ЖЭТФ, 2017, том 151, вып. 6, стр. 1031–1040

ВОДОРОДОПОДОБНЫЙ АТОМ В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ: ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНА И РЕЛЯТИВИСТСКИЙ СДВИГ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ

В. В. Скобелев*

Московский политехнический университет
105066, Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 декабря 2016 г.

В развитие положений нашей предыдущей работы приводится дополнительная аргументация, согласно которой в сверхсильных магнитных полях $B \gg (Z\alpha)^2 B_0$, $B_0 = m^2c^3/e\hbar \approx 4.41\cdot 10^{13}$ Гс, уравнение Дирака и вытекающее из него уравнение Шредингера для электрона в поле ядра становятся пространственно-одномерными с единственной z-координатой вдоль магнитного поля, «дираковские» спиноры — двухкомпонентными, а матрицы 2×2 «действуют» в подпространстве $\{0;3\}$. На основе полученного решения уравнения Дирака и известного решения «одномерного» уравнения Шредингера обычными методами КЭД, экстраполированными на подпространство $\{0;3\}$, вычислена вероятность излучения фотона «одномерным» водородоподобным атомом, которая, например, для α-линии серии Лаймана почти в два раза отличается от значения в «трехмерном» случае. Аналогично, несмотря на совпадение нерелятивистских уровней энергии, вычисленные релятивистские поправки порядка $(Z\alpha)^4$ существенно отличаются от поправок в отсутствие магнитного поля. Сделан вывод, что на основе анализа спектра излучения водорода, а также спектрального состава излучения вообще, в принципе можно сделать вывод о наличии или отсутствии сверхсильных магнитных полей в окрестности магнитаров (нейтронных звезд и, вероятно, коричневых карликов). Указано на возможные перспективы развития предложенной методики расчетов в применении к многоэлектронным атомам, а также на возможность в ее рамках более достоверного установления факта наличия сверхсильных магнитных полей в магнитарах.

DOI: 10.7868/S0044451017060049

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, наличие сверхсильных магнитных полей порядка «швингеровского» значения $B_0 = m^2c^3/e\hbar \approx 4.41\cdot 10^{13}$ Гс (m, e — масса электрона и элементарный заряд) может привести к нетривиальным следствиям, касающимся как динамики соответствующих экзотических астрофизических объектов (магнитаров), так и свойств их излучения. Например, в нашей работе [1] было указано, что это может привести к существенному уменьшению равновесного радиуса нейтронных звезд, а в работе [2] — к линейной поляризации жесткого ($\omega \sim m$) излучения пульсаров за счет обусловленного вкладом «электронного трехполюсника» в магнитном поле эффекта расщепления фотона $\gamma \to 2\gamma$.

Представляет интерес вопрос об экспериментальном подтверждении наличия полей такой величины в окрестности этих объектов. В значительной степени их излучение может быть обусловлено переходами электронов в атомах магнитосферы, в частности, и в простейших водородоподобных атомах (Ze). Как было указано в нашей же работе [3], в полях с индукцией $B \gg (Z\alpha)^2 B_0$, $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$, влияние магнитного поля сводится к пространственно-одномерному «движению» электрона в таком атоме.

Физической причиной «двумерности» соответствующего релятивистского математического аппарата является компенсация энергии нулевых колебаний в сверхсильном магнитном поле отрицательным вкладом в энергию E при фиксированной ориентации спинового магнитного момента по полю[1)], вследствие чего она вообще явно не зависит от последнего (см. ниже (5а)), как, впрочем, и само

* E-mail: v.skobelev@inbox.ru

[1)] Этот эффект имеет место только для заряженных частиц со спином 1/2 — см. [3] и ссылки там на другие наши работы.

«уравнение Дирака» в подпространстве $\{0;3\}$ (см. (1), (1a)). При этом «поперечные» по отношению к полю степени свободы подавлены с эффективными значениями координат[2)] $|x|_{eff}$, $|y|_{eff} \sim \lambda_C\sqrt{B_0/B}$, $\lambda_C = \hbar/mc$. А поскольку $|z|_{eff} \sim z_0 n \equiv \lambda_C (Z\alpha)^{-1} n$ (см. (6a), (6b)), при упомянутом выше условии $B \gg \gg (Z\alpha)^2 B_0$ действительно

$$|x|_{eff}, |y|_{eff} \sim |z|_{eff}(Z\alpha)\sqrt{\frac{B_0}{B}} \ll |z|_{eff},$$

и «движение» электрона в рамках уравнений Дирака и Шредингера фактически становится одномерным (вдоль поля) с эффективными значениями «поперечных» координат, на порядок или более меньшими «продольной» z-координаты. Это же ограничение на величину поля получается из условия доминирования отрицательного вклада в энергию при фиксированной ориентации спинового магнитного момента по полю над энергией основного уровня водородоподобного атома, сводящегося в нерелятивистском варианте к сильному неравенству

$$\left|-\frac{e\hbar B}{2mc}\right| \gg \left|-\frac{(Z\alpha)^2 mc^2}{2}\right|,$$

как необходимого условия подавляющего превалирования магнитного поля над кулоновским и пространственно-одномерного вида волновых уравнений для электрона в таком атоме.

При этом уравнение Дирака приобретает двумерно-ковариантную форму в подпространстве $\{0;3\}$ с третьей осью вдоль поля и с потенциальной энергией $-(Ze^2)/|z|$. В частности, в области $z > 0$ оно имеет вид [3]

$$D_-\Psi = 0, \tag{1}$$

где используемые в (1) и ниже двумерные в подпространстве $\{0;3\}$ дираковские операторы равны (в части формул мы из исторических соображений и для наглядности сохраняем постоянные $\hbar, c$)

$$D_\mp = \left(E_r + \frac{(Ze^2)}{z}\right)\gamma^0 - i\hbar c\gamma^3\frac{d}{dz} \mp mc^2, \tag{1a}$$

а $E_r = mc^2 + E$ — релятивистская энергия. В области $z < 0$ в (1a) следует сделать замену $(Ze^2)/z \to \to -(Ze^2)/z$.

В представлении, эквивалентном стандартному [5], используемые здесь и ниже действительные матрицы 2×2 имеют вид [3]

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\gamma^5 \equiv \gamma^0\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1b}$$

Символическое обозначение γ^5 применяется здесь, как и в других наших работах по аналогичной тематике, лишь с целью подчеркнуть, что эта матрица 2×2 в двумерно-релятивистском варианте теории играет ту же роль, что и соответствующая матрица 4×4 в четырехмерном. Например, как можно видеть с использованием найденного ниже спинора Ψ (12), выражение $[\overline{\Psi}\gamma^5\Psi]$ является псевдоскаляром и меняет знак при инверсии координаты $\zeta \to -\zeta$.

Как и в нашей работе [6], ищем решение уравнения (1) в виде

$$\Psi = D_+\psi. \tag{2}$$

В дальнейших преобразованиях и обозначениях в этом разделе из соображений последующего удобства мы будем в основном следовать работе [6], в которой аналогичные рассуждения проводились в обычном четырехмерном варианте (разд. 1 и разд. 4, п. 3 работы [6]).

Подставляя (2) в (1), получаем с учетом (1a), (1b) уравнение для «вспомогательного» спинора ψ:

$$\left(\hat{H}_S + \hat{H}'\right)\psi = E\psi, \tag{3}$$

где «одномерный» «шредингеровский» гамильтониан имеет вид

$$\hat{H}_S = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2} \mp \frac{(Ze^2)}{z} \tag{3a}$$

с верхним знаком, соответствующим области $z > 0$, нижним — области $z < 0$, а «добавочный оператор-возмущение» $\hat{H}'$ равен

$$\hat{H}' = -\frac{E^2}{2mc^2} - \frac{(Ze^2)^2}{2mc^2z^2} \mp \frac{E(Ze^2)}{mc^2 z} \pm i\frac{\hbar(Ze^2)}{2mcz^2}\gamma^5 \equiv \equiv \sum_{k=1}^{k=4}\hat{H}'_k. \tag{4}$$

Как и в работе [6], переходим далее к безразмерной координате

$$z' = z\frac{\sqrt{2m(-E)}}{\hbar},$$

после чего уравнение (3) приобретает вид

[2)] Это очевидно, например, из решений уравнений Шредингера и Дирака в магнитном поле в цилиндрических координатах [4], содержащих экспоненциальный фактор $e^{-\rho/2}$, $\rho = (eB/2c\hbar)r^2$.

$$\left[\frac{d^2}{dz'^2} \pm \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\,\frac{(Z\alpha)}{z'} - 1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon + \frac{(Z\alpha)^2}{z'^2} \pm \sqrt{2\varepsilon}\,\frac{Z\alpha}{z'} \mp \mp i\frac{(Z\alpha)}{z'^2}\,\gamma^5\right]\psi = 0, \quad \varepsilon = \frac{|E|}{mc^2}. \quad (5)$$

Первые три слагаемых в квадратных скобках (5) соответствуют преобразованному уравнению Шредингера $\hat{H}_S\psi = E\psi$ и с учетом значения энергии

$$E = -\frac{(Z\alpha)^2}{2n^2}\,mc^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (5a)$$

совпадающего со значением в случае отсутствия магнитного поля [7], и значения $\varepsilon \propto (Z\alpha)^2$ не содержат малого параметра $(Z\alpha)$. Остальные слагаемые соответствуют преобразованному оператору $\hat{H}'$, причем четвертое, пятое и шестое очевидным образом пропорциональны $(Z\alpha)^2$. «Электронная скобка» $[\overline{\Psi}'\gamma^5\Psi]$ по спинорам (2), как будет видно ниже, пропорциональна $(Z\alpha)$, так что и матричные элементы седьмого слагаемого в квадратных скобках (5), которое соответствует оператору $\hat{H}_4'$ в (4), пропорциональны $(Z\alpha)^2$.

Отсюда следует, что в пренебрежении поправками $(Z\alpha)^2$ обе компоненты «вспомогательного» спинора ψ выражаются через нормированное решение «одномерного» уравнения Шредингера $\hat{H}_S\psi = E\psi$, имеющее в выражении через вырожденную гипергеометрическую функцию вид [3, 7]

$$\psi_n^{(\pm)} = \begin{cases} \chi_n, & z > 0, \\ \pm\chi_n, & z < 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\chi_n = K_n e^{-|\zeta|/n}\left(\frac{2|\zeta|}{n}\right) \times \Phi\left(1 - n, 2; \frac{2|\zeta|}{n}\right), \quad K_n = \frac{1}{\sqrt{2nz_0}}, \quad (6a)$$

$$\zeta = nz' = \frac{z}{z_0}, \quad z_0 = \frac{\hbar^2}{m(Ze^2)} = \lambda_C(Z\alpha)^{-1}, \quad (6b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_n^2 dz = 2\int_0^{\infty} \chi_n^2 dz = 1. \quad (6c)$$

Знаки «$\pm$» в формуле (6) соответствуют четности состояния [7]. В целях дальнейшего удобства определение безразмерной переменной ζ несколько отличается от принятого в нашей работе [3], а ее модуль $|\zeta|$ формально аналогичен безразмерной радиальной сферической координате ρ при рассмотрении водородоподобного атома в этой же книге [7].

Переходя к нахождению вида спинора Ψ согласно (2), запишем оператор D_+ (как и в [6], с точностью до постоянного коэффициента и в пренебрежении вкладами, пропорциональными $(Z\alpha)^2$) в виде

$$D_+ = \frac{1}{2}\left[(1 + \gamma^0) - i\frac{(Z\alpha)}{n}\,\gamma^3\frac{d}{dz'}\right]. \quad (7)$$

Через переменную ζ из (6b) выражение (7) с учетом (1b) записывается следующим образом:

$$D_+ = \begin{pmatrix} 1 & \hat{D} \\ -\hat{D} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = -\frac{i}{2}(Z\alpha)\frac{d}{d\zeta}. \quad (7a)$$

Далее, для соблюдения в дальнейшем условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}\Psi\,dz = 1$ с принятой точностью по $(Z\alpha)$ «вспомогательный» спинор ψ выберем в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_n^{(\pm)} \\ C_n^{(\pm)}\psi_n^{(\pm)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

с неопределенным пока коэффициентом $C_n^{(\pm)}$.

С учетом (2), (7a), (8) получаем для «дираковского» спинора Ψ следующее выражение:

$$\Psi \to \Psi^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \psi_n^{(\pm)} - \dfrac{i}{2}(Z\alpha)C_n^{(\pm)}\dfrac{d\psi_n^{(\pm)}}{d\zeta} \\ \dfrac{i}{2}(Z\alpha)\dfrac{d\psi_n^{(\pm)}}{d\zeta} \end{pmatrix}. \quad (8a)$$

Обычному лагранжиану КЭД

$$L = e\left[\overline{\Psi}_e\gamma^\mu\Psi_e\right]A_\mu \quad (\mu = 0, 3) \quad (9)$$

соответствует элемент S-матрицы ($\Psi_e = e^{-iEt}\Psi$, $\Psi \equiv \Psi(\mathbf{r})$)[3)]

$$\langle f|S|i\rangle = i(2\pi)\delta(\Delta E - k_0)\sqrt{\frac{4\pi}{2k_0V}}\,M, \quad (10)$$

$$M = e\int_{-\infty}^{\infty}\left[\overline{\Psi}'\gamma^\mu\Psi\right]e_\mu\exp(-ik_3z)\,dz, \quad \mu = 3. \quad (11)$$

Как легко видеть, при использовании поперечной калибровки с «вектором» поляризации в подпространстве $\{0; 3\}$ $e_\mu \equiv (0; e_3)$ матрица γ^3 в комбинации $\gamma^3\Psi$ «переставляет» верхние и нижние компоненты спинора (8a), так что вклады порядка $C_n^{(\pm)}$ в матричный элемент (11) будут пропорциональны

[3)] Строго говоря, с учетом и магнитного поля B, и поля ядра N выражение (11) следует писать в виде $M = e\int[\overline{\Psi}'_{BN}\gamma^\mu\Psi_{BN}]e_\mu\exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]\,dV$, и лишь в пределе сверхсильного магнитного поля $B \gg (Z\alpha)^2B_0$ это выражение переходит в «одномерное» его представление с заменой четырехкомпонентного «дираковского» спинора Ψ_{BN} двухкомпонентным спинором Ψ (12) и матриц 4×4 $\boldsymbol{\gamma} \equiv \gamma^{1,2,3}$ единственной матрицей 2×2 γ^3.

$(Z\alpha)^2$ (как следует из вида γ^5 (1b), это же относится и к комбинации $\gamma^5\Psi$, т. е. к матричным элементам $\hat{H}_4'$, что ранее и утверждалось), а ими в рамках приближения мы пренебрегаем. Тогда при расчете вероятности излучения фотона $(Ze)^* \to (Ze)+\gamma$ в сверхсильном магнитном поле $B \gg (Z\alpha)^2 B_0$ можно использовать следующее представление спинора (8a):

$$\Psi^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \psi_n^{(\pm)} \\ \dfrac{i}{2}(Z\alpha)\dfrac{d\psi_n^{(\pm)}}{d\zeta} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

При этом условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}\Psi\, dz = 1$ выполняется приближенно в пренебрежении вкладами, пропорциональными $(Z\alpha)^2$ и точно, если в (12) оставить лишь лидирующее приближение по $(Z\alpha)$, т. е. в этом последнем варианте имеет место следующее представление «дираковского» двухкомпонентного спинора:

$$\Psi^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \psi_n^{(\pm)} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{12a}$$

которое, по существу, и использовалось в работе [3].

В представлении (12) «электронная скобка» в (11), $[\overline{\Psi'}\gamma^\mu\Psi] \to [\overline{\Psi'}\gamma^3\Psi]$, равна

$$[\overline{\Psi'}\gamma^3\Psi] = \frac{i}{2}(Z\alpha)\left[\psi_{n'}\frac{d}{d\zeta}\,\psi_n - \psi_n\frac{d}{d\zeta}\,\psi_{n'}\right]. \tag{13}$$

Она обращается в нуль при использовании (12a), а выражение (13) есть первый отличный от нуля вклад в разложении по $(Z\alpha)$. Очевидно также, что и «скобка» $[\overline{\Psi'}\gamma^5\Psi] \propto (Z\alpha)$.

2. МАТРИЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ И ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОЦЕССА $(Ze)^* \to (Ze) + \gamma$

Введем для удобства обозначение

$$\chi_n = \frac{1}{\sqrt{z_0}}\,\tilde{\chi}_n, \tilde{\chi}_n = = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{n}}\,e^{-\zeta/n}\zeta\Phi\left(1-n,2;\frac{2\zeta}{n}\right). \tag{14}$$

Далее, $k_3 z \sim (Z\alpha)$ поэтому, как обычно, в дипольном приближении в (11) можно положить $\exp(-ik_3z) = 1 - ik_3z + \ldots$ и, пренебрегая опять вкладами порядка $(Z\alpha)^2$ в матричный элемент, заменить в (11) $\exp(-ik_3z) \to 1$. Как можно видеть с учетом (13), матричный элемент (11) отличен от нуля только для переходов с изменением четности, т. е. следует положить $\psi_n \to \psi_n^{(\pm)}$, $\psi_{n'} \to \psi_{n'}^{(\mp)}$.

В этих обозначениях матричный элемент (11) записывается в виде

$$M = ie(Z\alpha)F(n',n)e_3, \tag{15}$$

$$F(n',n) = I(n',n) - I(n,n'), \tag{15a}$$

$$I(n',n) = \int_0^\infty \tilde{\chi}_{n'}\frac{d\tilde{\chi}_n}{d\zeta}\,d\zeta \equiv \frac{2}{(nn')^{3/2}} \times \times\left(-\frac{1}{n}\,I_2 + I_1 + \frac{2}{n}\,I'\right), \tag{15b}$$

где фигурируют следующие интегралы:

$$I_j = \int_0^\infty d\zeta\exp\left\{-\zeta\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right)\right\}\zeta^j \times \times\Phi\left(1-n',2;\frac{2\zeta}{n'}\right)\Phi\left(1-n,2;\frac{2\zeta}{n}\right), \quad j=1,2, \tag{15c}$$

$$I' = \int_0^\infty d\zeta\exp\left\{-\zeta\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right)\right\} \times \times\Phi\left(1-n',2;\frac{2\zeta}{n'}\right)\zeta^2\Phi'\left(1-n,2;\frac{2\zeta}{n}\right), \tag{15d}$$

а Φ' означает производную по аргументу.

Для приведения I_1 в соответствие со стандартным интегралом 7.622 книги [8], который использовался и в работе [3], следует сделать замену переменной $t = 2\zeta/n'$, после чего интеграл I_1 записывается в виде

$$I_1 = \left(\frac{n'}{2}\right)^2\int_0^\infty dt\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{n'}{n}\right)t\right\}t \times \times\Phi(1-n',2;t)\,\Phi\left(1-n,2;\frac{n'}{n}\,t\right). \tag{15e}$$

Интеграл по dt в (15e) в точности совпадает с интегралом 7.622 [8], если в последнем положить[4)]:

$$s = \frac{1}{2}\left(1+\frac{n'}{n}\right), \quad a = 1-n', \quad \alpha = 1-n, \quad c = 2, \quad \lambda = \frac{n'}{n}. \tag{15f}$$

[4)] Приведенное в 7.622 [8] ограничение на значения параметров $\mathrm{Re}\,s > \mathrm{Re}\,\lambda + 1$ не относится к нашему случаю конечных гипергеометрических рядов, его следует принимать во внимание лишь для бесконечных рядов.

Имеем

$$I_1 = (-1)^{1-n'} \left(\frac{nn'}{n-n'}\right)^2 \left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^{n+n'} \times \\ \times F(1-n', 1-n; 2; -x), \quad x = \frac{4nn'}{(n-n')^2}. \quad (15g)$$

Интеграл I_2 в нашем случае $n \neq n'$ равен нулю вследствие ортогональности волновых функций.

Аналогичное (15e) представление интеграла I' имеет вид

$$I' = \left(\frac{n'}{2}\right)^3 \int\limits_0^\infty dt \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{n'}{n}\right)t\right\} t^2 \times \\ \times \Phi\left(1-n', 2; t\right) \Phi'\left(1-n, 2; \frac{n'}{n}\, t\right).$$

Как можно видеть, интеграл I' может быть получен дифференцированием 7.622 [8] по параметру λ с последующей заменой (15f). В результате имеем

$$I' = (-1)^{n'} \left(\frac{nn'}{n-n'}\right)^3 \left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^{n+n'} \times \\ \times \left[(n-1)F(1-n', 1-n; 2; -x) + \frac{2n(n+n')}{(n-n')^2}\, F'\right] \quad (15h)$$

(как и в [3], производная F' опять берется по аргументу).

С использованием (10), (15), (5a) стандартными методами нетрудно получить для вероятности $W(n \to n')$ перехода $n \to n'$ в единицу времени с излучением фотона в сверхсильном магнитном поле $B \gg (Z\alpha)^2 B_0$ (при этом в выражении через сферический угол $\mathbf{k}$ следует положить $e_3 = -\sin\theta_k$ с последующим значением $\int_0^1 \sin^2\theta_k d\cos\theta_k = 2/3$) выражение

$$W(n \to n') = \frac{2}{3}\alpha(Z\alpha)^4 \times \\ \times F^2(n', n)\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)\frac{c}{\lambda_C}. \quad (16)$$

Из (15b), (15g), (15h) и с учетом значения $I_2 = 0$ можно получить для α-линии собственно ультрафиолетовой серии Лаймана ($Z = 1$, $n = 2 \to n' = 1$):

$$I(1,2) = -I(2,1) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 \to F(1,2) = \\ = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3, \quad (17)$$

а вероятность излучения (16) при этом оказывается равной

$$W(2 \to 1) = \frac{2^4}{3^6}\,\alpha(Z\alpha)^4 \frac{c}{\lambda_C}. \quad (17a)$$

3. ПОПРАВКИ К ЭНЕРГИИ ПОРЯДКА $(Z\alpha)^4$

В силу двукратного вырождения по четности состояний со значениями энергии (5a) релятивистские поправки E'_k к энергии, соответствующие отдельным слагаемым в (4), и в лидирующем порядке по $(Z\alpha)$ могут быть найдены как решения секулярного уравнения:

$$\begin{vmatrix} \langle \hat{H}'_k \rangle_{++} - E'_k & \langle \hat{H}'_k \rangle_{+-} \\ \langle \hat{H}'_k \rangle_{-+} & \langle \hat{H}'_k \rangle_{--} - E'_k \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Матричные элементы обозначены по «дираковским» спинорам

$$I_{sign'\,sign} \equiv \langle \hat{H}'_k \rangle_{sign'\,sign} = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}^{(sign')}\, \hat{H}'_k \Psi^{(sign)} dz, \quad (18a)$$

а корни секулярного уравнения

$$E'_k \to I = \frac{I_{++} + I_{--}}{2} \pm \\ \pm \sqrt{\frac{1}{4}(I_{++} - I_{--})^2 + I_{+-}I_{-+}}, \quad (18b)$$

причем в нашем случае

$$I_{++} = I_{--}, \quad I_{+-} = I_{-+}. \quad (18c)$$

Отметим также, что ввиду пропорциональности первых трех слагаемых в (4) единичной матрице их матричные элементы можно вычислять по «шредингеровским» функциям (6), или, что то же самое, по спинорам (12a). Вклад же четвертого слагаемого по спинорам (12a) тождественно равен нулю, поскольку матрица γ^5 «меняет местами» компоненты этого спинора $\Psi^{(\pm)}$ (12a), как ранее уже отмечалось. Таким образом, этот вклад следует вычислять по спинорам (12) с отличной от нуля «нижней» компонентой.

При этом вкладам $k = 1, 2$, а также, как будет видно, и вкладу $k = 4$, в (4) соответствуют «переходы» без изменения четности: $\mathrm{sign}' = \mathrm{sign}(I_{+-} = I_{-+} = 0)$, а вкладу $k = 3$ — с изменением четности: $\mathrm{sign}' = -\mathrm{sign}(I_{++} = I_{--} = 0)$.

Для проведения полезных параллелей со случаем отсутствия магнитного поля запишем здесь и соответствующее выражение в «трехмерном» варианте [6] (см. также [9]):

$$\hat{H}' = -\frac{E^2}{2mc^2} - \frac{(Ze^2)^2}{2mc^2r^2} - \frac{E}{mc^2}\,\frac{(Ze^2)}{r} + \\ + i\frac{\hbar(Ze^2)}{2mc}\,\frac{\gamma^0(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r})}{r^3}. \quad (19)$$

Из сравнения (4), (19) с учетом (5a) следует, что значение

$$E_1' = -\frac{1}{4n^4}\,(Z\alpha)^4mc^2$$

ничем не отличается от значения в «трехмерном» случае. Однако остальные вклады E_k', $k = 2,3,4$, существенно от него отличаются. Значения $E_{2,3}'$, согласно (4), (12a), определяются выражениями

$$E_2' = -\frac{(Ze^2)^2}{2mc^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{z^2}\,\left(\psi_n^{(\pm)}\right)^2, \quad (20a)$$

$$E_3' = \pm\frac{E(Ze^2)}{mc^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{z}\,\psi_n^{(\pm)}\,\psi_n^{(\mp)}, \quad (20b)$$

причем знаковый фактор $\pm$ в (20b) соответствует двум корням секулярного уравнения (18b), равным $\pm\sqrt{I_{+-}I_{-+}} \equiv \pm I_{\binom{+-}{-+}}$, и здесь уже учтены указанные выше соотношения между четностями состояний.

Аналогичное (20a), (20b) представление E_4', вычисляемое, как отмечено, по функциям (12),

$$E_4' = \pm i\frac{\hbar(Ze^2)}{2mc}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{z^2}\times \\ \times\left[\frac{i}{2}(Z\alpha)\psi_n^{(\pm)}\,\frac{d\psi_n^{(\pm)}}{d\zeta} + \frac{i}{2}(Z\alpha)\psi_n^{(\pm)}\,\frac{d\psi_n^{(\pm)}}{d\zeta}\right] = \\ = \mp\frac{\hbar(Ze^2)(Z\alpha)}{4mc}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{z^2}\,\frac{d(\psi_n^{(\pm)})^2}{d\zeta} = \mp\frac{1}{2n^3}(Z\alpha)^4mc^2\times \\ \times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{\zeta^2}\,\frac{d}{d\zeta}\left[e^{-|\zeta|/n}|\zeta|\Phi\left(1-n,2;\frac{2|\zeta|}{n}\right)\right]^2. \quad (20c)$$

Как можно видеть, для «перехода» с изменением четности, т. е. при замене

$$\frac{d(\psi_n^{(\pm)})^2}{d\zeta} \to \frac{d(\psi_n^{(\pm)}\psi_n^{(\mp)})}{d\zeta},$$

выражение (20c) с учетом знакового фактора $\mp$, определяющего знаки перед интегралом в областях $\zeta > 0(-)$, $\zeta < 0(+)$, обращается в нуль, так что матричный элемент $\langle\hat{H}_4'\rangle$, как и утверждалось, отличен от нуля только для «переходов» без изменения четности.

Выражения (20a), (20b) с учетом (6), (6a), (6b) после очевидных преобразований приобретают вид

$$E_2' = -\frac{2}{n^3}(Z\alpha)^4mc^2\int\limits_0^{\infty}d\zeta\,e^{-2\zeta/n}\times \\ \times\Phi^2\left(1-n,2;\frac{2\zeta}{n}\right), \quad (21a)$$

$$E_3' = \pm\frac{2}{n^5}(Z\alpha)^4mc^2\int\limits_0^{\infty}d\zeta\,e^{-2\zeta/n}\zeta\times \\ \times\Phi^2\left(1-n,2;\frac{2\zeta}{n}\right). \quad (21b)$$

В более компактной общей форме эти выражения $E_{2,3}'$ можно переписать как

$$E_k' = -(\mp1)^k\frac{4}{(2n)^k}\,J_k(Z\alpha)^4mc^2, \quad k = 2,3; \quad (22)$$

$$J_k = \int\limits_0^{\infty}dx\,e^{-x}x^{k-2}\Phi^2(1-n,2;x). \quad (22a)$$

Интеграл J_3 вычислен в Приложении (формула (A.5a)): $J_3 = 1/n$.

Интеграл J_2 в форме конечного ряда также вычислен в Приложении (формула (A.6)), причем формально, его частные значения для $n = 1,2,3$ совпадают с соответствующими значениями J_3, в чем можно убедиться и непосредственным расчетом по формуле (22a) для этих значений n. Например, для основного состояния «одномерного» атома имеем $J_{2,3}|_{n=1} = 1$, для первого возбужденного — $J_{2,3}|_{n=2} = 1/2$, а для второго — $J_{2,3}|_{n=3} = 1/3$. Это совпадение, видимо, носит в известном смысле случайный характер: доказать равенство $J_2 = J_3$ в общем случае любых n не представляется возможным из-за сложной структуры ряда (A.6).

В обычном «трехмерном» варианте теории водородоподобного атома вклад первых трех слагаемых в (19) называется релятивистской поправкой к энергии и равен (см., например, книгу [9]):

$$E'^{rel} = -\frac{(Z\alpha)^4}{2n^4}\left(\frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4}\right). \quad (23)$$

Как известно [9], из-за зависимости от l это приводит к тонкой структуре уровней энергии водородоподобного атома с соответствующим расщеплением спектральных линий.

Вклад последнего слагаемого (19) в энергию в «трехмерном» случае описывает так называемое контактное и спин-орбитальное взаимодействия [9].

В «одномерном» варианте теории аналогичная добавка к энергии равна E_4' (20c). Далее, поскольку дифференцируемая функция в подынтегральном выражении последней формулы (20c) зависит только от $|\zeta|$, следует сделать преобразование

$$\frac{d}{d\zeta} = \frac{d|\zeta|}{d\zeta}\,\frac{d}{d|\zeta|}. \tag{24}$$

Записывая $|\zeta|$ через симметричную ступенчатую функцию [10],

$$|\zeta| = \zeta\theta(\zeta) - \zeta\theta(-\zeta), \tag{24a}$$

получаем с учетом соотношения $d(\theta(\zeta))/d\zeta = \delta(\zeta)$ [10] следующее выражение для производной $d|\zeta|/d\zeta$:

$$\frac{d|\zeta|}{d\zeta} = \theta(\zeta) - \theta(-\zeta) + 2\zeta\delta(\zeta). \tag{24b}$$

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta\,\theta(-\zeta)f(|\zeta|) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta\,\theta(\zeta)f(|\zeta|),$$

суммарный вклад первых двух слагаемых в (24b) в интеграл (20c) равен нулю и можно положить $d|\zeta|/d\zeta \to 2\zeta\delta(\zeta)$. Тогда выражение (20c) приобретает вид

$$E_4' = -\frac{4}{n^3}(Z\alpha)^4 mc^2 \int\limits_0^{\infty} d\zeta\,\delta(\zeta)e^{-2\zeta/n} \times \\ \times \Phi\left[\Phi + \frac{\zeta}{n}(-\Phi + 2\Phi')\right]. \tag{25}$$

Таким образом, для E_4' получаем следующее выражение (относительно интегрирования в (25) при данном нижнем пределе см. формулу 21.9-10.a книги [10]):

$$E_4' = -\frac{2}{n^3}(Z\alpha)^4 mc^2. \tag{25a}$$

Равенства (25), (25a) означают, что в сверхсильном магнитном поле, в отличие от «трехмерного» варианта теории [9], остается только контактное взаимодействие, а спин-орбитальное, как и сам орбитальный момент, в «одномерном» варианте, естественно, отсутствует.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

1. В целях идентификации наличия или отсутствия сверхсильного магнитного поля $B \gg (Z\alpha)^2 B_0$ ширину $\delta\omega$ спектральной α-линии серии Лаймана, приблизительно совпадающей согласно соотношению неопределенностей $\delta\omega\tau \sim 1$ с вероятностью (17a) излучения фотона в единицу времени в сверхсильном магнитном поле, т. е. $\delta\omega \sim W \approx 3.5\cdot 10^8$ с$^{-1}$, надо сравнить с ее значением в отсутствие магнитного поля $\delta\omega \sim W \approx 6.3\cdot 10^8$ с$^{-1}$ (книга [11], табл. 15). При этом ширина α-линии в сверхсильном магнитном поле уменьшается почти в два раза по сравнению с шириной при отсутствии магнитного поля. Здесь $\tau = W^{-1}$ — время жизни в возбужденном состоянии.

Отметим в связи с этим, что, как указано в упоминавшейся во Введении работе [6] (см. по этому поводу также [12, 13][5)]), в принципе существует и другой подход к проблеме однофотонного излучения водородоподобного атома с возможностью отличающихся от [11] результатов, однако при этом значение вероятности для перехода $n = 2 \to n' = 1$ одинаково в обоих подходах; для общего же случая произвольного перехода $n \to n'$ доказательство их идентичности в этом аспекте отсутствует.

Стоит отметить также, что при замене

$$\mathbf{M} = \int \Psi'^*_S \mathbf{r}\Psi_S\,dV \to (z)_{n'n} = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_{n'}^{(\pm)^*} z\psi_n^{(\mp)} dz \tag{26}$$

в известном выражении вероятности [11]

$$W = \frac{4}{3}\,\frac{\alpha\Delta E^3}{\hbar^3 c^2}\,|\mathbf{M}|^2 \tag{26a}$$

в соответствии с представленной процедурой перехода к пространственно-одномерному случаю водородоподобного атома в сверхсильном магнитном поле, а также с использованием вычисленного нами ранее

---

5) В работе [13] имеются следующие неточности: 1) в формуле (10б) вместо $\Psi_\mp^{(i)}$ должно быть $\Psi_\pm^{(i)}$; 2) в абзаце перед формулой (11) вместо $\sim (Z\alpha), (Z\alpha)^2$ должно быть $\sim (Z\alpha)^2$; 3) при корректности всех остальных выражений, в том числе вероятности (28в) перехода $n = 2 \to n' = 1$ при численной оценке последней была допущена техническая погрешность: вычисляемая по формуле (28в) вероятность на самом деле приблизительно равна $6.3\cdot 10^8$ с$^{-1}$, и совпадает с классическим результатом Бете и Солпитера [11], так что сделанный в работе учет спиновых и поляризационных состояний при однофотонном излучении не меняет этого их результата, полученного на основе теории Шредингера.

[3] значения матричного элемента $(z)_{n'n}$ получается с учетом (5а) то же самое значение $W \approx 3.5 \cdot 10^8$ с$^{-1}$ для перехода $n = 2 \to n' = 1$, что и при используемом в данной работе стандартном методе КЭД. Это вполне аналогично указанной выше ситуации в отсутствие магнитного поля.

Такой эффект изменения ширины α-линии в спектре излучения сколлапсированных объектов типа нейтронных звезд при однозначной его регистрации и в рамках справедливости наших расчетов и рассуждений будет свидетельствовать о наличии магнитных полей обсуждаемой величины в их окрестности.

Предварительные оценки на основании полученных в работе общих выражений для переходов $n \to \to n'$ показывают, что ширина и других спектральных линий в присутствии сверхсильного магнитного поля, включая оптический диапазон, достаточно существенно отличается от «трехмерного» варианта теории [11] со значениями $\delta\omega \approx W$ из той же табл. 15 [11] в рамках сделанного выше замечания относительно ее адекватности. Поэтому есть надежда более надежного установления факта наличия такого поля в обсуждаемых астрофизических объектах.

2. Кроме того, очевидно, за счет найденных поправок к энергии будет иметь место сдвиг (вклад $E'_n \equiv \sum_{k=1,2,4} E'_k$) и дублетное расщепление (вклад E'_3) каждого уровня с данным n со значениями энергии $E_n^{(\pm)} = E_n + E'_n \pm E_n^{'(3)}$, где обозначено $E_n^{'(3)} \equiv \equiv |E'_3|$.

Соответственно, при переходе $n \to n'$ вместо одной «основной» частоты $\omega_{nn'} = (E_n - E_{n'})/\hbar$ появятся а) еще две частоты при переходе с верхнего (нижнего) уровня дублета с квантовым числом n на верхний (нижний) уровень дублета с квантовым числом n':

$$\omega_{nn'} + \Delta\omega'_{nn'} \pm \Delta\omega_{nn'}^{'(-)}, \Delta\omega'_{nn'} = \frac{E'_n - E'_{n'}}{\hbar}, \quad \Delta\omega_{nn'}^{'(-)} = \frac{E_n^{'(3)} - E_{n'}^{'(3)}}{\hbar}, \tag{27a}$$

б) и еще две частоты при переходе с верхнего (нижнего) уровня на нижний (верхний) уровень:

$$\omega_{nn'} + \Delta\omega'_{nn'} \pm \Delta\omega_{nn'}^{'(+)}, \Delta\omega_{nn'}^{'(+)} = \frac{E_n^{'(3)} + E_{n'}^{'(3)}}{\hbar}. \tag{27b}$$

Именно так должна выглядеть «тонкая структура» спектра водородоподобного атома в сверхсильном магнитном поле с идентичным по количеству (четыре) расщеплением спектральных линий, независимо от значений n, n', что коренным образом отличается от тонкой структуры в отсутствие магнитного поля [9].

Заметим также, что переход между уровнями одного дублета в рассматриваемом приближении по $(Z\alpha)$ запрещен, поскольку при этом $(n' = n)$ $F(n, n') = 0 \to M = 0$, как это следует из (15), (15а).

3. Наконец, как это следует из формулы (15), в одномерном варианте теории вероятность содержит квадрат третьей компоненты вектора поляризации фотона e_3. Это означает, что при наличии сверхсильного магнитного поля излучение водородоподобных атомов в сколлапсированных объектах должно быть линейно поляризовано в плоскости импульс–поле, подобно результату работы [2], относящемуся к эффекту расщепления фотона.

Наличие всех этих трех (пп. 1, 2, 3) признаков в излучении водородоподобных атомов практически однозначно будет свидетельствовать о присутствии сверхсильного магнитного поля в окрестности таких сколлапсированных объектов.

Эффект «одномерности» будет, очевидно, иметь место и для многоэлектронных атомов с соответствующим кардинальным изменением спектра их излучения, поэтому отсутствие в спектре стандартных спектральных линий других элементов также будет указывать на наличие сверхсильного магнитного поля. В частности, отсутствие обычного набора линий железа в спектре другого возможного кандидата (кроме нейтронных звезд) на роль магнитаров — так называемых коричневых карликов (считается, что их «атмосфера» состоит главным образом из паров железа) — также будет свидетельствовать о наличии сверхсильного магнитного поля, поскольку другой вариант — отсутствие железа в их «атмосфере», — по-видимому, исключен.

Отдельная тема для исследования, которой мы в данной работе также не касаемся, — перестройка электронной структуры многоэлектронных атомов в сверхсильном магнитном поле, которая связана с принципом Паули: при фиксированной ориентации спина всех электронов (против поля) отдельные электронные состояния могут различаться только значением квантового числа n и (или) четностью $P = \pm 1$ в соответствии с (6). Иначе говоря, «одномерные» «электронные оболочки» могут состоять либо из одного, либо из двух электронов, если они, как в последнем случае, полностью заполнены. Таким образом, не изменяется только электронная структура H, He, Li, Be, причем последний будет являться своеобразным «одномерным» инертным элементом. Очевидно, и рентгеновские спектры «одномерных» многоэлектронных атомов будут отличаться от их «трехмерного» аналога, хотя бы из-за вероятного изменения экранировки ядра.

Изменятся также физические и химические свойства всех элементов, кроме, возможно, H и He, включая объединение «одномерных» атомов в молекулы, если атомы с числом электронов $Z > 1$, а также молекулы вообще могут существовать в условиях упомянутых сколлапсированных объектов (их температура может превосходить энергии ионизации и связи «одномерных» атомов, которые еще предстоит вычислить).

Эти свойства «одномерных» атомов представляют не только практический интерес в плане астрофизических приложений, на что в основном и сделан акцент в данной работе, но также и чисто академический с очевидной необходимостью их дальнейшего теоретического исследования по указанным выше направлениям.

Статья подготовлена в рамках выполнения базовой части государственного задания ФГБОУ ВО «Московский политехнический университет» (проект №3.4880.2017/БЧ).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление интегралов $J_k, k = 2, 3$ (22a)

Определим интегралы

$$J_2(x) = \int_0^\infty dt\, e^{-t}\Phi^2(xt), \tag{A.1a}$$

$$J_3(x) = \int_0^\infty dt\, e^{-t}t\Phi^2(xt), \tag{A.1b}$$

где для краткости введено обозначение $\Phi(y) \equiv \equiv \Phi(1-n, 2; y)$, причем, очевидно, $J_{2,3} = J_{2,3}(1)$.

Интегрируя далее в(A.1b) по частям, имеем (производная, как и ранее, берется по аргументу)

$$J_3(x) = J_2(x) + 2x\int_0^\infty dt\, e^{-t}t\Phi(xt)\Phi'(xt). \tag{A.2a}$$

С другой стороны,

$$\frac{dJ_2(x)}{dx} = 2\int_0^\infty dt\, e^{-t}t\Phi(xt)\Phi'(xt), \tag{A.2b}$$

поэтому из (A.2a), (A.2b) получаем

$$J_3(x) = J_2(x) + x\frac{dJ_2(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\,[xJ_2(x)], \tag{A.3a}$$

$$J_2(x) = \frac{1}{x}\int_0^x dy\, J_3(y). \tag{A.3b}$$

Пределы интегрирования в (A.3b) выбраны в соответствии с очевидным, следующим из определения (A.1a) и значений $\Phi(0)$, $J_3(0) = 1$ (см. также (A.1b) и ниже (A.5)) условием $J_2(0) = 1$.

Далее, для приведения интеграла $J_3(x)$ к стандартной форме 7.622 [8] запишем его в виде

$$J_3(x) = \lim_{x'\to x}\int_0^\infty dt\, e^{-t}t\Phi(x't)\Phi(xt), \tag{A.4a}$$

или

$$J_3(x) = \lim_{x'\to x}\frac{1}{x'^2}\int_0^\infty dt\, e^{-t/x'}\Phi(t)\Phi\left(\frac{x}{x'}\,t\right). \tag{A.4b}$$

Этот интеграл равен стандартному, если в последнем положить $a = \alpha = 1-n$, $s = 1/x'$, $\lambda = x/x'$.

После достаточно простых преобразований с учетом определения обобщенного гипергеометрического ряда [8] для нашего случая $F \equiv F(1-n, 1-n; 2; y)$ получаем

$$J_3(x) = (1-x)^{2(n-1)} \times \\ \times \left\{1 + (1-\delta_{n,1})\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{(n-i)^2}{i+1}\right]\frac{y^k}{k!}\right\}, \\ y = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \tag{A.5}$$

где для удобства записи формулы использован известный символ Кронекера $\delta_{n,m}$. Отсюда, кстати, следует, что

$$J_3 = J_3(1) = \frac{1}{n}, \tag{A.5a}$$

причем вклад дает последний член ряда по k.

После подстановки $J_3(x)$ вида (A.5) в (A.3b) находим окончательно для J_2:

$$J_2 = \frac{1}{2n-1}\left\{1+(1-\delta_{n,1})\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{(n-i)^2}{i+1}\right] \times \right. \\ \left. \times \frac{(2k)!}{k!\prod_{j=1}^{2k}(2n-j-1)}\right\}. \tag{A.6}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **142**, 85 (2012).

2. S. L. Adler, J. N. Bahcall, C. G. Callan, and M. N. Rosenbluth, Phys. Rev. Lett. **25**, 1061 (1970).

3. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **137**, 241 (2010).

4. А. А. Соколов, *Введение в квантовую электродинамику*, Физматлит, Москва (1958).

5. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Релятивистская квантовая теория*, ч. 1, Наука, Москва (1968).

6. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **149**, 285 (2016); Поправка: ЖЭТФ **149**, 909 (2016).

7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. III, *Квантовая механика, Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1974), с. 527, 150.

8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).

9. А. А. Соколов, Ю. М. Лоскутов, И. М. Тернов, *Квантовая механика*, Учпедгиз, Москва (1962).

10. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1973).

11. Г. Бете, Э. Солпитер, *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*, Физматлит, Москва (1960).

12. В. В. Скобелев, Изв. вузов, физика **51**(1), 41 (2016).

13. В. В. Скобелев, Изв. вузов, физика **59**(7), 141 (2016).