

# КООПЕРАТИВНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ АНСАМБЛЯ ТРЕХУРОВНЕВЫХ $\Lambda$ -ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ В РЕЗОНАТОРЕ: ВЗГЛЯД С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

*И. В. Рыжов*<sup>a,\*</sup>, *Н. А. Васильев*<sup>a</sup>, *И. С. Косова*<sup>a</sup>, *М. Д. Штагер*<sup>a</sup>, *В. А. Малышев*<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> *Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена  
191186, Санкт-Петербург, Россия*

<sup>b</sup> *Научно-исследовательский институт физики им. В. А. Фока,  
Санкт-Петербургский государственный университет  
198504, Санкт-Петербург, Россия*

<sup>c</sup> *Zernike Institute for Advanced Materials, University of Groningen  
9747 AG Groningen, The Netherlands*

Поступила в редакцию 14 сентября 2015 г.,  
после переработки 15 сентября 2016 г.

Теоретически исследовано кооперативное излучение ансамбля трехуровневых оптических систем с дублетом в основном состоянии ( $\Lambda$ -схема), помещенного в циклический резонатор. Как известно, при такой конфигурации операционных переходов данный процесс может происходить (в отличие от двухуровневой модели излучателей) без инверсии населенности в целом, если дублет приготовлен в начальный момент времени в суперпозиционном (когерентном) состоянии. В идеальном случае гамильтоновой системы, когда потери резонатора и релаксация в ансамбле излучателей не учитываются, получены законы сохранения, позволяющие существенно понизить размерность фазового пространства данной модели ( $\mathbb{R}^{11} \rightarrow \mathbb{R}^5$ ) и использовать методы исследования динамики нелинейных систем для анализа трехуровневого сверхизлучения в этих условиях. На основе отображений Пуанкаре продемонстрирована возможность различных сценариев трехуровневого сверхизлучения: как квазипериодических, так и хаотических. Выявлена глобальная бифуркация системы при переходе от режима обычного сверхизлучения к режиму сверхизлучения без инверсии. Обсуждается также влияние потерь резонатора, однородного и неоднородного уширений в системе излучателей на найденные закономерности.

DOI: 10.7868/S0044451017050017

## 1. ВВЕДЕНИЕ

60 лет назад Дике предсказал, что система двухуровневых атомов, приготовленных в начальный момент времени в возбужденном состоянии, может излучать коллективно благодаря корреляции эмиттеров полем их же излучения [1]. Это явление получило впоследствии название когерентного спонтанного излучения — сверхизлучения Дике (в дальнейшем СИ). В своей работе Дике рассматривал систему с линейными размерами меньше длины волны излучения. В 1970-е гг. (спустя более пятнадцать лет после предсказания СИ) работа Дике получила дальнейшее развитие и была обобщена на

протяженные системы, где СИ имеет свои особенности [2–6]. Скрибановиц, Герман, Макгилливрей и Фелд (Skribanowitz, Herman, MacGillivray, Feld) были первыми, кто в 1973 г. продемонстрировал этот эффект экспериментально на вращательных переходах в газе HF (см. также [7–9]). Затем последовали работы, сообщающие о наблюдении СИ в твердой фазе [10–15], в спиновых системах [16–23], для рождения метастабильных состояний [24], в мезоскопических объектах [25], в плазменных структурах [26–28] и даже в нейтринной масс-спектроскопии [29]. Отметим в дополнение, что рэлеевское рассеяние света на бозе-эйнштейновском конденсате холодных атомов также имеет природу СИ [30–33], так как конденсат изначально находится в когерентном состоянии.

\* E-mail: igoryzhov@yandex.ru

Хорошо известно, что необходимым условием существования СИ [1] является наличие начальной инверсии населенностей уровней перехода [2–6, 34–39]. В случае многоуровневых излучателей, в частности, для рассматриваемых в данной работе трехуровневых атомов с  $\Lambda$ -схемой операционных переходов, данное ограничение не является обязательным: СИ возможно даже, когда начальная населенность верхнего уровня меньше суммарной населенности нижнего дублета (СИ без инверсии) [40–50]. Прообразом СИ без инверсии является усиление без инверсии, впервые предсказанное в работах [51–53] (см. [54] для обзора). Суть эффекта состоит в следующем. Если приготовить начальное состояние нижнего дублета в виде когерентной суперпозиции, переход в которую из верхнего состояния запрещен, то ортогональная ей суперпозиция, переход в которую разрешен, оказывается при этом незаселенной. Тогда переход с верхнего уровня в это суперпозиционное состояние оказывается инвертированным при сколь угодно малой населенности верхнего уровня. Данная модель была впервые рассмотрена в работах [40–42] и затем более детально в [43], где было найдено, что трехуровневое СИ демонстрирует различные динамические режимы (вплоть до хаотического) в зависимости от населенности верхнего уровня и величины расщепления дублета. Была сделана попытка интерпретации найденных режимов, но регулярного исследования проведено не было.

Цель настоящей работы — теоретически исследовать нелинейную динамику СИ ансамбля трехуровневых  $\Lambda$ -атомов в высокочастотном циклическом резонаторе, используя последовательно динамическую теорию нелинейных систем (модель системы и формализм ее описания представлены в разд. 2). Основная ее часть посвящена исследованию консервативной (гамильтоновой) модели, когда релаксация населенности и поляризованности, связанная с другими кроме СИ процессами, а также потери резонатора не учитываются. Следствием консервативности системы является наличие интегралов движения, которые вместе со специальным выбором начальных условий позволяют существенно редуцировать размерность фазового пространства исследуемой модели,  $\mathbb{R}^{11} \rightarrow \mathbb{R}^5$  (разд. 3).

Мы фокусируем наше внимание главным образом на анализе системы с невырожденным дублетом. Случай вырожденного дублета детально исследован нами в работе [45]. Получено уравнение для напряженности поля СИ, определяющее в фазовом пространстве системы  $\mathbb{R}^5$  ее стационарные точки. Явный вид этого уравнения позволил провести

двухпараметрическую (по параметрам  $\alpha$  и  $\delta$ ,  $\alpha$  — начальная населенность третьего уровня,  $\delta$  — расщепление дублета) классификацию этих точек, а также определить области их существования. Показано, что стационарные точки лежат в трехмерном подпространстве пятимерного фазового пространства,  $\{A \in \mathbb{R}^3\} \subseteq \mathbb{R}^5$  (разд. 4). На основе отображений Пуанкаре продемонстрирована возможность существования как квазипериодических, так и хаотических режимов трехуровневого СИ. Кроме того, выявлена глобальная бифуркация системы при переходе от режима обычного СИ в режим СИ без инверсии (разд. 5). В разд. 6 мы обсуждаем механизм, приводящий динамическую систему к хаосу, который связан с тем, что ее фазовая траектория периодически приближается к сепаратрисе, где создаются условия для перехода системы на качественно новую фазовую орбиту. Здесь же обсуждаются возможные сценарии ее хаотизации. В заключительной части работы (разд. 7) рассматривается влияние потерь резонатора, однородного и неоднородного уширений в системе излучателей на возможность реализации найденных режимов трехуровневого СИ, а также предлагаются варианты реальных систем, в которых эти режимы могут быть наблюдаемы.

## 2. МОДЕЛЬ И ФОРМАЛИЗМ

Мы рассматриваем ансамбль трехуровневых атомов с  $\Lambda$ -схемой операционных переходов (рис. 1), однородно распределенных вдоль одного из плеч высокочастотного циклического резонатора. Мы не учитываем влияние активной среды на собственные моды резонатора, т. е. ограничиваемся так называемым приближением пустого резонатора. Поиск мод резонатора с активной средой представляет в общем случае непростою задачу и выходит за рамки настоящей работы. Разрешенными считаются оптические переходы между верхним состоянием 3 и состояниями дублета 1 и 2. Соответствующие дипольные моменты переходов  $\mathbf{d}_{31}$  и  $\mathbf{d}_{32}$  считаются для простоты вещественными. Частоты оптических переходов  $\omega_{31}$  и  $\omega_{32}$  предполагаются распределенными в некотором интервале около средних значений  $\bar{\omega}_{31}$  и  $\bar{\omega}_{32}$  в соответствии с функциями распределения  $g_{31}(\omega)$  и  $g_{32}(\omega)$  (неоднородное уширение). Переходы между уровнями дублета не рассматриваются, а частота дублетного расщепления  $\omega_{21}$  считается много меньше частот  $\omega_{31}$  и  $\omega_{32}$ . Для простоты мы выбираем ее фиксированной и равной  $\bar{\omega}_{31} - \bar{\omega}_{32}$ . Это подразумевает, что частоты  $\omega_{31}$  и  $\omega_{32}$  смещаются симбатно (кор-

релировано), а распределения  $g_{31}(\omega)$  и  $g_{32}(\omega)$  идентичны, но центрированы на частотах соответственно  $\bar{\omega}_{31}$  и  $\bar{\omega}_{32}$ . Мы не рассматриваем случай некоррелированного неоднородного уширения частот оптических переходов, которое приводит также к неоднородному уширению дублета.

Оптическая динамика выделенного  $\Lambda$ -атома описывается матрицей плотности  $\rho_{mn}$  (где  $m, n = 1, 2, 3$ ), а напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  — уравнением Максвелла. Кроме того, все векторы (дипольные моменты переходов и поляризация поля) предполагаются направленными одинаково и в перпендикулярном к оси системы направлении. Тогда эволюция системы атомы + поле подчиняется следующей (одномерной) системе уравнений Максвелла – Блоха:

$$\dot{\rho}_{11} = \frac{1}{2T_1} \rho_{33} + i \frac{d_{31} E}{\hbar} (\rho_{31} - \rho_{13}), \quad (1a)$$

$$\dot{\rho}_{22} = \frac{1}{2T_1} \rho_{33} + i \frac{d_{32} E}{\hbar} (\rho_{32} - \rho_{23}),$$

$$\dot{\rho}_{33} = -\frac{1}{T_1} \rho_{33} - i \frac{d_{31} E}{\hbar} (\rho_{31} - \rho_{13}) - i \frac{d_{32} E}{\hbar} (\rho_{32} - \rho_{23}), \quad (1b)$$

$$\dot{\rho}_{21} = -i\omega_{21} \rho_{21} - i \frac{d_{31} E}{\hbar} \rho_{23} + i \frac{d_{32} E}{\hbar} \rho_{31}, \quad (1c)$$

$$\dot{\rho}_{31} = -\left(i\omega_{31} + \frac{1}{T_2}\right) \rho_{31} + i \frac{d_{31} E}{\hbar} (\rho_{33} - \rho_{11}) + i \frac{d_{32} E}{\hbar} \rho_{21}, \quad (1d)$$

$$\dot{\rho}_{32} = -\left(i\omega_{32} + \frac{1}{T_2}\right) \rho_{32} - i \frac{d_{32} E}{\hbar} (\rho_{33} - \rho_{22}) + i \frac{d_{31} E}{\hbar} \rho_{12}, \quad (1e)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (1f)$$

Здесь  $T_1$  и  $T_2$  — времена релаксации (продольной) населенности и (поперечной) когерентности, соответственно;  $1/T_2 = 1/(2T_1) + 1/T'_2$ ,  $T'_2$  — время релаксации когерентности, не связанное с релаксацией населенности;  $N$  — концентрация активных атомов в веществе;  $c$  — скорость света в вакууме;  $P$  — поляризованность среды (дипольный момент единицы объема), которая дается соотношением

$$P = N \int d\omega [g_{31}(\omega) d_{31} \rho_{31} + g_{32}(\omega) d_{32} \rho_{32}] + \text{c.c.} \quad (2)$$

Для краткости мы опустили в уравнениях (1) и (2) зависимости всех функций от координаты, времени

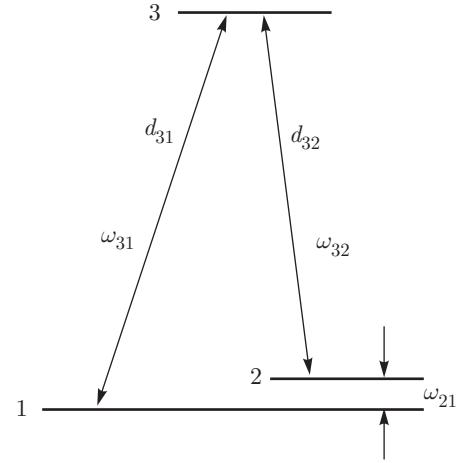


Рис. 1. Схема энергетических уровней  $\Lambda$ -излучателя. Номер линии ( $n = 1, 2, 3$ ) соответствует состоянию излучателя с энергией  $E_n$ . Сплошными двойными стрелками обозначены разрешенные переходы между уровнями излучателя, характеризующиеся частотами  $\omega_{31}$ ,  $\omega_{32}$  и дипольными моментами  $d_{31}$ ,  $d_{32}$  соответствующих переходов,  $\omega_{21}$  — частота расщепления дублета, переход между состояниями которого не рассматривается

и частоты. Начальные условия для элементов матрицы плотности и поля приведены в следующем разделе.

Допустим далее, что частоты  $\omega_{31}$  и  $\omega_{32}$  квази-резонансны одной из мод резонатора  $\omega_c$ , а спектр СИ не превышает зазора между его модами, т.е. ограничимся одномодовым приближением. С целью дальнейшего упрощения задачи пренебрежем зависимостью всех динамических переменных от пространственной координаты (приближение среднего поля). Данное приближение может быть оправдано при условии, если возбуждается волна, бегущая в одном направлении, и время обхода светом резонатора много меньше, чем характерное время СИ [43]. Будем искать решение системы уравнений (1) в виде

$$\rho_{31} = \mathcal{R}_{31} e^{-i\omega_c t}, \quad \rho_{32} = \mathcal{R}_{32} e^{-i\omega_c t}, \quad (3)$$

$$E = \mathcal{F} e^{-i\omega_c t} + \text{c.c.},$$

где амплитуды как поля  $\mathcal{F}$ , так и недиагональных элементов матрицы плотности  $\mathcal{R}_{31}$  и  $\mathcal{R}_{32}$  (в дальнейшем высокочастотных когерентностей) представляют собой функции, медленно изменяющиеся в масштабе оптического периода  $2\pi/\omega_c$  (приближение вращающейся волны). Отметим, что аналогичное предположение относительно низкочастотной когерентности  $\rho_{21}$  (в масштабе  $2\pi/\omega_{21}$ ) не используется. Для определенности собственная частота резонато-

ра  $\omega_c$  считается центрированной между частотами  $\bar{\omega}_{31}$  и  $\bar{\omega}_{32}$ , т. е.  $\omega_c = (\bar{\omega}_{31} + \bar{\omega}_{32})/2$ .

Предположим также, что дипольные моменты оптических переходов одинаковы,  $d_{31} = d_{32} = d$  (приближение, которое не является принципиальным). Отметим, что в данной задаче имеется характерная величина  $\Omega = \sqrt{2\pi\omega_c d^2 N/\hbar}$ , именуемая в литературе кооперативной частотой [38, 55], которая задает естественный масштаб времени и поля. Ее физический смысл таков: это частота Раби поля с числом фотонов, равным числу атомов в системе [55]. Вводя безразмерные время  $\tau = \Omega t$ , константы релаксации  $\tau_i = \Omega T_i$  ( $i = 1, 2$ ) и амплитуду поля  $\mathcal{E} = -idF/(\hbar\Omega)$  и переходя стандартным образом от системы уравнений (1) к аналогичной системе для медленно изменяющихся амплитуд, получим

$$\dot{\rho}_{11} = \frac{1}{2\tau_1} \rho_{33} + \mathcal{E}\mathcal{R}_{31}^* + \mathcal{E}^*\mathcal{R}_{31}, \quad (4a)$$

$$\dot{\rho}_{22} = \frac{1}{2\tau_1} \rho_{33} + \mathcal{E}\mathcal{R}_{32}^* + \mathcal{E}^*\mathcal{R}_{32},$$

$$\dot{\rho}_{33} = -\frac{1}{\tau_1} \rho_{33} - \mathcal{E}(\mathcal{R}_{31}^* + \mathcal{R}_{32}^*) - \mathcal{E}^*(\mathcal{R}_{31} + \mathcal{R}_{32}), \quad (4b)$$

$$\dot{\rho}_{21} = -i\delta\rho_{21} + \mathcal{E}\mathcal{R}_{32}^* + \mathcal{E}^*\mathcal{R}_{31}, \quad (4c)$$

$$\dot{\mathcal{R}}_{31} = -\left[i\left(\Delta + \frac{\delta}{2}\right) + \frac{1}{\tau_2}\right]\mathcal{R}_{31} + \mathcal{E}(\rho_{33} - \rho_{22} - \rho_{21}), \quad (4d)$$

$$\dot{\mathcal{R}}_{32} = -\left[i\left(\Delta - \frac{\delta}{2}\right) + \frac{1}{\tau_2}\right]\mathcal{R}_{32} + \mathcal{E}(\rho_{33} - \rho_{22} - \rho_{21}^*), \quad (4e)$$

$$\dot{\mathcal{E}} = -\frac{1}{\tau_{res}}\mathcal{E} + \int d\Delta \left[ g_{31} \left( \Delta - \frac{\delta}{2} \right) \mathcal{R}_{31} + g_{32} \left( \Delta + \frac{\delta}{2} \right) \mathcal{R}_{32} \right]. \quad (4f)$$

Здесь  $\Delta = (\omega_{31} - \bar{\omega}_{31})/\Omega = (\omega_{32} - \bar{\omega}_{32})/\Omega$  — безразмерная отстройка частот оптических переходов от их средних значений;  $\delta = \omega_{21}/\Omega$  — безразмерная частота расщепления дублета;  $\tau_{res} = \Omega T_{res}$  — безразмерное время жизни поля в резонаторе. Данная константа эффективно учитывает потери резонатора в приближении среднего поля [56].

### 3. ГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА

В первую очередь мы детально рассмотрим идеальный случай гамильтоновой системы, когда релаксация в системе излучателей и потери резонатора отсутствуют:  $T_1 = T_2 = T_{res} = \infty$ ,  $g_{31}(\omega) =$

$= \delta(\omega - \bar{\omega}_{31})$ ,  $g_{32}(\omega) = \delta(\omega - \bar{\omega}_{32})$ . Влияние этих факторов обсуждается в конце статьи. В этом случае система уравнений (4) имеет следующие интегралы движения:

$$\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = 1, \quad (5a)$$

$$\rho_{11}^2 + \rho_{22}^2 + \rho_{33}^2 + 2(|\rho_{21}|^2 + |\mathcal{R}_{31}|^2 + |\mathcal{R}_{32}|^2) = \text{const}, \quad (5b)$$

$$|\mathcal{E}|^2 + \rho_{33} = \text{const}, \quad (5c)$$

первый из которых означает закон сохранения нормировки, выполняющийся и в общем случае наличия релаксации (однородного и неоднородного уширений) и потерь резонатора. Второй есть не что иное, как сохранение шпура квадрата матрицы плотности. Интерпретация последнего (5c) не столь очевидна, хотя он напоминает закон сохранения энергии возбуждения системы. Наличие этих интегралов движения позволяет существенно упростить анализ динамики трехуровневого СИ.

Мы хотели бы особо подчеркнуть, что гамильтонов предел является базисным, позволяющим изучить стационарные состояния системы (см. разд. 4). Без его анализа вряд ли возможно понять оптическую динамику системы при наличии релаксации (некогерентных возмущений). Учет любой релаксации приводит к нарушению какого-либо из законов сохранения (5) (см. разд. 7), повышая тем самым размерность фазового пространства и делая подобный анализ трудно выполнимым, если вообще возможным. В таком случае мы вынуждены интегрировать численно систему уравнений (4) с учетом релаксации и сравнивать ее решения с идеальным (гамильтоновым) случаем (это сделано в разд. 7). На этом пути нам удастся сделать определенные заключения об оптической динамике системы в присутствии релаксации и указать временные интервалы, где гамильтонов предел наблюдаем.

В сравнении с двухуровневым СИ [37, 38] схема с дублетом в основном состоянии (трехуровневое СИ) вносит новые эффекты в отклик системы, порождаемые конкуренцией переходов  $|3\rangle \leftrightarrow |1\rangle$  и  $|3\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ . В связи с этим для исследования нелинейной динамики трехуровневого СИ мы выбираем начальные условия таким образом, чтобы процесс взаимодействия системы атомы + поле происходил максимально эффективным образом, а именно, при любой начальной населенности верхнего состояния и с минимальной задержкой импульса СИ. С этой целью обратим внимание на то, что уравнения (4d) и (4e) для высокочастотных когерентностей ( $\mathcal{R}_{31}$  и  $\mathcal{R}_{32}$ ) содержат слагаемые, пропорциональные низкочастотной

когерентности  $\rho_{21}$ . При этом, если  $\rho_{21}(0) \neq 0$ , то эволюция начальных флуктуаций  $\mathcal{R}_{31}$  и  $\mathcal{R}_{32}$  (затухание или рост) будет зависеть от фазы  $\rho_{21}(0)$ . При положительных значениях  $\rho_{21}(0)$  указанные флуктуации будут убывать, однако при отрицательных — лавинообразно возрастать, тем самым иницируя СИ. С точки зрения макроскопической электродинамики это означает диссипативную неустойчивость системы [36]. Подчеркнем, что это становится возможным при любой разности населенностей в каналах  $3 \leftrightarrow 1$  и  $3 \leftrightarrow 2$  и обеспечивается трансформацией низкочастотной когерентности  $\rho_{21}(0)$  в высокочастотные  $\mathcal{R}_{31}$  и  $\mathcal{R}_{32}$ . Последний эффект явно отражается в интеграле движения (5b).

Картина формирования динамики СИ данной  $\Lambda$ -системы выглядит особенно прозрачно в новом (коллективном) базисе состояний:  $|3\rangle$ ,  $|+\rangle = (|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$ ,  $|-\rangle = (|1\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}$  [41, 43, 46, 48]. Преобразование элементов матрицы плотности от старого базиса к новому осуществляется следующими соотношениями:

$$\rho_{++} = \frac{1}{2}(\rho_{11} + \rho_{22} + 2\operatorname{Re}[\rho_{21}]), \quad (6a)$$

$$\rho_{--} = \frac{1}{2}(\rho_{11} + \rho_{22} - 2\operatorname{Re}[\rho_{21}]), \quad (6b)$$

$$\rho_{+-} = \frac{1}{2}(\rho_{11} - \rho_{22} + \rho_{21} - \rho_{21}^*), \quad (6c)$$

$$\mathcal{R}_{3+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{R}_{31} + \mathcal{R}_{32}), \quad (6d)$$

$$\mathcal{R}_{3-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{R}_{31} - \mathcal{R}_{32}), \quad (6e)$$

где  $\rho_{++}$  и  $\rho_{--}$  — населенности оптически активного (bright) и пассивного (dark) состояний соответственно,  $\rho_{+-}$  — низкочастотная когерентность,  $\mathcal{R}_{3+}$  и  $\mathcal{R}_{3-}$  — высокочастотные когерентности соответствующих оптических каналов.

Из соотношения (6a) для населенности активного состояния  $\rho_{++}$  видно, что условием существования безинверсионного трехуровневого СИ является наличие инверсии в активном канале  $|3\rangle \leftrightarrow |+\rangle$ , т. е. в начальный момент времени должно выполняться неравенство  $\rho_{33}(0) > \rho_{++}(0)$ . В идеальном случае, когда населенность активного состояния отсутствует,

$$\rho_{++}(0) = \rho_{11}(0) + \rho_{22}(0) + 2\operatorname{Re}[\rho_{21}(0)] = 0,$$

должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\rho_{21}(0)] &= \frac{\alpha - 1}{2}, \quad \operatorname{Im}[\rho_{21}(0)] = 0, \\ -2\operatorname{Re}[\rho_{21}(0)] &= \rho_{11}(0) = \rho_{22}(0), \end{aligned} \quad (7)$$

где, напомним,  $\rho_{33}(0) = \alpha$  и  $0 < \alpha \leq 1$ . В дальнейшем будем говорить, что дублет приготовлен в максималльно когерентном состоянии, если в начальный момент времени удовлетворяются условия (7). Подчеркнем еще раз, что при данных стартовых условиях СИ возможно при любой начальной населенности верхнего состояния  $\rho_{33}(0)$ , даже без инверсии в целом, когда суммарная начальная населенность нижнего дублета превышает начальную населенность верхнего уровня,  $\rho_{11}(0) + \rho_{22}(0) > \rho_{33}(0)$ .

В квантово-электродинамической постановке СИ, как спонтанного процесса, поле и средние дипольные моменты атомов отсутствуют. Излучение системы иницируется квантовыми флуктуациями дипольных моментов излучателей, которые некоррелированы. Фазирувка излучателей происходит в процессе высвечивания. Полуклассический аналог данного начального состояния заключается в задании малых случайных значений амплитуд высокочастотных когерентностей  $\mathcal{R}_{31}(0)$  и  $\mathcal{R}_{32}(0)$  с определенными корреляционными свойствами [57]. Другой вариант иницирования СИ заключается в том, что на систему подается короткий (в масштабе СИ) импульс малой площади, который создает детерминированное и одинаковое значение амплитуд высокочастотных когерентностей  $\mathcal{R}_{31}(0)$  и  $\mathcal{R}_{32}(0)$  на каждом излучателе, превышающее их квантовые флуктуации (так называемое триггерное или индуцированное СИ [58, 59]). В дальнейшем мы придерживаемся второй схемы возбуждения СИ. Таким образом, начальные условия в рассматриваемой задаче имеют следующий вид: напряженность электрического поля отсутствует,

$$\operatorname{Re}[\mathcal{E}(0)] = \operatorname{Im}[\mathcal{E}(0)] = 0, \quad (8)$$

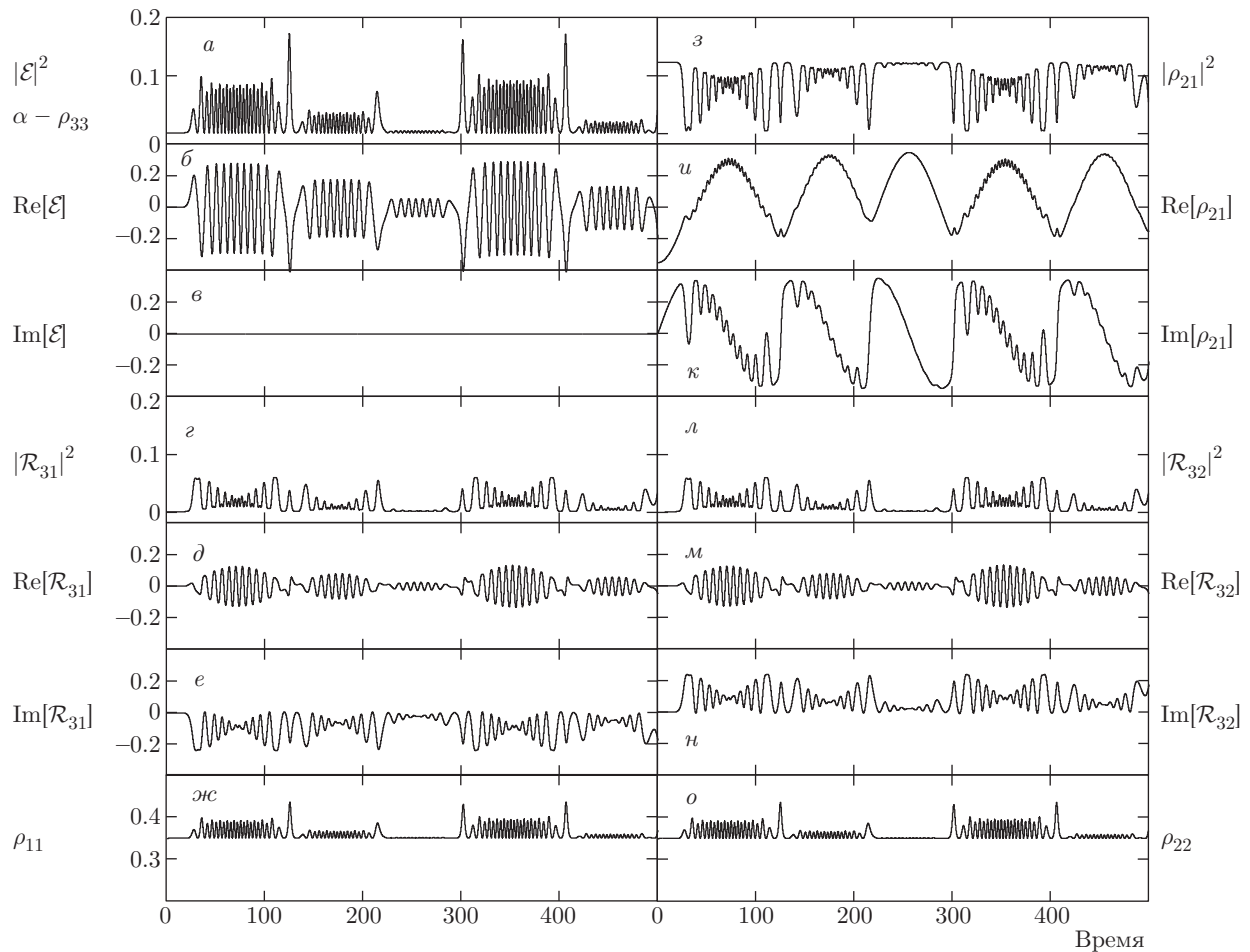
и задано малое однородное значение высокочастотных когерентностей,

$$\operatorname{Re}[\mathcal{R}_{31}(0)] = \operatorname{Re}[\mathcal{R}_{32}(0)] = \pm R_0, \quad R_0 \ll 1, \quad (9)$$

где без потери общности предположено, что  $\operatorname{Im}[\mathcal{R}_{31}(0)] = \operatorname{Im}[\mathcal{R}_{32}(0)] = 0$ .

Мы провели численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (4) с начальными условиями (7)–(9). Варьировались два управляющих параметра: начальная населенность верхнего уровня  $\rho_{33}(0) = \alpha$  и частота расщепления дублета  $\delta$ . Это позволило выявить ряд интересных закономерностей временной динамики как поля СИ, так и атомной подсистемы. На рис. 2 представлен один из типичных примеров этих расчетов при  $\delta \ll 1$  ( $\omega_{21} \ll \Omega$ ). Здесь можно видеть, что действительная





**Рис. 2.** Динамика напряженности поля СИ  $\mathcal{E}$ , его интенсивности  $|\mathcal{E}|^2$  и элементов матрицы плотности  $\rho_{mn}$  гамильтоновой системы, рассчитанная при расщеплении дублета  $\delta = 0.05$  (в единицах  $\Omega$ ), и начальных условиях:  $\rho_{33}(0) = \alpha = 0.3$ ;  $\rho_{11}(0) = \rho_{22}(0) = 0.35$ ;  $\text{Re}[\rho_{21}] = -0.35$ ;  $\text{Im}[\rho_{21}] = 0$ ;  $\text{Re}[\mathcal{R}_{31}(0)] = \text{Re}[\mathcal{R}_{32}(0)] = 10^{-8}$ ;  $\text{Re}[\mathcal{E}(0)] = \text{Im}[\mathcal{E}(0)] = \text{Im}[\mathcal{R}_{31}(0)] = \text{Im}[\mathcal{R}_{32}(0)] = 0$ . Время — в единицах  $\Omega^{-1}$

часть амплитуды электрического поля СИ (рис. 2б) обнаруживает временную динамику ( $\text{Re}[\mathcal{E}(\tau)] \neq 0$ ), в то время как ее мнимая часть (рис. 2в) не развивается во времени ( $\text{Im}[\mathcal{E}(\tau)] = 0$ ). Действительные части высокочастотных когерентностей  $\text{Re}[\mathcal{R}_{31}(\tau)]$  (рис. 2д) и  $\text{Re}[\mathcal{R}_{32}(\tau)]$  (рис. 2м) показывают идентичное поведение, а их мнимые части,  $\text{Im}[\mathcal{R}_{31}(\tau)]$  (рис. 2е) и  $\text{Im}[\mathcal{R}_{32}(\tau)]$  (рис. 2н) — антифазное. В соответствии с этим, одинаково эволюционируют квадраты их модулей,  $|\mathcal{R}_{31}|^2 = |\mathcal{R}_{32}|^2$  (см. рис. 2г и рис. 2л). Динамика населенностей  $\rho_{11}(\tau)$  (рис. 2жс) и  $\rho_{22}(\tau)$  (рис. 2о) идентична и повторяет таковую для интенсивности поля СИ,  $|\mathcal{E}|^2$  (рис. 2а). Отметим, что данные закономерности являются следствием начальных условий (7)–(9) и реализуются при любых физически реальных параметрах  $\alpha$  и  $\delta$ . Это поз-

воляет существенно упростить математический анализ рассматриваемой задачи.

Обратим внимание на то, что сигнал кооперативного излучения представляет собой квазипериодически (или хаотически) повторяющуюся гребенку пиков (цугов) с характерным временем повторения порядка периода осцилляций низкочастотной когерентности  $2\pi/\delta$  ( $2\pi\Omega/\omega_{21}$ ). Это связано с тем, что при ненулевом расщеплении дублета ( $\delta \neq 0$ ) состояния  $|+\rangle$  и  $|-\rangle$  не являются стационарными, так что с течением времени происходит периодическое преобразование активного состояния в пассивное. Аперриодичность повторения цугов связана с эффектом пленения населенности [41] (часть населенности нижнего уровня захватывается в пассивное состояние, которое не взаимодействует с верх-

ним состоянием). При большом расщеплении дублета  $\delta \gg 1$  ( $\omega_{21} \gg \Omega$ ) динамика СИ состоит из периодически повторяющихся пиков длительностью  $\Omega^{-1}$ , модулированных с частотой расщепления дублета  $\omega_{21}$  [41].

Здесь уместно сделать различие между стандартным СИ Дике и рассматриваемым нами кооперативном излучении ансамбля трехуровневых  $\Lambda$ -излучателей в высокочастотном резонаторе. Наша система, стартуя из состояния Дике, в общем случае не возвращается в него, хотя может и приближаться. Исключениями являются пределы вырожденного дублета ( $\omega_{21} = 0$ ), сильно невырожденного дублета ( $\omega_{21} \gg \Omega$ ) [41] и квазипериодического режима (при  $\omega_{21} < \Omega$  и  $\alpha = 1$ ). В режиме динамического хаоса (при  $\omega_{21} \ll \Omega$  и  $\alpha < 1$ ) поведение системы после старта определяется текущим состоянием поля и системы излучателей. Характер динамики высвечивания теряет свой «спонтанный» характер. Фазовый портрет системы в этом случае представляет запутанную незамкнутую траекторию, а ее спектр подобен белому шуму (см. разд. 5, 6).

Вводя обозначения

$$\text{Re}[\mathcal{E}] = \epsilon, \quad \text{Im}[\mathcal{E}] = 0, \quad \rho_{21} = \eta + i\chi, \quad (10a)$$

$$\rho_{11} = \rho_{22} = \frac{1 - \rho_{33}}{2}, \quad \rho_{33} = \alpha - \epsilon^2, \quad (10b)$$

$$\begin{aligned} \text{Re}[\mathcal{R}_{31}] &= \text{Re}[\mathcal{R}_{32}] = \xi, \\ \text{Im}[\mathcal{R}_{31}] &= -\text{Im}[\mathcal{R}_{32}] = \zeta, \\ |\mathcal{R}_{31}|^2 &= |\mathcal{R}_{32}|^2 = \xi^2 + \zeta^2, \end{aligned} \quad (10c)$$

можно преобразовать систему дифференциальных уравнений (4) в следующую:

$$\dot{\epsilon} = 2\xi, \quad (11a)$$

$$\dot{\xi} = \frac{\delta}{2}\zeta + \frac{1}{2}(3\alpha - 1)\epsilon - \frac{3}{2}\epsilon^3 - \epsilon\eta, \quad (11b)$$

$$\dot{\zeta} = -\frac{\delta}{2}\xi - \epsilon\chi, \quad (11c)$$

$$\dot{\eta} = \delta\chi + 2\epsilon\xi, \quad (11d)$$

$$\dot{\chi} = -\delta\eta + 2\epsilon\zeta. \quad (11e)$$

Таким образом, соотношения (10) осуществляют редукцию нашей модели из комплексной области в действительную. Как следствие этого, исходное фазовое пространство модели  $\mathbb{R}^{11}$  (4) полностью отображается в  $\mathbb{R}^5$  (11). К тому же с учетом (5c) и соотношений (10) интеграл движения (5b) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(\alpha - \epsilon^2)^2 - (\alpha - \epsilon^2) + \\ + 2(\eta^2 + \chi^2 + 2\xi^2 + 2\zeta^2) = \text{const}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{const} = 2\alpha(\alpha - 1) + 4\mathcal{R}_0^2 + \frac{1}{2}.$$

Подчеркнем, что данный закон сохранения ограничивает область существования фазовых траекторий системы и определяет в фазовом пространстве  $(\epsilon, \xi, \zeta, \eta, \chi)$  замкнутую гиперповерхность, вне которой решения системы уравнений (11) не существуют при любых значениях параметров  $\alpha$  и  $\delta$ . Это позволяет характеризовать процесс СИ как устойчивый по Лагранжу (см., например, [60]). Канонический вид этой гиперповерхности определяется уравнением

$$\begin{aligned} (\epsilon^2 - \gamma)^2 + \frac{4}{3}(\eta^2 + \chi^2 + 2\xi^2 + 2\zeta^2) = \text{const}, \\ \text{const} = \frac{4}{3}(\alpha^2 - \gamma + 2\mathcal{R}_0^2), \quad \gamma = \alpha - \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (13)$$

Ее топологические особенности зависят от знака константы  $\gamma$ . При значениях  $1/3 < \alpha \leq 1$ , т.е.  $\gamma > 0$ , — это пятимерная «гантель» с осью симметрии  $\epsilon$ . Если  $0 < \alpha \leq 1/3$ , т.е.  $\gamma < 0$ , гиперповерхность представляет пятимерный эллипсоид.

#### 4. СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ

Как отмечалось выше, главным предметом нашего интереса является невырожденный дублет ( $\delta \neq 0$ ), так как именно в этом случае рассматриваемая нами модель демонстрирует нетривиальную динамику (см. [43]). В первую очередь найдем ее стационарные точки, полагая нулю производные в системе дифференциальных уравнений (11). В результате получим

$$-\delta\eta + 2\epsilon\zeta = 0, \quad (14a)$$

$$\delta\zeta + (3\alpha - 1)\epsilon - 3\epsilon^3 - 2\epsilon\eta = 0, \quad (14b)$$

$$\xi = 0, \quad \chi = 0. \quad (14c)$$

Данная система алгебраических уравнений (14) не является полной относительно переменных  $\epsilon, \eta, \zeta$ . Дополняя ее законом сохранения (12), найдем замкнутое уравнение для напряженности электрического поля СИ:

$$\frac{1}{2(4\epsilon^2 - \delta^2)^2} (a_0\epsilon^8 + a_1\epsilon^6 + a_2\epsilon^4 + a_3\epsilon^2 + a_4) = 0, \quad (15)$$

где  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 4$ ) — константы, зависящие от начальной населенности третьего уровня  $\alpha$  и

величины расщепления дублета  $\delta$ . Первый сомножитель в уравнении (15) не равен нулю всегда,  $(1/2)(4\epsilon^2 - \delta^2)^{-2} \neq 0$ . Тогда полином в числителе должен быть равен нулю:

$$U(\epsilon) = \epsilon^8 + b_1\epsilon^6 + b_2\epsilon^4 + b_3\epsilon^2 + b_4 = 0, \quad (16)$$

где  $b_i = a_i/a_0$  выражаются как

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\delta^2}{4} - 2\alpha + \frac{2}{3}, \\ b_2 &= \frac{1}{192}[64\alpha(2\alpha - 1) + 32(1 - 3\alpha)\delta^2 + 3\delta^4], \\ b_3 &= \frac{\delta^2}{96}[\delta^2 - \alpha(3\delta^2 - 40\alpha + 32) + 8], \\ b_4 &= -\frac{\delta^4}{192}(\alpha - 1)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

После того как корни  $\epsilon_n$  ( $n = 1, 2, \dots, 8$ ) уравнения (16) найдены, можем определить все остальные координаты стационарных точек фазового пространства  $\xi_n, \zeta_n, \eta_n, \chi_n$ , используя соотношения (14):

$$\begin{aligned} \xi_n &= 0, \quad \chi_n = 0, \\ \eta_n &= \frac{2(\epsilon_n)^2 [3(\epsilon_n)^2 - 3\alpha + 1]}{\delta^2 - 4(\epsilon_n)^2}, \\ \zeta_n &= \frac{\delta\epsilon_n [3(\epsilon_n)^2 - 3\alpha + 1]}{\delta^2 - 4(\epsilon_n)^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Отметим, что уравнение (16) содержит слагаемые только с четными степенями относительно функции  $\epsilon$ . Простая подстановка  $I = \epsilon^2$  сводит его к уравнению четвертой степени

$$I^4 + b_1I^3 + b_2I^2 + b_3I + b_4 = 0,$$

решение которого можно найти, например, стандартным методом Феррари [61]. Данное уравнение относительно переменной  $I$  имеет четыре различных корня, а относительно искомой переменной  $\epsilon$  будет иметь уже восемь попарно симметричных действительных и попарно сопряженных комплексных корней, которые с учетом соотношений (18) дадут полный набор координат стационарных точек  $A_n = (\epsilon_n, \xi_n, \zeta_n, \eta_n, \chi_n)$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{1,2} &= \mp \frac{1}{4\sqrt{3}} \sqrt{Q_1 - \sqrt{D_1}}, \\ \zeta_{1,2} &= -\frac{\epsilon_{1,2}}{24\delta} (G_1 + \sqrt{D_1}), \\ \eta_{1,2} &= \frac{1}{96} (S_1 + \sqrt{D_1}), \\ \xi_{1,2} &= 0, \quad \chi_{1,2}^0 = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{3,4} &= \mp \frac{1}{4\sqrt{3}} \sqrt{Q_1 + \sqrt{D_1}}, \\ \zeta_{3,4} &= -\frac{\epsilon_{3,4}}{24\delta} (G_1 - \sqrt{D_1}), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\eta_{3,4} = \frac{1}{96} (S_1 - \sqrt{D_1}),$$

$$\xi_{3,4} = 0, \quad \chi_{3,4} = 0,$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{5,6} &= \mp \frac{1}{4\sqrt{3}} \sqrt{Q_2 - \sqrt{D_2}}, \\ \zeta_{5,6} &= -\frac{\epsilon_{5,6}}{24\delta} (G_2 + \sqrt{D_2}), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\eta_{5,6} = \frac{1}{96} (S_2 + \sqrt{D_2}),$$

$$\xi_{5,6} = 0, \quad \chi_{5,6}^0 = 0,$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{7,8} &= \mp \frac{1}{4\sqrt{3}} \sqrt{Q_2 + \sqrt{D_2}}, \\ \zeta_{7,8} &= -\frac{\epsilon_{7,8}}{24\delta} (G_2 - \sqrt{D_2}), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\eta_{7,8} = \frac{1}{96} (S_2 - \sqrt{D_2}),$$

$$\xi_{7,8} = 0, \quad \chi_{7,8}^0 = 0.$$

Здесь константы  $Q_{1,2}$  и  $D_{1,2}$ ,  $G_{1,2}$  и  $S_{1,2}$  имеют вид

$$Q_{1,2} = 24\alpha - 8 \pm 8\kappa - 3\delta^2, \quad \kappa = \sqrt{1 + 3(\alpha - 1)\alpha}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= 768\alpha^2 - 128(\kappa - 1) - 48(5\kappa + 1)\delta^2 + 9\delta^4 + \\ &+ 48\alpha(8\kappa + 3\delta^2 - 12), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} D_2 &= 768\alpha^2 + 128(\kappa + 1) + 48(5\kappa - 1)\delta^2 + 9\delta^4 - \\ &- 48\alpha(8\kappa - 3\delta^2 + 12), \end{aligned} \quad (25)$$

$$G_{1,2} = 24\alpha - 8 \pm 8\kappa + 3\delta^2,$$

$$S_{1,2} = 24\alpha - 8 \mp 40\kappa + 3\delta^2.$$

Нас интересуют решения исследуемой задачи только в действительной области. Все найденные координаты (19)–(22) стационарных точек  $A_n$  являются функциями параметров  $\alpha$  и  $\delta$ , так что важно найти такие их значения, при которых  $\epsilon_n, \xi_n, \zeta_n, \eta_n, \chi_n$  являлись бы действительными числами. Это требует, чтобы все подкоренные выражения в (19)–(22) были больше либо равны нулю:

$$D_{1,2} \geq 0, \quad H_{1,2}^\mp = (Q_{1,2} \mp \sqrt{D_{1,2}}) \geq 0. \quad (26)$$

Не вдаваясь в подробности анализа, отметим только, что стационарные точки  $A_{1,2,3,4}$  существуют в части двухпараметрической области  $(\alpha, \delta)$ , где  $H_1(\alpha, \delta) \geq 0$ . Данная область существования решений (19) и (20) ограничена нижней ветвью нулево-



го эквипотенциального уровня  $D_1(\alpha, \delta) = 0$  (24) и определяется неравенством

$$\delta \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{2-6\alpha+10\kappa-4\sqrt{3}\sqrt{2+\kappa-3\alpha(2-2\alpha+\kappa)}}.$$

Особых точек  $A_{5,6}$ , определенных в (21), не существует, так как  $H_2^-(\alpha, \delta) \leq 0$  для всей области параметров  $(\alpha, \delta)$ . Напротив, точки  $A_{7,8}$ , определенные в (22), существуют всегда, так как  $H_2^+(\alpha, \delta) \geq 0$  для любых  $(\alpha, \delta)$ .

Вернемся к полиному  $U(\epsilon) = \epsilon^8 + b_1\epsilon^6 + b_2\epsilon^4 + b_3\epsilon^2 + b_4$  (16). Его нули, как уже отмечалось выше, определяют в фазовом пространстве системы ее стационарные точки (максимумы, минимумы и т. д.). Только действительные нули имеют физический смысл. Их наличие и количество зависит от начальной населенности верхнего уровня  $\alpha$  и дублетного расщепления  $\delta$ . Остальные нули (не физические) являются попарно сопряженными комплексными числами. Изменение количества действительных нулей и их кратность означает изменение числа стационарных точек в фазовом пространстве системы, что будет существенно влиять на динамику СИ, приводя к бифуркации системы при переходе через определенные критические значения  $\alpha_{cr}$  и  $\delta_{cr}$  (см. ниже).

На рис. 3 приведен вид полинома  $U(\epsilon)$  для некоторой выборки значений  $\alpha$  и  $\delta$ . Данный рисунок иллюстрирует картину числа нулей и кратность их вырождения, а значит, и числа стационарных точек системы. Темными кружками обозначены невырожденные корни полинома  $U(\epsilon)$ , светлыми — вырожденные (кратные) корни. Кратность вырождения показана в виде равенства соответствующего числа корней  $\epsilon_n$ . Например, как следует из рис. 3а, при  $\alpha = 0.48$  и  $\delta = 0.6$  полином  $U(\epsilon)$  имеет шесть различных корней, в то время как при  $\alpha = 0.6$  и  $\delta = 1.65$  (рис. 3б) — два трехкратно вырожденных корня. И наконец, в случае  $\alpha = 0.48$  и  $\delta = 1.8$  полином имеет только два действительных корня (рис. 3е), а остальные корни — комплексные (не физические). Стрелками показаны те из вырожденных корней, которые определяют конкретный бифуркационный переход.

В заключение данного раздела отметим, что нули вырождаются при некоторых критических значениях  $\alpha_{cr}$  и  $\delta_{cr}$ , которые в пространстве параметров  $(\alpha, \delta)$  определяют особую точку — точку бифуркационного перехода системы. Совокупность таких точек в пространстве  $(\alpha, \delta)$  задает линию, разграничивающую области динамических режимов СИ, что также является интересным направлением исследо-

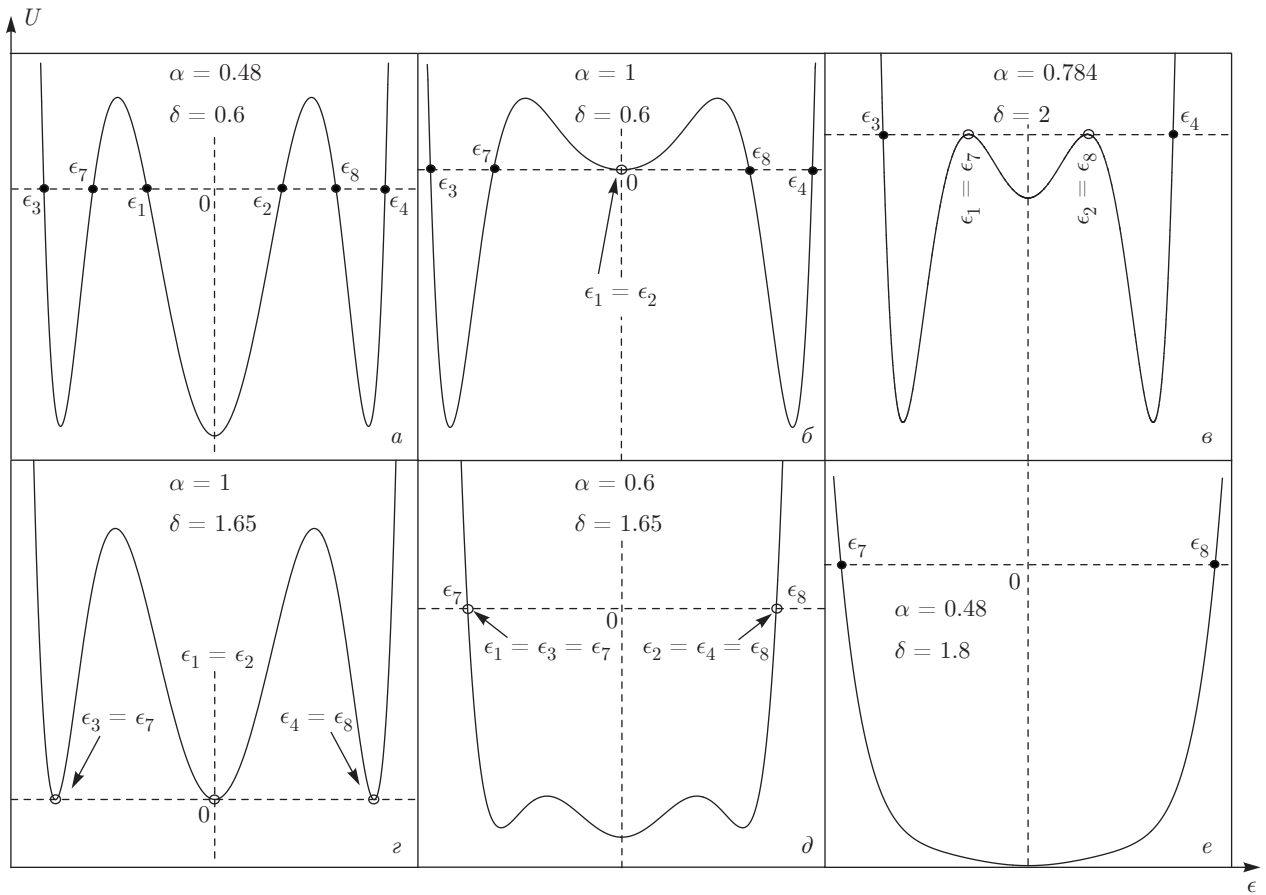
вания, но это — предмет отдельного изучения и в данной работе не рассматривается.

## 5. ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ: ЭТАПЫ ХАОТИЗАЦИИ СИСТЕМЫ

Одним из эффективных методов исследования нелинейной (хаотической) динамики сложных систем является метод отображений Пуанкаре. В этом разделе мы применяем его для нашей модели, предполагая малое расщепление дублета  $\delta \ll 1 \ll \Omega$ . Суть данного метода состоит в следующем [62]. Будем стробоскопически измерять динамические переменные в моменты, соответствующие определенной фазе  $\phi$  движущейся фазовой точки с некоторым периодом  $T$ . Для получения отображения Пуанкаре выделим выборку значений функций  $\epsilon(\tau_n)$ ,  $\xi(\tau_n)$ ,  $\zeta(\tau_n)$ ,  $\eta(\tau_n)$ ,  $\chi(\tau_n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) в соответствующие дискретные моменты времени  $\tau_n = nT + \phi$ . Изменение фазы  $\phi$  равносильно повороту плоскости (объема) Пуанкаре на соответствующий угол. Данная методика позволяет отличать периодические (квазипериодические) движения от непериодических, в том числе хаотических, а также отслеживать бифуркационные процессы, т. е. процессы перехода исследуемой системы в некоторые новые качественные состояния. Если отображение Пуанкаре не состоит из конечного множества локализованных точек или не имеет замкнутой орбиты, что соответствует квазипериодическим движениям или «движениям на торе», то такое движение может быть хаотическим.

На рис. 4 приведены результаты численных расчетов двух  $(\epsilon, \xi, \eta)$  и  $(\epsilon, \xi, \zeta)$  из десяти трехмерных отображений Пуанкаре со стробоскопической выборкой значений из соответствующих векторов  $(\epsilon, \xi, \zeta, \eta, \chi)$  в моменты времени  $\tau_n = nT$ , где период  $T = \pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). В данном случае мы фиксировали фазу  $\phi = 0$ , что не меняло топологию фазового объема.

На всех отображениях Пуанкаре точками выделены положения экстремумов или центры отталкивания фазовой траектории, а цифры 7 и 8 нумеруют точки в соответствии с обозначениями разд. 4. На рис. 4 также представлены соответствующие отображениям Пуанкаре спектры Фурье поля  $\epsilon$ , причем для каждого спектра Фурье (кроме верхнего, для случая  $\alpha = 1$ ) присутствует рисунок-вставка, который показывает сечение отображения Пуанкаре  $(\epsilon, \xi, \zeta)$  плоскостью, параллельной плоскости  $(\xi, \zeta)$  и пересекающей ось  $\epsilon$  в точке  $\epsilon = 0.5$ . Расчеты про-



**Рис. 3.** Вид полинома  $U(\epsilon) = \epsilon^8 + b_1\epsilon^6 + b_2\epsilon^4 + b_3\epsilon^2 + b_4$  (16), нули которого, определяя стационарные точки системы, могут быть вырожденными для некоторой выборки критических значений  $\alpha_{cr}$  и  $\delta_{cr}$ . Штриховыми линиями представлены оси координат, темными кружками обозначены невырожденные корни полинома  $U(\epsilon)$ , светлыми — вырожденные (кратные) корни. Кратность вырождения указана явно в виде равенства соответствующего числа корней  $\epsilon_n$ . Стрелками показаны те из вырожденных корней, которые определяют конкретный бифуркационный переход

водились при различных значениях начальной населенности третьего уровня  $\alpha$  (указаны на рисунке) и малом фиксированном расщеплении нижнего дублета  $\delta = 0.05$ . Остальные параметры расчетов представлены в подписи к рис. 4.

По предположению исследуемая модель консервативна, фазовое пространство модели устойчиво по Лагранжу и ограничено гиперповерхностью (13) (см. разд. 2). В режиме СИ при значениях  $1/2 < \alpha \leq 1$  данная гиперповерхность топологически представляет собой «гантель» с узкой перемычкой вблизи особой точки, расположенной в начале системы координат. Она же является сепаратрисой и сильным центром как притяжения, так и отталкивания изображающей фазовой точки соответственно при ее удалении и приближении.

При выходе системы из режима СИ в режим СИ без инверсии, который происходит при условии  $\alpha =$

$= 1/2$ , перемычка «гантели» начинает существенно уширяться и уже при условии  $\alpha = 1/3$  «гантель» полностью трансформируется в эллипсоид. Поэтому далее, в зависимости от параметра  $\alpha$ , будем говорить о движении в фазовом пространстве либо по торам, лежащим во внутренних полостях «гантели» ( $1/2 < \alpha < 1$ ), либо по торам, лежащим на поверхности «гантели», когда значение  $\alpha = 1/2 + 0^+$ , либо по множеству торов, лежащих во внутренней области эллипсоида ( $\alpha < 1/3$ ).

На рис. 4 можно видеть, что при значении начальной населенности третьего уровня  $\alpha = 1$  отображения Пуанкаре представляют собой замкнутые кривые, никогда не проходящие через начало системы координат — сепаратрису [45]. Замкнутость линий в отображениях Пуанкаре говорит о квазипериодичности данного движения или о движении изображающей точки по поверхностям двух

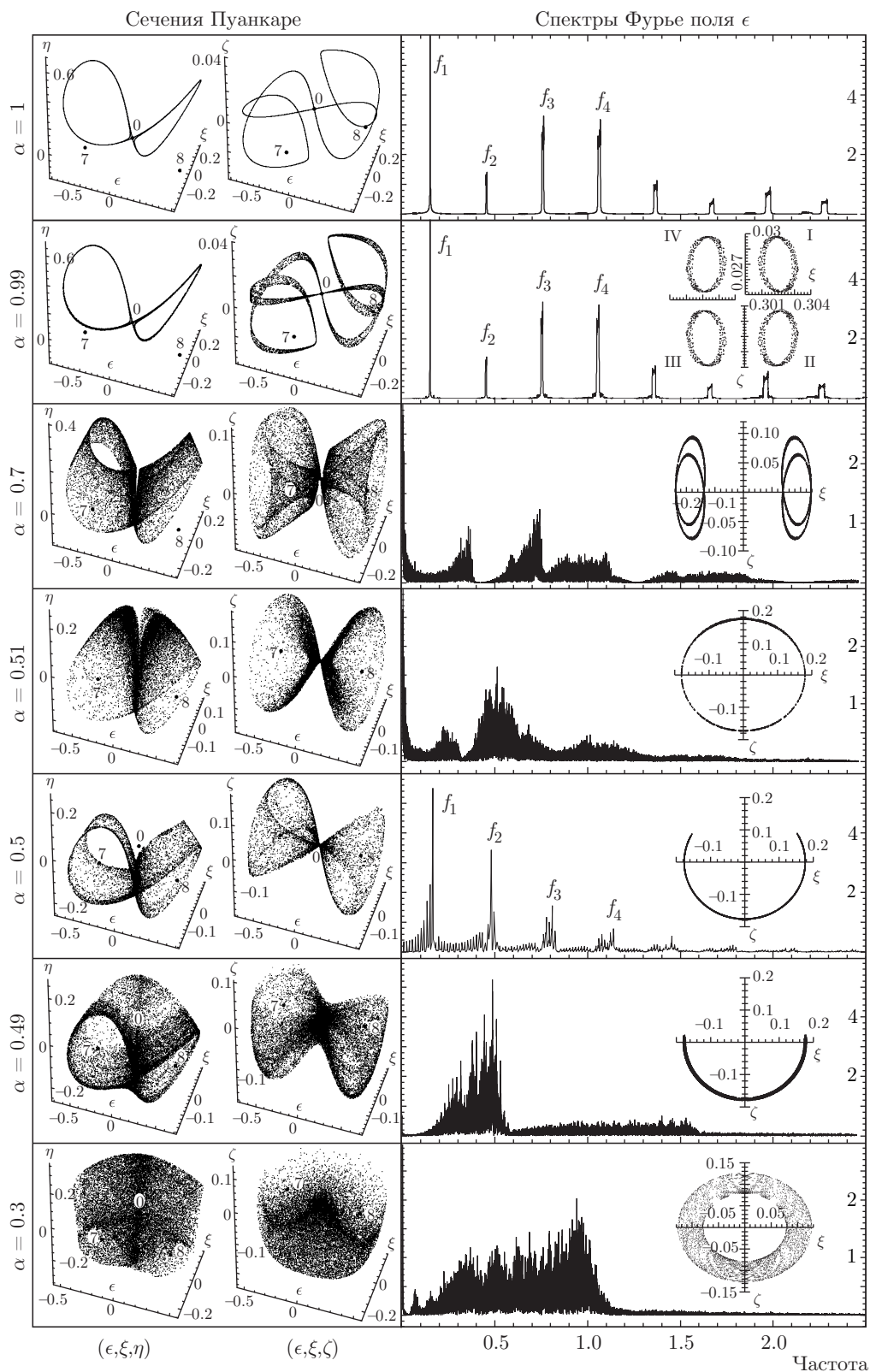


Рис. 4. Пример двух из десяти трехмерных отображений Пуанкаре и спектра Фурье напряженности поля СИ  $\epsilon$  в зависимости от  $\rho_{33}(0) = \alpha$  (указаны на рисунке слева), полученных численным решением уравнений (11) с начальными условиями:  $\epsilon(0) = 0$ ,  $\eta(0) = (\alpha - 1)/2$ ,  $\chi(0) = 0$ ,  $\xi(0) = \mathcal{R}_0 = 10^{-8}$ ,  $\zeta(0) = 0$ . Величина дублетного расщепления  $\delta = 0.05$  (в единицах  $\Omega$ ). Частота — в единицах  $\Omega$

пятимерных торов, лежащих в левой (правой) полостях «гантели». Квазипериодичность движения подтверждает спектр Фурье поля  $\epsilon$  (см. рис. 4,  $\alpha = 1$ ). Здесь видны доминирующие всплески на частотах, кратных частоте  $f_0 = f_2 - f_1 = \pi/10$ , где  $f_k = (k - 1/2)f_0$ , а  $k = 1, 2, \dots$ . Данный результат с достаточной степенью точности соответствует условиям Колмогорова – Арнольда – Мозера о квазипериодичности колебаний (см., например, [63]).

Незначительное уменьшение значения населенности третьего уровня  $\alpha = 0.99$  (см. соответствующий график на рис. 4) приводит к тому, что замкнутая траектория в отображениях Пуанкаре (см. предыдущий случай,  $\alpha = 1$ ) трансформируется в два тора, лежащих в двух полостях «гантели», что ясно видно в отображении  $(\epsilon, \xi, \zeta)$  и на рисунке-вставке для данного случая. Для демонстрации особенностей данных торов на вставке приведен срез плоскостью  $(\xi, \zeta)$  в увеличенном виде, масштаб которого указан в октанте I. В самом спектре Фурье поля наблюдается присутствие незначительных по амплитуде субгармоник в окрестности частот  $f_k$ .

При значении  $\alpha = 0.7$  (см. соответствующий график на рис. 4) торы, уширяясь, «выворачиваются наизнанку», диффундируя сами в себя в пределах поверхности «гантели». Момент начала диффундирования частей торов самих в себя и есть момент начала перехода системы из квазипериодического движения в хаос. Здесь важно отметить, что фазовые траектории в момент «выворачивания» не пересекаются, образуя гетероклиническую структуру (см., например, [64]). При этом спектр Фурье поля уже не напоминает набор определенных гармоник. Скорее, он подобен шумовому спектру. Это свидетельствует о том, что система при  $\alpha = 0.7$  уже находится в состоянии динамического хаоса.

Степень хаотизации процессов, происходящих в исследуемой системе, увеличивается при дальнейшем уменьшении населенности третьего уровня до величины  $\alpha \rightarrow 1/2$ . Как следствие, спектр Фурье становится еще более зашумленным (см. соответствующий график на рис. 4,  $\alpha = 0.51$ ). Изначальные торы окончательно «вывернулись» и представляют собой части поверхности «гантели» (левую либо правую). Движение изображающей точки происходит уже по ее поверхности (исключая начало системы координат), которая, в свою очередь, почти полностью покрывается фазовой траекторией. В данном случае изображающий вектор, следуя за изображающей точкой по поверхности «гантели», непредсказуемо меняет свою длину, приводя тем самым систему к динамическому хаосу.

Отметим, что при переходе из режима СИ в режим СИ без инверсии на промежутке  $1/3 < \alpha < 1/2$  происходит трансформация пятимерной «гантели» в пятимерный эллипсоид (см. разд. 2). При этом существенно меняются физические свойства СИ: точка  $\alpha = 1/2$  является бифуркационной (переходной) между режимом СИ и режимом СИ без инверсии. Данный момент перехода характеризуется большой степенью квазипериодичности, которая зафиксирована в соответствующем спектре Фурье поля наличием устойчивых гармоник на частотах  $f_k = (k - 1/2)f_0$  и субгармоник на частотах, кратных  $f_k/20$ .

Результатом бифуркации является переход системы в новое качество хаоса, при котором состояние системы характеризуется широким бесструктурным спектром (см. рис. 4,  $\alpha = 0.49$ ). Изображающий вектор, непредсказуемо меняя свою длину, следует за изображающей фазовой точкой не только по поверхности «гантели», а уже и в некоторой окрестности под ней, о чем свидетельствует рисунок-вставка на соответствующем графике.

При дальнейшем уменьшении параметра  $\alpha$  (см. рис. 4,  $\alpha = 0.3$ ) наблюдается еще большая хаотизация динамической системы. После прохождения граничного условия  $\alpha = 1/3$  изначальное фазовое пространство модели типа «гантели» полностью трансформируется в эллипсоид. Спектр Фурье поля характеризуется отсутствием определенных гармоник и напоминает белый шум. Соответствующий рисунок-вставка показывает существование широкой зоны блуждания изображающего вектора фазовой точки под поверхностью эллипсоида.

## 6. МЕХАНИЗМ И СЦЕНАРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА

Рассмотрим динамику развития исследуемой системы, когда спектр поля СИ существенно зашумлен (см. разд. 5, рис. 4). Характерными условиями таких режимов являются следующие: область режима СИ вблизи и выше бифуркационного перехода системы в состояние СИ без инверсии ( $\alpha = 1/2 + 0^+$ ), когда фазовая траектория лежит на поверхности «гантели»; область режима СИ без инверсии ( $0 < \alpha < 1/2$ ), когда перемишка между полостями «гантели», расширяясь, создает условия для блуждания фазовой траектории внутри гиперповерхности (13).

Отметим, что размерность фазового пространства в случае вырожденного дублета ( $\delta = 0$ ) есть  $\mathbb{R}^2$

[45]. Наличие даже инфинитезимального расщепления дублета скачком трансформирует его размерность от  $\mathbb{R}^2$  к  $\mathbb{R}^5$ , являясь причиной весьма сложного поведения изображающей точки системы в фазовом пространстве  $(\epsilon, \xi, \zeta, \eta, \chi)$  (см. разд. 5, рис. 4). Фактически это можно увидеть из системы уравнений (11), несколько преобразовав ее. С этой целью введем новые функции  $\epsilon$ ,  $\vartheta$  и  $\varrho$  соотношениями

$$\epsilon = \frac{1}{2} \epsilon, \quad \eta = \delta\vartheta + 2\epsilon^2 + \frac{1}{2}(\alpha - 1), \quad (27)$$

$$\zeta = \varrho - 2\epsilon\vartheta.$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений, эквивалентную исходной:

$$\dot{\epsilon} = \xi, \quad (28a)$$

$$\dot{\xi} = 2\alpha\epsilon - 16\epsilon^3 + \frac{1}{2}\delta\varrho - 3\delta\vartheta\epsilon, \quad (28b)$$

$$\dot{\varrho} = -\frac{1}{2}\delta\xi + 2\xi\vartheta, \quad (28c)$$

$$\dot{\vartheta} = \chi, \quad (28d)$$

$$\dot{\chi} = 4\varrho\epsilon - 8\vartheta\epsilon^2 - \delta^2\vartheta - 2\delta\epsilon^2. \quad (28e)$$

При  $\delta = 0$  (вырожденный дублет), данная система уравнений расщепляется на два независимых блока: уравнения (28a) и (28b) для  $\epsilon$  и  $\xi$  и (28c)–(28e) — для остальных переменных  $\varrho$ ,  $\vartheta$  и  $\chi$ . Нас интересует уравнение для поля, которое в этом пределе имеет вид

$$\ddot{\epsilon} - 2\alpha\epsilon + 16\epsilon^3 = 0 \quad (29)$$

и представляет собой широко известное уравнение Дуффинга (Georg Duffing) [65]. Данное уравнение имеет аналитическое решение в терминах эллиптических функций Якоби, которое описывает периодические пульсации поля СИ длительностью  $\Omega^{-1}$  и периодом  $T_D = 4\Omega^{-1}K(m)$ , где  $K(m)$  — полный эллиптический интеграл первого рода. Параметр  $m$  определяется выражением

$$m^2 = 1 - \frac{2\mathcal{R}_0^2}{4\mathcal{R}_0^2 + \alpha(\alpha/2 + \sqrt{\alpha^2/4 + 2\mathcal{R}_0^2})}$$

(детали см. в [45]). В этом случае фазовые траектории системы в пространстве  $(\epsilon, \dot{\epsilon})$  всегда замкнуты [45].

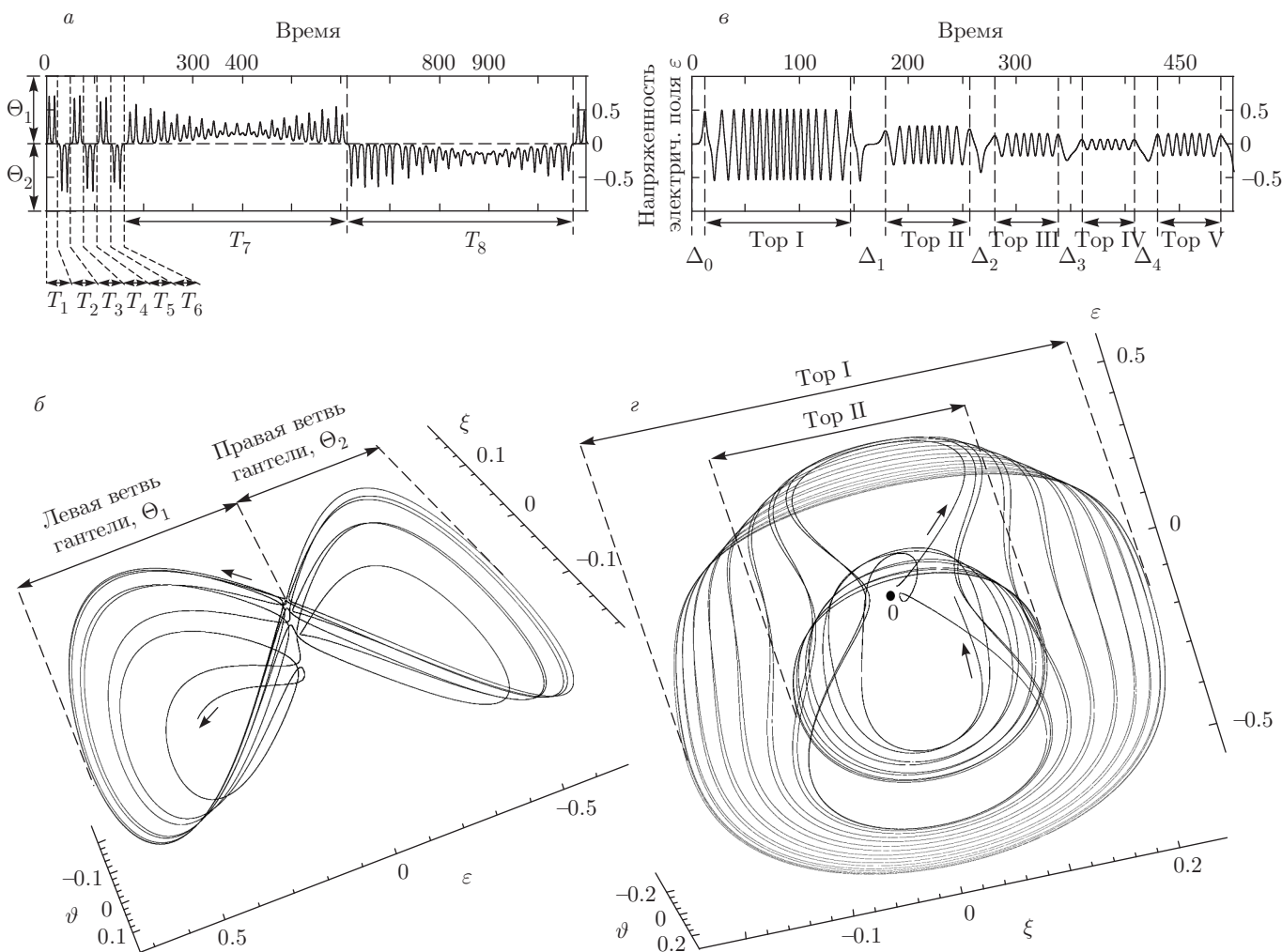
В случае невырожденного дублета ( $\delta \neq 0$ ) уравнения (28) представляют собой систему пяти связанных нелинейных уравнений. Отличие от случая вырожденного дублета ( $\delta = 0$ ) заключается в наличии малых (по параметру  $\delta \ll 1$ ) негармонических

возмущений поля СИ со стороны атомной подсистемы. Данные возмущения вносят дисбаланс в дуффинговские осцилляции поля СИ и в конечном итоге приводят колебательную систему к внутренним резонансам и динамическому хаосу [62–64, 66].

Обсудим механизм хаотизации системы. Развиваясь во времени, система может существенно приблизиться своей изображающей точкой к сепаратрисному решению (начало системы координат, см. рис. 5). При этом фазовая скорость изображающей точки уменьшается почти до нуля и исследуемая система практически не генерирует поле СИ. В этот момент создаются условия ухода (перескока) изображающей точки на новую фазовую траекторию. В режиме стандартного СИ — это левая или правая полость «гантели», например, случай  $\alpha = 1/2 + 0^+$ , которому соответствует численный расчет с начальными условиями  $\alpha = 0.51$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\epsilon(0) = 0$ ,  $\vartheta(0) = (\alpha - 1)/(2\delta)$ ,  $\chi(0) = 0$ ,  $\xi(0) = \mathcal{R}_0 = 10^{-3}$ ,  $\varrho(0) = 0$  (рис. 5a, б). В режиме СИ без инверсии — это торы, лежащие «под гиперповерхностью» (13), случай  $0 < \alpha < 1/2$ , которому соответствует численный расчет с начальными условиями  $\alpha = 0.3$ ,  $\delta = 0.055$ ,  $\epsilon(0) = 0$ ,  $\vartheta(0) = (\alpha - 1)/(2\delta)$ ,  $\chi(0) = 0$ ,  $\xi(0) = \mathcal{R}_0 = 10^{-4}$ ,  $\varrho(0) = 0$  (рис. 5в, г). При этом система приходит к динамическому хаосу по одному и тому же сценарию — разрушающихся торов. Результаты численных расчетов, приведенные на рис. 5, наглядно иллюстрируют сказанное.

I. Режим стандартного СИ ( $\alpha = 0.51$ ,  $\gamma = \alpha - 1/3 > 0$ , рис. 5a, б) характеризуется сложным движением фазовой точки системы по поверхности «гантели» и шумами в спектре поля (см. рис. 4, спектр Фурье при соответствующем значении  $\alpha$ ). Изображающий вектор фазовой точки системы двигается либо в области левой ветви «гантели» (обозначим данное движение как  $\Theta_1$ ), либо совершает «перескок» в область правой ветви «гантели» ( $\Theta_2$ , рис. 5б). Динамика напряженности электрического поля  $\epsilon$  полностью согласована с этим поведением (рис. 5a). Движению в области  $\Theta_1$  соответствуют осцилляции поля в положительной полуплоскости (октант I), в то время как движению в области  $\Theta_2$  соответствуют осцилляции поля в отрицательной полуплоскости (октант II). При этом периоды времени  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), когда система находится в областях  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$ , существенно различны. Различия существуют и в количестве вращений, которые совершает изображающий вектор, двигаясь в данных областях фазового пространства. Например, периоду  $T_7$  (область  $\Theta_1$ ) соответствует 35 вращений разной амплитуды, в то время как периоду  $T_8$  (область





**Рис. 5.** Импульсы СИ (а, в) и фазовые портреты (б, г) в подпространстве  $(\epsilon, \xi, \vartheta)$  системы, иллюстрирующие возникновение хаоса в ней; а, б — режим стандартного СИ; в, г — режим СИ без инверсии. Расчеты выполнены на основе численного интегрирования системы уравнений (28) при следующих начальных условиях: а, б)  $\alpha = 0.51, \epsilon(0) = 0, \vartheta(0) = (\alpha - 1)/2\delta, \chi(0) = 0, \xi(0) = \mathcal{R}_0 = 10^{-3}, \varrho(0) = 0, \delta = 0.05$ ; в, г)  $\alpha = 0.3, \epsilon(0) = 0, \vartheta(0) = (\alpha - 1)/(2\delta), \chi(0) = 0, \xi(0) = \mathcal{R}_0 = 10^{-4}, \varrho(0) = 0, \delta = 0.055$ . Величина расщепления дублета  $\delta$  дана в единицах  $\Omega$ , время — в единицах  $\Omega^{-1}$

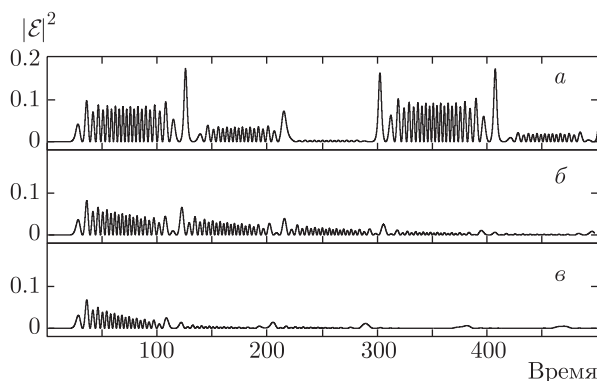
$\Theta_2$ ) — 34 вращения также разной амплитуды. Любое приближение изображающей фазовой точки к сепаратрисе создает новые условия в развитии системы, т. е. новый тор с совершенно другими амплитудными и частотными характеристиками.

II. Режим СИ без инверсии,  $0 < \alpha \leq 1/3$  и  $\gamma = \alpha - 1/3 < 0$  (рис. 5в, г), также характеризуется сложными фазовыми движениями, но уже в объеме эллипсоида. При этом изображающая точка системы, как и в предыдущем случае, приближается через некоторые периоды к началу системы координат — сепаратрисе. Каждое сближение сопровождается разрушением предыдущего движения и переходом системы в новое качественное состояние. В фазовом пространстве данный режим будет пред-

ставлять собой также семейство разрушающихся во времени торов [64]. На рис. 5г показана динамика развития и разрушения первых двух торов, а также соответствующий данному случаю график напряженности электрического поля СИ  $\epsilon$  (рис. 5в). Режим СИ при данных параметрах системы непредсказуем, что означает динамический хаос.

### 7. ЭФФЕКТЫ РЕЛАКСАЦИИ И ПОТЕРЬ РЕЗОНАТОРА

Результаты, изложенные в разд. 3–6, получены для гамильтоновой системы, т. е. в пренебрежении потерями резонатора и однородным и неоднород-

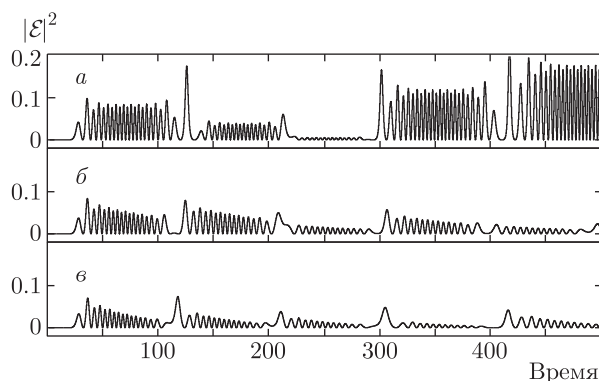


**Рис. 6.** Влияние потерь резонатора на динамику СИ, рассчитанное на основе системы уравнений (4) в пренебрежении однородным и неоднородным уширениями. Время жизни поля СИ в резонаторе  $\tau_{res} = \infty$  (а), 100 (б), 50 (в) (в единицах  $\Omega^{-1}$ ). Остальные параметры те же, что и на рис. 3. Время — в единицах  $\Omega^{-1}$

ным уширениями в системе излучателей. Следует отметить, однако, что эти процессы являются атрибутами реальных систем. Поэтому представляется важным обсудить их влияние на режимы безынерсионного СИ в резонаторе, найденные в данной работе. Поскольку реализация конкретного сценария СИ кардинально зависит от начальной населенности верхнего уровня и величины расщепления дублета, ограничим наш анализ набором параметров, для которых был рассчитан рис. 2, но будем использовать теперь общие уравнения (4) с учетом потерь резонатора и релаксации в системе излучателей.

### 7.1. Потери резонатора

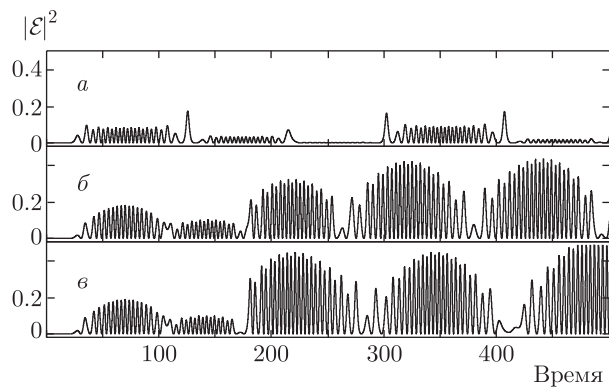
Будем считать времена релаксации системы излучателей  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_2^*$  гораздо больше, чем время жизни поля в резонаторе,  $T_{res}$ , так что последний процесс является доминирующим каналом затухания поля СИ. В этом случае закон сохранения (5а) не выполняется, так как поле покидает резонатор. Можно ожидать, что режим безынерсионного СИ, найденный для идеальной системы, частично сохранится и в этих условиях, если его характерное время короче, чем  $T_{res}$ . На рис. 6б,в мы привели результаты расчетов динамики безынерсионного СИ для различных значений  $T_{res}$ , которые подтверждают сказанное. Действительно, импульс СИ на рис. 6б,в на временах  $t < T_{res}$  сохраняет особенности идеального случая (рис. 6а) и затухает на временах  $t > T_{res}$ .



**Рис. 7.** Влияние однородного уширения на динамику СИ, рассчитанное на основе системы уравнений (4) в пренебрежении потерями резонатора и неоднородным уширением. Время релаксации когерентности  $\tau_2 = 10^5$  (а), 100 (б), 50 (в) (в единицах  $\Omega^{-1}$ ). Время релаксации населенности  $\tau_1 = 10^5$  (в единицах  $\Omega^{-1}$ ). Остальные параметры те же, что и на рис. 3. Время — в единицах  $\Omega^{-1}$

### 7.2. Однородное уширение

Обратимся теперь к влиянию однородного уширения оптических переходов на динамику трехуровневого СИ в резонаторе, которое описывается временами  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_1$ - и  $T_2$ -процессы). Однородное уширение вызывает релаксацию когерентности каждого излучателя со временем  $T_2$ . В открытой системе это приводит к монотонному затуханию сигнала СИ по мере укорочения  $T_2$  и, как следствие, к его полному исчезновению [67, 68]. В нашем случае,  $T_1$ - и  $T_2$ -процессы приводят к нарушению законов сохранения (5б) и (5с). Система излучателей теряет когерентность и вместе с ней затухает поле СИ, даже в отсутствие потерь резонатора. Время релаксации населенности  $T_1$  фиксировано (спонтанный распад) и является большим в масштабе СИ, в то время как  $T_2$  зависит от температуры и может быть гораздо меньше, чем  $T_1$ , и сравнимо с временем СИ. Поэтому при анализе мы фиксировали  $T_1$  и варьировали  $T_2$ . Результаты расчетов представлены на рис. 7. Как видно, глобальный эффект однородного уширения заключается в подавлении СИ и изменении его временного масштаба с уменьшением  $T_2$ . На первый взгляд кажется удивительным, что сигнал существует даже на временах, значительно превышающих  $T_2$ . Мы связываем это с низкочастотной когерентностью  $\rho_{21}$ , которая в нашей модели не затухает (см. уравнение (4с)) и, таким образом, является источником высокочастотной когерентности (см. уравнения (4д) и (4е)). Напомним, что здесь мы не учитываем потери резонатора. Значит, поле, хотя и



**Рис. 8.** Влияние неоднородного уширения на динамику СИ, рассчитанное на основе системы уравнений (4) в пренебрежении потерями резонатора и однородным уширением. Время неоднородной релаксации  $\tau_2^* = \infty$  (а), 1000 (б), 100 (в) (в единицах  $\Omega^{-1}$ ). Остальные параметры те же, что и на рис. 3. Время — в единицах  $\Omega^{-1}$

убывает в силу дефазировки излучателей, не покидает систему. Эти два фактора приводят к частичному возрождению сигнала СИ на временах  $t > T_2$ . Отметим также, что даже при достаточно малом  $T_2$  импульс СИ обнаруживает квазипериодичность, которая приблизительно соответствует периоду осциллирующей низкочастотной когерентности,  $2\pi/\omega_{21}$ , но со временем он тем не менее затухает. Таким образом, несмотря на некоторые особенности влияния однородного уширения на резонаторное безынерсионное СИ, оно в конечном итоге разрушает режим гамильтоновой системы на временах  $t > T_2$ .

### 7.3. Неоднородное уширение

Рассмотрим влияние неоднородного уширения на динамику кооперативного трехуровневого излучения в резонаторе, предполагая все остальные времена много большими. Данный тип уширения нарушает закон сохранения (5с). В общем случае данный тип уширения существенно отличается от однородного: фаза каждого излучателя сохраняется и только коллективный отклик (в линейном случае) затухает со временем. В принципе, фазы излучателей могут быть обращены с помощью когерентного импульса и тогда можно наблюдать сигнал фотонного эха (см., например, [69]). Поэтому данный тип релаксации часто называют обратимой релаксацией. В случае открытой системы неоднородное уширение, так же как и однородное, подавляет сигнал СИ [67, 68]. Однако если добротность резонатора, в котором находится система, достаточно высока, т. е. поле СИ долгое время остается внутри резона-

тора, то квазипериодические (или даже хаотически повторяющиеся) гребенки импульсов безынерсионного СИ, как в нашем случае, выступают в роли когерентных пугов, обращающих фазы излучателей. Тогда можно ожидать, что влияние неоднородного уширения на СИ будет радикально отличаться от эффекта однородного уширения, что и происходит. На рис. 8 приведены соответствующие результаты расчетов динамики безынерсионного СИ при моделировании неоднородных контуров  $g_{31}(\omega)$  и  $g_{32}(\omega)$  идентичными гауссовыми распределениями со стандартным отклонением  $T_2^{*-1}$  ( $T_2^*$  — время неоднородной релаксации) для различных значений  $T_2^*$ . Как видно из рисунка, даже небольшое (в масштабе расчета) время  $T_2^*$  приводит к заметному изменению формы импульса СИ, полученного для идеальной (гамильтоновой) системы (см. рис. 8а). Столь сильное влияние даже малого неоднородного уширения на импульс СИ мы связываем с тем, что система уже в идеальном (гамильтоновом) случае находится в состоянии динамического хаоса. Поэтому даже небольшие изменения в фазах излучателей в процессе высвечивания приводят к существенно другому сценарию оптической динамики системы, сохраняя при этом ее хаотический характер. При сокращении  $T_2^*$  динамика безынерсионного СИ претерпевает еще большие изменения, но, что важно отметить, не обнаруживает затухания.

## 8. ПЕРСПЕКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Кристаллы, активированные редкоземельными ионами, например такие как:  $\text{LaF}_3:\text{Pr}^{3+}$ ,  $\text{Y}_2\text{SiO}_5:\text{Pr}^{3+}$ ,  $\text{Y}_2\text{SiO}_5:\text{Eu}^{3+}$ ,  $\text{Y}_2\text{SiO}_5:\text{Er}^{3+}$  и др., представляют собой те реальные объекты, где условия для наблюдения обсуждаемых (нестандартных) режимов безынерсионного резонаторного СИ могут быть достигнуты. При криогенных температурах состояния  $4f$ -орбитали этих ионов обнаруживают высокую степень оптической когерентности (меньше кГц, как в  $\text{Y}_2\text{SiO}_5:\text{Er}^{3+}$  [70]) и рекордно низкое неоднородное уширение (от МГц до ГГц) [70]. Время когерентности зеемановских или сверхтонких состояний основного уровня этих ионов может достигать шести часов [71]. Перечисленные экстраординарные свойства делают кристаллы, активированные редкоземельными ионами, чрезвычайно перспективными с точки зрения твердотельной оптической памяти и полностью оптической обработки информации [72], а также для наблюдения когерентных оптических эффектов, в частности, сверхизлучения [14, 15, 56, 73–79].

Ниже мы используем оптические параметры редкоземельных систем, не имея в виду конкретный кристалл. Время жизни состояний  $4f$ -орбитали редкоземельных ионов  $T_1$  зависит от матрицы и может варьироваться в пределах от нескольких десятков микросекунд до сотен миллисекунд [70] (оптические переходы в изолированных ионах дипольно запрещены). Для оценок мы выбираем  $T_1 \sim 10\text{--}100$  мс. Временной масштаб СИ определяется кооперативной частотой  $\Omega = (2\pi d^2 \omega N / \hbar)^{1/2}$ , где существенным варьируемым параметром является концентрация ионов  $N$ . Дипольный момент перехода  $d$  может быть найден из времени жизни  $T_1$  возбужденного состояния:  $1/T_1 = 4d^2 \omega^3 n / (3\hbar c^3)$ , где  $n$  — показатель преломления матрицы (типичное значение  $n \approx 1.6$ ). В результате получаем  $\Omega^2 = 3c\lambda^2 N / (8\pi T_1)$ , откуда при  $\lambda \approx (500 \div 1000)$  нм и  $T_1 \approx (10 \div 100)$  мс следует, что  $\Omega^2 \approx (10^2 \div 4 \cdot 10^3) N \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-2}$ . При концентрации редкоземельных ионов  $N \sim 10^{12} \text{ см}^{-3}$  кооперативная частота  $\Omega$  оценивается как  $\Omega \sim (1 \div 5) \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  и соответственно  $\Omega^{-1} \approx (2 \div 10) \cdot 10^{-8} \text{ с}$ . Задержка импульса СИ для параметров наших расчетов составляет  $T_D \approx 25\Omega^{-1}$  (см. рис. 3), что для взятых выше оценочных параметров дает  $T_D \approx (0.25 \div 2.5)$  мкс. Заселение верхнего состояния ниже уровня 0.5 может быть осуществлено некогерентной накачкой субмикросекундной длительности. Типичный масштаб сверхтонкой структуры основного состояния (некрамерсовых) ионов имеет порядок  $(10 \div 100)$  МГц, так что когерентность в подсистеме этих состояний может быть создана посредством импульсного микроволнового поля субмикросекундной длительности. Как было отмечено выше, времена оптической когерентности  $T_2$  в упомянутых редкоземельных системах лежат в миллисекундном диапазоне, а время неоднородной релаксации  $T_2^*$  — в субмиллисекундном.

Согласно приведенным выше оценкам, условия для наблюдения резонаторного безинверсионного СИ и его нестандартных режимов, найденных в нашей работе, могут быть реализованы в указанных выше системах. Действительно, для этого, во-первых, должно быть выполнено неравенство  $\Omega > \omega_{21}$ , которое может быть удовлетворено. Далее, необходимо возбудить систему на верхний уровень и создать низкочастотную когерентность за время меньшее, чем время задержки сверхизлучения  $T_D$ ; это условие также выполнимо. И наконец, для инициирования СИ необходимо нанести начальную поляризацию когерентным оптическим импульсом малой площади и длительностью, меньшей  $T_D$ , что не представляет проблемы. Триггерный импульс дол-

жен быть направлен под углом к оси системы, чтобы создать волну, бегущую в одном направлении. Что касается времен однородной и неоднородной релаксаций,  $T_2$  и  $T_2^*$ , то они намного больше, чем период низкочастотной когерентности  $2\pi/\omega_{21}$ , характерный для хаотической структуры импульса СИ. Потери резонатора могут быть сделаны пренебрежимо малыми за счет качества зеркал.

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе теоретически исследовано СИ Дике в системе трехуровневых квантовых излучателей с дублетом в основном состоянии ( $\Lambda$ -схема операционных переходов), помещенных в циклический резонатор. Для стандартного (двухуровневого) СИ необходима начальная инверсия населенности. В рассматриваемом случае  $\Lambda$ -излучателей это ограничение не является обязательным: СИ возможно даже, если населенность верхнего уровня меньше суммарной населенности дублета (СИ Дике без инверсии). Данный режим может быть реализован, если дублет приготовлен в когерентном состоянии.

В идеальном случае гамильтоновой системы, когда потери резонатора и однородная и неоднородная релаксация в системе излучателей пренебрежимо малы, получены законы сохранения, позволяющие существенно понизить размерность фазового пространства данной модели ( $\mathbb{R}^{11} \rightarrow \mathbb{R}^5$ ) и использовать методы исследования динамики нелинейных систем для анализа трехуровневого резонаторного СИ в этих условиях. Для этой цели использован метод отображений Пуанкаре. Показано, что в общем случае невырожденного дублета временная динамика СИ без инверсии демонстрирует различные режимы, не характерные для стандартного СИ Дике, как, например, автоосцилляции и хаос. Реализация этих режимов управляется начальной населенностью верхнего уровня и величиной расщепления дублета.

Анализ гамильтоновой системы использует интегралы движения (5а)–(5с). Являясь базисом для изучения стационарных состояний системы и возможной ее эволюции, он не может непосредственно ответить на вопрос о характере динамики системы при наличии однородного и неоднородного уширений в системе излучателей и потерь резонатора — факторов, нарушающих тот или иной закон сохранения. С теоретической точки зрения анализ оптической динамики рассматриваемой нами системы при наличии этих факторов является открытой и непро-



стой проблемой. Одним из способов хотя бы частично ответить на этот вопрос является численное интегрирование управляющих уравнений и сравнение их решений с идеальным (гамильтоновым) случаем. На этом пути удастся сделать определенные заключения об оптической динамике системы при наличии релаксации и указать временные интервалы, где гамильтонов предел наблюдаем.

Следуя этой стратегии, мы нашли, что потери резонатора и однородное уширение (необратимая релаксация) приводят к демпфированию сигнала СИ гамильтоновой системы на временах больших, чем соответствующие времена релаксации  $T_{res}$  и  $T_2$ . Другими словами, на временах  $t < T_{res}, T_2$  система сохраняет гамильтонову природу. Результат влияния неоднородного уширения на резонаторное трехуровневое СИ, в силу его обратимого характера, существенно другой. Во-первых, данное уширение не приводит к затуханию сигнала СИ. Во-вторых, даже небольшое изменение его величины приводит к заметному изменению импульса СИ, полученного для идеальной (гамильтоновой) системы, сохраняя при этом его хаотический характер. Это интересный вопрос, требующий дальнейшего исследования.

В заключение выражаем благодарность В. И. Юкалову, А. М. Башарову за поддержку работы, В. В. Овсянкину и В. С. Запасскому за обсуждение спектроскопических свойств кристаллов с редкоземельными ионами, а также А. А. Грибу, А. С. Трошину и Л. В. Жукову за стимулирующие дискуссии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-02-08369).

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
2. N. E. Rehler and J. H. Eberly, Phys. Rev. A **3**, 1735 (1971).
3. K. Bonifacio, P. Schwendimann, and F. Haake, Phys. Rev. A **4**, 302 (1971); Phys. Rev. A **4**, 854 (1971).
4. И. В. Соколов, Е. Д. Трифонов, ЖЭТФ **65**, 74 (1974).
5. R. Bonifacio and L. A. Lugiato, Phys. Rev. A **11**, 1507 (1975); Phys. Rev. A **12**, 587 (1975).
6. J. C. MacGillivray and M. S. Feld, Phys. Rev. A **14**, 1169 (1976); Phys. Rev. A **23**, 1334 (1981).
7. N. Scribanovich, I. P. Herman, J. C. MacGillivray, and M. S. Feld, Phys. Rev. Lett. **30**, 309 (1973).
8. H. M. Gibbs, Q. H. F. Vrethen, and H. M. J. Nikspoors, Phys. Rev. Lett. **39**, 547 (1976).
9. A. Flusberg, T. Mossberg, and S. R. Hartman, Phys. Lett. A **58**, 373 (1976).
10. R. Florian, L. O. Schwan, and D. Schmid, Sol. St. Comm. **42**, 55 (1982); Phys. Rev. A **28**, 2709 (1984).
11. M. S. Malcuit, J. J. Maki, D. J. Simkin, and R. W. Boyd, Phys. Rev. Lett. **59**, 1189 (1987).
12. Ю. В. Набокин, В. В. Самарцев, М. Б. Силаева, Изв. АН СССР, сер. физ. **47**, 74 (1983).
13. П. В. Зиновьев, С. В. Лопина, Ю. В. Набокин, М. Б. Силаева, В. В. Самарцев, Ю. Е. Шейбут, ЖЭТФ **85**, 1945 (1983).
14. F. Auzel, S. Hubert, and D. Meichenin, Europhys. Lett. **7**, 459 (1988).
15. C. Greiner, B. Boggs, and T. W. Mossberg, Phys. Rev. Lett. **85**, 3793 (2000).
16. Ю. Ф. Киселев, А. Ф. Прудкогляд, А. С. Шумовский, В. И. Юкалов, ЖЭТФ **94**, 334 (1988).
17. Н. А. Бажанов, Д. С. Буляница, А. И. Зайцев, А. И. Ковалев, В. А. Мальшев, Е. Д. Трифонов, ЖЭТФ **97**, 1995 (1990).
18. V. I. Yukalov, Phys. Rev. Lett. **75**, 3000 (1995).
19. Д. С. Дружин, Д. С. Буляница, Е. Д. Трифонов, ЖЭТФ **117**, 273 (2000).
20. V. I. Yukalov and E. P. Yukalova, Phys. Part. Nucl. **35**, 348 (2004).
21. J. Vanacken, S. Stroobants, M. Malfait et al., Phys. Rev. B **70**, 220401(R) (2004).
22. M. G. Benedict, P. Foeldi, and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **72**, 214430 (2005).
23. V. I. Yukalov and E. P. Yukalova, Laser Phys. Lett. **8**, 804 (2011).
24. C. Ohae, A. Fukumi, S. Kuma et al., J. Phys. Soc. Jpn. **83**, 044301 (2014).
25. T. Brandes, Phys. Rep. **408**, 315 (2005).
26. V. N. Pustovit and T. V. Shahbazyan, Phys. Rev. Lett. **102**, 077401 (2009); Phys. Rev. B **82**, 075429 (2010).
27. V. V. Popov, O. V. Polischuk, A. R. Davoyan, V. Ryzhii, T. Otsuji, and M. S. Shur, Phys. Rev. B **86**, 195437 (2012).



28. R. Fleury and A. Alù, *Phys. Rev. B* **87**, 201101(R) (2013).
29. A. Fukumi, S. Kuma, Y. Miyamoto et al., *Prog. Theor. Exp. Phys.* 04D002 (2012).
30. S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, J. Stanger, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Science* **285**, 571 (1999).
31. M. G. Moore and P. Meystre, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5202 (1999).
32. Е. Д. Трифонов, *ЖЭТФ* **120**, 1117 (2001); E. D. Trifonov, *Laser Phys.* **12**, 211 (2002).
33. Y. A. Avetisyan and E. D. Trifonov, *Laser Phys. Lett.* **1**, 373 (2004); *ibid.* **2**, 512 (2005); *Phys. Rev. A* **88**, 025601-3 (2013).
34. M. Gross and S. Haroche, *Phys. Rep.* **93**, 301 (1982).
35. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *УФН* **131**, 653 (1980).
36. В. В. Железняков, В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский, *УФН* **159**, 193 (1989).
37. A. V. Andreev, V. I. Emel'yanov, and Yu. A. Il'inskii, *Cooperative Effects in Optics*, IOP Publ., Bristol and Philadelphia (1993).
38. M. G. Benedict, A. M. Ermolaev, V. A. Malyshev, I. V. Sokolov, and E. D. Trifonov, *Super-radiance: Multiatomic Coherent Emission*, IOP Publ., Bristol and Philadelphia (1996).
39. A. A. Kalachev and V. V. Samartsev, *Coherent Phenomena in Optics*, Kazan Univ., Kazan (2003).
40. V. A. Malyshev, I. V. Ryzhov, E. D. Trifonov, and A. I. Zaitsev, *SPIE Proc.* **3239**, 129 (1997).
41. V. A. Malyshev, I. V. Ryzhov, E. D. Trifonov, and A. I. Zaitsev, *Laser Phys.* **8**, 494 (1998).
42. J. T. Manassah and B. Gross, *Opt. Comm.* **150**, 189 (1998).
43. А. И. Зайцев, В. А. Малышев, Е. Д. Трифонов, И. В. Рыжов, *ЖЭТФ* **115**, 505 (1999); *Опт. и спектр.* **87**, 827 (1999).
44. V. Kozlov, O. Kocharovskaya, Yu. Rostovtsev, and M. Scully, *Phys. Rev. A* **60**, 1598 (1999).
45. И. В. Рыжов, Н. А. Васильев, И. С. Косова, М. Д. Штагер, В. А. Малышев, *Опт. и спектр.* **120**, 462 (2016).
46. V. A. Malyshev, I. V. Ryzhov, E. D. Trifonov, and A. I. Zaitsev, *Laser Phys.* **9**, 876 (1999).
47. А. И. Зайцев, И. В. Рыжов, Е. Д. Трифонов, В. А. Малышев, *Опт. и спектр.* **87**, 827 (1999).
48. А. И. Зайцев, И. В. Рыжов, *Опт. и спектр.* **89**, 655 (2000); **91**, 1001 (2001).
49. А. А. Богданов, А. И. Зайцев, И. В. Рыжов, *Опт. и спектр.* **89**, 1012 (2000).
50. И. В. Рыжов, А. И. Зайцев, Е. В. Шувал-Сергеева, *Опт. и спектр.* **112**, 658 (2012).
51. О. А. Кочаровская, Я. И. Ханин, *Письма в ЖЭТФ* **48**, 581 (1988).
52. Ya. I. Khanin and O. A. Kocharovskaya, *J. Opt. Soc. Amer. B* **7**, 2016 (1990).
53. S. E. Harris, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1033 (1989).
54. O. Kocharovskaya, *Phys. Rep.* **219**, 175 (1992).
55. F. T. Arecchi and E. Courtens, *Phys. Rev. A* **2**, 1730 (1970).
56. А. М. Башаров, Г. Г. Григорян, Н. В. Знаменский, Э. А. Манькин, Ю. В. Орлов, А. Ю. Пашков, Т. Г. Юкина, *ЖЭТФ* **129**, 239 (2006).
57. F. Haake, N. King, G. Schröder, J. Haus, and R. Glauber, *Phys. Rev. A* **20**, 2047 (1979); *Phys. Rev. Lett.* **45**, 558 (1980).
58. N. W. Carlson, D. J. Jackson, A. I. Shawlow, M. Gross, and S. Haroche, *Opt. Comm.* **32**, 350 (1980).
59. R. F. Malikov and E. D. Trifonov, *Opt. Comm.* **52**, 74 (1984).
60. С. П. Кузнецов, *Динамический хаос*, Физматлит, Москва (2001).
61. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, Москва (2003).
62. Ф. Мун, *Хаотические колебания*, Мир, Москва (1990).
63. Г. Хакен, *Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах*, под ред. Ю. Л. Климонтовича, Мир, Москва (1985).
64. Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда, *Стохастические и хаотические колебания*, Наука, Москва (1987).
65. G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz und ihre Technische Bedeutung*, Vieweg, Braunschweig (1918).
66. А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, *Нелинейные колебания*, Физматлит, Москва (2005).

67. Р. Ф. Маликов, В. А. Малышев, Е. Д. Трифонов, *Опт. и спектр.* **53**, 652 (1982).
68. А. И. Зайцев, В. А. Малышев, Е. Д. Трифонов, *Опт. и спектр.* **65**, 1018 (1988).
69. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1979).
70. С. W. Thiel, T. Böttger, and R. L. Cone, *J. Luminescence* **131**, 353 (2011).
71. T. Zhong, J. M. Kindem, E. Miyazono, and A. Faraon, *Nat. Comm.* **6**, 8206 (2015).
72. M. Zhong, M. P. Hedges, R. L. Ahlefeldt, J. G. Bartholomew, S. E. Beavan, S. M. Wittig, J. J. Longdell, and M. J. Sellars, *Nature* **517**, 177 (2015).
73. V. A. Zuikov, A. A. Kalachev, V. V. Samartsev, and A. M. Shegeda, *Laser Phys.* **9**, 951 (1999); *Laser Phys.* **10**, 364 (2000).
74. В. А. Зуйков, А. А. Калачев, В. В. Самарцев, А. М. Шегеда, *КЭ* **30**, 629 (2000).
75. A. A. Kalachev and V. V. Samartsev, *Laser Phys.* **12**, 1114 (2002); *J. Luminescence* **98**, 331 (2002).
76. G. G. Grigoryan, Yu. V. Orlov, E. A. Petrenko, A. Yu. Shashkov, and N. V. Znamenskiy, *Laser Phys.* **15**, 602 (2005).
77. G. G. Grigoryan, Yu. V. Orlov, A. Yu. Shashkov, T. G. Yukina, and N. V. Znamenskiy, *Laser Phys.* **17**, 511 (2007).
78. А. М. Башаров, Г. Г. Григорян, Н. В. Знаменский, Ю. В. Орлов, А. Ю. Шашков, Т. Г. Юкина, *КЭ* **39**, 251 (2009).
79. А. М. Башаров, Н. В. Знаменский, А. Ю. Шашков, *Опт. и спектр.* **104**, 279 (2008).