

АНИЗОТРОПНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДВУМЕРНОГО АТОМА ВОДОРОДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Е. А. Коваль^{a,b}, О. А. Коваль^{a**}*

*^a Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова,
Объединенный институт ядерных исследований
141980, Дубна, Московская обл., Россия*

*^b Кафедра фундаментальных проблем физики микромира,
Государственный университет «Дубна»
141980, Дубна, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 7 декабря 2016 г.

Целью работы является численное исследование анизотропных особенностей двумерного атома водорода в магнитном поле. Вычислены энергия основного состояния (ЭОС) двумерного атома водорода и соответствующая волновая функция в приближении Борна–Оппенгеймера и с учетом конечной массы протона. Обнаружена нелинейная зависимость энергии основного состояния от угла α между направлением вектора индукции магнитного поля и нормалью к плоскости движения электрона в широком диапазоне величин магнитного поля. С увеличением угла α до 90° наблюдается эффект значительного (до 1.9 раза) уменьшения энергии основного состояния двумерного атома водорода. Получено согласие с экспериментальными данными и определены зависимости энергии основного состояния двумерного экситона в $\text{GaAs}/\text{Al}_{0.33}\text{Ga}_{0.67}\text{As}$ для различных углов наклона и магнитных полей, применяемых в реальных экспериментальных установках при исследовании свойств экситонов.

DOI: 10.7868/S0044451017070045

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к двумерным (2D) системам поддерживается благодаря широкому кругу возникающих в них эффектов: переход Березинского–Костерлица–Таулеса [1]; спектральные свойства спиновых волн [2] и системы двух электронов [3] в сильном магнитном поле; дробный квантовый эффект Холла в наклонном внешнем магнитном поле [4, 5]; индуцированная магнитным полем сверхпроводимость в квазидвумерных органических проводниках [6]; предсказание [7] и открытие [8] графана, представляющего собой квазидвумерный монослой графена, связанный с атомарным водородом, и др.

Первоначально модель 2D-атома водорода исследовалась из чисто теоретических соображений [9–12], но также нашла применение для описания сильноанизотропных трехмерных кристаллов [13]. С развитием экспериментальных методов создания си-

стем пониженной размерности и новыми перспективами для разработки полупроводниковых устройств модель 2D-водорода была применена для описания эффекта заряженной примеси в 2D-системах [14–16] и эффективного взаимодействия в экситонной паре электрон-дырка, движение которых ограничено плоскостью, в полупроводниковых 2D-гетероструктурах [17]. В ряде работ исследовались внутренние симметрии модели и причины случайного вырождения, возникающего и в трехмерном (3D) случае [17–19].

Влияние внешнего магнитного поля, направленного вдоль нормали к плоскости движения электрона, на спектр 2D-водорода исследовалось с помощью двухточечной аппроксимации Паде [20], метода асимптотических итераций [21], вариационного подхода [22, 23], а также аналитически для отдельных значений магнитного поля [24]. Исследования водорода в сильных магнитных полях [25–27] обусловлены астрофизическими приложениями: величина магнитного поля в карликовых звездах может достигать 10^2 – 10^5 Тл, а в нейтронных звездах — 10^7 – 10^9 Тл [28].

* E-mail: e-cov@yandex.ru

** E-mail: kov.oksana20@gmail.com

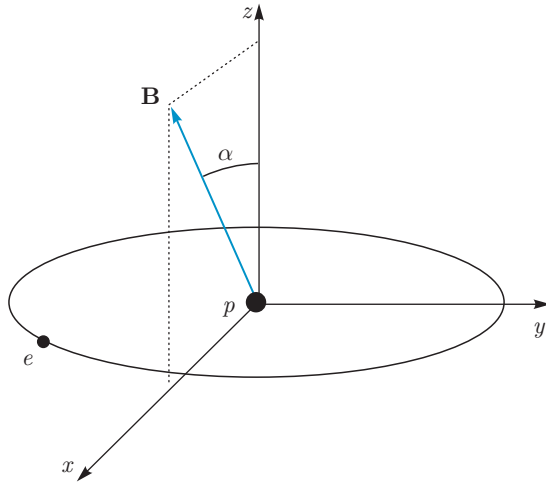


Рис. 1. Схематическое представление 2D-атома водорода во внешнем магнитном поле, направленном под углом α к нормали к плоскости движения электрона

Целью настоящей работы является численное исследование анизотропных свойств 2D-атома водорода в магнитном поле. В отличие от выполненных ранее работ [20–24, 27] мы изучаем зависимости спектра и волновых функций исследуемой системы от произвольных направлений магнитного поля, составляющих угол α с нормалью к плоскости движения электрона (рис. 1). Отметим, что хотя электрон в 2D-атоме водорода движется в плоскости, электромагнитные поля, угловой момент и другие величины не ограничены расположением в плоскости. Целью работы также является исследование влияния наклона магнитного поля на энергию основного состояния (ЭОС) 2D-экситонов в GaAs/Al_{0.33}Ga_{0.67}As при различных магнитных полях, доступных на современных лабораторных экспериментальных установках.

Для дискретизации матрицы гамильтониана нами применяются разложение волновой функции на основе метода дискретной переменной [29, 30], семиточечная конечно-разностная аппроксимация, а для решения задачи на собственные значения — метод обратных итераций [31], на каждой итерации которого матричное уравнение решается с помощью матричной модификации алгоритма прогонки [32].

В разд. 2 рассмотрено обобщение проблемы связанных состояний 2D-атома водорода в магнитном поле на случай магнитного поля, направленного под углом α к нормали к плоскости движения электрона, и описан алгоритм для ее численного решения. Полученные результаты и их краткий анализ представлены в разд. 3. В разд. 4 приведены основные выводы.

Таблица 1. Численно рассчитанные значения энергии 2D-атома водорода для n -го уровня E_n в отсутствие внешних полей и аналитические значения E из работы [12]

n	E , ат. ед. [12]	E_n , ат. ед.
1	-2.00000000	-2.00000000
2	-0.22222222	-0.22222222
3	-0.08000000	-0.08000000
4	-0.04081632	-0.04081633
5	-0.02469136	-0.02469136
6	-0.01652892	-0.01652892
7	-0.01183432	-0.01183432
8	-0.00888889	-0.00888889
9	-0.00692042	-0.00692042
10	-0.00554017	-0.00554016

Все величины приведены в атомных единицах: $\hbar = m_e = e = 1$.

2. ПРОБЛЕМА СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ 2D-АТОМА ВОДОРОДА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Гамильтониан 2D-атома водорода в однородном магнитном поле \mathbf{B} в полярных координатах $\rho = (\rho, \phi)$ имеет вид [22]

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{P} - 2\mathbf{A}_\rho)^2}{2(m_p + m_e)} + \frac{[\mathbf{p} - (\mu_e - \mu_p)\mathbf{A}_\rho]^2}{2m_r} - \frac{1}{\rho}, \quad (1)$$

где m_p — масса протона, m_e — масса электрона (соответствующие приведенные массы $\mu_p = m_p/(m_p + m_e)$, $\mu_e = m_e/(m_p + m_e)$), \mathbf{P} и \mathbf{p} — соответственно полный и относительный импульсы системы, $m_r = m_p m_e / (m_p + m_e)$ — приведенная масса системы. Используется симметричная калибровка вектор-потенциала $\mathbf{A}_\rho = [\mathbf{B} \times \boldsymbol{\rho}] / 2$, где $\boldsymbol{\rho}$ — относительная координата.

Систему координат выберем из соображений удобства и наличия аксиальной симметрии в 2D-атоме водорода: плоскость xy совпадает с плоскостью движения электрона, а индукция магнитного поля $\mathbf{B} = \mathbf{e}_x B \sin \alpha + \mathbf{e}_z B \cos \alpha$ лежит в плоскости xz (см. рис. 1).

Аналогично работе [22] рассмотрена система, находящаяся в покое ($\mathbf{P} = 0$): в этом случае движение центра масс в выражении (1) отделяется от относи-

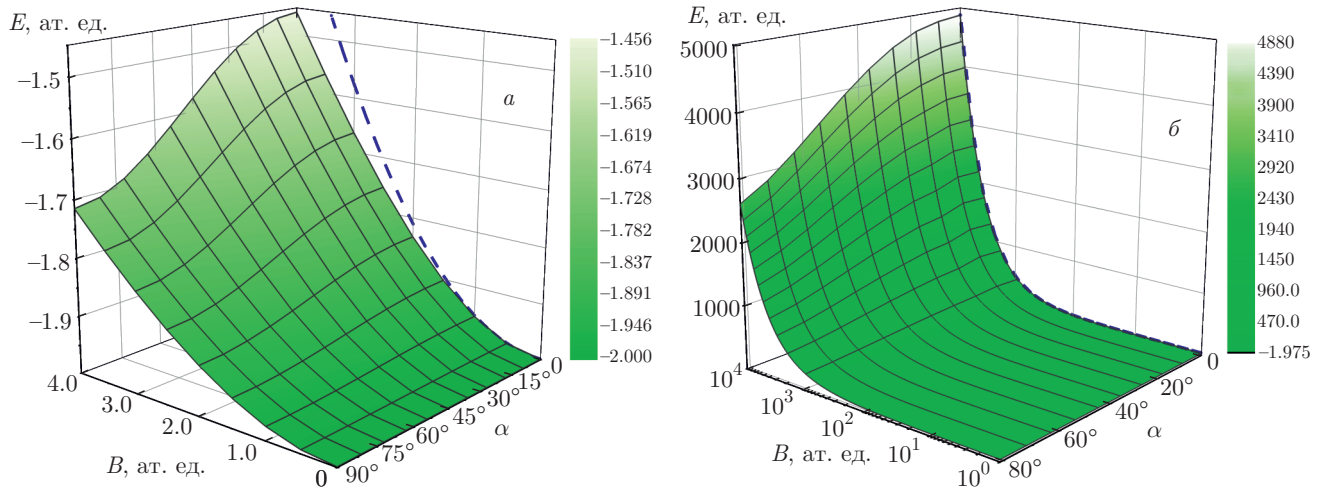


Рис. 2. (В цвете онлайн) Зависимости энергии основного состояния 2D-атома водорода от величины магнитного поля в диапазонах 0–4 ат. ед. (а) и 1–10⁴ ат. ед. (б) и угла наклона α направления магнитного поля к оси z с учетом конечной массы протона. Штриховыми кривыми обозначены зависимости ЭОС для слабых (а, уравнение (17)) и сильных (б, уравнение (18)) магнитных полей [22], найденные по теории возмущений

Таблица 2. Сравнение дипольных матричных элементов d_{nl} , рассчитанных численно для 2D-атома водорода в отсутствие внешних полей и полученных аналитически в работе [12]

n	l	d_{nl} , ат. ед. [12]	d_{nl} , ат. ед.
2	1	0.34445950	0.34445950
3	1	0.14087514	0.14087514
4	1	0.08223128	0.08223128
5	1	0.05564053	0.05564053

Таблица 3. Значения ЭОС при различных величинах магнитного поля, полученные другими авторами с помощью метода асимптотических итераций [21] и вариационного подхода [22], в сравнении со значениями, вычисленные нами в приближении бесконечной массы протона

B , ат. ед.	E , ат. ед. [21]	E , ат. ед. [22]	E , ат. ед.
0.1	-1.999530	-1.999531	-1.999531
0.25	-1.997078	-1.997079	-1.997079
107/250	-1.991490	-1.991490	-1.991491
1	-1.955159	-1.955159	-1.955159

тельного движения. Используя представление волновой функции в виде

$$\Psi(\mathbf{R}, \rho) = e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}}\Psi(\rho), \quad (2)$$

где \mathbf{R} — координата центра масс, получим гамильтониан относительного движения [22]:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2 + 2(\mu_p - \mu_e)(\mathbf{A}_\rho \cdot \mathbf{p}) + \mathbf{A}_\rho^2}{2m_r} - \frac{1}{\rho}. \quad (3)$$

В выражении (3) 2D-оператор кинетической энергии

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m_r} = -\frac{1}{2m_r} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} h^{(0)}(\phi) \right] \quad (4)$$

содержит угловую часть, имеющую простой вид в полярных координатах $h^{(0)}(\phi) = \partial^2/\partial\phi^2$. Линейное,

$$(\mathbf{A}_\rho \cdot \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{L}) = \frac{1}{2}B \cos \alpha L_z, \quad (5)$$

и квадратичное по полю,

$$\mathbf{A}_\rho^2 = \frac{1}{4}B^2 \rho^2 (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \phi), \quad (6)$$

слагаемые учитываются в предельном переходе от 3D- к 2D-случаю (см. работу [33]). В случае $\alpha = 0$ магнитное квантовое число l определяется проекцией углового момента $L_z = l$.

Проблема связанных состояний 2D-атома водорода в магнитном поле описывается уравнением Шредингера с гамильтонианом (3) для относительного движения:

$$H\Psi(\rho, \phi) = E\Psi(\rho, \phi), \quad (7)$$

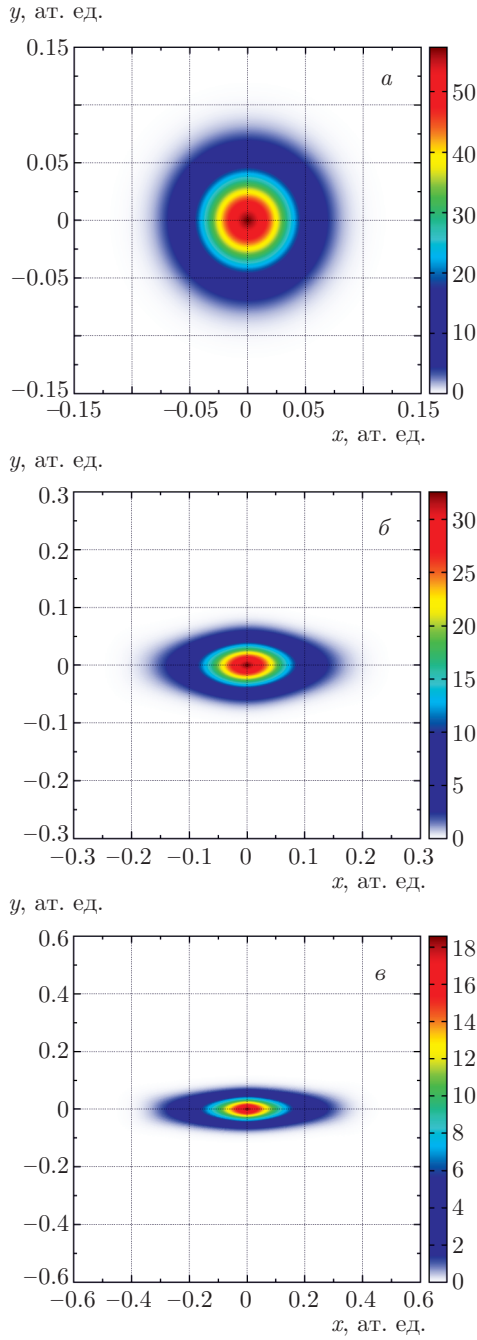


Рис. 3. (В цвете онлайн) Пространственное распределение $|\Psi(\rho)|^2$ волновой функции основного состояния 2D-атома водорода для магнитного поля $B = 10^3$ ат. ед. при $\alpha = 0$ (а), $\alpha = 45^\circ$ (б), $\alpha = 80^\circ$ (в)

где E и $\Psi(\rho, \phi)$ — искомые уровень энергии и волновая функция связанного состояния относительного движения.

Для поиска уровней энергии E и собственных функций $\Psi(\rho, \phi)$ уравнения (3) используем вариацию метода дискретной переменной, предложен-

ную в статье [29] и примененную в работе [30] для проблемы диполь-дипольного рассеяния в двух пространственных измерениях. Для представления волновой функции на равномерной разностной сетке

$$\phi_j = \frac{2\pi j}{2M+1} \quad j = 0, 1, \dots, 2M$$

по угловой переменной ϕ используются собственные функции

$$\xi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im(\phi-\pi)} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \quad (8)$$

оператора $h^{(0)}(\phi)$ в качестве фурье-базиса. Волновая функция ищется в виде разложения:

$$\Psi(\rho, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{m=-M}^M \sum_{j=0}^{2M} \xi_m(\phi) \xi_{mj}^{-1} \psi_j(\rho), \quad (9)$$

где

$$\xi_{mj}^{-1} = \frac{2\pi}{2M+1} \xi_{jm}^* = \frac{\sqrt{2\pi}}{2M+1} \exp[-im(\phi_j - \pi)]$$

— обратная матрица к квадратной $(2M+1) \times (2M+1)$ -матрице $\xi_{jm} = \xi_m(\phi_j)$, определенной на разностной сетке по угловой переменной. Радиальные функции $\psi_j(\rho)$ задаются значениями волновой функции на разностной сетке ϕ_j :

$$\psi_j(\rho) = \sqrt{\rho} \Psi(\rho, \phi_j). \quad (10)$$

В представлении (9) уравнение Шредингера (7) преобразуется в систему $2M+1$ связанных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{1}{2m_r} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \psi_j(\rho) - \frac{1}{4\rho^2} \psi_j(\rho) + \sum_{j'=0}^{2M} V_{jj'} \psi_{j'}(\rho) - \frac{1}{\rho^2} \sum_{j'=0}^{2M} h_{jj'}^{(0)} \psi_{j'}(\rho) \right) = E \psi_j(\rho), \quad (11)$$

где матрица потенциала имеет вид

$$V_{jj'}(\rho) = -\frac{2m_r}{\rho} \delta_{jj'} + (\mu_p - \mu_e) B \cos \alpha h_{jj'}^{(1)} + \frac{1}{4} B^2 \rho^2 (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \phi_j) \delta_{jj'}, \quad (12)$$

а недиагональные матрицы операторов $h^{(0)}$ и $h^{(1)} \equiv L_z$ задаются соотношениями

$$h_{jj'}^{(0)} = - \sum_{j''=-M}^M j''^2 \xi_{jj''} \xi_{j''j'}^{-1}, \quad (13)$$

$$h_{jj'}^{(1)} = \sum_{j''=-M}^M j'' \xi_{jj''} \xi_{j''j'}^{-1}. \quad (14)$$

Таблица 4. Сравнение вычисленных нами значений уровней энергии в пределе $m_p \rightarrow \infty$ и результатов работ [21, 24] для магнитного квантового числа $l = 0$

n	B , ат. ед.	E_n , ат. ед. [24]	E_n , ат. ед. [21]	E_n , ат. ед.
2	4	4.000000	4.0000000	4.0000000
3	0.6666666	1.000000	1.0000000	1.0000000
4	0.2157031	0.431406	0.4314064	0.4314064
3	2.7472602	5.494520	5.4945207	5.4945207
5	0.0947113	0.236778	0.2367785	0.2367785
4	0.5150444	1.287610	1.2876109	1.2876109
6	0.0496114	0.148834	0.1488343	0.1488343
5	0.1776672	0.533000	0.5330020	0.5330021
4	2.1513889	6.454170	6.4541668	6.4541668
10	0.0088435	0.0442176	0.0442177	0.0442177

Таблица 5. То же, что и в табл. 4, для магнитного квантового числа $l = 1$

n	B , ат. ед.	E_n , ат. ед. [24]	E_n , ат. ед. [21]	E_n , ат. ед.
2	1.3333333	2.6666700	2.6666667	2.6666667
3	0.2857142	0.7142860	0.7142857	0.7142857
4	0.1102572	0.3307720	0.3307717	0.3307717
3	1.0749278	3.2247800	3.2247835	3.2247835
5	0.0545241	0.1909910	0.1907883	0.1907883
4	0.2395487	0.8384210	0.8384207	0.8384207
6	0.0311049	0.1244200	0.1244197	0.1244197
5	0.0951651	0.3806600	0.3806606	0.3806606
4	0.9151684	3.6606800	3.6606737	3.6606737
7	0.0194448	0.0875018	0.0875018	0.0875018
10	0.0066281	0.0397691	0.0397691	0.0397691

Граничные условия для радиальных функций $\psi_j(\rho)$ определяются из условий конечности волновой функции в нуле ($\Psi(\rho, \phi_j) = \psi_j(\rho)/\sqrt{\rho} \rightarrow \text{const}$),

$$\psi_j(\rho \rightarrow 0) \rightarrow \text{const} \times \sqrt{\rho} \quad (j = 0, 1, \dots, 2M), \quad (15)$$

и убывания на бесконечности,

$$\psi_j(\rho \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad (j = 0, 1, \dots, 2M). \quad (16)$$

Для решения задачи на собственные значения (11), (15), (16) вводится неравномерная сетка (по аналогии с квазиравномерными сетками [34]) по радиальной переменной ρ : $\rho_j = \rho_N t_j^2$, $j = 1, 2, \dots, N$, узлы на которой определяются отображением $\rho_j \in [0, \rho_N \rightarrow \infty]$ на равномерную сетку $t_j \in [0, 1]$.

Для дискретизации используется конечно-разностная аппроксимация шестого порядка точности. Собственные значения получаемой матрицы гамильтониана определяются численно с помощью метода обратных итераций со сдвигом. Возникающая на каждой итерации алгебраическая задача решается с помощью матричной модификации алгоритма прогонки [32] для диагональной блок-матрицы.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Приближение Борна – Оппенгеймера

Первоначально для решения поставленной задачи мы применили приближение Борна – Оппенгей-

Таблица 6. Численно рассчитанные значения ЭОС для различных величин магнитного поля и углов наклона α в приближении $m_p \rightarrow \infty$ и с учетом конечной массы протона

B , ат. ед.	α	$E(m_p \rightarrow \infty)$, ат. ед.	E , ат. ед.
0	0°	-2.00000000	-1.99891136
1	0°	-1.95515969	-1.95400154
1	45°	-1.96609353	-1.96495184
1	90°	-1.97736937	-1.97624499
1.5	0°	-1.90335296	-1.90212093
1.5	45°	-1.92643285	-1.92523340
1.5	90°	-1.95085064	-1.94968360
4	0°	-1.45958714	-1.45782964
4	45°	-1.57808514	-1.57646979
4	90°	-1.71786453	-1.71556932

мера, использованное в работах [9–12, 14–16, 20, 21], которое предполагает, что электрон движется в поле положительно заряженного неподвижного центра.

С целью верификации применяемого численного алгоритма проведено исследование задачи связанных состояний двумерного атома водорода в отсутствие внешних полей в приближении $m_p \rightarrow \infty$, имеющей аналитическое решение [9–12]. В табл. 1 продемонстрировано полное согласие первых десяти уровней энергии 2D-атома водорода, рассчитанных численно с помощью приведенного выше алгоритма, с аналитическими значениями [12]. В табл. 2 представлено сравнение вычисленных дипольных матричных элементов с полученными аналитически в работе [12].

Приведенный в разд. 2 алгоритм применен для расчетов энергии основного состояния 2D-атома водорода в магнитном поле, направленном перпендикулярно к плоскости движения электрона. Полученные в ходе численных расчетов значения ЭОС, вычисленные нами в приближении бесконечной массы протона и полученные другими авторами с помощью метода асимптотических итераций [21] и вариационного подхода [22] при различных величинах магнитного поля, представлены в табл. 3. Полученные результаты находятся в соответствии с результатами других авторов [21, 22]. Сравнение со значениями уровней энергии для двух проекций углового момента из работ [21, 24] при различных величинах магнитных полей представлено в табл. 4 для маг-

нитного квантового числа $l = 0$ и в табл. 5 для $l = 1$.

3.2. 2D-атом водорода в магнитном поле с учетом конечной массы протона

Для более точного анализа влияния величины и направления магнитного поля на спектр исследуемой системы нами рассчитана зависимость ЭОС 2D-атома водорода от угла наклона α направления магнитного поля к оси z и от величины магнитного поля с учетом конечной массы протона. На рис. 2а найденная зависимость иллюстрируется для диапазона полей от 0 до 4 ат. ед. (1 ат. ед. = $2.35 \cdot 10^5$ Тл) и на рис. 2б — для диапазона полей от 1 до 10^4 ат. ед. Рисунок 2 иллюстрирует обнаруженный эффект нелинейного уменьшения ЭОС: при малых магнитных полях изменение слабое, в области больших полей ЭОС уменьшается почти вдвое с изменением угла α от 0 до 90°. Заметим, что найденная нелинейная зависимость не сводится к влиянию только лишь проекции B_z магнитного поля на нормаль к плоскости движения электрона, так как в этом случае для угла $\alpha = 90^\circ$, при котором $B_z = 0$, энергия основного состояния строго равнялась бы ЭОС 2D-атома водорода в отсутствие магнитного поля, что опровергается представленными на рис. 2а результатами численного анализа.

С целью оценки влияния конечной массы протона на изменение ЭОС численно рассчитанные значения ЭОС для различных величин магнитного поля и углов наклона α в приближении $m_p \rightarrow \infty$ и с учетом конечной массы протона приведены в табл. 6. Отметим, что данные, посчитанные в обоих приближениях, различаются в третьем знаке после запятой в широком диапазоне входных расчетных данных.

Анализ приведенных на рис. 2 зависимостей показывает, что для ненулевых углов α наблюдается более медленный рост значения ЭОС с увеличением магнитного поля, хотя квадратичная для слабых полей и линейная для сильных полей зависимости ЭОС от величины магнитного поля сохраняются. Значения ЭОС по теории возмущений для слабых,

$$E = -2m_r + \frac{3}{64m_r^3}B^2 + \dots, \tag{17}$$

и сильных,

$$E = \frac{B}{2m_r} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}B + \dots, \tag{18}$$

магнитных полей, найденные Турбинером [22], представлены штриховыми кривыми в плоскости $\alpha = 0$ соответственно на рис. 2а и 2б.

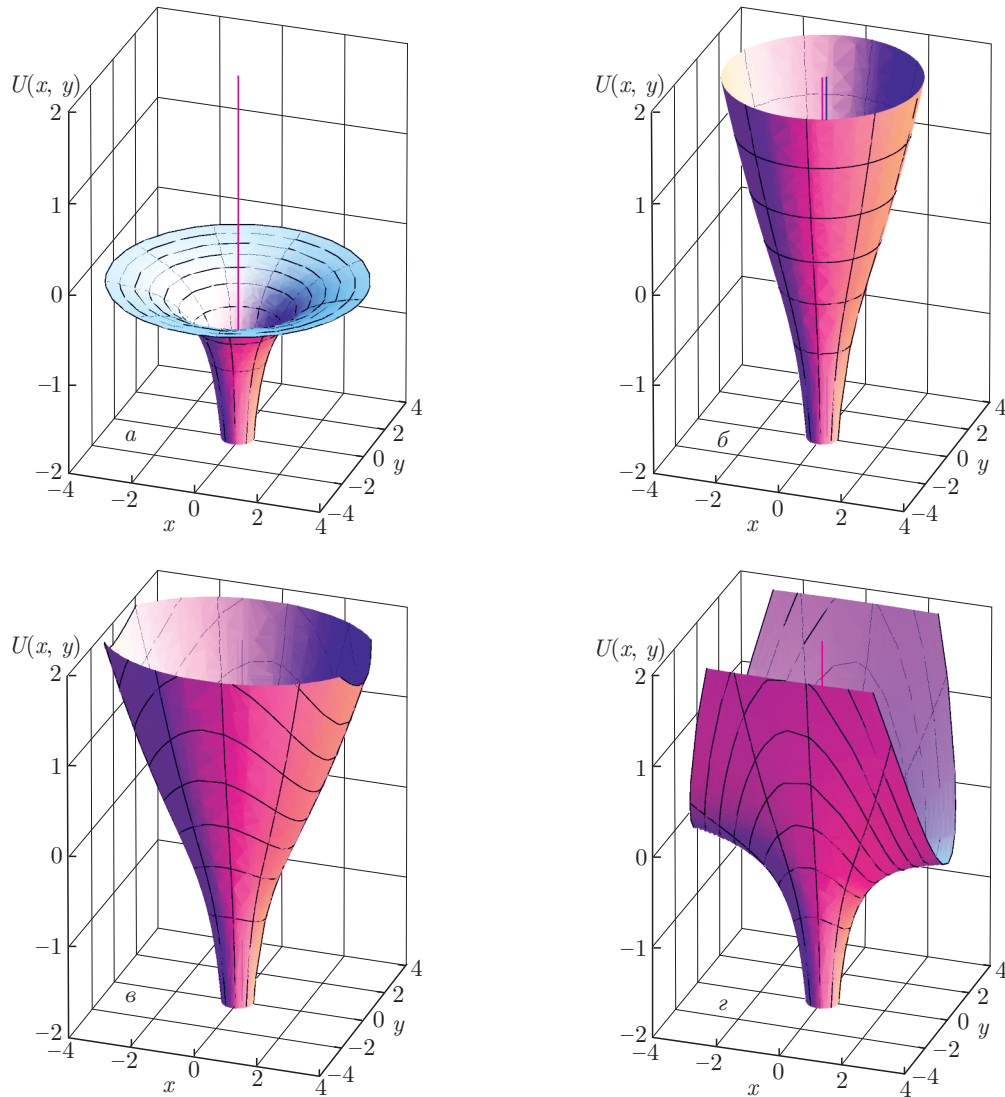


Рис. 4. (В цвете онлайн) Зависимости потенциала $U(\rho) = -1/\rho + B^2\rho^2(1 - \sin^2\alpha \cos^2\phi)$ от угла α между направлением вектора индукции магнитного поля и осью z для случая отсутствия магнитного поля (а), для магнитного поля $B = 0.5$ ат. ед. при $\alpha = 0$ (б), $\alpha = 45^\circ$ (в), $\alpha = 90^\circ$ (г). Все величины на рисунке приведены в атомных единицах

Пространственное распределение волновой функции основного состояния с увеличением угла α становится сильноанизотропным. В частности, наблюдается вытянутость атомного состояния вдоль оси x при его одновременном сжатии вдоль оси y , что проиллюстрировано на рис. 3. Наряду с убыванием ЭОС с увеличением угла α подобное поведение волновой функции может быть объяснено постепенным ослаблением «гармонического» вклада магнитного поля (б) вдоль оси x при $\alpha \rightarrow 90^\circ$, полностью исчезающим в случае $\alpha = 90^\circ$. Соответствующее изменение потенциальной поверхности кулоновского и анизотропного квадратичного по полю (б) слагаемых проиллюстрировано на рис. 4.

3.3. 2D-экситон в магнитном поле

Следует отметить, что предложенный в настоящей работе подход применим для анализа спектра системы противоположно заряженных частиц, движущихся в плоскости в магнитном поле. Примером таких систем является экситон в двумерной квантовой яме GaAs/Al_{0.33}Ga_{0.67}As. Для описания подобной системы в гамильтониане (3) мы изменили массы частиц на эффективные массы электрона $m_e^* = 0.067m_e$ и тяжелой дырки $m_h = 0.18m_e$ [35], добавив фактор $1/\epsilon$ (где $\epsilon = 12.1$ — константа диэлектрической проницаемости) в слагаемое кулоновского взаимодействия частиц:

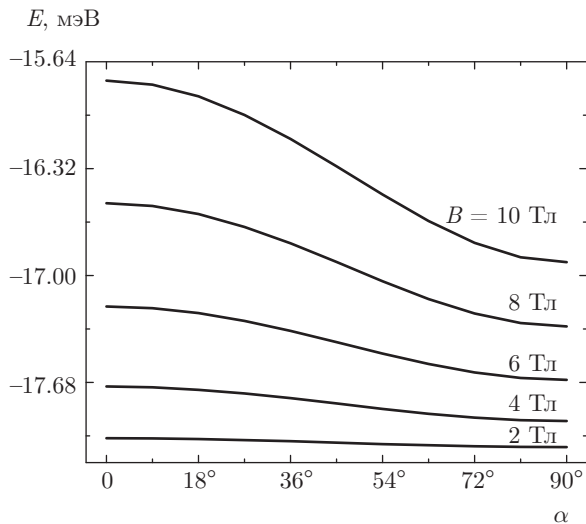


Рис. 5. Зависимость энергии основного состояния экситона в GaAs/Al_{0.33}Ga_{0.67}As от угла наклона α для величины магнитного поля B от 2 до 10 Тл

$$H = \frac{\mathbf{p}^2 + 2(\mu_h - \mu_e)(\mathbf{A}_\rho \cdot \mathbf{p}) + \mathbf{A}_\rho^2}{2m_r} - \frac{1}{\epsilon\rho}, \quad (19)$$

где

$$\mu_h = \frac{m_h}{m_h + m_e^*}, \quad \mu_e = \frac{m_e^*}{m_h + m_e^*}, \quad m_r = \frac{m_h m_e^*}{m_h + m_e^*}.$$

Вычисленные при различных величинах магнитного поля (от 2 до 10 Тл) зависимости энергии основного состояния экситона от угла наклона α , приведенные на рис. 5, аналогичны по виду зависимостям для 2D-атома водорода. Значения ЭОС для рассматриваемого в настоящей работе случая $P = 0$ для $\alpha = 0$ находятся в прекрасном согласии со значениями из работ [23, 36]. Благодаря уменьшению энергии основного состояния с увеличением угла наклона α , изменение направления магнитного поля может использоваться для изменения энергии связи 2D-экситона в полупроводниковых гетероструктурах с эффективным движением электрона и дырки в плоскости.

Отметим, что в случае равенства эффективных масс электрона и дырки 2D-экситона, $m_h = m_e^*$, исследуемом в работе [3], линейное по полю слагаемое исчезает и гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2m_r} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{4} B^2 [x^2(1 - \sin^2 \alpha) + y^2] \right] - \frac{1}{\epsilon\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (20)$$

Свойства гамильтониана (20) исследовались в рамках изучения спектров анизотропных двумерных

квантовых точек в работе [37], где было обнаружено, что для определенных значений параметра анизотропии $1 - \sin^2 \alpha$ имеется дополнительный интеграл движения. Существование дополнительной сохраняющейся величины приводит к значительным изменениям в структуре спектра, в частности, к восстановлению оболочечной структуры уровней, исчезающей при других значениях параметра анизотропии $1 - \sin^2 \alpha$. Таким образом, определенные углы наклона магнитного поля могут сильно менять спектральные характеристики 2D-экситонов в материалах с близкими эффективными массами $m_h \approx m_e^*$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема 2D-атома водорода в магнитном поле расширена на случай произвольной направленности магнитного поля. Предложенный для ее решения алгоритм верифицирован на задачах 2D-атома водорода в отсутствие внешних полей и 2D-атома водорода в магнитном поле, направленном перпендикулярно плоскости движения электрона. Для обобщения на случай произвольной направленности магнитного поля численно рассчитана зависимость энергии основного состояния (ЭОС) 2D-атома водорода от величины магнитного поля и от угла α между направлением магнитного поля и нормалью к плоскости движения электрона. Вычислена зависимость ЭОС 2D-экситона в GaAs/Al_{0.33}Ga_{0.67}As от угла наклона α для магнитных полей от 2 до 10 Тл. В ходе численных расчетов показано, что при увеличении α от 0 до 90° ЭОС в случае как 2D-атома водорода, так и 2D-экситона уменьшается нелинейным образом. Обнаруженная зависимость ЭОС 2D-экситонов от угла наклона магнитного поля свидетельствует о явной возможности влиять на энергию связи и спектральные характеристики экситонов направлением магнитного поля.

Авторы выражают благодарность В. С. Мележику и В. В. Пупышеву за плодотворные обсуждения данной статьи. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-32-00865).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973).
2. Ю. А. Бычков, С. В. Иорданский, Г. М. Элиашберг, Письма в ЖЭТФ **33**, 152 (1981).

3. C. Kallin and B. I. Halperin, Phys. Rev. B **30**, 5655 (1984).
4. L. W. Engel, S. W. Hwang, T. Sajoto et al., Phys. Rev. B **45**, 3418 (1992).
5. J. P. Eisenstein, G. S. Boebinger, L. N. Pfeiffer et al., Phys. Rev. Lett. **68**, 1383 (1992).
6. S. Uji, H. Shinagawa, T. Terashima et al., Nature **410**, 908 (2001).
7. J. O. Sofo, A. S. Chaudhari, and G. D. Barber, Phys. Rev. B **75**, 153401 (2007).
8. D. C. Elias, R. R. Nair, T. M. G. Mohiuddin et al., Science **323**, 610 (2009).
9. B. Zaslav and M. E. Zandler, Amer. J. Phys. **35**, 1118 (1967).
10. J. W.-K. Huang and A. Kozycki, Amer. J. Phys. **47**, 1005 (1979).
11. G. Q. Hassoun, Amer. J. Phys. **49**, 143 (1981).
12. X. Yang, S. Guo, F. Chan et al., Phys. Rev. A **43**, 1186 (1991).
13. W. Kohn and J. M. Luttinger, Phys. Rev. **98**, 915 (1955).
14. R. Chen, J. P. Cheng, D. L. Lin et al., Phys. Rev. B **44**, 8315 (1991).
15. V. M. Villalba and R. Pino, J. Phys.: Condens. Matter **8**, 8067 (1996).
16. A. Soylyu and I. Boztosun, Physica B **396**, 150 (2007).
17. D. G. W. Parfitt and M. E. Portnoi, J. Math. Phys. **43**, 4681 (2002).
18. A. Cisneros, J. Math. Phys. **10**, 277 (1969).
19. M. Robnik, J. Phys. A **14**, 3195 (1981).
20. A. H. MacDonald and D. S. Ritchie, Phys. Rev. B **33**, 8336 (1986).
21. A. Soylyu, O. Bayrak, and I. Boztosun, Int. J. Mod. Phys. E **15**, 1263 (2006).
22. M. A. Escobar-Ruiz and A. V. Turbiner, Ann. Phys. (N. Y.) **340**, 37 (2014).
23. M. A. Escobar-Ruiz and A. V. Turbiner, Ann. Phys. (N. Y.) **359**, 405 (2015).
24. M. Taut, J. Phys. A **28**, 2081 (1995).
25. M. G. Dimova, M. S. Kaschiev, and S. I. Vinitzky, J. Phys. B **38**, 2337 (2005).
26. O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, V. L. Derbov et al., J. Phys. A **40**, 11485 (2007).
27. M. Robnik and V. G. Romanovski, J. Phys. A **36**, 7923 (2003).
28. H. Ruder, G. Wunner, H. Herold et al., *Atoms in Strong Magnetic Fields*, Springer Science & Business Media (2012).
29. V. S. Melezhik, J. Comput. Phys. **92**, 67 (1991).
30. E. A. Koval, O. A. Koval, and V. S. Melezhik, Phys. Rev. A **89**, 052710 (2014).
31. Н. Н. Калиткин, *Численные методы*, БХВ-Петербург (2011).
32. I. M. Gelfand and S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Dover Publ., New York (2000).
33. T. Frostad, J. P. Hansen, C. J. Wesslén et al., Eur. Phys. J. B **86**, 430 (2013).
34. Н. Н. Калиткин, А. Б. Альшин, Е. А. Альшина и др., *Вычисления на квазиравномерных сетках*, Физматлит, Москва (2005).
35. L. V. Butov, C. W. Lai, D. S. Chemla et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 216804 (2001).
36. Yu. E. Lozovik, I. V. Ovchinnikov, S. Yu. Volkov et al., Phys. Rev. B **65**, 235304 (2002).
37. P. S. Drouvelis, P. Schmelcher, and F. K. Diakonov, Phys. Rev. B **69**, 035333 (2004).