

УЛУЧШЕНИЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАННЫХ КВАНТОВЫХ ФАНТОМНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Д. А. Балакин^{}, А. В. Белинский^{**}, А. С. Чиркин^{***}*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 февраля 2017 г.

Реализация фантомных изображений (ФИ) позволяет извлечь информацию об объекте из пространственной корреляционной функции между фотонами, распространяющимися через объект или отраженными объектом, и фотонами восстанавливающего канала. При этом в объектном канале детектирование осуществляется по всей апертуре пучка, поэтому оно не дает информацию о пучке. Восстанавливающий пучок не взаимодействует с объектом, но регистрируется сканирующим точечным детектором или ПЗС-матрицей, допуская измерение пространственной корреляционной функции фотонов двух каналов. Использование многомодовых запутанных квантовых световых пучков при облучении объекта одним пучком и ориентировании остальных пучков в восстанавливающие каналы позволяет одновременно получить несколько ФИ. Взаимные корреляции мультиплексированных фантомных изображений (МФИ) определяются полевыми корреляционными функциями восьмого порядка. Разработан специальный алгоритм расчета корреляций высшего порядка от бозе-операторов. Наличие взаимных корреляций ФИ использовано для улучшения качества восстановленного изображения объекта при их обработке методом редукиции измерений. Рассмотрен пример компьютерного моделирования восстановления изображения по МФИ, формируемым в поле четырехчастотных запутанных квантовых состояний. Установлено, что в этом случае редуцированное фантомное изображение имеет отношение сигнал/шум в несколько раз большее, чем фантомные изображения.

DOI: 10.7868/S0044451017080041

1. ВВЕДЕНИЕ

Впервые на возможность наблюдения скрытого, фантомного изображения в оптическом диапазоне обратили внимание в работе [1]. При этом было показано, что информацию об объекте можно получить не из зондирующего его светового пучка, а извлечь из взаимной пространственной корреляции фотонов с другим пучком, который не взаимодействует с объектом, но находится в запутанном состоянии с зондирующим. Экспериментальная реализация этого явления была осуществлена в работе [2]. Впоследствии установили, что фантомные изображения (ФИ) можно получить, используя некогерентные световые пучки (см. [3], а также об-

зоры [4–7] и цитируемую там литературу). В настоящее время исследования ФИ проводятся в основном с некогерентными, квазитепловыми источниками излучения [8–11]. Наблюдение ФИ вызывает практический интерес также в терагерцевом [12] и рентгеновском диапазонах, в последнем недавно выполнены экспериментальные исследования с синхротронным излучением [13, 14]. Недавно также показано [15], что фантомный метод можно использовать для восстановления быстро изменяющихся временных сигналов в телекоммуникационных системах.

Качество восстановленных изображений оценивают разрешением изображения либо отношением сигнал/шум. В этом направлении выполнен ряд работ [9–11, 16–18]. Так, исследования ФИ в [7, 19–21] основаны на измерении корреляционных функций интенсивности третьего и более высокого порядков. В работах [17, 18, 22] изучено применение для получения ФИ многочастотных некогерентных источников излучения, когда одновременно получают

* E-mail: kvorosh@gmail.com

** E-mail: belinsky@inbox.ru

*** E-mail: aschirkin@rambler.ru

несколько ФИ, а затем их складывают. Для улучшения качества ФИ в [17] предложено использовать дисперсию разности токов зондирующего и восстанавливающего каналов, а в [9] — дифференциальные ФИ.

В настоящей работе изучается применение многомодовых запутанных квантовых состояний света, которые позволяют создать одновременно несколько ФИ (мультиплексировать ФИ) [23], при использовании в восстанавливающих каналах излучения с различающимися частотами. Существует ряд возможностей генерации многомодовых запутанных световых состояний (в контексте статьи многомодовость означает многочастотность, многокомпонентность). Такие состояния можно сформировать, например, в последовательных, связанных параметрических взаимодействиях в нелинейных кристаллах, расположенных как вне [24, 25], так и внутри [26] оптического резонатора, в нелинейных волноводных структурах [27, 28], связь мод между которыми осуществляется через эванесцентные моды, в пространственно-модулированном пучке накачки [29].

Мы рассмотрим мультиплексирование ФИ с использованием четырехмодовых запутанных квантовых состояний, формирование которых включает параметрический распад фотонов накачки на два фотона с разными частотами с последующим их смешением в том же кристалле с фотонами накачки и таким образом генерацией фотонов на суммарных частотах [30, 31]. Квантовая теория этого процесса систематически разрабатывалась в последние годы [32–35]. В работе [33] рассматриваемый процесс лежит в основе параметрического усиления оптического изображения и его преобразования на новые частоты, а в [34] развивается теория голографической телепортации запутанных оптических изображений с применением указанного процесса.

Квантовые и, в частности, фантомные изображения являются интересным объектом исследования с точки зрения потенциальных возможностей восстановления их в условиях шума в каналах связи. Эта проблема актуальна как в теоретическом, так и в прикладном плане. Неизбежно возникающие в оптической системе фотонные флуктуации и технические шумы приводят к ограничению точности измерительных систем, использующих свет в качестве носителя информации. Приборное улучшение качества измерительного устройства зачастую является дорогостоящим и трудно или принципиально неосуществимым, в связи с этим приходится искать другие пути повышения качества получаемых сигналов и изображений. Одним из перспективных путей ре-

шения этой проблемы является приготовление и использование света с неклассическими флуктуациями, причем не только с точки зрения приготовления субпуассоновского света [4, 36], но и формирования нескольких фантомных изображений [23, 37], у которых ярко выражены их взаимно корреляционные свойства. Наличие последних позволило бы использовать их в качестве дополнительной информации, полезной при выделении сигнала при наличии флуктуаций. Дальнейшие перспективы связаны с применением методов компьютерной обработки — математической редукции полученных изображений — с использованием этой априорной информации.

В настоящей работе исследуется возможность улучшения качества восстановленного изображения при мультиплексировании ФИ в связанных трехчастотных параметрических процессах. Поскольку световые поля в этом процессе формируются в состоянии квантовой запутанности [23], мы изучаем вопрос взаимной корреляции получаемых фантомных изображений. Информация о взаимной корреляции мультиплексированных ФИ используется для решения задачи математической редукции измерений к интересующему исследователя виду — не искаженному и не пораженному флуктуациями.

Структура статьи следующая. В разд. 2 кратко изложена квантовая теория трех связанных параметрических взаимодействий, являющихся источником четырехчастотных запутанных состояний световых полей. Теория представлена в квазиоптическом приближении. Затем в разд. 3 дано описание схемы получения одновременно трех ФИ с помощью этих полей. В разд. 4 изложен расчет взаимных корреляционных функций ФИ, сводящийся к нахождению восьмиточечной полевой корреляционной функции, для определения которой разработана специальная программа. Раздел 5 посвящен методике обработки ФИ методом математической редукции измерений. Результаты компьютерного моделирования приведены в разд. 6. В Заключении отмечаются основные результаты работы.

2. СВЯЗАННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Схема мультиплексирования фантомного изображения, аналогичная рассмотренной в работе [23], приведена на рис. 1. Источником излучения служат связанные параметрические процессы, в которых формируются четырехчастотные запутанные свето-

вые поля. На кристалл падает интенсивное монохроматическое излучение накачки с частотой ω_p . В кристалле фотоны накачки распадаются на два фотона, частоты которых ω_1 и ω_2 связаны между собой соотношением

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2.$$

Четырехчастотные поля получаются в результате дальнейшего преобразования части полученных фотонов с частотами ω_1 и ω_2 в фотоны с частотами ω_3 и ω_4 . Это происходит в процессах смешения частот:

$$\begin{aligned} \omega_p + \omega_1 &= \omega_3, \\ \omega_p + \omega_2 &= \omega_4. \end{aligned}$$

В работах [30, 31] показано, что эффективный энергообмен между взаимодействующими световыми волнами в указанных процессах можно осуществить в аперiodически нелинейных фотонных кристаллах, например в LiNbO_3 , в квазисинхронном режиме, при котором фазовые расстройки Δk_j между взаимодействующими волнами компенсируются векторами обратной нелинейной решетки. Заметим, что рассматриваемый процесс был недавно осуществлен посредством схемы с двумя нелинейными фотонными кристаллами [38] при изучении спектра фотонной пары на частоте, большей частоты накачки.

Эволюция в пространстве операторов медленно меняющихся амплитуд $\hat{A}_j(\mathbf{r}, z)$ взаимодействующих волн в квазиоптическом приближении описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k_1}\Delta_{\perp}\right)\hat{A}_1(\mathbf{r}, z) &= i\beta\hat{A}_2^{\dagger}(\mathbf{r}, z) + \\ &+ i\gamma_1^*\hat{A}_3(\mathbf{r}, z), \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k_2}\Delta_{\perp}\right)\hat{A}_2(\mathbf{r}, z) &= i\beta\hat{A}_1^{\dagger}(\mathbf{r}, z) + \\ &+ i\gamma_2^*\hat{A}_4(\mathbf{r}, z), \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k_3}\Delta_{\perp}\right)\hat{A}_3(\mathbf{r}, z) &= i\gamma_1\hat{A}_1(\mathbf{r}, z), \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k_4}\Delta_{\perp}\right)\hat{A}_4(\mathbf{r}, z) &= i\gamma_2\hat{A}_2(\mathbf{r}, z), \end{aligned} \quad (1)$$

где направление оси z совпадает с направлением распространения классической волны накачки, $\Delta_{\perp} = \Delta_{\perp}(x, y)$ — поперечный лапласиан, индексы у операторов амплитуд совпадают с индексами частот, \hat{A}_j — оператор уничтожения фотонов, \hat{A}_j^{\dagger} — оператор рождения фотонов. Коэффициент нелинейности β ответствен за процесс параметрического преобразования частоты вниз, а коэффициенты γ_1 и γ_2 — за процесс генерации суммарных частот.

Операторы амплитуд подчиняются коммутационному соотношению:

$$[\hat{A}_m(\mathbf{r}', z), \hat{A}_n^{\dagger}(\mathbf{r}'', z)] = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')\delta_{mn},$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция, δ_{mn} — символ Кронекера.

Отметим, что уравнения (1) можно получить из уравнения Гейзенберга для оператора импульса поля [32].

Решение системы уравнений (1) нетрудно найти с помощью преобразования Фурье:

$$\hat{a}_j(\mathbf{q}, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_j(\boldsymbol{\rho}, z) \exp(-i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}, \quad (2)$$

где $\hat{a}_j(\mathbf{q}, z)$ — оператор уничтожения фотона, соответствующий плоской моде с частотой ω_j и (поперечным) волновым вектором \mathbf{q} .

При этом решение уравнений удобно представить в матричной форме:

$$\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{q}, l) = Q(\mathbf{q}, l) \hat{\mathbf{a}}_0(\mathbf{q}, 0). \quad (3)$$

Здесь $\hat{\mathbf{a}}$ и $\hat{\mathbf{a}}_0$ — столбцы бозе-операторов соответственно на выходе и на входе кристалла. Они имеют вид $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2^{\dagger}, \hat{a}_3, \hat{a}_4^{\dagger})^T$, где символ «T» означает транспонирование, $\hat{a}_1 = \hat{a}_1(\mathbf{q}, l)$, $\hat{a}_2^{\dagger} = \hat{a}_2(-\mathbf{q}, l)$, $\hat{a}_3 = \hat{a}_3(\mathbf{q}, l)$, $\hat{a}_4^{\dagger} = \hat{a}_4(-\mathbf{q}, l)$. Q — матрица 4×4 , элементы Q_{mn} которой описывают преобразование поля с частоты ω_n на частоту ω_m . Диагональные элементы этой матрицы описывают преобразование оператора поля на частоте ω_m .

Вид матрицы Q и ее свойства описаны в работе [32]. Элементы матрицы Q зависят от длины кристалла, интенсивности накачки и поперечного волнового числа q , причем в силу квазиоптического приближения зависимость от q квадратичная. Кроме того, как показано в работе [31], возможно конструирование таких аперiodически нелинейных фотонных кристаллов, в которых $\gamma_1 = \gamma_2$, что существенно упрощает явные выражения для элементов матрицы Q . Поэтому далее считаем, что $\gamma_1 = \gamma_2$.

3. ФОРМИРОВАНИЕ МУЛЬТИПЛИЦИРОВАННЫХ ФАНТОМНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В схеме на рис. 1 исследуемый объект O , характеризующийся коэффициентом пропускания $T(\mathbf{r}_1)$, освещается излучением частоты ω_1 . Возможно рассмотрение ситуации, когда речь идет об отражении излучения от объекта.

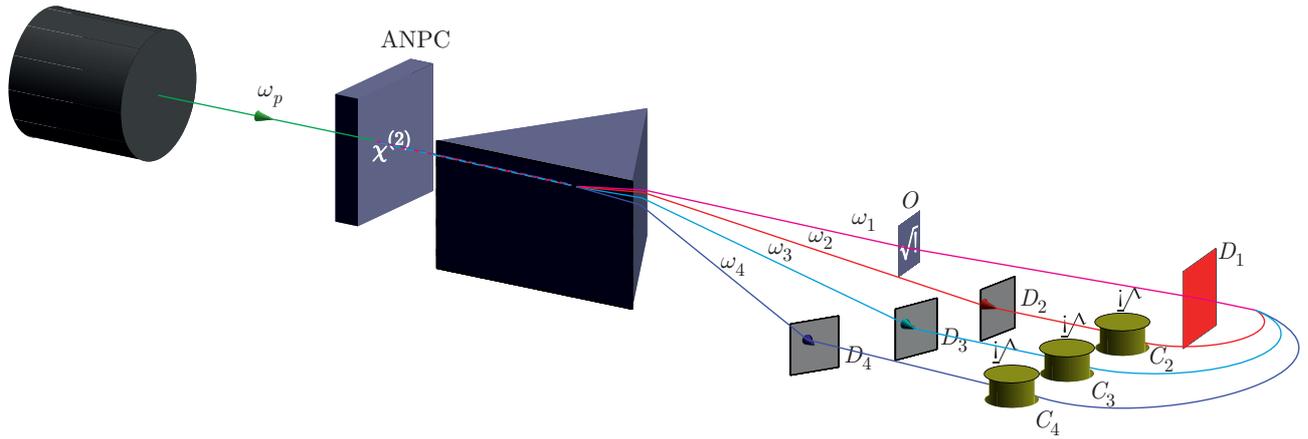


Рис. 1. Схема мультиплексирования фантомного изображения. ANPC — аperiodически поляризованный нелинейный кристалл; ω_p — частота накачки; $\omega_1, \dots, \omega_4$ — частоты, на которых генерируются запутанные состояния; O — объект; D_n — фотодетекторы в объектном ($n = 1$) и восстанавливающих ($n = 2, \dots, 4$) каналах; C_n — корреляторы интенсивностей

Детектор D_1 регистрирует световое поле по всей площади пучка и, следовательно, из данных, полученных в объектном канале, полную информацию об исследуемом объекте нельзя получить. Вместе с тем поперечное распределение прозрачности в объекте определяется из измерения взаимных корреляций интенсивностей между объектным каналом и так называемым восстанавливающим каналом, хотя в отдельности он тоже не содержит информацию об объекте.

На выходе из нелинейного кристалла поле представляет собой совокупность четырех пучков с различными частотами. Поэтому в рассматриваемой схеме рис. 1 в качестве восстанавливающих пучков можно использовать пучки с частотами $\omega_2, \omega_3, \omega_4$. Для разведения их в пространстве можно применять, например, дисперсионную призму. Для регистрации воспроизводящих пучков можно использовать как сканирующие детекторы, так и ПЗС-матрицы, которые в настоящее время широко используются, например, в телескопах. При этом считывание информации по всей площади изображения объекта проводится одновременно.

Получим выражение для оператора интенсивности света, поступающего на детекторы. Для того чтобы вычислить интенсивность на заданном расстоянии, необходимо учесть функцию отклика среды, в которой распространяются исследуемые поля. Операторы амплитуд в плоскостях детекторов связаны с операторами амплитуд на выходе из кристалла соотношением

$$\hat{B}_m(\mathbf{r}_m) = \int H_m(\mathbf{r}_m, \boldsymbol{\rho}) \hat{A}_m(\boldsymbol{\rho}, l) d\boldsymbol{\rho}, \quad (4)$$

где интегрирование проводится по апертуре светового пучка. $H_m(\mathbf{r}_m, \boldsymbol{\rho})$ представляет собой функцию отклика среды, связанную с распространением излучения от кристалла до детектора по m -му каналу. Подчеркнем, что в (4) слагаемые, связанные с возможными потерями в оптической системе, необходимые для удовлетворения коммутационных соотношений, опущены, поскольку они не коррелируют с $A_m(\boldsymbol{\rho})$ и, следовательно, не вносят вклад в представляющие интерес корреляции интенсивности (см. также [3]).

Мы рассмотрим ситуацию, когда детекторы в объектном и воспроизводящих каналах находятся в разных конфигурациях. Детектор D_1 и изучаемый объект O располагаются в фокальных плоскостях собирающей линзы с фокусным расстоянием f . В этом случае функция отклика для объектного канала

$$H_1(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\rho}_1) = -\frac{ik_1}{2\pi f} \exp\left(-i\frac{k_1}{f}\mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1\right) T(\boldsymbol{\rho}_1). \quad (5)$$

Восстанавливающие каналы содержат линзы с тем же фокусным расстоянием, но расположенные на двойном фокусном расстоянии как от выхода кристалла, так и от детекторов. Функция отклика среды для этих каналов имеет вид

$$H_j(\mathbf{r}_j, \boldsymbol{\rho}_j) = \delta(\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\rho}_j) \exp\left(-i\frac{k_j}{f}\mathbf{r}_j^2\right). \quad (6)$$

Как отмечалось выше, информация об объекте содержится во взаимной пространственной корреляционной функции интенсивностей, зарегистрированных в объектном и восстанавливающем каналах.

4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФАНТОМНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Представляет интерес расчет следующих статистических параметров:

- среднего значения операторов интенсивностей,

$$\langle \hat{I}_m(\mathbf{r}) \rangle = \langle \hat{B}_m^\dagger(\mathbf{r}_m) \hat{B}_m(\mathbf{r}_m) \rangle; \quad (7)$$

- оператора взаимных флуктуаций интенсивностей,

$$\hat{G}_{1i}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{I}_1(\mathbf{r}_1) \hat{I}_i(\mathbf{r}_i) - \langle \hat{I}_1(\mathbf{r}_1) \rangle \langle \hat{I}_i(\mathbf{r}_i) \rangle,$$

который является фактически оператором фантомного изображения, поскольку его среднее значение содержит информацию об объекте (см. ниже);

- наконец, корреляционной функции фантомных изображений,

$$\begin{aligned} G_{1i1j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j) &\stackrel{\text{def}}{=} \langle \hat{G}_{1i}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i) \hat{G}_{1j}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j) \rangle - \\ &- \langle \hat{G}_{1i}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i) \rangle \langle \hat{G}_{1j}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j) \rangle = \\ &= \langle \hat{I}_1(\mathbf{r}_1) \hat{I}_i(\mathbf{r}_i) \hat{I}_1(\mathbf{r}'_1) \hat{I}_j(\mathbf{r}_j) \rangle - \\ &- \langle \hat{I}_1(\mathbf{r}_1) \hat{I}_i(\mathbf{r}_i) \rangle \langle \hat{I}_1(\mathbf{r}'_1) \hat{I}_j(\mathbf{r}_j) \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Усреднение операторов проводится по вакуумному состоянию полей на входе нелинейного кристалла. Наибольшую трудность представляет расчет корреляционной функции (8), с помощью анализа которой мы изложим разработанный подход. Фигурирующая в правой части (8) корреляционная функция интенсивности четвертого порядка, записанная через операторы амплитуд на выходе нелинейного кристалла принимает вид

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}_1(\mathbf{r}_1) \hat{I}_i(\mathbf{r}_i) \hat{I}_1(\mathbf{r}'_1) \hat{I}_j(\mathbf{r}_j) \rangle &= \int d\rho_1 \int d\rho'_1 \times \\ &\times \int d\rho_i \int d\rho'_i \int d\rho''_1 \int d\rho'''_1 \int d\rho_j \int d\rho'_j \times \\ &\times H_1^*(\mathbf{r}_1, \rho_1) H_1(\mathbf{r}_1, \rho'_1) H_i^*(\mathbf{r}_i, \rho_i) H_i(\mathbf{r}_i, \rho'_i) \times \\ &\times H_1^*(\mathbf{r}'_1, \rho''_1) H_1(\mathbf{r}'_1, \rho'''_1) H_j^*(\mathbf{r}_j, \rho_j) \times \\ &\times H_j(\mathbf{r}_j, \rho'_j) \langle \hat{A}_1^\dagger(\rho_1) \hat{A}_1(\rho'_1) \hat{A}_i^\dagger(\rho_i) \hat{A}_i(\rho'_i) \times \\ &\times \hat{A}_1^\dagger(\rho''_1) \hat{A}_1(\rho'''_1) \hat{A}_j^\dagger(\rho_j) \hat{A}_j(\rho'_j) \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно (9) расчет сводится к нахождению корреляционной функции восьмого порядка для операторов амплитуд. Поскольку генерируемые запутанные четырехчастотные поля подчиняются гауссовой

статистике, можно провести факторизацию последней, воспользовавшись теоремой Вика [39]. Согласно этой теореме, среднее по вакуумному состоянию от произведения любого числа бозонных операторов рождения и уничтожения равно сумме произведений всех возможных попарных средних этих операторов, где в каждой паре множители должны стоять в той же последовательности, что и в первоначальном произведении. Поэтому множитель $\langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \rangle$ преобразуется в сумму, каждое из слагаемых которой состоит из произведения четырех попарных усреднений операторов, входящих в него:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \rangle &= \langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \rangle \langle \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i \rangle \times \\ &\times \langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \rangle \langle \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \rangle + \dots + \langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \rangle \langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_i \rangle \times \\ &\times \langle \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j \rangle \langle \hat{A}_1 \hat{A}_j^\dagger \rangle + \dots + \langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_j \rangle \langle \hat{A}_1 \hat{A}_i^\dagger \rangle \times \\ &\times \langle \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_1 \rangle \langle \hat{A}_i \hat{A}_1^\dagger \rangle. \end{aligned}$$

Для реализации этой процедуры была написана программа, работающая по следующему алгоритму.

1. Операторы $\hat{A}_1^\dagger, \dots, \hat{A}_j$ обозначаются соответственно числами $0, \dots, 7$.
2. Из всех перестановок множества $\{0, \dots, 7\}$ отбираются те, которые удовлетворяют следующим условиям.

а) Каждая пара элементов множества, полученного перестановкой, является упорядоченной по возрастанию их значений. Например, пара $(0, 1)$ допустима, а пара $(1, 0)$ — нет.

б) Элементы полученной перестановки, находящиеся на нечетных позициях (т.е. первые элементы пар), упорядочены по возрастанию. Например, перестановки $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ ($0 < 2 < 4 < 6$) и $(0, 3, 1, 2, 4, 5, 6, 7)$ ($0 < 1 < 4 < 6$) допустимы, а перестановки $(1, 2, 0, 3, 4, 5, 6, 7)$ ($1 \not< 0 < 2 < 4 < 6$) и $(0, 1, 4, 3, 2, 5, 6, 7)$ ($0 < 4 \not< 2 < 6$) — нет.

Условие 2а необходимо для того, чтобы полученная перестановка удовлетворяла условию теоремы Вика, а условие 2б является необходимым и достаточным для того, чтобы при факторизации не появлялось повторяющихся слагаемых.

Всего из $8! = 40320$ полученных перестановок условиям 2а и 2б удовлетворяют 105. Соответственно, при факторизации множителя $\langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \rangle$ получается 105 слагаемых — произведений средних вида $\langle \hat{A}_k^\dagger \hat{A}_{k'} \rangle$, $\langle \hat{A}_k \hat{A}_{k'}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{A}_k^\dagger \hat{A}_{k'}^\dagger \rangle$ и $\langle \hat{A}_k \hat{A}_{k'} \rangle$. Следует заметить, что

этот результат согласуется с результатом классической теории гауссовых случайных процессов [40].

Для нахождения средних $\langle \hat{A}_k^\dagger \hat{A}_{k'} \rangle$, $\langle \hat{A}_k \hat{A}_{k'}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{A}_k^\dagger \hat{A}_{k'}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{A}_k \hat{A}_{k'} \rangle$ операторы \hat{A}_k и \hat{A}_k^\dagger с помощью преобразования Фурье (2) выражаются через операторы \hat{a}_k и \hat{a}_k^\dagger , зависимость которых от операторов рождения и уничтожения на входе в кристалл описывается уравнением (3). После подстановки (2) и (3) в факторизуемое выражение оно будет зависеть от операторов рождения и уничтожения на входе в кристалл, причем только слагаемые в антинормальном порядке дают ненулевое значение, так как на нелинейный кристалл подается только волна накачки.

Полученное общее выражение имеет вид

$$G_{1i1j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j) = \int d\rho_1 \int d\rho'_1 \int d\rho_i \int d\rho'_i \times \\ \times \int d\rho''_1 \int d\rho'''_1 \int d\rho_j \int d\rho'_j \times \\ \times H_1^*(\mathbf{r}_1, \rho_1) H_1(\mathbf{r}_1, \rho'_1) \times \\ \times H_i^*(\mathbf{r}_i, \rho_i) H_i(\mathbf{r}_i, \rho'_i) H_1^*(\mathbf{r}_1, \rho''_1) H_1(\mathbf{r}_1, \rho'''_1) \times \\ \times H_j^*(\mathbf{r}_j, \rho_j) H_j(\mathbf{r}_j, \rho'_j) \times \\ \times \widetilde{W}_{ij}(\rho_1, \rho'_1, \rho_i, \rho'_i, \rho''_1, \rho'''_1, \rho_j, \rho'_j). \quad (10)$$

Явный вид функции $\widetilde{W}_{ij}(\rho_1, \rho'_1, \rho_i, \rho'_i, \rho''_1, \rho'''_1, \rho_j, \rho'_j)$ приведен в Приложении А.

Для рассматриваемой в настоящей работе конфигурации оптической системы (линза в объектном канале и линзы в восстанавливающих каналах), т. е. при учете функций отклика среды (5), (6) и интегрировании по аргументам $\rho_i, \rho'_i, \rho_j, \rho'_j$ в зондирующем канале (по площади изображения), выражение (10) можно преобразовать к виду

$$G_{1i1j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j) = \\ = \left(\frac{k_1}{2\pi f} \right)^4 \int d\rho_1 \int d\rho'_1 \int d\rho''_1 \times \\ \times \int d\rho'''_1 T^*(\rho_1) T(\rho'_1) T^*(\rho''_1) T(\rho'''_1) \times \\ \times \exp\left(-i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \cdot (\rho'_1 - \rho_1)\right) \exp\left(-i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \cdot (\rho'''_1 - \rho''_1)\right) \times \\ \times \widetilde{W}_{ij}(\rho_1, \rho'_1, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i, \rho''_1, \rho'''_1, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j).$$

Преобразование к переменным $\mathbf{d} = \rho'_1 - \rho_1$, $\mathbf{R} = (\rho'_1 + \rho_1)/2$, $\mathbf{d}' = \rho'''_1 - \rho''_1$, $\mathbf{R}' = (\rho'''_1 + \rho''_1)/2$ дает

$$G_{1i1j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j) = \left(\frac{k_1}{2\pi f} \right)^4 \int d\mathbf{R} \int d\mathbf{d} \int d\mathbf{R}' \times \\ \times \int d\mathbf{d}' T^* \left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{d}}{2} \right) T \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{d}}{2} \right) \exp\left(-i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{d}\right) \times \\ \times T^* \left(\mathbf{R}' + \frac{\mathbf{d}'}{2} \right) T \left(\mathbf{R}' - \frac{\mathbf{d}'}{2} \right) \exp\left(-i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{d}'\right) \times \\ \times \widetilde{W}_{ij} \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{d}}{2}, \mathbf{R} + \frac{\mathbf{d}}{2}, -\mathbf{r}_i, -\mathbf{r}_i, \mathbf{R}' - \frac{\mathbf{d}'}{2}, \right. \\ \left. \mathbf{R}' + \frac{\mathbf{d}'}{2}, -\mathbf{r}_j, -\mathbf{r}_j \right). \quad (11)$$

Будем считать, что фотонный кристалл достаточно тонок, так что полоса усиления поперечных волновых чисел параметрического преобразования существенно превышает ширину волнового спектра изображаемого объекта. При этом характерный масштаб изменения T значительно больше характерного масштаба изменения W , поэтому (11) можно привести к виду

$$G_{1i1j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j) = \left(\frac{k_1}{2\pi f} \right)^4 \times \\ \times |T(-\mathbf{r}_i)|^2 |T(-\mathbf{r}_j)|^2 W_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j), \quad (12)$$

где

$$W_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j) = \int d\mathbf{R} \int d\mathbf{d} \int d\mathbf{R}' \int d\mathbf{d}' \times \\ \times \exp\left(-i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{d}\right) \exp\left(-i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{d}'\right) \times \\ \times \widetilde{W}_{ij} \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{d}}{2}, \mathbf{R} + \frac{\mathbf{d}}{2}, -\mathbf{r}_i, -\mathbf{r}_i, \mathbf{R}' - \frac{\mathbf{d}'}{2}, \right. \\ \left. \mathbf{R}' + \frac{\mathbf{d}'}{2}, -\mathbf{r}_j, -\mathbf{r}_j \right),$$

см. Приложение В.

Выше отмечалось, что в объектном канале используется детектор, интегрирующий излучение по всей апертуре. Это необходимо учесть в полученной формуле, поэтому в случае интегрирующего детектора в (12) значение $W_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j)$ заменяется на его двойной интеграл по всей апертуре по \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}'_1 . Итоговое выражение для корреляционной функции $G_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ имеет следующий вид:

$$G_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \left(\frac{k_1}{2\pi f} \right)^4 |T(-\mathbf{r}_i)|^2 |T(-\mathbf{r}_j)|^2 \times \\ \times \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}'_1 W_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j). \quad (13)$$

Аналогичным образом вычисляется корреляционная функция второго порядка. В том же приближении, в котором получено выражение (13), имеем

$$G_{1j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_j) \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{k_1}{2\pi f} \right|^2 \left| Q_{(11j)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \right) \right|^2 \times |T(-\mathbf{r}_j)|^2, \quad (14)$$

где

$$Q_{(11j)}(\mathbf{q}) = Q_{11}(\mathbf{q})Q_{j1}^*(\mathbf{q}) + Q_{13}(\mathbf{q})Q_{j3}^*(\mathbf{q})$$

вычисляется аналогичным образом, см. также [23].

Поскольку в объектном канале расположен детектор, собирающий излучение по всей апертуре, имеем

$$G_j(\mathbf{r}_j) \stackrel{\text{def}}{=} \int G_{1j}(r_1, r_j) d\mathbf{r}_1 = \left(\frac{k_1}{2\pi f} \right)^2 \times \left| \int Q_{(11j)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \right) d\mathbf{r}_1 \right|^2 |T(-\mathbf{r}_j)|^2. \quad (15)$$

Использованию вычисленных значений корреляционных функций в задаче редукции полученных изображений посвящен следующий раздел.

5. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАРЕГИСТРИРОВАННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В качестве измерительного устройства используется матрица датчиков, в которой сигнал, регистрируемый каждым из датчиков, пропорционален интенсивности падающего на него излучения. Полученное на выходе коррелятора значение, которое обозначим $\xi(\mathbf{r})$, можно представить как воздействие измерительного преобразователя (ИП) на входной сигнал $f(\mathbf{r}) \sim |T(-\mathbf{r})|^2$ (области постоянной прозрачности и постоянной яркости, соответствующие пикселям, считаются упорядоченными произвольным, но фиксированным образом). В настоящей работе мы рассматриваем кусочно-постоянные изображения, т. е. прозрачность в пределах каждого пикселя постоянна.

Алгоритм интерпретации изображения должен давать максимально точную оценку исходного изображения $f(\mathbf{r})$ по полученным данным $\xi(\mathbf{r})$. Рассмотрим метод редукции измерения, позволяющий получить такую оценку. Запишем модель измерения в виде

$$\xi = Af + \nu,$$

где f — априори неизвестный вектор, описывающий распределение прозрачности измеряемого объекта; $\nu(\mathbf{r})$ — шум с нулевым средним значением, что

означает отсутствие систематической погрешности измерений, и ковариационной матрицей $(\Sigma_\nu)_{ij} = \langle \nu(\mathbf{r}_i)\nu(\mathbf{r}_j) \rangle$, которая моделирует искажения, полученные при измерении интенсивности на ИП; A — матрица, описывающая формирование фантомных изображений и их регистрацию: матричный элемент A_{ij} равен среднему сигналу i -го детектора при единичной прозрачности j -го элемента объекта и нулевой прозрачности остальных. Вектор $\xi(\mathbf{r})$ представляет результат измерения интенсивностей. Размерность вектора $f(\mathbf{r})$ определяется числом пикселей изображения, а размерность вектора $\xi(\mathbf{r})$ — числом пикселей в матрице измерения.

Операторы A и Σ_ν связаны с вычисленными в предыдущем разделе корреляционными функциями. Поскольку в измерительной схеме используются корреляторы, измеряющие корреляции между первым каналом и остальными, воздействие ИП на изображение будет иметь вид блочной матрицы, состоящей из трех блоков, выражающих сигналы на выходах корреляторов — корреляции объектного канала с воспроизводящими каналами:

$$A = \begin{pmatrix} B_2 C_2 \\ B_3 C_3 \\ B_4 C_4 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Здесь при указанных при получении (13), (14) условиях матрицы C_2 – C_4 равны единичным, умноженным (с точностью до множителя, характеризующего выбор единиц измерения) на размер пикселя и множитель перед $|T(\mathbf{r}_i)|^2$ в выражении для корреляционной функции G_j (15), а матрицы B_2 – B_4 описывают детекторы: матричный элемент $(B_i)_{pk}$ равен отклику детектора в i -м канале, находящегося в p -й позиции, на единичную яркость k -го пикселя и нулевую яркость остальных.

Матрица ковариационного оператора погрешностей также имеет блочный вид:

$$\Sigma_\nu = \begin{pmatrix} B_2 \Sigma_{22}(f) B_2^* & B_2 \Sigma_{23}(f) B_3^* & B_2 \Sigma_{24}(f) B_4^* \\ B_3 \Sigma_{32}(f) B_2^* & B_3 \Sigma_{33}(f) B_3^* & B_3 \Sigma_{34}(f) B_4^* \\ B_4 \Sigma_{42}(f) B_2^* & B_4 \Sigma_{43}(f) B_3^* & B_4 \Sigma_{44}(f) B_4^* \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где элемент с индексами k, k' блока Σ_{ij} равен (с точностью до множителя, зависящего от единицы измерения) значению интеграла G_{ij} по значениям \mathbf{r}_i , принадлежащим k -му пикселю, и по значениям \mathbf{r}_j , принадлежащих k' -му пикселю, при этом порядок нумерации пикселей тот же, что и в матрице A .

Кроме того, результат измерений ξ также поражен шумом, не связанным с формированием фантомных изображений, например, тепловым шумом в электросхемах и погрешностью оцифровки. Хотя шум, возникающий до корреляторов, подавляется ими при условии независимости этого шума в объектном и воспроизводящих каналах, к шуму, возникающему после корреляторов, это не относится. Вследствие сказанного в правой части (17) появляется слагаемое $\Sigma_{\nu'}$ — ковариационный оператор этой не связанной с формированием фантомных изображений погрешности ν' .

Задача интерпретации измерения заключается в построении наиболее точной оценки сигнала Uf , где $U \in \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U}$ описывает идеальный измерительный прибор, по данным измерений, проведенных по описанной выше схеме.

В силу линейности зависимости результатов измерений от f можно применить для решения задачи модель $[A, \Sigma_{\nu}, U]$, которая подробно описана в монографии [41]. Как показано в [41], линейная оценка с минимальным среднеквадратичным отклонением имеет вид

$$R_* \xi = U(A^* \Sigma_{\nu}^{-1} A)^{-1} A^* \Sigma_{\nu}^{-1} \xi, \quad (18)$$

где « $^{-1}$ » обозначает псевдообращение матрицы, R_* — определенный формулой (18) оператор редукции.

Синтез такой оценки возможен, если выполняется условие $U(I - A^{-1}A) = 0$, где, как отмечалось выше, A характеризует реальный измерительный прибор, а U — идеальный измерительный прибор с требуемой исследователю аппаратной функцией и, следовательно, любым требуемым разрешением при выполнении указанного условия. При этом, как правило, чем больше желаемое разрешение идеального прибора по сравнению с разрешением реального прибора, тем больше среднеквадратичная погрешность синтезируемой оценки. Конкретный вид зависимости разрешения, понимаемого как максимальный ранг U , для которого оценивание Uf со среднеквадратичной погрешностью, не превышающей заданную, возможно (эффективный ранг, см. ([41], гл. 8), зависит в первую очередь от B_j и ковариационного оператора компоненты шума, не связанной с формированием фантомных изображений. Так, в рассматриваемом далее случае идеальных детекторов и белого шума эта зависимость является линейной — четырехкратное ослабление требований к погрешности оценивания позволяет вдвое уменьшить размер пикселя. Заметим, что выбор описанным способом ранга U аналогичен использованию в

[11] информации о том, что входной сигнал является разреженным в заданном базисе, но здесь такой базис не задается исследователем, а выбирается согласно информации об измерительном преобразователе. В рассматриваемом случае, как видно из (16), диагональные элементы каждого блока (которые с точностью до ненулевого множителя равны множителю перед $|T(-\mathbf{r}_j)|^2$ в выражении для корреляционной функции G_j) не обращаются в нуль. Соответственно, каждый блок A_j оказывается невырожденным, из чего следует, что при невырожденных B_j ошибка редукции принимает лишь конечные значения.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для простоты изложения рассмотрим случай одинаковых датчиков во всех воспроизводящих каналах. При этом $B_2 = B_3 = B_4$. Пусть также $U = I$, т. е. восстанавливается изображение, которое было бы получено датчиками, имеющими размер, равный размеру элемента исходного изображения.

Ковариационный оператор (17) зависит от неизвестного входного сигнала. Поэтому алгоритм редукции измерений имеет итеративный вид, каждая итерация состоит из трех шагов:

1) оценивание изображения по формуле (18) при использовании Σ_{ν} , соответствующего изображению с постоянной прозрачностью и A , определенному формулой (16) (на первой итерации) или при подстановке [41]

$$\tilde{\Sigma}_{\nu} = \begin{pmatrix} \Sigma_{\nu,e} & 0 \\ 0 & \kappa I \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}, \quad \tilde{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \hat{f}_e \end{pmatrix},$$

где A соответствует формуле (16), \hat{f}_e — полученная на предыдущей итерации оценка изображения, κ — произвольное положительное число, $\Sigma_{\nu,e}$ — полученная на последнем шаге предыдущей итерации оценка Σ_{ν} , (на последующих итерациях);

2) ортогональное проецирование результата на $[0, 1]^{\dim f}$ для учета того, что модуль прозрачности принимает значения в диапазоне $[0, 1]$;

3) подстановка полученной оценки в (17) для получения уточненной оценки ковариационного оператора Σ_{ν} . При этом необходимо учитывать, что \hat{f}_e и ξ являются коррелированными случайными величинами.

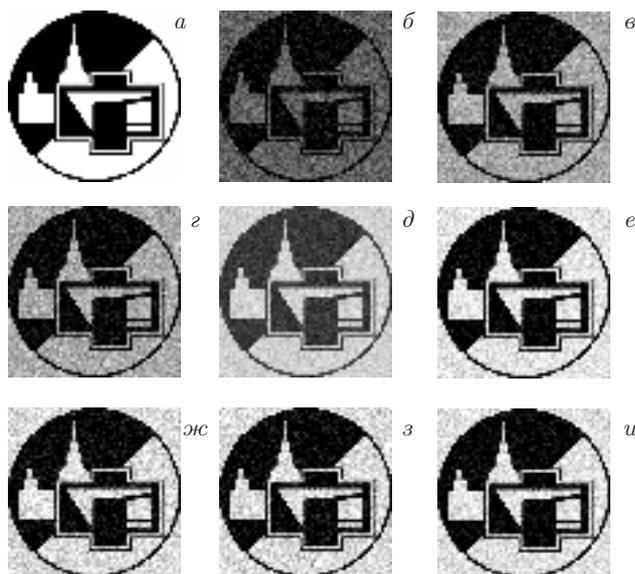


Рис. 2. Полученные изображения, 64×64 пикселей, и результат их редукции в случае датчиков, имеющих размер, равный размеру пикселя: *a* — исходное изображение; *б-г* — зарегистрированные (после корреляторов интенсивностей) фантомные изображения; *д* — результат наложения фантомных изображений *б-г*; *е* — результат редукции при учете корреляций; *жс-и* — результаты редукции при использовании лишь двух изображений из полученных: *жс* — изображений *б* и *в*, *з* — изображений *б* и *г*, *и* — изображений *б* и *г*

Результаты компьютерного моделирования описанного в разд. 3 формирования фантомных изображений и последующей описанной выше интерпретации полученных таким образом изображений, дополнительно пораженных аддитивным шумом, показаны на рис. 2 для датчиков, имеющих размер, равный размеру элемента исходного изображения, и на рис. 3 для датчиков, имеющих размер, втрое больший размера элемента исходного изображения, т.е. при обработке изображения методом редукции кроме подавления флуктуаций увеличивается разрешение. Результаты приведены для следующих значений параметров оптической системы: волновые числа пучков $k_1 = 6 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, $k_3 = 1.7 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$, параметр кристалла $\beta = 10 \text{ см}^{-1}$, параметр кристалла $\xi = \gamma/\beta = 0.4$, безразмерная толщина кристалла $\zeta = \beta l = 6$. На рис. 3 после редукции становятся различимыми мелкие детали исходного изображения (например, черный промежуток в «!» и окаймление «Ф»), но полученная оценка все еще поражена шумом в степени, которая может быть неприемлемой для исследователя. Для ее улучшения можно

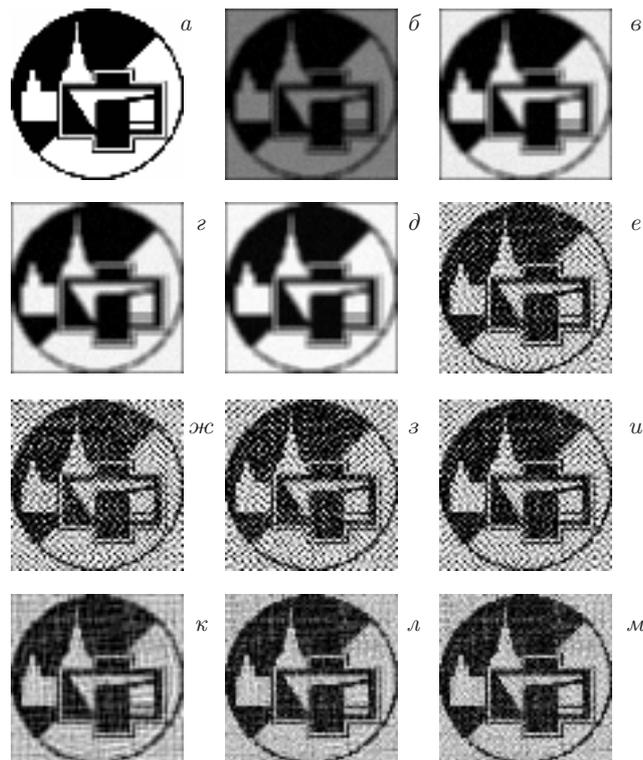


Рис. 3. Полученные изображения, 64×64 пикселей, и результат их редукции в случае датчиков, имеющих размер, втрое больший размера пикселя: *a* — исходное изображение; *б-г* — зарегистрированные (после корреляторов интенсивностей) фантомные изображения; *д* — результат наложения фантомных изображений *б-г*; *е* — результат редукции при учете корреляций; *жс-и* — результаты редукции при использовании лишь двух изображений из полученных: *жс* — изображений *б* и *в*, *з* — изображений *б* и *г*, *и* — изображений *б* и *г*; *к-м* — результаты редукции к виду, свойственному измерению на приборе с разрешением в 2 (*к*), $4/3$ (*л*), $8/7$ (*м*) раз меньшим, чем на *е*. Поскольку в данном случае оптическая система имеет меньшее разрешение, а исследователь хочет его увеличить, шум подавляется в меньшей степени

привлечь дополнительную априорную информацию (например, как в [11], информацию о разреженности изображения в известном базисе), а можно, как говорилось выше, выбрать такой U , что оценивание Uf с приемлемой погрешностью возможно. На рис. 3*к-м* изображены результаты редукции к виду, свойственному измерениям на приборе, имеющем вдвое, в $4/3$ раза и в $8/7$ раза меньшее разрешение, чем размер элемента исходного изображения. При этом вследствие того, что увеличивается разрешение, флуктуации подавляются в меньшей степени. На рис. 4 показано увеличение отно-

шения сигнал/шум для всего изображения в целом (для изображения ζ отношение сигнал/шум $(\frac{S}{N})_{\zeta} = \sum_k \langle \zeta_k \rangle^2 / \langle \sum_k (\zeta_k - \langle \zeta_k \rangle)^2 \rangle$) по сравнению с лучшим по этому критерию ФИ и результатом суммирования ФИ в зависимости от значений коэффициентов корреляции C между ФИ в восстанавливающих каналах при тех же остальных коэффициентах, что и выше. Отношение сигнал/шум суммы изображений отличается от отношения сигнал/шум каждого отдельно взятого изображения из-за флуктуаций изображений. Поэтому флуктуации в восстанавливающих каналах могут частично подавляться суммированием, хотя и не в той степени, как если бы изображения не коррелировали. Так, в показанном на рис. 2 случае теоретическое изменение отношения сигнал/шум равно

$$(c_2+c_3+c_4)^2 \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} C_{j^*,j^*} c_{j^*}^{-2} \approx \\ \approx \frac{12.8^2 \cdot 0.11}{1.12 \cdot 5.11^2} \approx 0.6,$$

где, согласно формулам для среднего и дисперсии коррелированных случайных величин, первый множитель — квадрат произведения единичных коэффициентов, с которыми суммируются изображения, на множители $c_2 = 2.73$, $c_3 = 4.98$, $c_4 = 5.11$ при единичных матрицах в C_j в (16), второй множитель — произведение вектора-строки единичных коэффициентов, матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 0.19 & 0.13 & 0.12 \\ 0.13 & 0.11 & 0.11 \\ 0.12 & 0.11 & 0.11 \end{pmatrix},$$

составленной из ковариаций изображений, и вектора-строки коэффициентов, j^* — номер фантомного изображения с лучшим отношением сигнал/шум (в данном случае — последнего). Оно хорошо согласуется с полученным в вычислительном эксперименте значением $4.6/7.7 \approx 0.6$. В данном случае суммирование не улучшает отношение сигнал/шум, поскольку значительное отношение сигнал/шум первого ФИ при сложении с одинаковыми коэффициентами нивелирует частичное подавление флуктуаций при суммировании.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема повышения помехозащищенности является одной из ключевых проблем информационных передающих систем. Работа же в режиме счета фотонов эту проблему еще более обостряет, поскольку любой «лишний» шумовой фотон может существенно исказить сигнал, потому что «информационная нагрузка» на каждый сигнальный фотон существенно повышается. Мы рассмотрели формирование двумерных по пространству сигналов изображений. Очевидно, что мультиплицирование этих изображений может увеличить помехозащищенность, поскольку увеличивает количество передаваемой информации, что может быть использовано для улучшения качества компьютерной обработки полученных данных. Но для этого надо знать корреляционные функции мультиплицированных изображений. Априорной информацией может быть корреляционная функция фантомных изображений. Их теоретический расчет оказался непростой задачей. Дело в том, что при вычислении корреляций фантомных изображений возникла проблема расчета выражения вида $\langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \rangle$. Для его нахождения использовано свойство подчинения гауссовой статистике квантовых состояний непрерывных переменных, порождаемых в параметрических процессах, что позволило использовать в расчетах теорему Вика. В связи с тем, что при факторизации возникают очень громоздкие выражения, нами разработана специальная компьютерная программа, которая вычисляет результат квантового усреднения.

Полученные таким образом аналитические выражения мы использовали для синтеза полезного сигнала по пораженным аддитивным шумом и шумом, связанным с мультиплицированием фантомных изображений, результатам измерений методом редукции измерения [41]. Компьютерный эксперимент, проведенный на основании разработанного нами алгоритма, показал высокую эффективность предложенного метода работы с фантомными изображениями с точки зрения повышения их качества (в частности, достигнуто существенное повышение контрастности полученной оценки по сравнению с оценкой, полученной суммированием мультиплицированных изображений), и помехозащищенности: плохо различимые изображения в результате такой обработки становятся хорошо узнаваемыми.

В настоящей работе корреляционные функции (13), (15) не зависят от времени, поэтому основан-

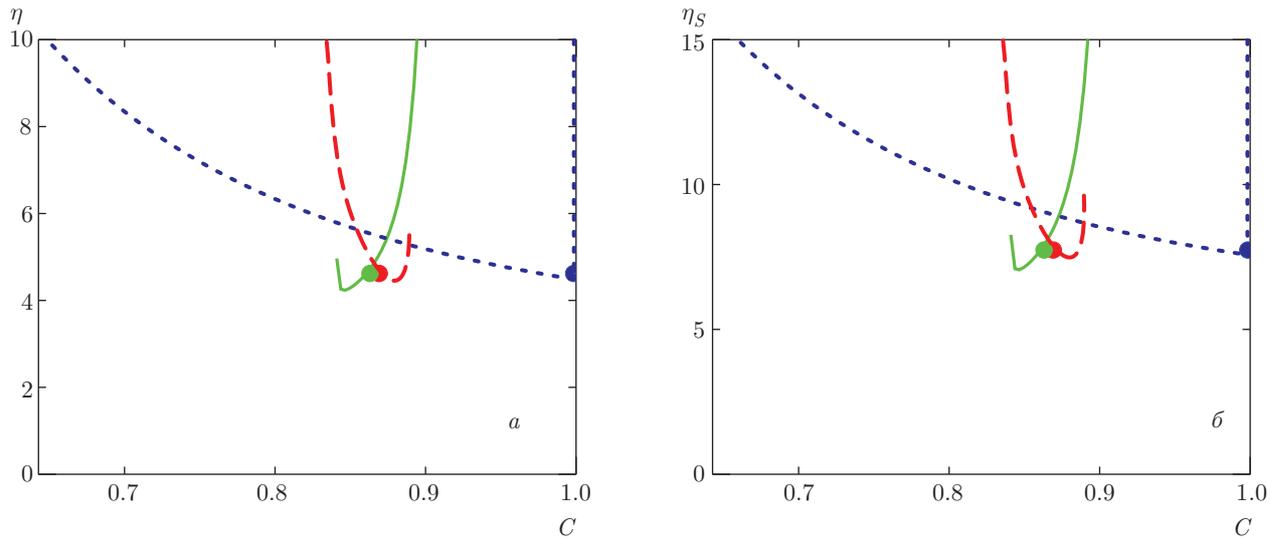


Рис. 4. Выигрыш редуцированных изображений в величине отношения сигнал/шум для всего изображения в целом по сравнению (а) с полученными ФИ ($\eta = (\frac{S}{N})_{RGI} / (\frac{S}{N})_{GI}$), (б) с суммированными ФИ ($\eta_S = (\frac{S}{N})_{RGI} / (\frac{S}{N})_{SGI}$) в зависимости от значения коэффициента взаимной корреляции C между ФИ в восстанавливающих каналах: втором и третьем (штриховые линии), втором и четвертом (сплошные линии), третьем и четвертом (пунктирные линии) при тех же остальных коэффициентах, что и на рис. 2, 3. Точками отмечены значения коэффициентов корреляций, использованные при расчете рис. 2 и 3

ный на их использовании алгоритм интерпретации применим при любом времени накопления информации (разумеется, чем оно больше, тем точнее интерпретация). При этом также предполагалось, что объект за время регистрации не изменяется. В случае нестационарности параметров объекта алгоритм восстанавливает среднее по времени их значение. Подчеркнем преимущество мультиплицирования: за одно и то же время регистрации формируется не одно, а несколько изображений и, следовательно, извлекается больше информации. Учет немонохроматичности используемых запутанных состояний привел бы к еще более громоздким аналитическим выражениям для корреляционных функций. Такой анализ, конечно, необходим при сопоставлении с результатами эксперимента.

Преимущество предлагаемой схемы получения мультиплицированных ФИ по сравнению с обычной (без мультиплицирования) в том, что одновременно регистрируются несколько изображений, а частоты в объектном канале и восстанавливающих каналах могут существенно различаться (на несколько октав). Рассмотренное параметрическое взаимодействие позволяет получить запутанные пучки фотонов с длинами волн от используемых в телекоммуникации (около 1.5 мкм) до используемых в

записи оптической информации (около 0.8 мкм). Квантовые поля с указанными свойствами не могут быть получены с помощью одного параметрического преобразователя частоты.

Проведенные исследования поддержаны РФФИ (грант № 14-02-00458).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вид функций \tilde{W}_{ij}

В работе проводилась факторизация выражения

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i, \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}'''_1, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}'_j) = \\ = \langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \rangle - \\ - \langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i \rangle \langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \rangle. \end{aligned}$$

Для этого была реализована программа, алгоритм работы которой описан в разд. 4. Приведем полученный вид выражения. Используются обозначения

$$\begin{aligned} Q_{(kij)} &= Q_{ik} Q_{jk}^* + Q_{i,k+2} Q_{j,k+2}^*, \\ \tilde{Q}_{(kij)}(\mathbf{r}) &= (2\pi)^{-4} \int d\mathbf{q} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) Q_{(kij)}(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

При четном j

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{3j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}'_3, \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}'''_1, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}'_j) = & \\ = \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(213)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_3) & \left(\widetilde{Q}_{(131)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_3) \widetilde{Q}_{(1jj)}(\mathbf{r}'_j + \mathbf{r}_j) + \widetilde{Q}_{(13j)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}'_j) \widetilde{Q}_{(2j1)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_j) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(2j3)}(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_j) & \left(\widetilde{Q}_{(131)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'_3) \widetilde{Q}_{(11j)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'_j) + \widetilde{Q}_{(13j)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}'_j) \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}'_1) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(231)}(\mathbf{r}'_3 - \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(111)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}'_1) & \left(\widetilde{Q}_{(213)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(1jj)}(\mathbf{r}'_j + \mathbf{r}_j) + \widetilde{Q}_{(2j3)}(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_j) \widetilde{Q}_{(11j)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'_j) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(231)}(\mathbf{r}'_3 - \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(11j)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_j) & \left(\widetilde{Q}_{(213)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(2j1)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_j) + \widetilde{Q}_{(2j3)}(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_j) \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}'_1) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(113)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_3) & \left(\widetilde{Q}_{(131)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_3) \widetilde{Q}_{(1jj)}(\mathbf{r}'_j + \mathbf{r}_j) + \widetilde{Q}_{(13j)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}'_j) \widetilde{Q}_{(2j1)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_j) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(111)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}'_1) & \left(\widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(1jj)}(\mathbf{r}'_j + \mathbf{r}_j) + \widetilde{Q}_{(2j3)}(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_j) \widetilde{Q}_{(13j)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}'_j) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(11j)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_j) & \left(\widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(2j1)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_j) + \widetilde{Q}_{(2j3)}(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_j) \widetilde{Q}_{(131)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_3) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(2j1)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j) \widetilde{Q}_{(113)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_3) & \left(\widetilde{Q}_{(131)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'_3) \widetilde{Q}_{(11j)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'_j) + \widetilde{Q}_{(13j)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}'_j) \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}'_1) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(2j1)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j) \widetilde{Q}_{(111)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}'_1) & \left(\widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(11j)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'_j) + \widetilde{Q}_{(213)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(13j)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}'_j) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(2j1)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j) \widetilde{Q}_{(11j)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_j) & \left(\widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}'_1) + \widetilde{Q}_{(213)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(131)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_3) \right). \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{33}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}'_3, \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}'''_1, \mathbf{r}''_3, \mathbf{r}'''_3) = & \\ = \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(213)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_3) & \left(\widetilde{Q}_{(131)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'_3) \widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'''_3 + \mathbf{r}''_3) + \widetilde{Q}_{(133)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}''_3) \widetilde{Q}_{(231)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'''_3) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'''_3 + \mathbf{r}_3) & \left(\widetilde{Q}_{(131)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'_3) \widetilde{Q}_{(113)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'''_3) + \widetilde{Q}_{(133)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}''_3) \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}'_1) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(231)}(\mathbf{r}'_3 - \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(111)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}'_1) & \left(\widetilde{Q}_{(213)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'''_3 + \mathbf{r}''_3) + \widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'''_3 + \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(113)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'''_3) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(231)}(\mathbf{r}'_3 - \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(113)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}''_3) & \left(\widetilde{Q}_{(213)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(231)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'''_3) + \widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'''_3 + \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}'_1) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(113)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_3) & \left(\widetilde{Q}_{(131)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'_3) \widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'''_3 + \mathbf{r}''_3) + \widetilde{Q}_{(133)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}''_3) \widetilde{Q}_{(231)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'''_3) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(111)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}'_1) & \left(\widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'''_3 + \mathbf{r}''_3) + \widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'''_3 + \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(133)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}''_3) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(113)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}''_3) & \left(\widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(231)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'''_3) + \widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'''_3 + \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(131)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_3) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(231)}(\mathbf{r}'_3 - \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(113)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_3) & \left(\widetilde{Q}_{(131)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'_3) \widetilde{Q}_{(113)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'''_3) + \widetilde{Q}_{(133)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}''_3) \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}'_1) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(231)}(\mathbf{r}'_3 - \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(111)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}'_1) & \left(\widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(113)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}'''_3) + \widetilde{Q}_{(213)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(133)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}''_3) \right) + \\ + \widetilde{Q}_{(231)}(\mathbf{r}'_3 - \mathbf{r}_1) \widetilde{Q}_{(113)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}''_3) & \left(\widetilde{Q}_{(233)}(\mathbf{r}'_3 + \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(211)}(\mathbf{r}''_1 + \mathbf{r}'_1) + \widetilde{Q}_{(213)}(\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_3) \widetilde{Q}_{(131)}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_3) \right). \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Вид функций W_{ij}

В формуле

$$\begin{aligned} W_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j) = \int d\mathbf{R} \int d\mathbf{d} \int d\mathbf{R}' \int d\mathbf{d}' \exp \left(-i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{d} \right) \times \\ \times \exp \left(-i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{d}' \right) \widetilde{W}_{ij} \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{d}}{2}, \mathbf{R} + \frac{\mathbf{d}}{2}, -\mathbf{r}_i, -\mathbf{r}_i, \mathbf{R}' - \frac{\mathbf{d}'}{2}, \mathbf{R}' + \frac{\mathbf{d}'}{2}, -\mathbf{r}_j, -\mathbf{r}_j \right) \end{aligned}$$

третий и четвертый, а также седьмой и восьмой аргументы \widetilde{W}_{ij} совпадают, а $Q_{ij}(\mathbf{q}) = Q_{ij}(-\mathbf{q})$, поэтому выражение для W_{ij} имеет приведенный ниже вид, где $p(j) = 1$, если j четно, и $p(j) = 2$, если j нечетно, S — площадь изображения:

$$\begin{aligned}
W_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j) = & \pi^2 Q_{(1i1)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) Q_{(211)}(0) \delta \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \right) \left(Q_{(21i)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \widetilde{Q}_{(p(j),j,j)}(2\mathbf{r}_j) + \right. \\
& \left. + Q_{(11j)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \widetilde{Q}_{(2ji)}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \exp \left(i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \right) \right) + \\
& + \pi^2 Q_{(211)}(0) \delta \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \right) \left(Q_{(21i)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) Q_{(2j1)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \widetilde{Q}_{(1ij)}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \exp \left(i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right) + \right. \\
& \left. + \pi^2 \widetilde{Q}_{(1ij)}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \widetilde{Q}_{(2ji)}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \delta \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \right) + \\
& + Q_{(111)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) Q_{(2i1)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \delta \left(\frac{k_1}{f} (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_1) \right) \left(Q_{(21i)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \widetilde{Q}_{(p(j),j,j)}(2\mathbf{r}_j) \exp \left(2i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}_i \right) + \right. \\
& \left. + Q_{(11j)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \widetilde{Q}_{(2ji)}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \exp \left(i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \cdot (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \right) \right) + \\
& + Q_{(11j)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \right) Q_{(2i1)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \right) \left(Q_{(21i)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) Q_{(2j1)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \exp \left(i \frac{k_1}{f} (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right) + \right. \\
& \left. + \pi^2 Q_{(211)}(0) \widetilde{Q}_{(2ji)}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \exp \left(-i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right) \delta \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \right) + \\
& + Q_{(11i)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) Q_{(211)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \delta \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 + \frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \right) \left(Q_{(1i1)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \widetilde{Q}_{(p(j),j,j)}(2\mathbf{r}_j) \exp \left(-2i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}_i \right) + \right. \\
& \left. + Q_{(211)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) Q_{(2j1)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \widetilde{Q}_{(1ij)}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \exp \left(-i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \cdot (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \right) \right) + \\
& + 4\pi^2 S Q_{(111)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) Q_{(211)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \delta \left(\frac{k_1}{f} (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_1) \right) \left(\widetilde{Q}_{(p(i),i,i)}(2\mathbf{r}_i) \widetilde{Q}_{(p(j),j,j)}(2\mathbf{r}_j) + \right. \\
& \left. + \widetilde{Q}_{(1ij)}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \widetilde{Q}_{(2ji)}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \right) + \\
& + Q_{(11j)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) Q_{(211)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \delta \left(\frac{k_1}{f} (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_1) \right) \left(Q_{(2j1)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \widetilde{Q}_{(p(i),i,i)}(2\mathbf{r}_i) \exp \left(-2i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}_j \right) + \right. \\
& \left. + Q_{(1i1)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \widetilde{Q}_{(2ji)}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \exp \left(-i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \cdot (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \right) \right) + \\
& + Q_{(11i)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \right) Q_{(2j1)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \right) \left(Q_{(11j)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) Q_{(1i1)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \exp \left(i \frac{k_1}{f} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right) + \right. \\
& \left. + \pi^2 Q_{(211)}(0) \widetilde{Q}_{(1ij)}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \exp \left(i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right) \delta \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \right) + \\
& + Q_{(111)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) Q_{(2j1)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \delta \left(\frac{k_1}{f} (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_1) \right) \left(Q_{(11j)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \widetilde{Q}_{(p(i),i,i)}(2\mathbf{r}_i) \exp \left(2i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}_j \right) + \right. \\
& \left. + Q_{(21i)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \widetilde{Q}_{(1ij)}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \exp \left(i \frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \cdot (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \right) \right) + \\
& + Q_{(11j)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \right) Q_{(2j1)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}_1 \right) \left(\pi^2 Q_{(211)}(0) \widetilde{Q}_{(p(i),i,i)}(2\mathbf{r}_i) \delta \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) + Q_{(1i1)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) Q_{(21i)} \left(\frac{k_1}{f} \mathbf{r}'_1 \right) \right).
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Белинский, Д. Н. Клышко, ЖЭТФ **105**, 1574 (1994).
2. D. V. Strekalov, A. V. Sergienko, D. N. Klyshko, and Y. H. Shih, Phys. Rev. Lett. **74**, 3600 (1995).
3. A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache, and L. A. Lugiato, Phys. Rev. A **70**, 013802 (2004).

4. A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache, and L. A. Lugiato, in *Quantum Imaging*, ed. by M. I. Kolobov, Springer (2007), ch. 5 [*Квантовое изображение*, под ред. М. И. Колобова, Физматлит, Москва (2009), гл. 5].
5. B. I. Erkmen and R. W. Boyd, *Adv. Opt. Photon.* **2**, 405 (2010).
6. J. H. Shapiro and R. W. Boyd, *Quant. Inf. Process.* **11**, 949 (2012).
7. K. W. C. Chan, M. N. O'Sullivan, and R. W. Boyd, *Opt. Express* **18**, 5562 (2010).
8. B. I. Erkmen and J. H. Shapiro, *Phys. Rev. A* **79**, 023833 (2009).
9. F. Ferri, D. Magatti, L. A. Lugiato, and A. Gatti, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 253603 (2010).
10. T. S. Tasca, R. S. Aspden, P. A. Morris, G. Anderson, R. W. Boyd, and M. J. Padgett, *Opt. Express* **21**, 30460 (2013).
11. P. A. Morris, R. S. Aspden, J. E. C. Bell, R. W. Boyd, and M. J. Padgett, *Nature Comm.* **6**, 1 (2015).
12. D. W. Youngner, L. M. Lust, and R. W. Boyd, *US Patent*, 7767968, B2 (2010).
13. H. Yu, R. Lu, Sh. Han, H. Xie, G. Du, T. Xiao, and D. Zhu, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 113901 (2016).
14. D. Pelliccia, A. Rack, M. Scheel, V. Cantelli, and D. M. Paganin, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 113902 (2016).
15. P. Ryczkowski, M. Barbier, A. T. Friberg, J. M. Dudley, and G. Genty, *Nature Photon.* **10**, 176 (2016).
16. Е. Д. Лопаева, М. В. Чехова, *Письма в ЖЭТФ* **91**, 493 (2010).
17. D. Duan, S. Du, and Y. Xia, *Phys. Rev. A* **88**, 053842 (2013).
18. K. W. C. Chan, M. N. O'Sullivan, and R. W. Boyd, *Opt. Lett.* **34**, 3343 (2009).
19. Li-H. Ou and Le-M. Kuang, *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **40**, 1833 (2007).
20. Y. Bai and Sh. Han, *Phys. Rev. A* **76**, 043828 (2007).
21. De-Zh. Cao, J. Xiong, Su-H. Zhang, Lu-F. Lin, L. Gao, and K. Wang, *Appl. Phys. Lett.* **92**, 201102 (2008).
22. D. J. Zhang, H. G. Li, Q. L. Zhao et al., *Phys. Rev. A* **92**, 013823 (2015).
23. А. С. Чиркин, *Письма в ЖЭТФ* **102**, 444 (2015).
24. А. В. Родионов, А. С. Чиркин, *Письма в ЖЭТФ* **79**, 311 (2004).
25. A. Ferraro, M. G. A. Paris, M. Bondani et al., *J. Opt. Soc. Amer. B* **21**, 1241 (2004).
26. M. K. Olsen and P. D. Drummond, *Phys. Rev. A* **71**, 053803 (2005).
27. A. S. Solntsev, A. A. Sukhorukov, D. N. Neshev, and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 023601 (2012).
28. R. Kruse et al., *New J. Phys.* **15**, 083046 (2013).
29. D. Daems, F. Bernard, N. J. Cerf, and M. I. Kolobov, *J. Opt. Soc. Amer. B* **27**, 447 (2010).
30. А. С. Чиркин, И. В. Шутов, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 803 (2007).
31. А. С. Чиркин, И. В. Шутов, *ЖЭТФ* **136**, 639 (2009).
32. М. Ю. Сайгин, А. С. Чиркин, *ЖЭТФ* **138**, 16 (2010).
33. М. Ю. Сайгин, А. С. Чиркин, *Опт. и спектр.* **110**, 102 (2011).
34. M. Yu. Saygin, A. S. Chirkin, and M. I. Kolobov, *J. Opt. Soc. Amer. B* **29**, 2090 (2012).
35. T. V. Plyachev, A. M. Chebotarev, and A. S. Chirkin, *Phys. Scripta T* **160**, 014041 (2014).
36. Д. А. Балакин, А. В. Белинский, *ЖЭТФ* **149**, 915 (2016).
37. А. С. Чиркин, *Письма в ЖЭТФ* **103**, 444 (2016).
38. H. Suchowski, B. D. Bruner, Yo. Israel, A. Gagny-Padowicz, A. Arie, and Ya. Silberberg, *Appl. Phys. B* **122**, 25 (2016).
39. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Релятивистская квантовая теория*, ч. 1, Наука, Москва (1968).
40. А. Н. Малахов, *Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований*, Сов. радио, Москва (1978).
41. Ю. П. Пытьев, *Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем*, Физматлит, Москва (2012).