является регулярной при  $y = y_1$  и  $y = y_2$  функцией. В то же время полученное из (21) выражение (напомним, что  $f_1 = y$ )

$$f_0 f_1 = |y - y_1|^{2y_2/(y_2 - y_1)} |y - y_2|^{-2y_1/(y_2 - y_1)} \quad (40)$$

имеет особенности в точках  $y = y_1$  и  $y = y_2$ . Из уравнения светового луча имеем  $f_0^{1/2} f_1^{1/2} = -dr/dt$ , поэтому вдоль входящего луча

$$T^{00} = \frac{\alpha}{4\pi r^2 (dr/dt)^2}, \quad T^{01} = \frac{\alpha}{4\pi r^2 (dr/dt)}. \quad (41)$$

Таким образом, компоненты тензора энергии-импульса  $T^{00}$  и  $T^{01}$  обращаются в нуль при  $y = y_2$  и в бесконечность при  $y = y_1$  по кинематической причине — из-за наличия предельных точек  $dr/dt = 0, \infty$  при движении светового луча в координатах  $(t, r)$ . Для фотонов поверхность  $y = y_1$  является поверхностью бесконечного красного смещения ( $g_{00} \rightarrow 0$ ), аккреция привела к расщеплению бывшего горизонта Шварцшильда, а поверхность  $y = y_2$  является поверхностью бесконечного голубого смещения ( $g_{00} \rightarrow \infty$ ), появление этой поверхности качественно отличает полученную метрику от метрики Шварцшильда. Важно также отметить, что линии  $y = y_1$  и  $y = y_2$  являются пространственно-подобными. Подчеркнем, что расходимость  $T^{00}$  и  $T^{11}$  не связана с наличием физической каустики, а имеет чисто координатное происхождение. На линиях  $y = y_1$  и  $y = y_2$  заканчивается действие систем координат, и в поведении координат появляются особенности. Эти особенности обусловлены характером временной координаты  $t$ , так как радиус  $r$ , являясь инвариантом, не претерпевает изменения на линиях  $y = y_1$  и  $y = y_2$ . В рамках используемой здесь координатной системы избавиться от этих особенностей невозможно.

Исследуем указанные координатные особенности с помощью уравнений девиации геодезических для массивных частиц:

$$\frac{D^2 v^\mu}{ds^2} = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} v^\nu u^\rho v^\sigma, \quad (42)$$

где  $s$  — интервал, выбранный в качестве аффинного параметра,  $u^\mu$  — касательный вектор к геодезической, а  $v^\mu$  — вектор, разделяющий две геодезические. Возьмем в диагональной системе координат (3) чисто пространственный радиальный вектор  $v^\mu = (0, v, 0, 0)$ , тогда в метрике Вайдья (1) этот вектор равен  $v^\mu = (v/f_1, v, 0, 0)$ . У вектора  $u^\mu$  в обеих системах радиальная компонента  $u^1 = u$ . Вычислим правую часть (42) сначала в метрике Вайдья (1), а затем преобразуем ее в диагональную метрику (3). В метрике Вайдья в (42) войдет только компонента  $R_{0110} = 2m/r^3$ , а другие компоненты тензора кривизны содержат угловые индексы и в результате не войдут. В итоге получаем в диагональных координатах для пространственной части

$$R^1_{\nu\rho\sigma}u^\nu u^\rho v^\sigma = \frac{2mu^2v}{r^3 f_1}. \quad (43)$$

Рассмотрим поведение входящей геодезической с  $u < 0$  в метрике Вайдья. Для этого запишем уравнение для радиальной компоненты геодезической

$$\frac{du}{ds} + \Gamma^1_{00}(u^0)^2 + \Gamma^1_{01}u^0u^1 = 0, \quad (44)$$

где

$$\Gamma^1_{00} = \frac{-r^2(dm/dz) - 2m^2 + rm}{r^3}, \quad \Gamma^1_{01} = -\frac{m}{r^2}, \quad (45)$$

а  $u^0$  находится из условия нормировки  $u^\mu u_\mu = 1$  в виде

$$u^0 = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + f_1}}{f_1}. \quad (46)$$

Рассмотрим уравнение (44) в предельном случае  $u \rightarrow 0$ , тогда

$$\frac{du}{ds} \rightarrow -\frac{(r - r_-)(r - r_+)}{r^3 f_1}, \quad (47)$$

где

$$r_\pm = \frac{m}{2\alpha} (\pm\sqrt{1 + 8\alpha} - 1). \quad (48)$$

Легко видеть, что  $r_- < 0$ , а  $r_+ < 2m$  при  $\alpha > 0$ , поэтому  $du/ds < 0$  при  $r > 2m$ . Поскольку  $u < 0$ , это означает, что величина  $u$  остается отрицательной и нигде в области  $r > 2m$  в нуль не обращается. Таким образом, на границах действия координатных систем  $y \rightarrow y_1$  и  $y \rightarrow y_2$  при  $2m < r < \infty$  девиация геодезических не имеет особенностей. Физически это означает, что действующие на падающие тела приливные силы конечны и особенности при  $y = y_1$  и  $y = y_2$  имеют чисто координатную природу. Эти особенности можно классифицировать как нарушение аналитичности метрики, не связанное с расходимостью алгебраических инвариантов тензора кривизны [43].

В случае исходящего луча появляются дополнительные особенности при  $y = y_3$  и  $y = y_4$ , которые мы подробно исследуем в разд. 3 путем выбора других координат.

### 2.4. Аккреция при $\alpha \geq 1/8$

Пусть теперь

$$\alpha > 1/8. \quad (49)$$

В этом случае  $y_1$  и  $y_2$  — комплексно-сопряженные числа. Вычисляя интеграл (12), получаем

$$\Psi = \frac{2}{\sqrt{(2y-1)^2 + 8\alpha - 1}} \times \exp \left[ -\frac{1}{\sqrt{8\alpha - 1}} \operatorname{arctg} \frac{2y-1}{\sqrt{8\alpha - 1}} \right]. \quad (50)$$

Функция  $\Psi(y)$  многозначна из-за арктангенса, но это не отражается на результате, так как дополнительный множитель в (50) может быть скомпенсирован выбором функции  $B(t)$ , т. е. соответствующим переопределением временной координаты. Применяя тот же метод, что и в разд. 2.1, находим

$$f_0 = \frac{r^4[(2y-1)^2 + 8\alpha - 1]^2}{16yr_0^4(2\alpha)^2\Phi^2}. \quad (51)$$

В промежуточном же случае  $8\alpha = 1$  имеем совпадение двух поверхностей  $y_1 = y_2 = 1/2$  и

$$\Psi = \frac{1}{|y - 1/2|} \exp \frac{1}{2y - 1}, \quad (52)$$

$$f_0 = \frac{16r^4(y - 1/2)^6}{yr_0^4} \exp \left\{ -\frac{2}{2y - 1} \right\}. \quad (53)$$

Этот случай в некотором смысле является аналогом экстремальной черной дыры, имеющей два совпадающих горизонта.

Мы не будем подробно исследовать глобальную геометрию полученных решений в координатах  $(t, r)$ , поскольку значительно проще и эффективнее это сделать в других координатах  $(\eta, y)$ , которые мы введем в разд. 3, и там же построим диаграммы Картера–Пенроуза для всех случаев аккреции. В координатах  $(\eta, y)$  можно будет получить аналитическое решение в явном виде, тогда как в координатах  $(t, r)$  решение получается только в параметрической форме.

### 2.5. Природа расходимости $f_0 \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow 0$

Интересной особенностью является расходимость  $f_0 \rightarrow \infty$  на горизонте видимости черной дыры Вайдья  $y = 0$ . Это поведение противоположно тому, что имеет место на гравитационном радиусе черной дыры Шварцшильда, где  $f_0 = 0$ . Аккреция качественно меняет вид геометрии вблизи горизонта видимости с учетом нестационарности черной дыры. В данном разделе мы объясним, почему это происходит. Рассмотрим для примера случай слабой аккреции. Из соотношения  $T_0^0 + T_1^1 = 0$  и уравнений (33), (34) получаем

$$\nu' - \lambda' = \frac{4M_1}{r^2} e^\lambda. \quad (54)$$

Отсюда

$$\nu' = \frac{f_0'}{f_0} = \frac{2M_1'/r + 2M_1/r^2}{1 - 2M_1/r}. \quad (55)$$

Интегрируя (55), имеем

$$f_0 = e^{\phi(t)} \exp \left\{ \int_{r_0}^r d\tilde{r} \frac{2M_1'/\tilde{r} + 2M_1/\tilde{r}^2}{1 - 2M_1/\tilde{r}} \right\}, \quad (56)$$

где  $\phi(t)$  — произвольная функция, которая может быть исключена переопределением времени  $dt' = dt e^{\phi/2}$ , и интеграл в (56) берется при  $t = \text{const}$ . Зависимость от  $t$  и  $\tilde{r}$  входит также через переменную  $\tilde{v}(t, \tilde{r})$  в функции  $M_1(\tilde{v})$ , но интеграл вычисляется вдоль линии  $t = \text{const}$ , т. е. время в интеграле является параметром.

Интеграл в показателе экспоненты в (56) можно выразить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \nu &= \int_{r_0}^r d\tilde{r} \frac{2M_1'/\tilde{r} + 2M_1/\tilde{r}^2}{1 - 2M_1/\tilde{r}} = \\ &= -\ln r^2 - \ln \left| 1 - \frac{2M_1}{r} \right| + 2 \int_{r_0}^r \frac{d\tilde{r}}{r(1 - 2M_1/\tilde{r})}, \end{aligned} \quad (57)$$

где, как и выше, интеграл вычисляется при  $t = \text{const}$ . При  $M_1 = \text{const}$  последний интеграл в правой части (57) легко берется, и из (56) получаем, что в этом случае реализуется метрика Шварцшильда с  $f_0 = f_1$ .

Рассмотрим теперь случай  $\partial M_1/\partial v \neq 0$ , т. е. в нашем случае с аккрецией  $\partial M_1/\partial v > 0$ . При  $t = \text{const}$  можно записать  $d\tilde{r} = f_1 dv$ . Тогда интеграл в правой части (57) запишется в простом виде

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{r(t, v)}, \quad (58)$$

где  $v_0 = \text{const}$ . Если рассматривать движение конкретного фотона, то  $|v| = \text{const} < \infty$ , и интеграл (58) ограничен.

Проследим, как происходит переход от метрики с аккрецией фотонов, для которой  $f_0 \rightarrow \infty$  на горизонте видимости, к метрике Шварцшильда с  $f_0 \rightarrow 0$  на гравитационном радиусе. Причина такой кардинальной трансформации заключается в том, что переменная  $v$  при окончании аккреции (в области значений  $\partial M_1/\partial v \rightarrow 0$ ) стремится к  $-\infty$ . В результате интеграл в (57) стремится к  $-\infty$ , что видно из (58). Численно этот интеграл становится в точности равным второму логарифму в (57). Поэтому у

горизонта видимости происходит сокращение двух бесконечностей, и в итоге в метрике Шварцшильда  $f_0 \rightarrow 0$ . Итак, можно сказать, что метрика Шварцшильда является вырожденным особым случаем.

Найдем верхний предел в (58). Он определяется преобразованием координат (22) при  $t = \text{const}$ , т. е. уравнением  $rdr = [r - 2M_1(v)]dv$ . Это уравнение определяет сечение поверхности  $v = v(t, r)$  плоскостью  $t = \text{const}$ . При  $M_1 = \text{const}$  получаем

$$v = r - 2M_1 + 2M_1 \ln |r - 2M_1| + B_1(t) \rightarrow -\infty \quad (59)$$

при  $r \rightarrow 2M_1$ , как уже было сказано выше. Для метрики Шварцшильда  $B_1(t) = t + B_2$ , где  $B_2 = \text{const}$ .

### 3. КООРДИНАТЫ $(\eta, y)$

Для детального исследования глобальной геометрии метрики Вайдья с линейной массовой функцией  $m(z)$  полезно преобразовать метрику Вайдья (1) к ортогональной системе с некоторыми новыми координатами  $\eta$  и  $y$  (см. подробнее в [37]):

$$ds^2 = f_0(\eta, y) d\eta^2 - \frac{dy^2}{f_1(\eta, y)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (60)$$

с двумя метрическими функциями  $f_0(\eta, y)$  и  $f_1(\eta, y)$ . Первая новая переменная  $\eta$  будет определена ниже, а в качестве второй новой переменной мы выбрали  $y = 1 - 2m(z)/r$ . В случае  $m(z) = m_0 - \alpha z$  расчет, аналогичный выполненному в разд. 2.1, дает

$$m = C(\eta)\Phi(y), \quad (61)$$

где

$$\Phi(y) \equiv \exp \left[ -2\alpha \int \frac{dy}{(1-y)(y^2 - y + 4\alpha)} \right] > 0, \quad (62)$$

а  $C(\eta)$  — произвольная функция,

$$f_1 = -\frac{(1-y)^3(y^2 - y + 4\alpha)}{(2C\Phi)^2}, \quad (63)$$

$$f_0 = -\frac{(y^2 - y + 4\alpha) C_{,\eta}^2}{1-y} \Phi^2. \quad (64)$$

Корни уравнения  $y^2 - y + 2\alpha = 0$  были выписаны в (15), а корни уравнения  $y^2 - y + 4\alpha = 0$  даются выражениями (27). Заметим, что  $0 < y_1 < y_3 \leq 1/2 \leq y_4 < y_2 < 1$ .

Путем переопределения временной переменной  $\eta$  всегда можно сделать  $C_{,\eta} = \text{const}$ . Тогда для непрерывности предельного перехода к метрике Шварцшильда  $\alpha \rightarrow 0$  должно быть  $C(\eta) = \alpha\eta + C_0$  с  $C_0 = \text{const}$ .



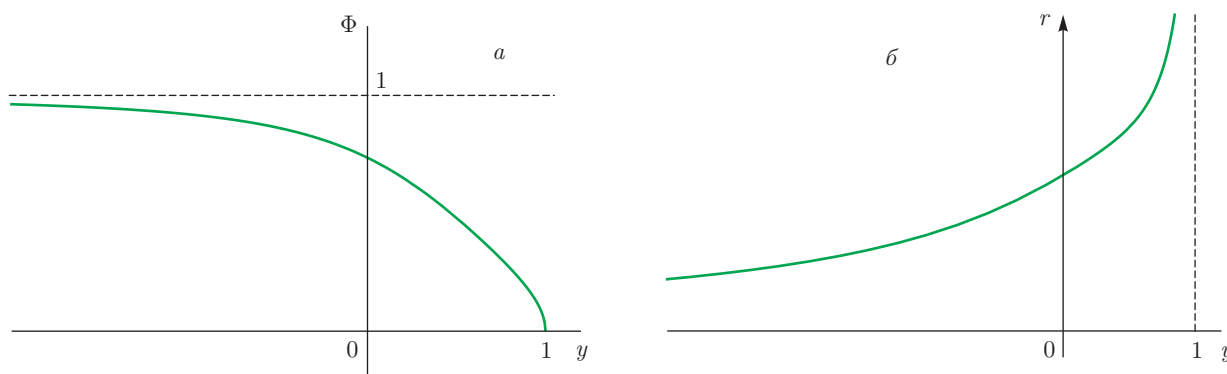


Рис. 2. а) Функция  $\Phi(y)$  в случае  $\alpha > 1/16$ . б) Функция  $r(y)$  в случае  $\alpha > 1/8$

В результате мы нашли явную зависимость всех метрических функций в (60) от координат  $\eta$  и  $y$ . При вычислении интеграла в (62) возникают три существенно разных случая: 1) мощная аккреция при  $\alpha > 1/16$ , 2) умеренная аккреция при  $\alpha = 1/16$ , 3) слабая аккреция при  $\alpha < 1/16$ .

Рассмотрим в координатах  $(\eta, y)$  инвариант (30). Будем называть « $R^*$ -областью» область пространства-времени, в которой  $Y < 0$ , а « $T^*$ -областью» — область, где  $Y > 0$ . В  $R^*$ -областях  $\eta$  является временной координатой, а  $y$  — пространственной координатой, и наоборот, в  $T^*$ -областях  $\eta$  — пространственная координата, а  $y$  — временная координата.

Метрика принимает простой вид после конформного преобразования:

$$ds^2 = \frac{C^2 \Phi^2}{\alpha^2 (1-y)} \{ (y^2 - 2y + 4\alpha) \times [ (d \ln \Phi)^2 - (d \ln C)^2 ] \} - r^2 d\Omega^2. \quad (65)$$

Отсюда видно, что нулевые геодезические даются уравнениями

$$C = A \Phi^{\pm 1}, \quad A = \text{const}. \quad (66)$$

В случае аккреции верхний знак «+» соответствует исходящим нулевым лучам, а нижний знак «-» — входящим нулевым лучам, и наоборот в случае метрики Вайдья, образуемой исходящим излучением.

Принимая во внимание (65), мы строим диаграммы Картера–Пенроуза в координатах  $\log C$  и  $\log \Phi(y)$  путем следующего преобразования:

$$t' = \arctg [\ln C + \ln \Phi(y)] - \arctg [\ln C - \ln \Phi(y)], \\ x' = \arctg [\ln C + \ln \Phi(y)] + \arctg [\ln C - \ln \Phi(y)],$$

с соответствующими сдвигами и переменной осей там, где это необходимо.

Начнем со случая мощной аккреции  $\alpha > 1/16$ . Тогда  $Y > 0$  и, следовательно, мы находимся в  $T^*$ -области. Интегрирование в (62) дает

$$\Phi = \frac{\sqrt{1-y}}{(y^2 - y + 4\alpha)^{1/4}} \times \exp \left[ -\frac{1}{2\sqrt{16\alpha-1}} \left( \arctg \frac{2y-1}{\sqrt{16\alpha-1}} + \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (67)$$

Поведение функции  $\Phi$  качественно одинаково во всей области  $\alpha > 1/16$ , см. рис. 2. Однако зависимость  $r(y)$  различна в интервалах  $\alpha > 1/8$ ,  $\alpha = 1/8$  и  $1/16 < \alpha < 1/8$ , см. рис. 2, 3. Согласно (67), если  $\alpha > 1/8$ , то радиус  $r = 2m/(1-y)$  является монотонно возрастающей функцией  $y$  (от  $r = 0$  при  $y = \infty$  до  $r = \infty$  при  $y = 1$ ). Будем называть случай  $\alpha > 1/8$  сверхмощной аккрецией, а случай  $1/16 < \alpha < 1/8$  — просто сильной аккрецией. Заметим также, что кривые  $y = y_1$ ,  $y = y_2$  являются пространственноподобными.

Помимо «естественных» границ, таких как  $r = 0$  и бесконечностей, на диаграммах Картера–Пенроуза будут существовать также горизонты различных типов (нулевые, времениподобные и пространственноподобные), представляя границы диаграммы, при этом сферически-симметричное пространство-время будет состоять из некоторого набора треугольников и квадратов, разделенных общими границами. Отметим, что мы наложили дополнительное физическое требование  $m \geq 0$ . В результате этого физическое пространство-время может оказаться геодезически неполным.

Поскольку по определению  $\Phi(y) > 0$ , из нашего физического ограничения  $m \geq 0$  следуют неравенства  $C \geq 0$ ,  $y \leq 1$ , а из  $r \geq 0$  следует, что  $-\infty < y < 1$ . Поэтому границами являются  $y = -\infty$  и  $y = 1$ . Везде имеет место  $Y \geq 0$ , т. е. внутри границ лежит

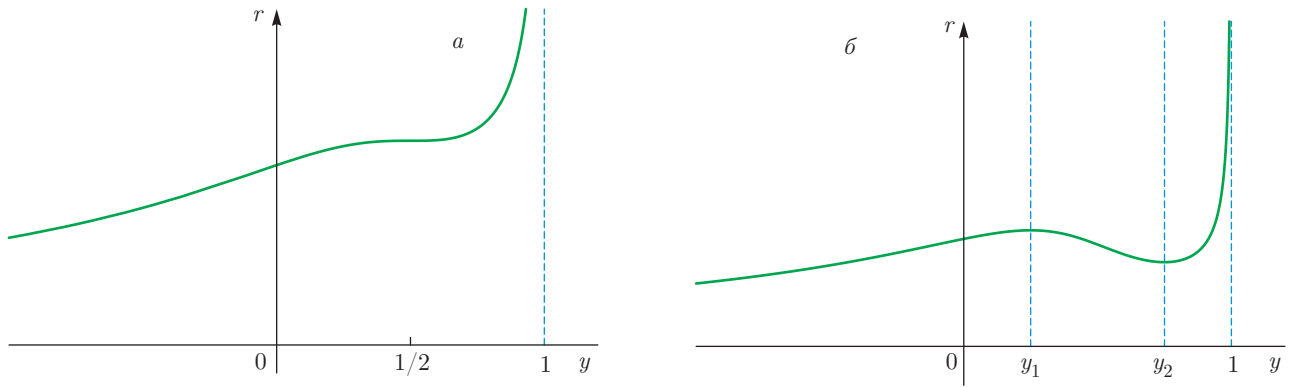


Рис. 3. а) Функция  $r(y)$  в случае  $\alpha = 1/8$ . б) Функция  $r(y)$  в случае «мощной» аккреции с  $1/16 < \alpha < 1/8$

$T^*$ -область, где линии  $y = \text{const}$  являются пространственноподобными (роль времени играет  $(-y)$  и это время возрастает снизу вверх), а линии  $\eta = \text{const}$  (или  $C(\eta) = \text{const}$ ) — времениподобными. Далее мы видим, что границы  $y = -\infty$  ( $r = 0$ ) являются пространственноподобными и сингулярными, поскольку инвариант  $Y \rightarrow +\infty$  при  $y \rightarrow 1$ .

На первый взгляд, границы при  $y = 1$  являются нулевыми. Но поскольку  $C(\eta)$  и  $\Phi(y)$  находятся в знаменателе  $Y$  и могут обращаться в нуль и в бесконечность, необходимо более тщательное исследование. Будем использовать две конгруэнции нулевых геодезических. Рассмотрим сначала входящие лучи, для которых  $m = C(\eta)\Phi(y) = \text{const}$ . Они начинаются от  $y = 1$ , где  $r \propto 1/(1 - y)$ ,  $Y \propto (1 - y)^3$ , и входят в пространственно-временную сингулярность  $r = 0$ . Мы видим, что, действительно, границей является нулевая бесконечность прошлого, где  $y = 1, r = \infty$ . Величина  $m$  вдоль этой границы изменяется от  $m = 0$  до  $m = \infty$ , в то время как  $\Phi(y) = 0$  и  $C(\eta) = \infty$ .

Природа второй границы  $y = 1$  более сложная. Рассмотрим вторую конгруэнцию нулевых геодезических, для которых  $C(\eta) = \text{const} \Phi(y)$ . Они начинаются от  $y = 1$ , где при  $y \rightarrow 1$  имеем  $m \propto (1 - y)$ ,  $r = \text{const}$ ,  $Y \propto (1 - y)$ . Таким образом, рассматриваемая граница  $y = 1$  является нулевой и вдоль нее  $\Phi(y) = 0, C(\eta) = 0, m = 0$  и  $r$  изменяется от  $r = 0$  до  $r = \infty$ . Следовательно, она больше не является бесконечностью, а является краем нулевых лучей, которые начинают аккрецию. Очевидно, такое пространство-время не является геодезически полным, см. рис. 4. Аналогичные рассуждения в случаях  $\alpha = 1/8$  и  $1/16 < \alpha < 1/8$  приводят к диаграммам, показанным на рис. 5 и 6.

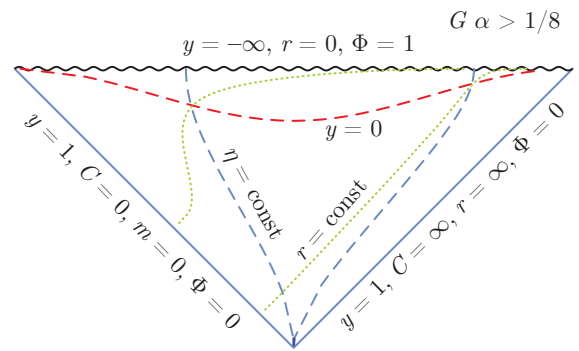


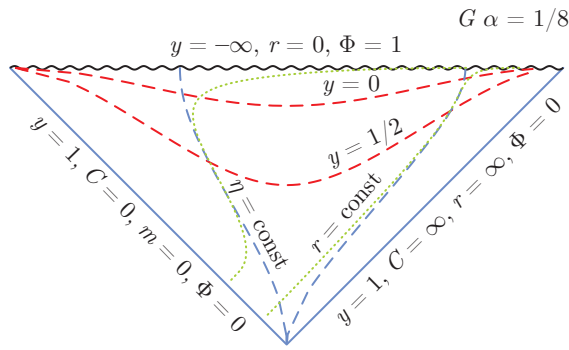
Рис. 4. Диаграмма Картера–Пенроуза для глобальной геометрии метрики Вайдья в случае «сверхмощной» аккреции  $\alpha > 1/8$  с линейной массовой функцией. Волнистой линии соответствует сингулярность  $y = -\infty$  при  $r = 0$ . Одна из двух нулевых линий  $y = 1$  является нулевой бесконечностью прошлого с  $r = \infty$ , а вторая соответствует границе начальной аккреции с нулевой массой  $m = 0$ . Временная координата идет снизу вверх, а пространственная координата — слева направо. Везде в  $T^*$ -области временной координатой является  $(-y)$ . Эти линии пересекают пространственноподобную линию  $y = 0$ , которая служит горизонтом видимости и отделяет пространственно-временную область, в которой поверхности  $r = \text{const}$  являются времениподобными ( $y > 0$ ), от областей, где они пространственноподобные ( $y < 0$ )

В промежуточном случае  $\alpha = 1/16$  функция  $\Phi(y)$  имеет вид

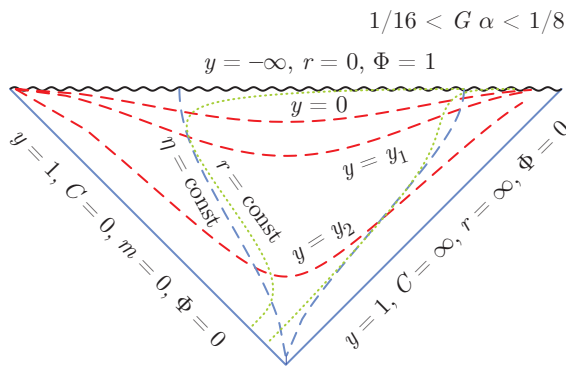
$$\Phi = \sqrt{\left| \frac{y-1}{y-(1/2)} \right|} \exp \left\{ \frac{1}{4(y-1/2)} \right\}, \quad (68)$$

и

$$f_0 = \left| y - \frac{1}{2} \right| \exp \left\{ \frac{1}{2(y-1/2)} \right\}, \quad (69)$$



**Рис. 5.** Диаграмма Картера–Пенроуза для переходного случая от «сверхмощной» к «просто мощной» аккреции с  $\alpha = 1/8$ . Этот случай отличается от предыдущего наличием точек поворота на линиях  $r = \text{const}$ , соответствующих  $y = y_1 = y_2 = 1/2$  на графиках  $r = r(y)$



**Рис. 6.** Диаграмма Картера–Пенроуза для случая «просто мощной» аккреции  $1/16 < \alpha < 1/8$

$$Y = \frac{(1-y)^3(y-1/2)^2}{4C^2\Phi^2} = \frac{(1-y)^2|y-1/2|^3}{4C^2} \exp\left\{-\frac{1}{2(y-1/2)}\right\}, \quad (70)$$

см. рис. 7. Диаграмма Картера–Пенроуза состоит из двух частей: треугольника и квадрата, склеенных вместе (и разделяемых) двойным горизонтом  $y = y_3 = y_4 = 1/2$ . По обеим сторонам от него находятся  $T^*$ -области, а линии  $y = \text{const}$  являются пространственноподобными.

Треугольник строится из пространственноподобных сингулярных линий  $y = -\infty$ , где  $r = 0$  и из двух нулевых границ  $y = y_3 = y_4 = 1/2$ . Одна из них является двойным горизонтом, в то время как другая — граничным нулевым лучом с  $m = 0$  и  $r = 0$ . При обращении с двойными горизонтами требуется аккуратность, так как  $\Phi(1/2-0) = 0$  и  $\Phi(1/2+0) = \infty$ . Рассмотрим лучи с  $C\Phi = m = \text{const}$ , создающие аккрецию. Видим, что  $C(\eta) = \infty$  при  $y(1/2-0)$ ,

и это как раз окончание диапазона координат в треугольнике. При  $y(1/2+0)$  имеем  $C(\eta) = 0$ , и это начало нового пространственного диапазона координат в квадрате. Для граничного луча с  $m = 0$  вдоль  $y = 1/2$  как  $C$ , так и  $\Phi$  равны нулю. Инвариант  $Y$  расходится, но точка  $y = 1/2$  является координатной сингулярностью, детерминант метрического тензора в этой точке равен нулю. См. описание построения на рис. 8.

В случае слабой аккреции  $\alpha < 1/16$  двойной горизонт расщепляется на два при  $y = y_3$  и  $y = y_4$ . Появление этих «новых горизонтов» обусловлено тем фактом, что мы рассматриваем здесь неограниченную аккрецию с бесконечным ростом массы черной дыры. Функция  $\Phi(y)$  теперь принимает вид

$$\Phi = \sqrt{1-y} |y - y_3|^{y_3/[2(y_4-y_3)]} \times |y - y_4|^{-y_4/[2(y_4-y_3)]}, \quad (71)$$

и

$$f_0 = -|y - y_3|^{y_3/(y_4-y_3)+1} |y - y_4|^{-y_4/(y_4-y_3)+1}, \quad (72)$$

$$Y = \frac{(1-y)^2(y-y_3)(y-y_4)}{4C^2} \times |y - y_3|^{-y_3/(y_4-y_3)} |y - y_4|^{y_4/(y_4-y_3)}, \quad (73)$$

см. графики на рис. 9.

Глобальная геометрия в этом случае более сложная. Диаграмма Картера–Пенроуза состоит из одного треугольника и двух квадратов. Структура границ треугольников остается точно такой же, как раньше (но теперь  $y < 1/2$ ), и мы имеем  $T^*$ -область, в которой линия  $\eta = \text{const}$  времениподобна,  $y = \text{const}$  пространственноподобна. Также появляется  $R^*$ -область, границы которой являются «новыми горизонтами»  $y = y_3$  и  $y = y_4$ . Левая граница состоит из двух частей при  $y = y_3$ . Последняя является просто крайним нулевым лучом аккреции с  $m = 0$ ,  $C(\eta) = 0$ ,  $\Phi = 0$  и  $r = 0$ , а верхняя, имеющая  $C = \infty$ ,  $\Phi = 0$ , представляет собой горизонт событий между  $R^*$ -областью и  $T^*$ -областью. Правая граница также состоит из двух частей при  $y = y_4$ . Верхняя часть границы представляет собой «последний» луч аккреции  $r = \infty$ ,  $m = \infty$ ,  $C(\eta) = \infty$  и  $\Phi = \infty$  (нулевая бесконечность будущего), а нижняя является космологическим горизонтом, соединяющим  $R^*$ -область и внешнюю  $T^*$ -область ( $y_3 \leq y_4 \leq 1$ ). Второй квадрат ( $y_4 \leq y \leq 1$ ) имеет такую же структуру, за исключением того, что теперь  $y_4 > 1/2$ . Как было указано, такое пространство-время не является геодезически полным, см. соответствующую диаграмму на рис. 10.

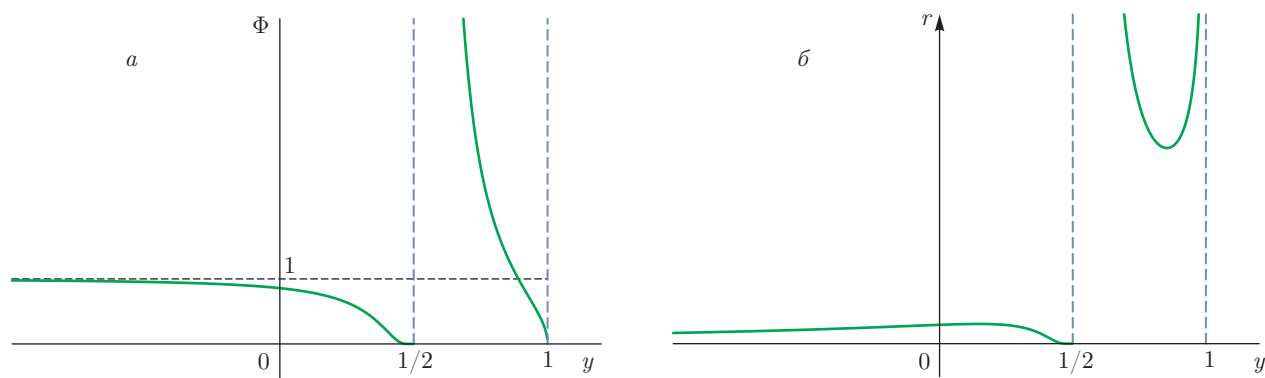


Рис. 7. Функции  $\Phi(y)$  (а) и  $r(y)$  (б) в случае  $\alpha = 1/16$

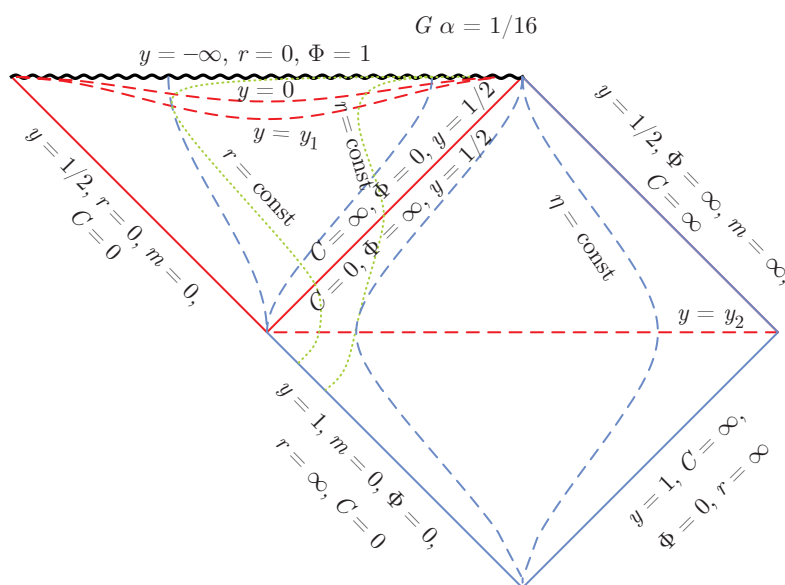


Рис. 8. Диаграмма Картера–Пенроуза для переходного случая от «мощной» к «слабой» аккреции  $\alpha = 1/16$ . Двойной горизонт  $y = y_3 = y_4 = 1/2$  разделяет две  $T^*$ -области. Появляется нулевая бесконечность будущего, где  $y = 1/2, m, r = \infty$

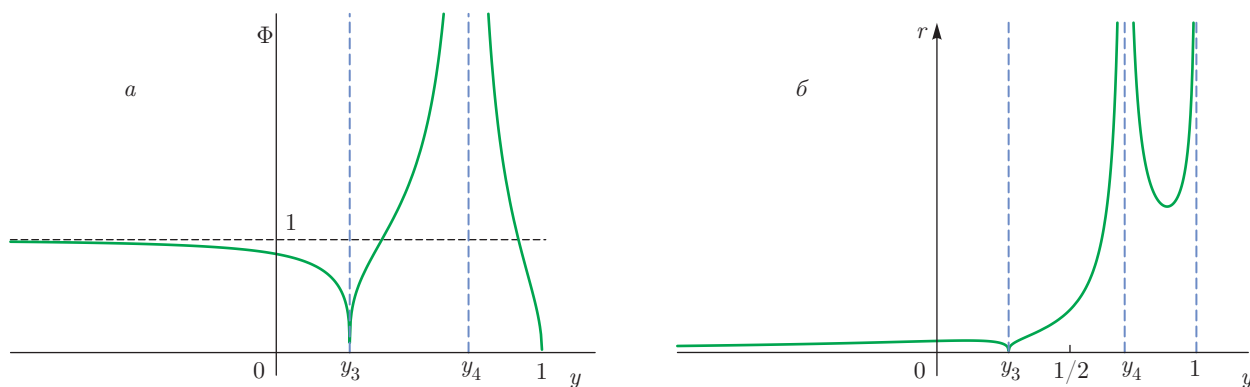


Рис. 9. Функции  $\Phi(y)$  (а) и  $r(y)$  (б) в случае «слабой» аккреции с  $\alpha < 1/16$

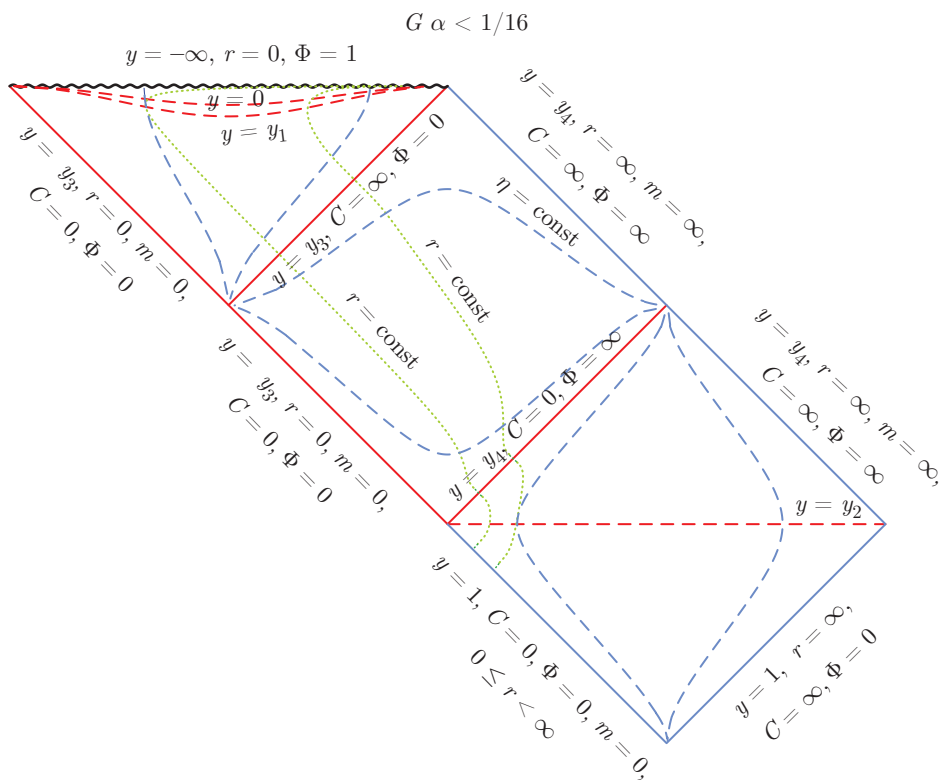


Рис. 10. Диаграмма Карттера–Пенроуза в случае «слабой» аккреции  $\alpha < 1/16$ . Двойной горизонт расщепляется на два: горизонт событий при  $y = y_3$  и космологический горизонт при  $y = y_4$ . Теперь  $T^*$ -области имеются при  $-\infty < y < y_3$  и при  $y_4 < y < 1$ . В промежутке  $y_3 < y < y_4$  находится  $R^*$ -область, в которой  $\eta$  — временная координата, а  $y$  — пространственная координата

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе найдено преобразование координат от стандартного представлением метрики Вайдья с линейной массовой функцией к двум разным диагональным системам координат  $(t, r)$  и  $(\eta, y)$ . Преимущество рассматриваемой линейной модели заключается в возможности аналитического вычисления всех метрических функций и световых геодезических. Оказалось, что при наличии даже слабой аккреции вблизи горизонта существует узкая область, в которой решение отличается от решения Шварцшильда не только количественно, но даже качественно. А именно, кроме горизонта видимости в диагональных координатах имеются поверхности с особенностями метрики  $g_{00} \rightarrow 0$  и  $g_{00} \rightarrow \infty$ , представляющие поверхности соответственно бесконечного красного и голубого смещения. Эти поверхности служат границами различных координатных систем, и их появление качественно отличает полученную метрику аккрецирующей черной дыры от метрики Шварцшильда. Показано, что одной ко-

ординатной системы с диагональными координатами недостаточно для покрытия всего пространства-времени, а требуются несколько таких систем. Отличие от метрики Шварцшильда, например в случае очень слабой аккреции, связано с расходимостью координатного времени  $t$  для радиально падающего светового луча на поверхности, расположенной вне горизонта видимости черной дыры Вайдья. При этом координатное время радиально движущихся фотонов на самом горизонте видимости оказывается конечным.

Расходимость компонент тензора энергии-импульса  $T^{00}$  и  $T^{11}$  на указанных поверхностях не связана с наличием физической каустики, а имеет чисто координатное происхождение. Действительно, исследование уравнений девиации геодезических показало, что приливные силы конечны на поверхностях  $g_{00} \rightarrow 0$  и  $g_{00} \rightarrow \infty$  в  $R$ -области (при  $r > 2m$ ). Поэтому указанные поверхности являются исключительно координатными сингулярностями, которые можно назвать «ложными огненными стенами» (false firewalls).



Во втором наборе диагональных координат  $(\eta, y)$  найдено максимальное аналитическое продолжение метрики Вайдья в различных случаях, соответствующих различным скоростям аккреции, и удалось построить полный набор диаграмм Картера–Пенроуза. Эти диаграммы содержат набор областей пространства-времени, разделенных горизонтами и граничными линиями либо  $g_{00} = 0$ , либо  $g_{00} = \infty$ , на которых заканчивается действие систем координат. Пространство-время на построенных диаграммах геодезически неполно, поскольку мы наложили физическое условие неотрицательности массовой функции  $m \geq 0$ , но в данной физической постановке задачи полученное построение является максимально возможным.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (грант № 15-02-05038-а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. C. Vaidya, *Current Sci.* **12**, 183 (1943).
2. P. Vaidya, *Proc. Indian Acad. Sci. A* **33**, 264 (1951).
3. P. Vaidya, *Nature* **171**, 260 (1953).
4. И. В. Волович, В. А. Загребнов, В. П. Фролов, *ТМФ* **29**, 191 (1976) [I. V. Volovich, V. A. Zagrebnoy, and V. P. Frolov, *Theor. Math. Phys.* **29**, 1012 (1976)].
5. W. A. Hiscock, *Phys. Rev. D* **23**, 2823 (1981).
6. Y. Kuroda, *Progr. Theor. Phys.* **71**, 1422 (1984).
7. M. I. Beciú, *Phys. Lett. A* **100**, 77 (1984).
8. Y. Kaminaga, *Class. Quant. Grav.* **7**, 1135 (1990).
9. Z. Zheng, C. Q. Yang, and Q. A. Ren, *Gen. Rel. Grav.* **26**, 1055 (1994).
10. A. N. St. J. Farley and P. D. D'Eath, *Gen. Rel. Grav.* **38**, 425 (2006).
11. S. Sawayama, *Phys. Rev. D* **73**, 064024 (2006).
12. H. Knutsen, *Astron. Space Sci.* **98**, 207 (1984).
13. W. Barreto, *Astron. Space Sci.* **201**, 191 (1993).
14. R. C. Adams, B. B. Cary, and J. M. Cohen, *Astron. Space Sci.* **213**, 205 (1994).
15. S. D. Maharaj, G. Govender, and M. Govender, *Gen. Rel. Grav.* **44**, 1089 (2002).
16. E. H. Sungwook, D. Hwang, E. D. Stewart, and D. Yeom, *Class. Quant. Grav.* **27**, 045014 (2010).
17. M. Alishahiha, A. F. Astaneh, and M. R. M. Mozaffar, *Phys. Rev. D* **90**, 046004 (2014).
18. W. A. Hiscock, L. G. Williams, and D. M. Eardley, *Phys. Rev. D* **26**, 751 (1982).
19. Y. Kuroda, *Progr. Theor. Phys.* **72**, 63 (1984).
20. A. Papapetrou, *A Random Walk in General Relativity*, ed. by J. Krishna-Rao, Wiley Eastern, New Delhi (1985), p. 184.
21. B. Waugh and K. Lake, *Phys. Lett. A* **116**, 154 (1986).
22. I. H. Dwivedi and P. S. Joshi, *Class. Quant. Grav.* **6**, 1599 (1989).
23. I. H. Dwivedi and P. S. Joshi, *Class. Quant. Grav.* **8**, 1339 (1991).
24. P. S. Joshi and I. H. Dwivedi, *Gen. Rel. Grav.* **24**, 129 (1992).
25. P. S. Joshi and I. H. Dwivedi, *Phys. Rev. D* **45**, 2147 (1992).
26. P. S. Joshi and I. H. Dwivedi, *Phys. Rev. D* **47**, 5357 (1993).
27. I. H. Dwivedi and P. S. Joshi, *Comm. Math. Phys.* **166**, 117 (1995).
28. S. G. Ghosh and N. Dadhich, *Phys. Rev. D* **64**, 047501 (2001).
29. M. D. Mkenyeleye, R. Goswami, and S. D. Maharaj, *Phys. Rev. D* **90**, 064034 (2014).
30. B. Waugh and K. Lake, *Phys. Rev. D* **34**, 2978 (1986).
31. R. W. Lindquist, R. A. Schwartz, and C. W. Misner, *Phys. Rev.* **137**, 1364 (1965).
32. O. Levin and A. Ori, *Phys. Rev. D* **54**, 2746 (1996).
33. C.-G. Shao, B. Wang, E. Abdalla, and R.-K. Su, *Phys. Rev. D* **71**, 044003 (2005).
34. E. Abdalla and C. B. M. H. Chirenti, *Phys. Rev. D* **74**, 084029 (2006).
35. I.-C. Yang and C.-C. Jeng, *Chin. J. Phys.* **45**, 497 (2006).

36. I. Bengtsson and J. M. M. Senovilla, *Phys. Rev. D* **79**, 024027 (2009).
37. V. A. Berezin, V. I. Dokuchaev, and Yu. N. Eroshenko, *Class. Quant. Grav.* **33**, 145003 (2016); arXiv: 1603.00849 [gr-qc].
38. W. Israel, *Phys. Lett. A* **24**, 184 (1967).
39. F. Fayosyx, M. M. Martín-Prats, and J. M. M. Senovilla, *Class. Quant. Grav.* **12**, 2565 (1995).
40. K. D. Krori and J. Barua, *J. Phys. A: Math. Gen.* **17**, 2125 (1974).
41. B. Waugh and K. Lake, *Phys. Rev. D* **34**, 2978 (1986).
42. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматлит, Москва (2006) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford (1975)].
43. К. А. Бронников, С. Г. Рубин, *Лекции по гравитации и космологии*, МИФИ, Москва (2008).