ЖЭТФ, 2017, том 152, вып. 2 (8), стр. 315–326

РЕЛАКСАЦИЯ ЭНЕРГИИ ВАКУУМА В q-ТЕОРИИ

Ф. Р. Клинкхамер [a*], ***М. Савелайнен*** [b**], ***Г. Е. Воловик*** [b,c***]

[a] *Технологический институт Карлсруэ*
76128, Карлсруэ, Германия

[b] *Университет Аалто*
FI-00076, Аалто, Финляндия

[c] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук*
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 17 мая 2016 г.,
после переработки 26 января 2017 г.

(Перевод с английского)

RELAXATION OF VACUUM ENERGY IN q-THEORY

F. R. Klinkhamer, M. Savelainen, G. E. Volovik

Формализм q-теории предназначен для описания термодинамики и динамики глубокого квантового вакуума. Термодинамика приводит к точному сокращению квантово-полевой энергии нулевых колебаний в равновесии, что частично решает основную проблему космологической постоянной. Однако в рамках обратимой динамики пространственно-плоская вселенная Фридмана – Робертсона – Уокера асимптотически приближается к вакууму Минковского только в том случае, если Большой Взрыв произошел уже в равновесном начальном состоянии. Проведено обобщение q-теории путем введения затухания от необратимых процессов. Пренебрегая возможной неустойчивостью вакуума де Ситтера, можно получить различные сценарии с асимптотикой де Ситтера или с коллапсом к конечной сингулярности. Выход на асимптотику вакуума Минковского требует точного подбора начальных условий. Это свидетельствует о том, что в рамках q-теории распад вакуума де Ситтера является необходимым условием для динамического решения проблемы космологической постоянной [preprint arXiv:1601.04676; KA-TP-02-2016 (v. 2.91)].

DOI: 10.7868/S0044451017080000

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамика квантового вакуума является одной из основных нерешенных задач релятивистской квантовой теории поля (РКТП) и космологии. Причина состоит в том, что РКТП и общая теория относительности описывают процессы значительно ниже планковского масштаба энергии, в то время как глубокий ультрафиолетовый квантовый вакуум на масштабах планковской энергии или выше остается *terra incognita*. Различные схемы регуляризации не слишком помогают при рассмотрении ультрафиолетовых расходимостей. Особенно проблематично оценить плотность энергии вакуума, в чем и состоит так называемая проблема космологической постоянной (ПКП) [1]. Необходима расширенная теория, позволяющая в более общем виде изучать динамические процессы, которые происходят вслед за сильным возмущением глубокого вакуума за счет «космологических катастроф». Типичным источником таких катастроф является неустойчивость вакуума, вызываемая фоновыми полями различного вида (см. работы [2–4] и [5]) или космологическими фазовыми переходами [6].

Похожие процессы возникают в физике конденсированного состояния, когда основное состояние системы («вакуум») возмущено, например, в результате быстрого охлаждения. После выхода системы из равновесного состояния квантовая конденсированная среда (квантовая жидкость или сверхпро-

* E-mail: frans.klinkhamer@kit.edu
** E-mail: matti.savelainen@helsinki.fi
*** E-mail: volovik@ltl.tkk.fi

водник) испытывает осцилляции параметра порядка Бардина – Купера – Шриффера со степенным затуханием [7–12]. Наблюдение осцилляций, возникающих в сверхпроводниках после возмущения, позволило даже обнаружить хиггсову амплитудную моду параметра порядка [13, 14]. В отличие от физики элементарных частиц, физика конденсированного состояния позволяет изучать как инфракрасный макроскопический режим, описываемый эффективной квантовой теорией поля, так и соответствующий режим сверхвысоких энергий, описываемый в рамках микроскопической физики и физики на уровне атома.

Исследования динамики конденсированного состояния привели к созданию специального макроскопического подхода, называемого q-теорией, в рамках которого ультрафиолетовые степени свободы квантового вакуума включаются в эффективную теорию [15–18]. Глубокий физический вакуум описывается макроскопической динамической переменной — вакуумным полем q. Вакуумная переменная q является сохраняющейся величиной, что позволяет стабилизировать основное состояние системы (вакуума) в отсутствие внешнего окружения, т. е. при нулевом внешнем давлении. В нашем подходе вакуум рассматривается в качестве лоренц-инвариантного аналога конденсированной системы (жидкой или твердой), которая является устойчивой в свободном пространстве. Переменная q является лоренц-инвариантным аналогом плотности числа частиц n, сохранение которой определяет термодинамику и динамику многочастичной системы.

Необходимая для описания квантового вакуума переменная q возникает в различных релятивистских теориях. В частности, вакуум выражался в виде напряженности поля, представляющей собой 4-форму [19–27]. Различие между нашим подходом [15] и указанными работами состоит в том, что вместо квадратичного члена q^2 используется функция общего вида $\epsilon(q)$, которая позволяет рассматривать равновесный вакуум с ненулевым значением q. В работе используется эта конкретная реализация q-поля, однако результаты не сильно зависят от выбора переменной q. Преимущество q-теории состоит в универсальности ее уравнений, которые не зависят от происхождения q-поля и естественным образом модифицируют общую теорию относительности.

При любой реализации q данный подход естественным образом разрешает проблему энергии равновесного вакуума. Расходящийся вклад энергии нулевых колебаний в плотность энергии вакуума автоматически сокращается за счет микроскопических степеней свободы. Это сокращение следует из тождества Гиббса – Дюгема, которое применимо к любому равновесному состоянию, включая физический вакуум. В результате плотность энергии вакуума, входящая в гравитационное уравнение Эйнштейна в виде космологической постоянной, равна нулю при полном равновесии при нулевой температуре. Например, рассмотрим случай, когда материя представлена единственным вещественным скалярным полем с ненулевым абсолютным минимумом потенциала. В отсутствие q-поля вакуум имеет большую плотность энергии и, соответственно, большую космологическую постоянную. Однако в равновесии q-поле автоматически компенсирует этот вклад в плотность энергии вакуума без какой-либо подгонки параметров [15]. Единственное допущение состоит в том, что квантовый вакуум является самоподдерживающейся системой, энергия которой — экстенсивная величина. В слабо неравновесном состоянии и/или при ненулевой температуре плотность энергии вакуума определяется физикой в инфракрасной области и, следовательно, на много порядков меньше величины, получающейся исходя из ненулевого абсолютного минимума потенциала или ультрафиолетового обрезания в РКТП. Таким образом, ПКП сводится к задаче о релаксации вакуума к термодинамическому равновесию.

До сих пор рассматривалась классическая версия q-теории [15], в которой не учитывается квантово-диссипативный обмен энергией между вакуумом и материей. В классической теории аналог химического потенциала μ — переменная, термодинамически сопряженная с переменной q — становится постоянной интегрирования. В идеально равновесном вакууме μ имеет значение μ_0, определяемое микроскопическими параметрами физического вакуума, что дает нулевое значение космологической постоянной. После космической катастрофы плотность энергии возмущенного вакуума может быть очень большой, порядка планковского масштаба энергии. Тем не менее, если космическая катастрофа происходит в исходном вакууме Минковского (т. е. при $\mu = \mu_0$), то состояние с огромной космологической постоянной будет релаксировать обратно в состояние вакуума Минковского с нулевой космологической постоянной (см. рис. 1–5 в работе [16]).

Недостаток q-теории на классическом уровне состоит в том, что если исходный химический потенциал μ не равен величине μ_0, то вакуум релаксирует не к вакууму Минковского, а в состояние де Ситтера (см. рис. 6 в работе [16]). Ситуация напоминает сверхпроводники после резкого возмущения

[7–12]: в пренебрежении диссипацией степенное осциллирующее затухание не обязательно приводит к равновесному основному состоянию.

Следующий шаг состоит в развитии q-теории за счет учета квантовой диссипации, чтобы μ могло релаксировать к равновесному значению μ_0. В полной квантовой теории динамика q-поля и сопутствующего осциллирующего гравитационного поля должна приводить к рождению частиц и, таким образом, к переходу плотности энергии вакуума в энергию образующихся полей материи. На данный момент мы не в состоянии обсуждать полную квантовую теорию, однако вместо этого можно использовать феноменологическое обобщение q-теории, основанное на теоретических результатах рождения частиц во внешних полях [28–31]. Вопрос состоит в том, существуют ли условия, при которых вакуум Минковского появляется в виде аттрактора динамических уравнений.

В работе рассматривается случай, когда диссипация происходит от временной зависимости вакуумного поля $q(t)$ или параметра расширения Хаббла $H(t)$. Тогда диссипация отсутствует не только в вакууме Минковского, но также и в вакууме де Ситтера. Другими словами, предполагается, что вакуум де Ситтера не является излучающим. (Феноменологическая q-теория, основанная на поляковском механизме радиационной неустойчивости вакуума де Ситтера [2–4], была рассмотрена в работе [32].) Тем не менее, даже в том случае, когда оба вакуума бездиссипативны, не исключено, что вакуум Минковского может оказаться более выгодным и служить аттрактором динамических уравнений в некотором диапазоне начальных условий, что мы и собираемся выяснить в данной работе.

В q-теории квантовый вакуум имеет несколько равновесных состояний Минковского, которые соответствуют различным равновесным значениям $q_0^{(n)}$ переменной q. Имеющийся физический вакуум имеет ненулевое значение $q_0^{(1)} \neq 0$ и отличную от нуля гравитационную постоянную $G^{-1}[q_0^{(1)}] \neq 0$. Однако гравитация может отсутствовать или полностью изменяться в тривиальном вакууме при $q_0^{(2)} = 0$, откуда следует, что в зависимости от микроскопической (транс-планковской) теории вакуума обращается в нуль или гравитационная постоянная, $G[q_0^{(2)}] = 0$, или обратная гравитационная постоянная, $G^{-1}[q_0^{(2)}] = 0$. В рассматриваемом случае было обнаружено, что нетривиальный вакуум Минковского с $q \neq 0$ может возникать как аттрактор только за счет тонкой настройки.

Хотя мы нашли разнообразные случаи динамического поведения как с вечным расширением модельной вселенной, так и без него, в исследованных областях пространства параметров не обнаружено аттрактора Минковского. Этот отрицательный результат указывает на то, что в рамках подхода q-теории распад вакуума де Ситтера (за счет излучения или неустойчивости) является необходимым условием для динамического решения ПКП. В сопутствующей статье [33] обсуждается другое развитие q-теории, приводящее к динамической предпочтительности вакуума Минковского по сравнению с вакуумом де Ситтера.

2. ДИНАМИКА q-ТЕОРИИ

2.1. q-теория и проблема космологической постоянной

В терминах 4-форм [15, 16] вакуумная переменная q выражается в виде антисимметричной напряженности $F_{\kappa\lambda\mu\nu}$ 3-формы калибровочного поля $A_{\lambda\mu\nu}$ [19, 20]:

$$q^2 \equiv -\frac{1}{24} F_{\kappa\lambda\mu\nu} F^{\kappa\lambda\mu\nu}, \tag{1a}$$

$$F_{\kappa\lambda\mu\nu} \equiv \nabla_{[\kappa} A_{\lambda\mu\nu]} = q\sqrt{-g}\,\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}, \tag{1b}$$

$$F^{\kappa\lambda\mu\nu} = q\,\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}/\sqrt{-g}, \tag{1c}$$

где ∇_μ — ковариантная производная, а пара квадратных скобок вокруг пространственно-временных индексов обозначает полную антисимметризацию. В дальнейшем используется приведенная система единиц с $c = \hbar = k_B = 1$ и выбрана сигнатура $(-+++)$. В уравнении (1b) $\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$ — символ Леви–Чивиты, а q — псевдоскаляр. Однако q является не фундаментальным, а составным псевдоскаляром, образованным из калибровочного поля $A_{\kappa\lambda\mu}$ и метрики $g_{\mu\nu}$ (подробное обсуждение содержится также в разд. 2 работы [18]).

Действие для вакуумного поля q, материального поля общего вида ψ и гравитационного поля $g_{\mu\nu}$ является обобщением действия, рассмотренного в работах [19–27]. А именно, квадратичное по q слагаемое максвелловского типа заменяется на функцию общего вида $\epsilon(q)$, а ньютоновская гравитационная постоянная G_N — на функцию $G(q)$. Тогда действие представляется в виде

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4x\,\sqrt{-g}\,\left(\frac{R}{16\pi G(q)} + \epsilon(q) + \mathcal{L}^M(\psi)\right). \tag{2}$$

В этом выражении мы пренебрегаем возможной зависимостью от q параметров плотности лагранжиана материи $\mathcal{L}^M(\psi)$. Лагранжиан в уравнении (2) содержит две произвольные функции с единственным предположением, что равновесный вакуум имеет ненулевое постоянное значение q_0 для поля q, т. е. вакуум не является «пустым» ($q = 0$). Обращение в нуль плотности энергии вакуума в равновесии не зависит от выбора этих функций. Уже упоминалось, что q в действии (2) не является фундаментальным псевдоскалярным полем, поскольку выражается через калибровочное поле $A_{\mu\nu\rho}$ и метрическое поле $g_{\mu\nu}$ в соответствии с (1b).

Важное свойство q-теории состоит в том, что микроскопическая плотность энергии вакуума $\epsilon(q)$, входящая в действие, не совпадает с термодинамической плотностью энергии вакуума $\rho_V(q)$, которая входит в уравнение Эйнштейна в качестве космологической постоянной. В самом деле, обобщенное уравнение Эйнштейна получается варьированием действия (2) по метрике $g_{\mu\nu}$ и имеет вид

$$\frac{1}{8\pi G(q)}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\,g_{\mu\nu}\right) + \\ + \frac{1}{16\pi}\,q\,\frac{dG^{-1}(q)}{dq}\,R\,g_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\,\Box\right) \times \\ \times G^{-1}(q) - \left(\epsilon(q) - q\,\frac{d\epsilon(q)}{dq}\right) g_{\mu\nu} + T^M_{\mu\nu} = 0\,, \quad (3)$$

где $\Box$ — инвариантный даламбертиан, а $T^M_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса поля материи ψ. Если пренебречь зависимостью гравитационной постоянной G от q, получается обычное уравнение Эйнштейна, в котором роль космологической постоянной Λ играет следующая плотность энергии вакуума:

$$\Lambda = \rho_V(q) = -P_V(q) = \epsilon(q) - q\,\frac{d\epsilon(q)}{dq}\,. \quad (4)$$

Плотность энергии вакуума $\rho_V(q)$ из (4) является аналогом термодинамического потенциала $\epsilon - n\,d\epsilon/dn$ в физике конденсированного состояния, который там обращается в нуль в идеальном равновесии при нулевой температуре ($T = 0$) и в отсутствие внешних сил (т. е. при нулевом внешнем давлении, $P = 0$). Обращение в нуль следует из соотношения Гиббса–Дюгема в интегральном виде [15]:

$$\epsilon - n\,d\epsilon/dn = -P.$$

Это термодинамическое соотношение является универсальным и должно быть также применимо к релятивистской среде, такой как физический вакуум. В результате в любом равновесном состоянии физического вакуума при $T = 0$ имеем $\rho_V = 0$ при условии, что вакуум принадлежит к классу самоподдерживающихся систем, т. е. таких, которые могут существовать без внешнего окружения (т. е. при $P = 0$). Это означает, что обращение в нуль космологической постоянной в вакууме является естественным следствием термодинамики самоподдерживающихся систем. Вследствие законов термодинамики огромный вклад в Λ от энергии нулевых колебаний квантовых полей [1] автоматически сокращается с микроскопическим (транс-планковским) вкладом. Это сокращение возникает без тонкой настройки параметров.

Пример микроскопической плотности энергии вакуума $\epsilon(q)$ и соответствующей плотности энергии гравитационного вакуума $\rho_V(q)$ приводится в работе [16]:

$$\epsilon(q) = \frac{1}{2\chi_0}\left(-\frac{q^2}{q_0^2} + \frac{1}{3}\,\frac{q^4}{q_0^4}\right), \quad (5a)$$

$$\rho_V(q) \equiv \epsilon(q) - q\,\frac{d\epsilon(q)}{dq} = \frac{1}{2\chi_0}\,\frac{q^2}{q_0^2}\,\left(1 - \frac{q^2}{q_0^2}\right), \quad (5b)$$

с ненулевыми константами q_0 и χ_0. Данный пример демонстрирует два типа равновесного квантового вакуума, причем в обоих выполняется условие $\rho_V(q) = 0$ в плоском пространстве-времени. Первый тип является тривиальным вакуумом с $q = 0$ и $\mu \equiv \equiv d\epsilon/dq = 0$. Вакуум второго типа имеет ненулевые равновесные параметры

$$q = q_0\,, \quad (6a)$$

$$\mu = \mu_0 = -\frac{1}{3\chi_0\,q_0}\,, \quad (6b)$$

$$\chi = \chi_0\,, \quad (6c)$$

где $\chi \equiv (q^2\,d^2\epsilon/dq^2)^{-1}$ соответствует изотермической сжимаемости вакуума [15]. Тривиальный вакуум является «пустым», и в нем также может отсутствовать гравитация. Подходящий пример зависимости гравитационной постоянной от q определяется функцией [16]

$$G^{-1}(q) = \frac{1}{G_N}\,\frac{\sqrt{q^2}}{|q_0|}\,, \quad (7)$$

где G_N — ньютоновская постоянная в равновесном вакууме, т. е. при $q = q_0$. При приближении к тривиальному вакууму ($q \to 0$) имеем

$$G^{-1}(q) \to 0,$$

и слагаемое Эйнштейна – Гильберта в действии (2) исчезает. Здесь предполагается, что q_0 задает масштаб обрезания по энергии для обратной гравитационной постоянной и что G^{-1} в тривиальном вакууме стремится к нулю. Поскольку эффективная гравитационная постоянная становится бесконечной, в этом пределе можно ожидать образования сингулярностей кривизны (подробности см. в работах [34, 35]).

В принципе, квантовый вакуум может быть многокомпонентным и иметь несколько неэквивалентных нетривиальных состояний. Однако в любом из этих состояний термодинамика обеспечивает обращение в нуль космологической константы в идеальном равновесном вакууме.

2.2. Обратимая динамика энергии вакуума и давления

В данной работе нас в первую очередь интересует динамическое приближение квантового вакуума к равновесному состоянию (или равновесным состояниям). В отсутствие диссипации энергии уравнение для вакуумной переменной q получается варьированием действия (2) по калибровочному полю $A_{\lambda\mu\nu}$:

$$\nabla_\nu \left[\sqrt{-g}\, \frac{F^{\kappa\lambda\mu\nu}}{q} \left(\frac{d\epsilon(q)}{dq} + \frac{R}{16\pi}\, \frac{dG^{-1}(q)}{dq} \right) \right] = 0\,. \quad (8)$$

В пространственно плоской ($k = 0$) вселенной Фридмана – Робертсона – Уокера (ФРУ) с полем q, зависящим только от космологического времени t, обобщенное уравнение Максвелла (8) сводится к уравнению

$$\partial_t \left[\frac{d\epsilon(q)}{dq} + \frac{R}{16\pi}\, \frac{dG^{-1}(q)}{dq} \right] = 0\,, \quad (9)$$

которое дает постоянную интегрирования μ для решения:

$$\frac{d\epsilon(q)}{dq} + \frac{R}{16\pi}\, \frac{dG^{-1}(q)}{dq} = \mu\,. \quad (10)$$

В физике конденсированного состояния константа интегрирования μ соответствует фиксированному химическому потенциалу.

Судьба расширяющейся вселенной после космической катастрофы зависит от величины постоянной интегрирования μ [16]. Вселенная релаксирует к равновесному вакууму Минковского, только если $\mu = \mu_0$, причем μ_0 определяется уравнением (6b) для анзаца (5a). При $\mu \neq \mu_0$ решения динамических уравнений имеют асимтотику де Ситтера с постоянной Хаббла H, определяемой μ. Следовательно, в рамках обратимой динамики вакуума проблема космологической постоянной заменяется другой проблемой [17]: почему μ имеет «правильное» значение?

Это является основанием для введения диссипации в уравнении для вакуумной переменной q. Тогда эффективный химический потенциал μ_{eff} больше не является постоянной интегрирования и может релаксировать.

2.3. Необратимая динамика энергии вакуума и давления

Введем диссипацию феноменологически, путем добавления следующего слагаемого в уравнение (9):

$$\partial_t \left[\frac{d\epsilon(q)}{dq} + \frac{R}{16\pi}\, \frac{dG^{-1}(q)}{dq} \right] = S\,. \quad (11)$$

Роль функции S проще всего понять, если временно пренебречь зависимостью гравитационной постоянной G от q. Тогда из уравнения Фридмана (основанного на уравнении Эйнштейна (3)) и уравнения (11) для вакуума получаются следующие эволюционные уравнения для плотностей энергии вакуума и материи:

$$\partial_t \rho_V = -qS\,, \quad (12a)$$

$$\partial_t \rho_M = -3H \Big(P_M + \rho_M \Big) + qS\,. \quad (12b)$$

Отсюда видно, что qS описывает диссипацию плотности энергии вакуума в возбуждения материи. Обмен энергией между вакуумом и материей вызван рождением частиц, происходящим или благодаря зависящему от времени гравитационному полю [28, 29, 31], или за счет параметрического резонанса, вызванного осцилляциями полей [30, 36].

Мы продолжаем следовать логике физики конденсированного состояния, где функцию диссипации можно представить в виде квадратичной формы по временным производным. В нашем случае это дает

$$qS = \Gamma_q (\partial_t q)^2 + \Gamma_H (\partial_t H)^2 \quad (13)$$

с неотрицательными постоянными Γ_q и Γ_H. Второе слагаемое в правой части (13) является аналогом члена R^2 для рождения частиц из работы [28], где R — скаляр Риччи. Для пространственно-плоской вселенной ФРУ имеем

$$R^2 = 36(\partial_t H + 2H^2)^2,$$

что отличается от $36\,(\partial_t H)^2$ на полную производную по времени:

$$a^3 [R^2 - 36(\partial_t H)^2] = \partial_t [48\,(\partial_t a)^3].$$

Второе слагаемое в правой части (13) можно выразить через тензор Римана в виде комбинации R^2 и члена Гаусса – Бонне:

$$E = R^2 - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma},$$

причем последний также дает полную производную по времени в виде $E_{flat-FRW} = 24H^2(\partial_t H + H^2)$.

А именно, имеем

$$\frac{1}{36}\Big(R^2 - 6E\Big)\Big|_{flat-FRW} = (\partial_t H)^2 . \qquad (14)$$

Ключевое свойство диссипативной функции (13) состоит в том, что она не различает вакуумы Минковского и де Ситтера: для обоих вакуумов диссипация равна нулю. Конкретное феноменологическое слагаемое (13) применимо, если вакуум де Ситтера устойчив. Вопрос устойчивости вакуума де Ситтера остается нерешенным. Возможная неустойчивость вакуума де Ситтера обсуждалась в работах [2–4,37]. Альтернативная точка зрения на судьбу вакуума де Ситтера изложена в работе [5]. В настоящей работе мы собираемся выяснить, приводит ли диссипативное слагаемое (13) динамическим образом к асимптотике Минковского. В сопутствующей работе [33] была рассмотрена диссипативная функция

$$S \propto |H|\, R^2,$$

которая отлична от нуля в вакууме де Ситтера и, тем самым, различает вакуумы Минковского и де Ситтера.

3. МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как и в работе [16], здесь мы используем безразмерные переменные f, k, h и τ:

$$q \equiv f\, q_0\,, \qquad (15a)$$
$$G^{-1}(q) \equiv k(f)\,|q_0|\,, \qquad (15b)$$
$$H \equiv h/\sqrt{\chi_0\,|q_0|}\,, \qquad (15c)$$
$$t \equiv \tau\,\sqrt{\chi_0\,|q_0|}\,, \qquad (15d)$$

со следующим анзацем, основанным на (7):

$$k(f) = \frac{8\pi}{3}\,|f| = \frac{8\pi}{3}\,f\,, \qquad (16)$$

в предположении, что f остается положительной величиной. Кроме того, точка и штрих будут обозначать производные по τ и f, соответственно.

В этих безразмерных переменных вакуумные уравнения, уравнения Фридмана и уравнения материи имеют следующий вид:

$$\ddot{h} + 4\,h\,\dot{h} = \dot{f}\,\epsilon'' - \widetilde{s}\,, \qquad (17a)$$
$$h\,\dot{f} + f\,h^2 = \widetilde{r}_V + r_M\,, \qquad (17b)$$
$$\dot{r}_M + 3\,h\,(1 + w_M)\,r_M = f\,\widetilde{s}\,, \qquad (17c)$$

с эффективной плотностью энергии вакуума

$$\widetilde{r}_V = \epsilon - f\,\epsilon' + f\,(\dot{h} + 2h^2) \qquad (18a)$$

и выбранными анзацами

$$\widetilde{s} = \gamma_f\,(\dot{f})^2 + \gamma_h\,(\dot{h})^2\,, \qquad (18b)$$
$$\epsilon = \frac{1}{2}\,\left(-f^2 + \frac{1}{3}\,f^4\right)\,, \qquad (18c)$$

где (18b) и (18c) соответствуют предыдущим анзацам (13) и (5a), соответственно. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) (17) можно также получить из уравнений разд. IV работы [16], использовав уравнение (4.1) из этой ссылки, соответствующее уравнению (10) настоящей работы, для исключения μ.

Теперь определим безразмерный эффективный химический потенциал (в размерных единицах $\mu_{eff} \equiv u_{eff}/\chi_0 q_0$),

$$u_{eff} \equiv \epsilon' - \dot{h} - 2h^2\,, \qquad (19)$$

и получим выражение

$$\widetilde{r}_V = \epsilon - u_{eff}\,f\,, \qquad (20)$$

которое напоминает результат для плоского пространства-времени без диссипации [15],

$$r_V(f) = \epsilon(f) - u\,f,$$

или в размерных переменных

$$\rho_V(q) = \epsilon(q) - \mu\,q.$$

Используя u_{eff} из (19), можно записать первое ОДУ (17a) в виде

$$\frac{du_{eff}}{d\tau} = \widetilde{s}\,, \qquad (21)$$

что учитывает релаксацию плотности энергии вакуума к равновесному значению. Действительно ОДУ (17a) можно также записать в виде

$$\frac{d\widetilde{r}_V}{d\tau} = -f\,\widetilde{s} + \dot{f}\,(\dot{h} + 2h^2)\,. \qquad (22)$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения (17) имеют точное решение с постоянными значениями функций f, h и r_M:

$$f(\tau) = \overline{f} = \text{const}\,, \tag{23a}$$

$$\Big(h(\tau)\Big)^2 = \left[\frac{d\epsilon}{df} - \frac{\epsilon}{f}\right]_{f=\overline{f}}\,, \tag{23b}$$

$$r_M(\tau) = 0\,. \tag{23c}$$

Такое решение де Ситтера не существует для значений $\overline{f}$, при которых правая часть уравнения (23b) отрицательна. В этом случае может существовать асимптотическое решение другого вида, как будет показано в следующем разделе.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Проведены численные исследования динамики модельной вселенной на основе обыкновенных дифференциальных уравнений (17) с диссипацией и без диссипации. В отсутствие диссипации вселенная в общем случае приближается к вакууму де Ситтера с постоянной Хаббла H, определяемой исходным химическим потенциалом μ, который играет роль константы интегрирования. Вакуум Минковского достигается в качестве конечного состояния путем подбора химического потенциала $\mu = \mu_0$. В частности, вакуум Минковского получается, если космическая катастрофа происходит уже в исходном равновесном состоянии или если она является локальным событием, которое не возмущает химический потенциал на пространственной бесконечности

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \mu(\mathbf{x}) = \mu_0.$$

На рис. 1 и 2 показана эволюция системы с одними и теми же начальными условиями, но, соответственно, без диссипации и с диссипацией. Без диссипации (рис. 1) вселенная стремится к вакууму де Ситтера с постоянной Хаббла H, определяемой постоянной интегрирования. Эффективный химический потенциал u_{eff} вначале равен -0.883133 и сохраняет это значение, далекое от равновесного значения вакуума Минковского, равного $-1/3$ (ср. с работой [16]).

При наличии диссипации и при определенных начальных условиях (рис. 2) мы по-прежнему приходим к вселенной де Ситтера. Эффективный химический потенциал u_{eff} изменяется от начальной величины $u_{eff}(1) = -0.883133$ до $u_{eff}(100) = -0.333499$, близкой к равновесному значению для вакуума Минковского, равному $-1/3$. Несколько изменяя начальные условия, получаем на рис. 3 похожее уменьшение эффективного химического потенциала u_{eff} от $u_{eff}(1) = -0.883133$ до $u_{eff}(98) = -0.333276$. Однако дальнейшая эволюция модельной вселенной сильно отличается: расширение продолжается вечно (рис. 2) или же расширение останавливается и вселенная начинает сжиматься (рис. 3).

В четырехмерном пространстве начальных условий

$$M_{in} = \{h(1),\, \dot{h}(1),\, f(1),\, r_M(1)\}$$

на самом деле существует сепаратриса, разделяющая области с асимптотическим поведением де Ситтера и без него. Для слагаемого (18b) с $\gamma_f = \gamma_h = 1$ сначала был рассмотрен срез $\{\dot{h}(1),\, r_M(1)\} = \{0,\, 0\}$ и найдена сепаратриса, разделяющая расширяющееся и схлопывающееся поведение в плоскости значений $h(1)$ и $f(1)$ (см. табл. 1). Для слегка отличных срезов $\{\dot{h}(1),\, r_M(1)\}$ сепаратриса несущественно смещается (см. подпись к табл. 1), из чего можно заключить, что она является трехмерным под-

Таблица 1. В зависимости от граничных условий обыкновенные дифференциальные уравнения (17) могут давать или не давать асимптотическое пространство-время де Ситтера. Модельные параметры $(w_M,\, \gamma_f,\, \gamma_h) = (1/3,\, 1,\, 1)$. Для среза $\{\dot{h}(1),\, r_M(1)\} = \{0,\, 0\}$ показаны результаты для значений $h(1)$ в диапазоне от 0.525 до 0.7 и для значений $f(1)$ в диапазоне от 0.24 до 0.49: «Y/N» обозначает ответ «Да/Нет» на вопрос о существовании асимптотического пространства-времени де Ситтера. Аналогичная схема «Y/N» получена для срезов с $\{\dot{h}(1), r_M(1)\} = \{-1/100,\, 0\}$ и $\{\dot{h}(1),\, r_M(1)\} = \{0,\, 1/50\}$. Это указывает на то, что сепаратриса является трехмерной, по-крайней мере, в рассматриваемых диапазонах

$f(1)$	$h(1)$					
	0.5250	0.5375	0.55	0.60	0.65	0.70
0.24	N	N	N	Y	Y	Y
0.29	N	N	N	Y	Y	Y
0.34	N	Y	Y	Y	Y	Y
0.39	Y	Y	Y	Y	Y	Y
0.44	Y	Y	Y	Y	Y	Y
0.49	Y	Y	Y	Y	Y	Y

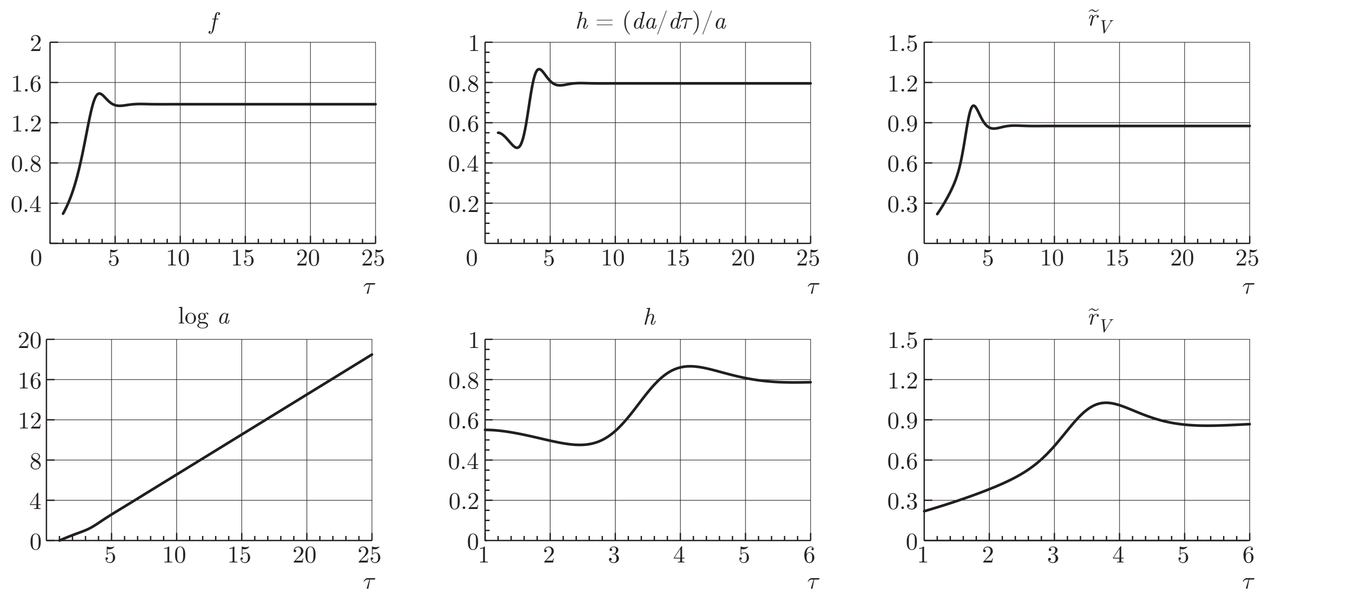

Рис. 1. Численное решение для эволюции вселенной после космической катастрофы в пренебрежении диссипацией. Модельные параметры обыкновенных дифференциальных уравнений (17) со вспомогательными функциями (18) $(w_M,\, \gamma_f,\, \gamma_h) = (1/3,\, 0,\, 0)$, граничные условия при $\tau = 1$ $\{a(1),\, h(1),\, \dot{h}(1),\, f(1),\, r_M(1)\} = \{1,\, 0.55,\, 0,\, 0.2953,\, 0\}$. С этими параметрами и граничными условиями плотность энергии материи точно обращается в нуль, $r_M(\tau) = 0$, при $\tau \geq 1$

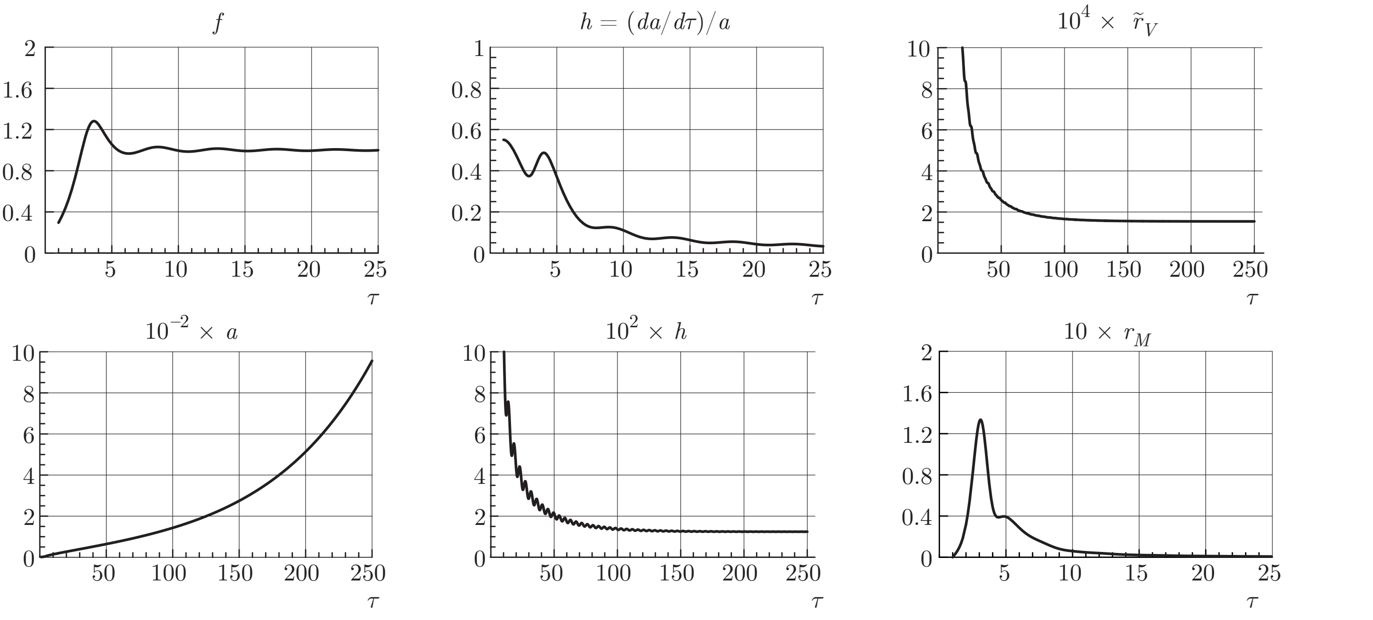

Рис. 2. Численное решение для эволюции вселенной после космической катастрофы с учетом диссипации, приводящей к обмену энергией между вакуумом и материей. Модельные параметры обыкновенных дифференциальных уравнений (17) $(w_M,\, \gamma_f,\, \gamma_h) = (1/3,\, 1,\, 1)$. Граничные условия при $\tau = 1$ такие же, как на рис. 1, $\{a(1),\, h(1),\, \dot{h}(1),\, f(1),\, r_M(1)\} = \{1,\, 0.55,\, 0,\, 0.2953,\, 0\}$

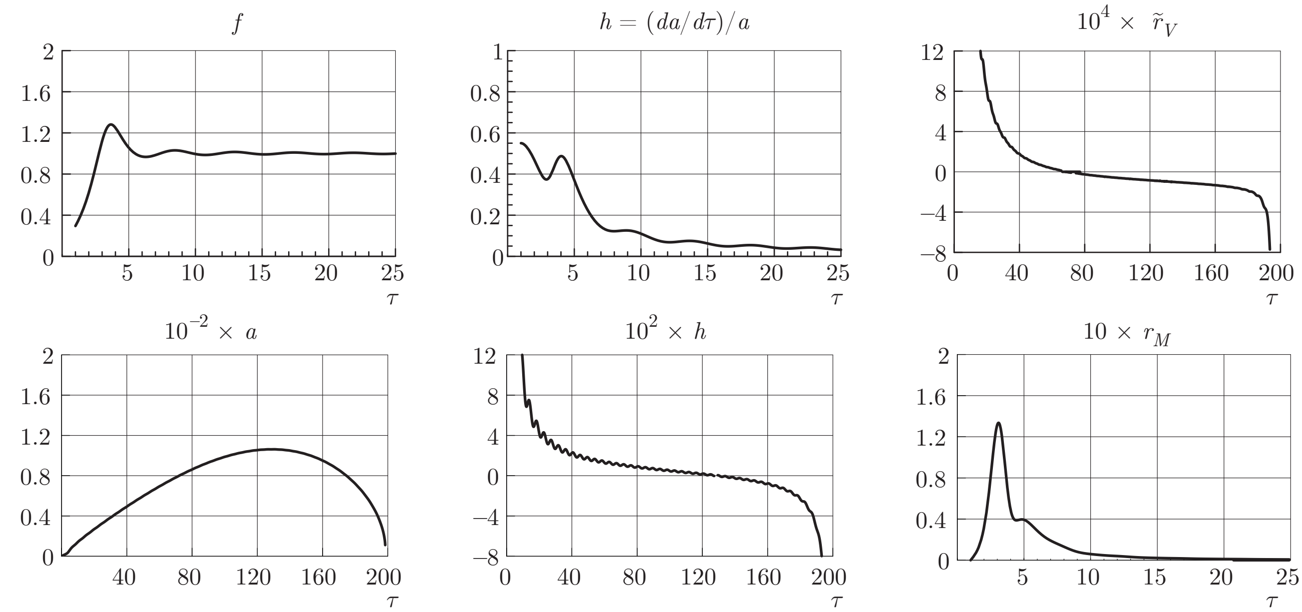

Рис. 3. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений (17) с учетом диссипации. Модельные параметры такие же, как на рис. 2, $(w_M,\, \gamma_f,\, \gamma_h) = (1/3,\, 1,\, 1)$, однако граничные условия при $\tau = 1$ другие, $\{a(1),\, h(1),\, \dot{h}(1),\, f(1),\, r_M(1)\} = \{1,\, 0.55,\, 0,\, 0.2952,\, 0\}$. Масштабный множитель $a(\tau)$ численного решения уменьшается до значения $O(10)$ при $\tau \approx 198$

многообразием в M_{in}, по крайней мере, в рассматриваемых диапазонах. Не ясно, распространяется ли эта сепаратриса на все четырехмерное пространство M_{in}. Кроме того, необходимо подробно изучить конечную сингулярность там, где она возникает (некоторые предварительные замечания изложены в Приложении).

Поведение решений вблизи сепаратрисы уже было показано на рис. 2 и 3, граничные условия $f(1)$ для которых слегка различаются. При подходе к сепаратрисе с де-ситтеровской стороны плотность энергии вакуума асимптотически приближается к нулю сверху и вселенная де Ситтера асимптотически может оказаться сколь угодно близко к пространству Минковского с нулевой плотностью энергии вакуума. Таким образом, вакуум Минковского получается тонкой настройкой начальных условий. Тем не менее, вакуум Минковского происходит не из точки в четырехмерном пространстве начальных условий M_{in}, но из трехмерного подмногообразия, а тонкая настройка является только одномерной (если она начинается достаточно близко к сепаратрисе с де-ситтеровской стороны, см. табл. 2).

Таблица 2. Численные решения обыкновенных дифференциальных уравнений (17) с граничными условиями, близкими к сепаратрисе из табл. 1. Модельные параметры $(w_M,\, \gamma_f,\, \gamma_h) = (1/3,\, 1,\, 1)$. Для среза $\{h(1),\, \dot{h}(1),\, r_M(1)\} = \{0.525,\, 0,\, 0\}$, начальное значение $f(1)$ подвергнуто тонкой настройке для получения вакуума Минковского с $h(\infty) = \widetilde{r}_V(\infty) = r_M(\infty) = 0$. Похожие результаты получены для среза $\{h(1),\, \dot{h}(1),\, r_M(1)\} = \{0.55,\, 0,\, 0\}$, см. также рис. 2 и 3

$f(1)$	$h(200)$	$f(200)$	$\widetilde{r}_V(200)$	$r_M(200)$
0.352	–	–	–	–
0.353	0.0362	1.00131	0.00132	$5 \cdot 10^{-12}$
0.354	0.0510	1.00259	0.00260	$3 \cdot 10^{-14}$
0.355	0.0615	1.00376	0.00379	$5 \cdot 10^{-15}$
0.36	0.0952	1.00895	0.00915	0
0.37	0.136	1.0180	0.0188	0
0.38	0.164	1.0260	0.0277	0
0.39	0.187	1.0334	0.0363	0

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для изучения необратимой релаксации плотности энергии вакуума мы ввели в q-теорию необратимую релаксацию. Был использован общий феноменологический подход с введением функции диссипации, описывающей распад когерентного движения квантового вакуума в некогерентные степени свободы полей материи. Была выбрана функция диссипации, не различающая вакуум Минковского и вакуум де Ситтера, поскольку она равна нулю для обоих вакуумов. Этот подход подразумевает, что вселенная де Ситтера не является излучающей.

Таким образом, была использована простая модель глубокого квантового вакуума, описываемая одной динамической переменной q, которая выражается в виде 4-формы напряженности поля F. Даже при этом упрощении q-теория демонстрирует различные сценарии поведения вселенной в зависимости от параметров системы и начальных условий, включая релаксацию к вакууму де Ситтера или коллапс к конечной сингулярности. Последний тип поведения может соответствовать сценарию, по которому вселенная циклически проходит через конечное или бесконечное число Больших Взрывов, за каждым из которых следует расширение и сжатие. В отличие от сценария, обсуждаемого в работе [38], в данном случае плотность энергии вакуума будет уменьшаться после каждого цикла за счет диссипации.

Аттрактор Минковского не был найден, однако все же возможно, что он существует в некоторой области параметров в случае многокомпонентных q-полей. Если это не так, то близость нашей вселенной к равновесию можно объяснить в рамках q-теории только в предположении, что вакуум де Ситтера является излучающим. Для случая ненулевой функции диссипации во вселенной де Ситтера релаксация к вакууму Минковского была рассмотрена в сопутствующей работе [33].

Работа М. С. поддержана Финской академией (проект № 284594). Работа Г. Е. В. поддержана Европейским исследовательским советом в рамках программы исследований и инноваций Европейского Союза Horizon 2020 (Соглашение по гранту № 694248).

ПРИЛОЖЕНИЕ

В Приложении более подробно рассмотрена конечная сингулярность, найденная численно в разд. 4. В приближении постоянной $f(\tau)$ можно получить аналитическое решение вблизи сингулярности.

Уравнение (17a) дает

$$f = \overline{f} = \text{const}\,, \tag{A.1a}$$

$$\ddot{h} + 4\,h\,\dot{h} = -\gamma_h\,(\dot{h})^2\,. \tag{A.1b}$$

Теперь возьмем производную по времени от (17b) при $f = \overline{f}$ и, используя уравнения (A.1b) и (17c), получим следующий результат:

$$r_M = -\frac{2}{3}\,\frac{1}{1+w_M}\,\overline{f}\,\dot{h}\,. \tag{A.1c}$$

Следовательно, необходимо решить единственное обыкновенное дифференциальное уравнение (A.1b) для $h(\tau)$, что затем даст нам $r_M(\tau)$ согласно (A.1c).

Для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (A.1b) требуются два граничных условия, например, два начальных условия на $h(\tau_{in})$ и $\dot{h}(\tau_{in})$. Однако эти два начальных условия не являются независимыми, а связаны с величиной $\overline{f}$:

$$\frac{1/3+w_M}{1+w_M}\,\overline{f}\,\dot{h}(\tau_{in}) + \overline{f}\,\Big(h(\tau_{in})\Big)^2 = \\ = \Big[f\,\epsilon' - \epsilon\Big]_{f=\overline{f}}\,. \tag{A.2}$$

Это уравнение связи соответствует исходному дифференциальному уравнению (17b) для $f = \overline{f}$, взятому при $\tau = \tau_{in}$, где $r_M(\tau_{in})$ исключается при помощи (A.1c).

Далее для простоты положим $\gamma_h = 1$. В уравнении (A.1b) сначала пренебрежем членом $4\,h\,\dot{h}$ в левой части, что будет обосновано *a posteriori*. Тогда получившееся дифференциальное уравнение для $\dot{h}(\tau)$ легко решается, причем одно последующее интегрирование дает решение для $h(\tau)$. Для интервала времени $\tau < \tau_{sing}$ это решение для $h(\tau)$ и соответствующее решение для $r_M(\tau)$ выражаются следующим образом:

$$h(\tau) = c_h + \ln(\tau_{sing} - \tau)\,, \tag{A.3a}$$

$$r_M(\tau) = \frac{2}{3}\,\frac{1}{1+w_M}\,\overline{f}\,\frac{1}{\tau_{sing}-\tau}\,, \tag{A.3b}$$

с константами c_h и τ_{sing}. Имеется похожее решение при $\tau > \tau_{sing}$. С учетом уравнения (A.3a) можно проверить, что член $\ddot{h}$ в левой части уравнения (A.1b) велик по сравнению со слагаемым $4\,h\,\dot{h}$, а именно, первый член имеет порядок

$$(\tau_{sing} - \tau)^{-2},$$

а второй — порядок

$$(\tau_{sing}-\tau)^{-1}\,\ln(\tau_{sing}-\tau).$$

Масштабный параметр $a(\tau)$, определяемый из $\dot{a}/a = h$, легко получается из (A.3a):

$$a(\tau) = C\times \times \exp\left[(c_h-1)\,\tau-(\tau_{sing}-\tau)\ln(\tau_{sing}-\tau)\right], \quad \text{(A.4)}$$

при $\tau<\tau_{sing}$ с произвольной константой $C>0$. Этот масштабный параметр $a(\tau)$ не обращается в нуль при стремлении τ к τ_{sing} снизу. Тем не менее, при $\tau\uparrow\tau_{sing}$ имеется физическая сингулярность, при которой, например, и скаляр Риччи R, и плотность энергии материи r_M расходятся как $(\tau_{sing}-\tau)^{-1}$.

Заметим, что имеется еще один тип решения обыкновенных дифференциальных уравнений (A.1), а именно решение де Ситтера:

$$f=\overline{f}=\text{const}\,, \quad \text{(A.5a)}$$
$$h=\overline{h}=\text{const}\,, \quad \text{(A.5b)}$$
$$\dot{r}_M=0\,, \quad \text{(A.5c)}$$

как обсуждалось в конце разд. 3. Оба типа решений выделяются граничным условием для $\dot{h}$ при соответствующих значениях $\overline{f}$: $\dot{h}(\tau_{in})=0$ дает решение де Ситтера (A.5) при $\tau>\tau_{in}$, а $\dot{h}(\tau_{in})<0$ дает асимптотическое сингулярное решение (A.3) при $\tau_{in}<\tau<\tau_{sing}$.

Развивая последнее утверждение, заметим, что связь (A.2) позволяет эвристически понять два типа решений, найденных численно в разд. 4. Если асимптотическое значение $\overline{f}$ таково, что правая часть уравнения (A.2) положительна, то вакуум де Ситтера возможен. Однако если асимптотическое значение $\overline{f}$ дает отрицательную правую часть (A.2), то вакуум де Ситтера с $\dot{h}=0$ строго запрещен и мы приходим к асимптотическому сингулярному решению.

В заключение, имеются два замечания по применимости асимптотического сингулярного решения (A.3). Во-первых, это решение дает лишь качественное описание численного решения, поскольку $f_{num}(\tau)$ оказывается не точно постоянной. Во-вторых, физический смысл сингулярного решения основан на применимости анзаца (13) для функции диссипации, что может оказаться неверным для условий финальной сингулярности.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
2. A. M. Polyakov, Nucl. Phys. B **797**, 199 (2008), arXiv:0709.2899.
3. A. M. Polyakov, Nucl. Phys. B **834**, 316 (2010), arXiv:0912.5503.
4. D. Krotov and A. M. Polyakov, Nucl. Phys. B **849**, 410 (2011), arXiv:1012.2107.
5. A. A. Starobinsky and J. Yokoyama, Phys. Rev. D **50**, 6357 (1994), arXiv:astro-ph/9407016.
6. V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England (2005).
7. A. F. Volkov and S. M. Kogan, JETP **38**, 1018 (1974).
8. R. A. Barankov, L. S. Levitov, and B. Z. Spivak, Phys. Rev. Lett. **93**, 160401 (2004).
9. E. A. Yuzbashyan, B. L. Altshuler, V. B. Kuznetsov, and V. Z. Enolskii, Phys. Rev. B **72**, 220503 (2005), arXiv:cond-mat/0505493.
10. E. A. Yuzbashyan, Phys. Rev. B **78**, 184507 (2008), arXiv:0807.3181.
11. V. Gurarie, Phys. Rev. Lett. **103**, 075301 (2009), arXiv:0905.4498.
12. E. A. Yuzbashyan, M. Dzero, V. Gurarie, and M. S. Foster, Phys. Rev. A **91**, 033628 (2015), arXiv: 1412.7165.
13. R. Matsunaga, Y. I. Hamada, K. Makise, Y. Uzawa, H. Terai, Z. Wang, and R. Shimano, Phys. Rev. Lett. **111**, 057002 (2013), arXiv:1305.0381.
14. R. Matsunaga, N. Tsuji, H. Fujita, A. Sugioka, K. Makise, Y. Uzawa, H. Terai, Z. Wang, H. Aoki, and R. Shimano, Science **345**, 1145 (2014).
15. F. R. Klinkhamer and G. E. Volovik, Phys. Rev. D **77**, 085015 (2008), arXiv:0711.3170.
16. F. R. Klinkhamer and G. E. Volovik, Phys. Rev. D **78**, 063528 (2008), arXiv:0806.2805.
17. F. R. Klinkhamer and G. E. Volovik, JETP Lett. **91**, 259 (2010), arXiv:0907.4887.
18. F. R. Klinkhamer and G. E. Volovik, JETP Lett. **103**, 627 (2016), arXiv:1604.06060.
19. M. J. Duff and P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. B **94**, 179 (1980).
20. A. Aurilia, H. Nicolai, and P. K. Townsend, Nucl. Phys. B **176**, 509 (1980).
21. S. W. Hawking, Phys. Lett. B **134**, 403 (1984).

22. M. Henneaux and C. Teitelboim, Phys. Lett. B **143**, 415 (1984).

23. M. J. Duff, Phys. Lett. B **226**, 36 (1989).

24. M. J. Duncan and L. G. Jensen, Nucl. Phys. B **336**, 100 (1990).

25. R. Bousso and J. Polchinski, JHEP **0006**, 006 (2000), arXiv:hep-th/0004134.

26. A. Aurilia and E. Spallucci, Phys. Rev. D **69**, 105004 (2004), arXiv:hep-th/0402096.

27. Z. C. Wu, Phys. Lett. B **659**, 891 (2008), arXiv:0709.3314.

28. Ya. B. Zel'dovich and A. A. Starobinsky, JETP Lett. **26**, 252 (1977).

29. N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England (1982).

30. L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky, Phys. Rev. D **56**, 3258 (1997).

31. A. Dobado and A. L. Maroto, Phys. Rev. D **60**, 104045 (1999), arXiv:gr-qc/9803076.

32. F. R. Klinkhamer, Mod. Phys. Lett. A **27**, 1250150 (2012), arXiv:1205.7072.

33. F. R. Klinkhamer and G. E. Volovik, Mod. Phys. Lett. A **31**, 1650160 (2016), arXiv:1601.00601.

34. V. Ts. Gurovich and A. A. Starobinsky, Sov. Phys. — JETP **50**, 844 (1979).

35. A. A. Starobinsky, Sov. Astron. Lett. **7**, 36 (1981).

36. A. De Felice, K. Karwan, and P. Wongjun, Phys. Rev. D **86**, 103526 (2012), arXiv:1209.5156.

37. E. T. Akhmedov, Int. J. Mod. Phys. D **23**, 1430001 (2014), arXiv:1309.2557.

38. P. J. Steinhardt and N. Turok, Science **296**, 1436 (2002), arXiv:hep-th/0111030.