

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЭЛЕЯ В ОБЛАЧНОЙ СРЕДЕ

Б. Я. Шмерлин^{a*}, М. В. Шмерлин^{b**}

^a ФГБУ «НПО «Тайфун»»
249038, Обнинск, Калужская обл., Россия

^b Геофизическая служба Российской академии наук
249035, Обнинск, Калужская обл., Россия

Поступила в редакцию 13 марта 2017 г.

Рассмотрена задача о конвективной неустойчивости слоя атмосферы, содержащего конечную по горизонтали область, заполненную облачной средой. Построены экспоненциально растущие со временем решения — уединенные облачные валы либо локализованные в пространстве системы облачных валов. В случае осевой симметрии их аналогами являются конвективные вихри как с восходящими, так и с нисходящими движениями на оси, а также облачные кластеры с кольцевыми конвективными структурами. В зависимости от анизотропии турбулентного обмена масштаб вихрей меняется от масштаба смерча до масштаба тропических циклонов. Решения с нисходящими движениями на оси могут соответствовать формированию «хобота» смерчей или «глаза бури» в тропических циклонах.

DOI: 10.7868/S0044451017090164

1. ВВЕДЕНИЕ

На спутниковых фотографиях в атмосфере Земли обнаруживаются упорядоченные конвективные структуры в форме периодических облачных гряд или конвективных облачных кластеров. Еще одним ярким примером самоорганизованной конвективной структуры являются тропические циклоны (ураганы) — крупномасштабные атмосферные вихри, формирующиеся над поверхностью океана в тропиках. Смерчи (торнадо) также представляют собой упорядоченные конвективные структуры, однако меньших горизонтальных масштабов. Традиционно считается, что указанные явления являются реализацией влажноконвективной неустойчивости атмосферы.

Земная атмосфера состоит из сухого воздуха и водяного пара. Если водяной пар не насыщен, движение атмосферы с большой точностью описывается обычной системой уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска [1, 2]. Ситуация принципиально меняется, когда водяной пар находится в состоянии насыщения. Из-за падения на-

сыщающей плотности с высотой, в поднимающихся объемах влажного воздуха происходит конденсация избытка водяного пара, сопровождающаяся выделением скрытой теплоты конденсации и образованием капель. При этом обычно рассматриваются два предельных случая. Для описания одного из них используются модели с мгновенным выпадением всей сконденсировавшейся влаги в виде осадков (precipitation convection, PC). Во втором случае используются модели конвекции без выпадения осадков (nonprecipitation convection, NPC), в которых сконденсировавшаяся влага в виде взвешенных облачных капель формирует облачную среду. В обоих случаях в исследованиях динамики влажной конвекции используется упрощенный подход, основанный на включении в уравнения тепловой конвекции объемного конденсационного источника тепла [5–17]. Этот источник на восходящей ветви циркуляции пропорционален вертикальной скорости. Для PC он обращается в нуль на нисходящей ветви циркуляции, что соответствует отсутствию поглощения тепла на испарение капель при опускании воздушной массы. Для NPC конденсационный источник тепла в облачной среде пропорционален вертикальной скорости независимо от ее знака в связи с поглощением тепла на испарение капель облачной среды при нисходящих движениях.

* E-mail: shmerlin@rpatyphoon.ru

** E-mail: mihail_47@mail.ru

Поскольку в общем случае границы областей восходящих движений заранее неизвестны, система уравнений становится нелинейной. Несмотря на значительное количество публикаций, анализ проблемы в связи с нелинейностью ограничивался проведением отдельных численных и полуаналитических исследований пространственно-периодических [5–12] и локализованных [13] структур, а также нахождением частных аналитических решений задачи для невязкой нетеплопроводной атмосферы [14–17]. С точностью до формулировок, к рассматриваемой проблематике следует отнести также задачи со скачкообразно меняющимся параметром статической устойчивости [18]. Приведенными ссылками фактически исчерпываются попытки аналитических и полуаналитических исследований проблемы даже в рамках упрощенной постановки. В работах [19–24] для РС мы предложили подход, позволивший исследовать проблему конвективной неустойчивости насыщенного водяным паром вязкого и теплопроводного вращающегося слоя атмосферы аналитическими методами. Было обнаружено принципиальное отличие такой конвекции от конвекции Рэлея. Оно связано со структурой возмущений, развивающихся при потере устойчивости. В частности, была определена область значений параметров задачи (чисел Рэлея и Тейлора), при которых наибольшей скоростью роста обладают возмущения типа урагана с восходящими движениями на оси вихря [21, 24]. При других значениях параметров наибольшей скоростью роста обладают нелинейные пространственно-периодические структуры.

В настоящей работе предложенный подход применен к анализу конвективной неустойчивости слоя атмосферы, в котором имеется конечная по горизонтали область, заполненная облачной средой (облачное пятно). Таким образом, он распространен на описание NPC. Из-за различия влажноадиабатического и сухоадиабатического градиентов температуры облачная среда менее устойчива, чем окружение [24]. Понятно, что если температурная стратификация в слое атмосферы является неустойчивой по отношению к облачной среде, но устойчивой по отношению к окружению, то при определенных условиях будут нарастать локализованные в окрестности облачного пятна конвективные структуры. Локализация также должна иметь место, если температурная стратификация в слое атмосферы является неустойчивой как по отношению к облачной среде, так и по отношению к окружению. В статье проведен анализ подобных ситуаций аналитическими методами. Построен новый класс обладающих наибольшей ско-

ростью роста локализованных в окрестности облачного пятна решений. Их пространственная структура, в частности знак вертикальной скорости на оси симметрии, определяется горизонтальным размером области, заполненной облачной средой. Соответствующая задача рассмотрена в квазистатическом приближении в простейшей двумерной постановке, когда нет зависимости от одной из горизонтальных координат (координаты y) и аналогами локализованных конвективных вихрей являются локализованные конвективные валы либо локализованные системы конвективных валов. Отдельно анализируются два случая: а) слой атмосферы за пределами облачного пятна насыщен водяным паром (облачное пятно во влажной атмосфере, задача NPC1) и б) не насыщен водяным паром (облачное пятно в сухой атмосфере, задача NPC2). Полученные результаты могут быть интересны читателям, занимающимся нелинейной динамикой и общими вопросами теории самоорганизации в диссипативных средах.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СХЕМА АНАЛИЗА

Рассматривается вращающийся слой вязкой теплопроводной атмосферы толщины h , заключенный между двумя твердыми горизонтальными границами, содержащий конечную по горизонтали область $-x^* \leq x \leq x^*$, заполненную облачной средой. На горизонтальных границах слоя поддерживаются постоянные температуры, так что распределение температуры в состоянии равновесия есть линейная функция вертикальной координаты. Требуется исследовать устойчивость равновесного состояния.

Исследование будем проводить в рамках системы уравнений, традиционно используемой при численном моделировании атмосферной конвекции [1, 2], в постановке, максимально приближенной к постановке классической задачи Рэлея [3, 4]. В соответствующей системе вместо молекулярных коэффициентов вязкости и теплопроводности используются их турбулентные аналоги. Кроме того, делается допущение об анизотропном характере турбулентного обмена, различном в горизонтальном и вертикальном направлениях. С учетом этого система уравнений для малых возмущений равновесного состояния с крайними условиями Рэлея (условиями скольжения) на горизонтальных границах имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + f\mathbf{k} \times \mathbf{u} &= -\nabla p + g\theta\mathbf{k} + \mu\mathbf{u}_{xx} + \nu\mathbf{u}_{zz}, \\ \theta_t + \Gamma w &= \mu\theta_{xx} + \nu\theta_{zz} + Q, \quad u_x + w_z = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$u_z = v_z = w = \theta = 0, \quad z = 0, h; \quad (2)$$

$$Q = -\alpha \frac{L}{c_p} w \frac{ds}{dz} = \alpha(\gamma_a - \gamma_m)w, \quad |x| \leq x^*; \quad (3)$$

$$\gamma_m = \gamma_a + \frac{L}{c_p} \frac{ds}{dz};$$

$$Q = \alpha(\gamma_a - \gamma_m)w\Theta(w), \quad |x| > x^*; \quad (4.1)$$

$$\Theta(w) = 1, \quad w > 0; \quad \Theta(w) = 0, \quad w < 0.$$

$$Q = 0, \quad |x| > x^*. \quad (4.2)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор скорости с компонентами u, v, w соответственно вдоль горизонтальных осей x, y и направленной вертикально вверх оси z ; $p = p'/\bar{\rho}$, $\theta = \alpha T'$, p', T' — отклонения давления и температуры от их равновесных распределений, α — коэффициент теплового расширения, $\bar{\rho}$ — постоянное среднее значение плотности; $\Gamma = \alpha(\gamma_a - \gamma)$ — параметр статической устойчивости, $\gamma_a = g/c_p$ — сухоадиабатический градиент температуры [25, 26], g — ускорение свободного падения, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, $\gamma = -d\bar{T}/dz$ — градиент температуры в равновесном состоянии; μ, ν — коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальном и вертикальном направлениях; f — параметр Кориолиса, \mathbf{k} — вертикальный орт; Q — интенсивность конденсационного источника тепла [5–17], L — удельная теплота конденсации, s — массовая доля насыщенного пара, γ_m — влажноадиабатический градиент температуры [25–27], $\Theta(w)$ — функция Хэвисайда. Соотношения (3) и (4.1) применяются в случае облачного пятна во влажной атмосфере (задача NPC1), (3) и (4.2) — в сухой (задача NPC2).

Основное отличие приведенной выше системы уравнений от соответствующих систем уравнений для РС, рассмотренных в работах [19–24], заключается в параметризации конденсационного источника тепла, что подробно пояснено во Введении. В работе [23] задача для РС рассматривалась в постановке, свободной от использования квазистатического приближения. Как и в работах [19–22, 24], в используемом далее квазистатическом приближении проекция уравнения для импульса на вертикальную ось заменяется уравнением гидростатики $p_z = g\theta$ [25–27]. Оно справедливо в условиях сильного анизотропного обмена $\mu \gg \nu$ [24]. Остальные разъяснения по поводу постановки можно найти в работе [24]. Подчеркнем, что система (1), (2) отличается от классической системы уравнений Рэлея в квазистатическом приближении только наличием дополнительного источника тепла конденсации Q .

Присутствие нелинейного источника составляет основную математическую специфику задачи.

Строго говоря, в рассматриваемой постановке исходное состояние не является состоянием равновесия, поскольку в связи с различием плотности облачной среды и окружения должны возникнуть течения, деформирующие это состояние. Фактически, предполагается, что характерное время развития таких течений много больше характерного времени развития конвекции вследствие конденсационного тепловыделения.

Далее будем придерживаться подхода, предложенного в работах [19–24], следуя работе [24]. На первом этапе находится функция Грина. Далее в формулу для вертикальной скорости, представляющую свертку источника тепла с соответствующей функцией Грина, подставляется конденсационный источник тепла и, поскольку он зависит только от вертикальной скорости, получается интегральное уравнение для определения вертикальной скорости. На следующем этапе рассматривается вспомогательная задача. Для нее из интегрального уравнения будет следовать система алгебраических уравнений, анализ которой позволит построить набор экспоненциально растущих решений и соответствующие им области неустойчивости в пространстве безразмерных параметров. После этого будут выяснены условия, при которых решения вспомогательной задачи являются решениями задач NPC1 и NPC2. В заключительных разделах приведены расчет вихревой (азимутальной) компоненты скорости для найденных решений, замечания о решении задач NPC1 и NPC2 в случае осевой симметрии, а также численные оценки результатов.

3. ФУНКЦИЯ ГРИНА И ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ БЕЗРАЗМЕРНОЙ АМПЛИТУДЫ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

Система уравнений и краевые условия допускают разделение переменных. Разыскиваются экспоненциально растущие решения вида

$$(u, v, p, w, \theta) = \left[(u(x), v(x), p(x)) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right), \right. \\ \left. (w(x), \theta(x)) \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \exp(\tau t). \quad (5)$$

Далее $u(x) \dots \theta(x)$ — пространственные амплитуды соответствующих величин. Введение безразмерных переменных позволяет определить безразмерные параметры задачи: число Рэлея

$R = g\alpha(\gamma_a - \gamma)h^4/(\pi^4\mu\nu)$; число, характеризующее интенсивность конденсационного тепловыделения $R_m = g\alpha(\gamma_a - \gamma_m)h^4/(\pi^4\mu\nu)$; число Тейлора $T = f^2h^4/(\pi^4\nu^2)$ (вместо числа Тейлора часто используется число Экмана $E = 1/\sqrt{T}$) и безразмерную скорость роста возмущений $\kappa = \tau h^2/\pi^2\nu$. Отметим, что определение числа Рэлея отличается от традиционного [3, 4] знаком и множителем π^4 в знаменателе. Переменные t, x, w, u, v приведены к безразмерному виду с использованием масштабов соответственно $d^2/\nu, \sqrt{\mu/\nu}d, gd^2/\mu, gd^2/\sqrt{\mu\nu}, \sqrt{\nu/\mu}(g/f)$, где $d = h/\pi$. Далее для безразмерных переменных оставим прежние обозначения.

Уравнение для безразмерной амплитуды вертикальной скорости имеет вид

$$w(x) = R_m \int_M G(x-x')w(x') dx',$$

$$G(\xi) = \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} (\lambda_1 \exp(-\lambda_1|\xi|) - \lambda_2 \exp(-\lambda_2|\xi|)). \quad (6)$$

Здесь $G(x-x')$ — функция Грина точечного по горизонтальной координате x экспоненциально растущего со временем источника тепла для безразмерной амплитуды вертикальной скорости задачи в двумерной постановке, когда нет зависимости от одной из горизонтальных координат (в работе [24] содержится опечатка — в выражении для функции Грина отсутствует множитель $1/2$). Интегрирование проводится по всем областям конденсационного тепловыделения M , которые в случае задачи NPC1 заранее неизвестны и должны быть определены в процессе решения. Для задачи NPC2 область интегрирования M определяется значением x^* : $|x'| \leq x^*$. Для собственных значений имеем

$$\lambda_{1,2}^2 = 1 + \kappa + R/2 \pm \sqrt{R^2/4 + R(1 + \kappa) - T}, \quad (7)$$

$$\lambda_3^2 = 1 + \kappa.$$

После того, как решение $w(x)$ в областях конденсационного тепловыделения найдено, решение за пределами областей находится соответствующим интегрированием в (6). Безразмерная амплитуда азимутальной компоненты скорости $v(x)$ находится с использованием соответствующей функции Грина $G_v(x-x')$, безразмерная амплитуда радиальной компоненты скорости $u(x)$ сразу находится из уравнения непрерывности (1):

$$v(x) = R_m \int_M G_v(x-x')w(x') dx', \quad (8)$$

$$G_v(\xi) = \frac{T \operatorname{sign}(\xi)}{2} \left(\sum_{j=1}^3 m_j^{-1} \exp(-\lambda_j|\xi|) \right),$$

$$m_j = \prod_{i,i \neq j} (\lambda_j^2 - \lambda_i^2),$$

$$\operatorname{sign}(\xi) = -(+1), \quad \xi < (\geq) 0;$$

$$u(x) = - \int_0^x w(x') dx'. \quad (9)$$

Наряду с параметрами $\lambda_{1,2}$ введем новые параметры λ_0, λ , однозначное соответствие между которыми устанавливается соотношениями

$$\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2)^2/R_m, \quad \lambda_0 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2/R_m, \quad (10)$$

$$\lambda_{1,2} = 0.5\sqrt{R_m} \left(\sqrt{\lambda_0} \pm \sqrt{\lambda} \right).$$

На плоскости параметров λ_0, λ , играющих важную роль в последующем рассмотрении, действительным значениям $\lambda_{1,2}$ отвечает область $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \leq 1$, в области $0 \leq \lambda_0 \leq 1, \lambda < 0$ значения $\lambda_{1,2}$ — комплексно сопряжены. В первом случае функция Грина G локализована в окрестности источника тепла $G(0) > 0$. На полуоси $x > 0$ она один раз меняет знак при переходе через точку

$$x_G = (R_m\lambda)^{-1/2} \ln \left[\left(\sqrt{\lambda_0} + \sqrt{\lambda} \right) / \left(\sqrt{\lambda_0} - \sqrt{\lambda} \right) \right]$$

и на бесконечности монотонно стремится к нулю. Во втором случае функция Грина G также экспоненциально убывает на бесконечности, имея, однако, осциллирующий характер и бесконечное число точек смены знака. Из выражения (7) следует, что при $\kappa = 0$ границей между областями с различным поведением функции Грина является кривая $T = R^2/4 + R$ на плоскости параметров T, R . В данной работе, за небольшим исключением, приведенным в разд. 6 для задачи NPC2, рассматривается область значений параметров, при которых функция Грина на бесконечности монотонно стремится к нулю. В противном случае в задаче NPC1 область конденсационного тепловыделения M перестает быть односвязной и аналитическое решение получить не удается.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Будем разыскивать экспоненциально растущие со временем локализованные решения, для которых

амплитуда вертикальной скорости $w(x)$ симметрична относительно начала координат $x = 0$, конечное число раз меняет знак в области локализации в окрестности $x = 0$ и отрицательна при всех $|x| \geq x_0$, где x_0 соответствует точке последней смены знака $w(x)$. Пусть для этих возмущений интенсивность тепловыделения $Q = \alpha(\gamma_a - \gamma_m)w$ при $|x| \leq x_0$ и $Q = 0$ при $|x| \geq x_0$. Очевидно, $w(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (6), в котором область интегрирования M определяется значением x_0 : $|x'| \leq x_0$. Само значение x_0 удовлетворяет условию $w(x_0) = 0$, заранее неизвестно и должно быть найдено в процессе решения задачи.

В области $x \in (-x_0, x_0)$ система (1) может быть сведена к одному линейному дифференциальному уравнению относительно $w(x)$ четвертого порядка. Поскольку решения разыскиваются в классе четных функций, необходимо искать их (с точностью до множителя) в форме

$$w(x) = \frac{\cos(p_1 x)}{\cos(p_1 x_0)} - \frac{\cos(p_2 x)}{\cos(p_2 x_0)}, \quad |x| \leq x_0 \quad (11)$$

с неопределенными действительными коэффициентами p_1, p_2 . Краевое условие $w(x_0) = 0$ при этом автоматически удовлетворяется. При подстановке (11) в (6) в правой части уравнения появятся слагаемые, пропорциональные $\cos(p_j x), \operatorname{ch}(\lambda_j x)$. Приравнивая коэффициенты при $\cos(p_j x)$ в левой и правой частях, получим уравнения для определения p_j :

$$p_j^4 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - R_m)p_j^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 = 0, \quad j = 1, 2. \quad (12)$$

Полагая для определенности $p_2 > p_1$, отсюда найдем

$$p_{1,2} = 0.5\sqrt{R_m} \left(\sqrt{1 - \lambda} \mp \sqrt{1 - \lambda_0} \right). \quad (13)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\operatorname{ch}(\lambda_j x)$ в (6), получим уравнения

$$\operatorname{tg}(p_1 x_0) = \sqrt{\lambda_0^{-1} - 1}, \quad \operatorname{tg}(p_2 x_0) = -\sqrt{\lambda_0^{-1} - 1}. \quad (14)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} p_1 x_0 &= \operatorname{arctg} \sqrt{\lambda_0^{-1} - 1} + \pi n, \\ p_2 x_0 &= -\operatorname{arctg} \sqrt{\lambda_0^{-1} - 1} + \pi m, \end{aligned} \quad (15)$$

где n, m могут принимать неотрицательные целочисленные значения. Поскольку $p_2 > p_1$, заведомо должно быть $m > n$. Будем называть решения, соответствующие различным значениям n, m , модами. Чтобы избежать путаницы, будем снабжать величины, относящиеся к различным модам, индексами —

номерами моды. Если какое-то утверждение касается всех мод, и это не вызывает недоразумения, индексы будем опускать. Учитывая (13) и складывая уравнения (15), получим

$$\begin{aligned} x_0^{n,m} &= \frac{\pi(n+m)}{\sqrt{R_m(1-\lambda)}} = (n+m)x_0^*, \\ x_0^* &= \frac{\pi}{\sqrt{R_m(1-\lambda)}}, \quad n \geq 0, \quad m > n. \end{aligned} \quad (16)$$

Исключение из (15) параметра x_0 дает уравнения

$$\begin{aligned} \lambda &= f^{n,m}(\lambda_0) = 1 - (1 - \lambda_0) \times \\ &\times \left(\frac{m-n}{m+n} - \frac{2}{\pi(m+n)} \arcsin \sqrt{1 - \lambda_0} \right)^{-2}, \end{aligned} \quad (17)$$

которые определяют функциональные зависимости, связывающие параметры λ_0, λ и обеспечивающие существование нетривиальных решений вспомогательной задачи. Для каждой моды на плоскости параметров λ_0, λ зависимость (17) задает кривую, в каждой точке которой существует решение, для которого x_0 определяется соотношением (16). В дальнейшем, если λ_0 и λ фигурируют в одном выражении, они связаны соотношением (17) для соответствующей моды.

Аналогичные решения как побочный результат получены в работах [19, 24]. Оказалось, что моды с номерами $n = 0, m > 2$, а также $n \geq 1, m$, не являлись решениями сформулированной в [19, 24] задачи и далее не рассматривались. Мы воспользуемся этими решениями, проанализируем их пространственную структуру, определим соответствующие области неустойчивости в пространстве параметров и выясним, при каких условиях они являются решениями исходных задач NPC1, NPC2.

4.1. Кривые $\lambda = f^{n,m}(\lambda_0)$ на плоскости λ_0, λ

На рис. 1 приведены такие кривые для нескольких первых мод в области $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \leq 1$, представляющей интерес. При $\lambda_0, \lambda \rightarrow 1$ из (17) имеем асимптотики $1 - \lambda = (1 - \lambda_0)[(m+n)/(m-n)]^2$. Для всех мод с фиксированным номером n правее остальных лежит кривая для моды $m = n + 1$, с ростом m соответствующие кривые смещаются влево, неограниченно приближаясь к прямой $\lambda = \lambda_0$ при $m \rightarrow \infty$. Для всех мод с номерами $n, m = n + 1$ левее остальных лежит кривая для моды $n = 0, m = 1$, с ростом n для таких мод соответствующие кривые смещаются вправо, неограниченно приближаясь к границе области

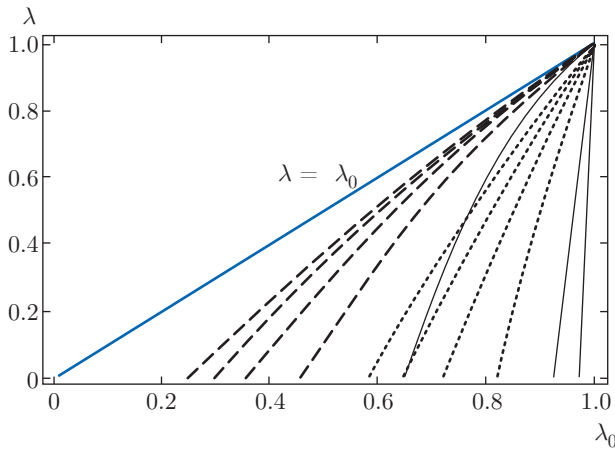


Рис. 1. Кривые $\lambda = f^{n,m}(\lambda_0)$ в области $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \leq 1$

$\lambda_0 = 1$ при $n \rightarrow \infty$. Сплошными кривыми изображены (слева направо) кривые для мод соответственно с номерами $n, m = n + 1, n = 0, 1, 2$. Штриховыми линиями изображены (справа налево) кривые для мод $n = 0, m = 2, 3, \dots, 5$, пунктиром — кривые соответственно для мод $n = 1, m = 3, 4, \dots, 6$.

Приведем значения $\lambda_0^{n,m}$ для точек пересечения соответствующих кривых с осью λ_0 , которые потребуются в дальнейшем. Полагая в (17) $\lambda = 0$, получим

$$\begin{aligned} \lambda_0^{0,1} &= 0.646; & \lambda_0^{1,2} &= 0.925; \\ \lambda_0^{n,n+1} &\approx 1 - (2n + 1)^{-2}, & n > 1; & \\ \lambda_0^{0,2} &= 0.458; & \lambda_0^{1,3} &= 0.816. \end{aligned} \quad (18)$$

4.2. Пространственная структура мод

Для найденных мод распределения (11) с учетом (15), (13) и (10) могут быть представлены для нечетных значений $(m - n)$ в виде

$$\begin{aligned} w_{n,m}(x) &= (-1)^n \cos \left[\frac{\pi}{2}(n + m) \left(\frac{x}{x_0^{n,m}} \right) \right] \times \\ &\times \cos \left[\left(\frac{\pi}{2}(m - n) - \arccos \sqrt{\lambda_0} \right) \frac{x}{x_0^{n,m}} \right], \\ &|x| \leq x_0^{n,m}, \end{aligned} \quad (19)$$

для четных значений $(m - n)$ в виде

$$\begin{aligned} w_{n,m}(x) &= (-1)^n \sin \left[\frac{\pi}{2}(n + m) \left(\frac{x}{x_0^{n,m}} \right) \right] \times \\ &\times \sin \left[\left(\frac{\pi}{2}(m - n) - \arccos \sqrt{\lambda_0} \right) \frac{x}{x_0^{n,m}} \right], \\ &|x| \leq x_0^{n,m}. \end{aligned} \quad (20)$$

В областях $|x| > x_0^{n,m}$ после соответствующего интегрирования в (6) имеем

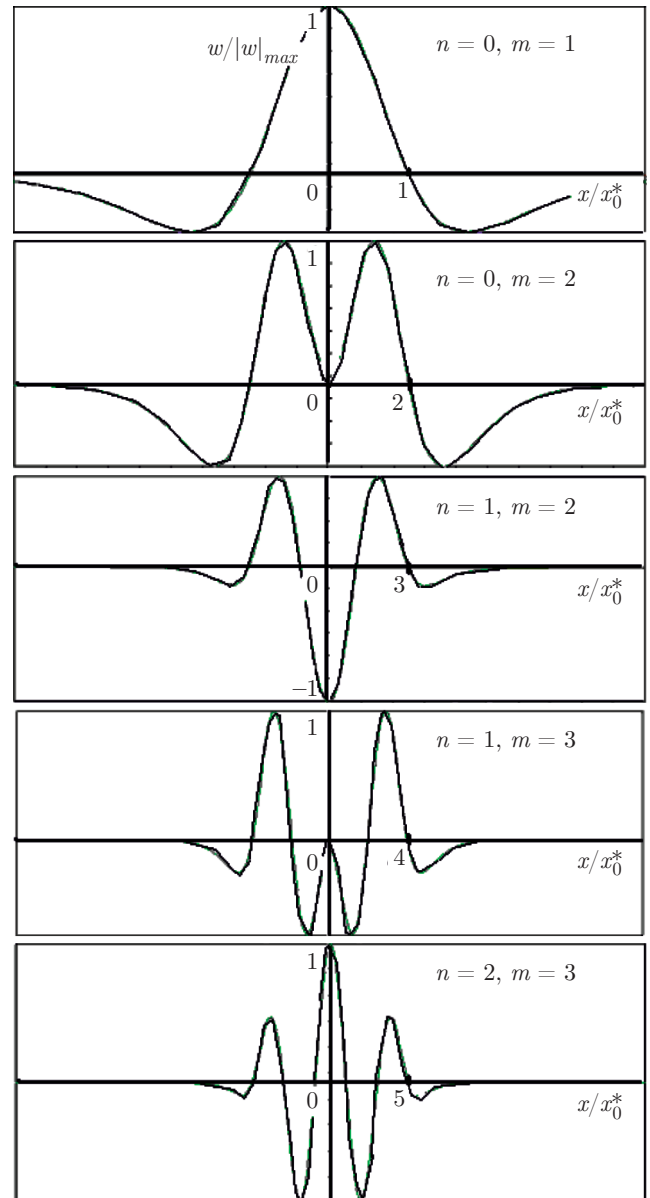


Рис. 2. Зависимости $w_{n,m}(x/x_0^*)/|w_{n,m}(x/x_0^*)|_{max}$ для первых мод при фиксированном для всех мод значении λ

$$\begin{aligned} w_{n,m}(x) &= -\sqrt{\frac{(1 - \lambda)(1 - \lambda_0)}{\lambda}} \times \\ &\times \operatorname{sh} \left[\frac{\pi}{2}(n + m) \sqrt{\frac{\lambda}{1 - \lambda}} \left(\frac{x}{x_0^{n,m}} - 1 \right) \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{\pi}{2}(n + m) \sqrt{\frac{\lambda_0}{1 - \lambda}} \left(\frac{x}{x_0^{n,m}} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

В качестве примера на рис. 2 приведены зависимости $w_{n,m}(x/x_0^*)/|w_{n,m}|_{max}$ для первых мод при фиксированном для всех мод значении λ .

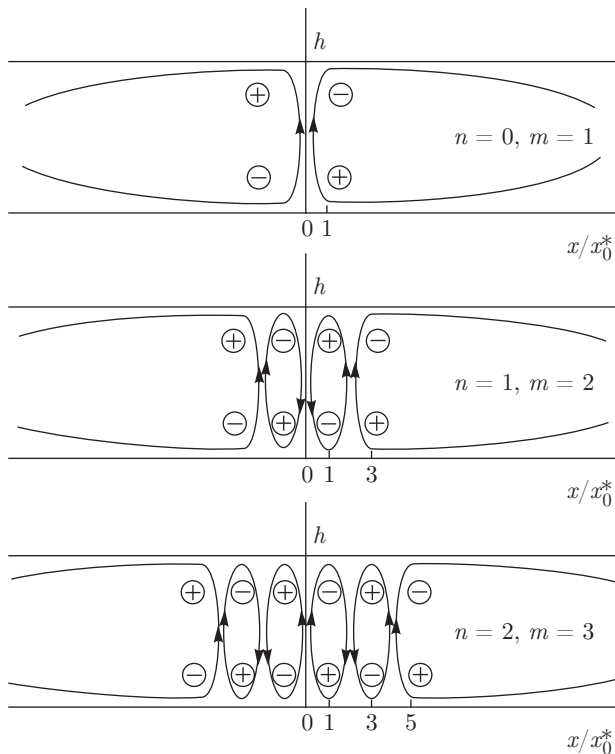


Рис. 3. Линии тока в вертикальной плоскости для мод с номерами $n, m = n + 1$ ($n = 0, 1, 2$). Кружками со знаком «плюс» отмечены области, в которых азимутальная компонента скорости направлена от читателя, со знаком «минус» — к читателю

Из выражения (9) для амплитуды радиальной скорости $u(x)$ следует, что экстремумы $u(x)$ совпадают с нулями $w(x)$, а нули $u(x)$ приблизительно соответствуют экстремумам $w(x)$. Таким образом, в вертикальном сечении соответствующие различным модам циркуляции распадаются на конвективные ячейки. На рис. 3 приведены картины линий тока в вертикальной плоскости для трех первых мод с номерами $n, m = n + 1$ ($n = 0, 1, 2$). Кружками со знаком «плюс» отмечены области, в которых азимутальная компонента скорости направлена от читателя, со знаком «минус» — к читателю. Соответствующий анализ пространственного распределения амплитуды азимутальной компоненты скорости $v(x)$ содержится в разд. 7.

4.3. Области неустойчивости различных мод на плоскости определяющих параметров

Осуществим переход с плоскости параметров λ_0, λ на плоскость нормированных исходных параметров $\tilde{T} = \sqrt{T}/R_m, \tilde{R} = R/R_m \equiv (\gamma_a - \gamma)/(\gamma_a - \gamma_m)$. Предварительно сделаем два важных замечания.

Выражая из соотношений (7) \sqrt{T} и R через λ_1^2, λ_2^2 и нормируя на R_m , с использованием соотношений (10) получим

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= 0.5(\lambda_0 + \lambda) - \sigma, & \tilde{T} &= 0.25\sqrt{(\lambda_0 - \lambda)^2 - 4\sigma^2}, \\ \sigma &= 2(1 + \kappa)/R_m. \end{aligned} \tag{21}$$

Видно, что при заданных значениях исходных параметров $\tilde{T}, \tilde{R}, R_m$ и фиксированном значении $0 \leq \lambda < 1$, величина κ растет с ростом λ_0 . Отсюда и из рис. 1 следует, что скорость роста мод с номерами $n, m = n + 1$ растет с ростом номера моды n ; при фиксированном n скорость роста мод уменьшается с ростом номера моды m (Замечание 1).

С другой стороны, из (21) можно получить

$$\begin{aligned} \lambda &= \tilde{R} - \sigma \left\{ \left[1 + 4\tilde{T}^2/\sigma^2 \right]^{1/2} - 1 \right\}, \\ \lambda_0 &= \tilde{R} + \sigma \left\{ \left[1 + 4\tilde{T}^2/\sigma^2 \right]^{1/2} + 1 \right\}. \end{aligned} \tag{22}$$

Из первого соотношения (22) следует, что при фиксированных значениях исходных параметров величина λ растет с ростом σ при $T \neq 0$ и не зависит от σ при $T = 0$. С учетом Замечания 1 это означает, что в (16) при $T \neq 0$ величины $x_0^{*n, n+1}$ и $x_0^{*n, n+2}$ растут с ростом n ; при фиксированном n величина $x_0^{*n, m}$ уменьшается с ростом m . При $T = 0$ величина x_0^* не зависит от номеров мод (Замечание 2).

Соотношения (21) дают для каждой моды параметрическое (с параметром λ) представление кривой $\sigma = \text{const}$ на плоскости \tilde{T}, \tilde{R} . При фиксированном значении σ для построения кривой нужно использовать лишь часть зависимости $\lambda = f^{n, m}(\lambda_0)$, удовлетворяющую условию $0 \leq \lambda \leq \lambda_{max}(\sigma)$, где $\lambda_{max}(\sigma)$ — корень уравнения

$$\lambda_0 - \lambda = 2\sigma. \tag{23}$$

Для каждой моды при различных значениях $\sigma \geq 0$ соответствующие кривые на плоскости \tilde{T}, \tilde{R} заполняют область $\Omega^{n, m}$, схематически изображенную на рис. 4. Началу координат $\tilde{T} = 0, \tilde{R} = 0$ соответствует $\lambda = 0, \sigma = \sigma^{n, m} = 0.5\lambda_0^{n, m}$, где $\lambda_0^{n, m}$ — корни уравнения $f^{n, m}(\lambda_0) = 0$ (см. (18)). Очевидно, областью неустойчивости, т.е. областью существования нарастающих решений, является часть области $\Omega^{n, m}$, ограниченная сверху кривой $\sigma = 2/R_m$ ($\kappa = 0$). Область неустойчивости моды с номерами n, m существует, если выполнено условие $\sigma \leq \sigma^{n, m}$ или $R_m \geq R_m^{n, m} = 2/\sigma^{n, m} = 4/\lambda_0^{n, m}$. Из (18), в частности, имеем

$$\begin{aligned} R_m^{0,1} &= 6.19; & R_m^{1,2} &= 4.32; \\ R_m^{n, n+1} &\rightarrow 4, & n &\rightarrow \infty; \\ R_m^{0,2} &= 8.73; & R_m^{1,3} &= 4.9. \end{aligned} \tag{24}$$

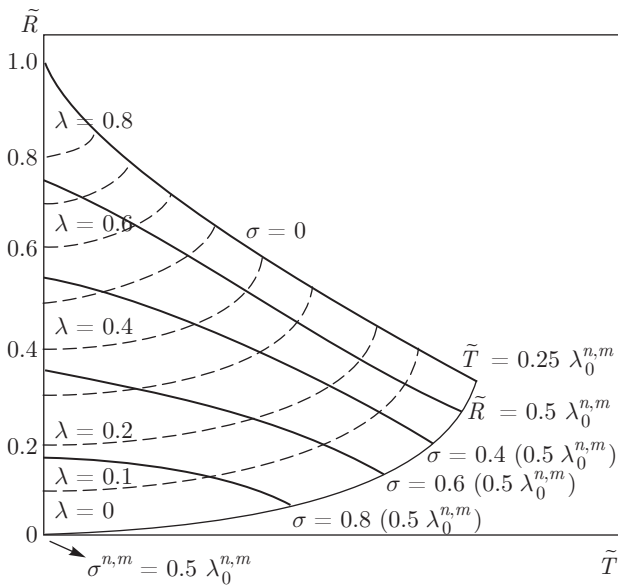


Рис. 4. Области $\Omega^{n,m}$ на плоскости параметров \tilde{T} , \tilde{R} . Сплошные линии — кривые $\sigma = \text{const}$, штриховые линии — кривые $\lambda = \text{const}$ (кроме нижней границы области — кривой $\lambda = 0$, которая изображена сплошной линией). Область неустойчивости — часть области $\Omega^{n,m}$, ограниченная сверху кривой $\sigma = 2/R_m$. Приведены координаты крайней правой точки области $\Omega^{n,m}$, а также максимальное значение $\sigma^{n,m}$, соответствующее началу координат; $\lambda_0^{n,m}$ — корни уравнения (18) $f^{n,m}(\lambda_0) = 0$

Область неустойчивости совпадает с областью $\Omega^{n,m}$ в пределе $R_m \rightarrow \infty$. Оценки, приведенные в разд. 9, показывают, что для атмосферы $R_m \gg 1$. При фиксированном значении R_m кривые $\sigma = \text{const}$ являются кривыми равных значений инкремента нарастания соответствующей моды $\kappa = \sigma R_m / 2 - 1$.

Штриховыми линиями на рис. 4 изображены кривые $\lambda = \text{const}$, уравнения этих кривых (нижняя правая четверть эллипсов) легко получить в явном виде, исключая σ из соотношений (21):

$$(4\tilde{T})^2 + \left\{ 2 \left[\tilde{R} - 0.5(\lambda_0 + \lambda) \right] \right\}^2 = (\lambda_0 - \lambda)^2. \quad (25)$$

Кривая $\lambda = 0$ проходит через начало координат и ограничивает область $\Omega^{n,m}$ снизу. Для точки пересечения кривых $\lambda = 0$ и $\sigma = 0$ из (21) получаем $\tilde{T}^{n,m} = 0.25\lambda_0^{n,m}$, $\tilde{R}^{n,m} = 0.5\lambda_0^{n,m}$. При фиксированном значении $R_m \geq R_m^{n,m}$ кривые $\lambda = \text{const}$ являются кривыми, вдоль которых распределение $w(x)$ для конкретной моды не меняется и определяется соотношениями (19), (20). В частности, не меняется величина $x_0^* = \pi / \sqrt{R_m(1-\lambda)}$, фигурирующая в выражении (16). В областях неустойчивости параметр λ достигает максимального значения $\lambda_{max}(\sigma)$

в верхней точке областей неустойчивости, которой соответствует $\sigma = 2/R_m$. Из (23) при $R_m \gg 1$ для мод с номерами n, m получим асимптотики

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &\approx 1 - (\pi m / R_m)^{2/3}, \quad n = 0; \\ \lambda_{max} &\approx 1 - [4 + (m - n)^2 / (mn)] R_m^{-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом, в пределах областей неустойчивости x_0^* меняется от минимального для всех мод значения $x_{0\ min}^* = \pi / \sqrt{R_m}$ на кривых $\lambda = 0$, до максимальных значений $x_{0\ max}^{*n,m}$ в верхних точках областей неустойчивости. При $R_m \gg 1$ имеем асимптотики

$$\begin{aligned} x_{0\ max}^{*0,m} &\approx \pi^{2/3} m^{-1/3} R_m^{-1/6}, \\ x_{0\ max}^{*n,m} &\approx \pi [4 + (m - n)^2 / (mn)]^{-1/2}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (27)$$

Соответствующие размерные значения получаются умножением на масштаб $\sqrt{\mu/\nu} h / \pi$. Инкремент нарастания достигает максимального значения

$$\kappa_{max}^{n,m} = R_m / R_m^{n,m} - 1 \quad (28)$$

в точке областей неустойчивости, соответствующей началу координат. Соответствующее размерное время τ_{min} , за которое возмущение нарастает в e раз, получается умножением величины $1/\kappa_{max}$ на масштаб времени $h^2 / (\pi^2 \nu)$. Численные оценки указанных величин приведены в разд. 9.

Таким образом, для каждой моды каждой точке области неустойчивости соответствуют вполне определенные значения λ и σ . Эти значения определяют пространственную структуру и скорость роста моды. Они могут быть найдены с использованием рисунков, аналогичных рис. 4. Альтернативный подход к их определению заключается в нахождении при заданных параметрах задачи \tilde{R}, \tilde{T} из (25) соответствующего значения λ , затем из первого соотношения (21) находится σ .

На рис. 5 приведено схематическое изображение взаимного расположения областей $\Omega^{n,m}$ для различных мод. Слева направо приведены границы областей для мод $n = 0, m = 2$; $n = 0, m = 1$; $n = 1, m = 3$; $n = 1, m = 2$. Внешняя кривая — предельное положение границы для мод $n, m = n + 1$ и $n, m = n + 2$ при $n \rightarrow \infty$ (из (21) и (25) имеем уравнения для верхней и нижней частей этой кривой $\tilde{R} + 2\tilde{T} = 1, 16\tilde{T}^2 + 4(0.5 - \tilde{R})^2 = 1$).

Из рис. 5 и определения \tilde{R} следует, что построенным локализованным модам соответствует влажнонеустойчивая, но сухоустойчивая стратификация $\gamma_m < \gamma \leq \gamma_a$.

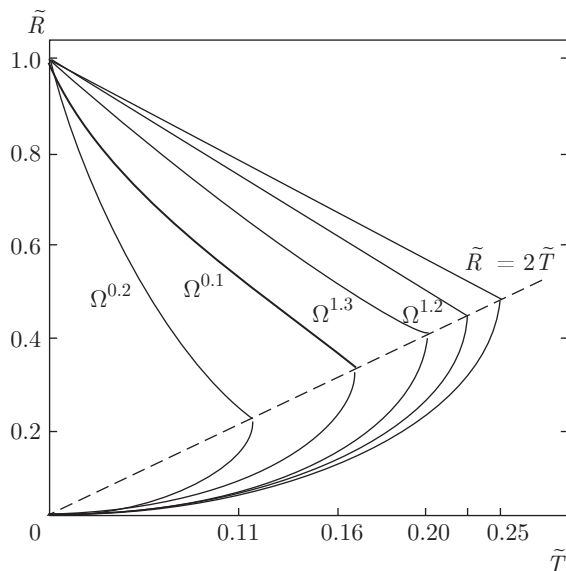


Рис. 5. Взаимное расположение областей $\Omega^{n,m}$ для различных мод. Внешняя кривая — предельное положение границ областей для мод $n, m = n + 1$ и $n, m = n + 2$ при $n \rightarrow \infty$

5. РЕШЕНИЯ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ НРС1

Очевидно, мода $n = 0, m = 1$ является решением исходной задачи, если горизонтальный размер облачной среды заключен в промежутке $0 \leq x^* \leq x_0^{*0,1}$, мода $n = 0, m = 2$ — в промежутке $0 \leq x^* \leq 2x_0^{*0,2}$. Действительно, для указанных значений x^* интеграл в уравнении (6) по всей области M конденсационного тепловыделения исходной задачи, в силу параметризации конденсационного источника тепла (3) и (4.1), совпадает с интегралом по области $|x'| \leq x_0$ вспомогательной задачи. По той же причине произвольная мода вспомогательной задачи является решением исходной задачи, если горизонтальный размер облачной среды заключен в промежутке между предпоследним и последним нулями функции $w_{n,m}(x)$. Для значений

$$m - n < 2 + 2n \left(1 - \pi^{-1} \arccos \sqrt{\lambda_0} \right) / \left(\pi^{-1} \arccos \sqrt{\lambda_0} \right), \quad n > 0 \quad (29)$$

предпоследний нуль функций $w_{n,m}(x)$ определяется первыми сомножителями в выражениях (19), (20). Отсюда следует, что мода с номерами n, m является решением исходной задачи при условии

$$(n + m - 2)x_0^{*n,m} \leq x^* \leq (n + m)x_0^{*n,m}. \quad (30)$$

Так, мода с номерами $n > 0, m = n + 1$ является решением исходной задачи и обладает наибольшей скоростью роста, если

$$(2n - 1)x_0^{*n,n+1} \leq x^* \leq (2n + 1)x_0^{*n,n+1}. \quad (31)$$

В соответствии с (30) и Замечаниями 1, 2, все другие моды либо не являются решением исходной задачи при значениях x^* из соответствующего отрезка, либо если и являются, то обладают меньшей скоростью роста.

В соответствии с Замечанием 2, $x_0^{*n,n+1}$ растет с ростом номера моды n , и отрезки (31) в области значений x^* для мод с различными n не перекрываются. По крайней мере, при достаточно слабом вращении модами, обладающими наибольшей скоростью роста в интервале значений

$$(2n + 1)x_0^{*n,n+1} < x^* < (2n + 1)x_0^{*n+1,n+2} \quad (32)$$

между соседними отрезками (31), являются моды с номерами $n, m = n + 2$ (Замечание 3). Эти моды являются решениями исходной задачи на отрезках

$$2nx_0^{*n,n+2} \leq x^* \leq (2n + 2)x_0^{*n,n+2}. \quad (33)$$

В интервале значений (32) они обладают наибольшей скоростью роста по тем же причинам, по которым мода $n, m = n + 1$ на отрезке (31). Пояснения по поводу требования малости \tilde{T} можно найти в следующем разд. 5.1.

Подведем итог данного раздела. Если параметры задачи \tilde{T}, \tilde{R} принадлежат области неустойчивости моды $n = 0, m = 2$ (см. рис. 5), при всех значениях x^* будет иметь место неустойчивость. Пространственная структура возмущения, обладающего наибольшей скоростью роста, будет определяться в зависимости от x^* в соответствии с неравенствами для x^* (31), (32) (при $n = 0$ левую часть двойного неравенства (31) следует заменить нулем). Если параметры задачи лежат за пределами области неустойчивости моды $n = 0, m = 2$, но в пределах области неустойчивости моды $n = 0, m = 1$, то при $0 \leq x^* \leq x_0^{*0,1}$ будет расти мода $n = 0, m = 1$, в интервале значений $x_0^{*0,1} < x^* < x_0^{*1,2}$ будет иметь место устойчивость, а при $x^* \geq x_0^{*1,2}$ вновь будет иметь место неустойчивость. Пространственная структура возмущения, обладающего наибольшей скоростью роста, по-прежнему будет определяться значением x^* в соответствии с выражениями (31), (32). И так далее. При помощи рис. 5 соответствующее общее правило может быть легко сформулировано.

Если в процессе развития конвекции реализуется определенная мода, начальный размер облачной среды x^* возрастает до значения x_0 , соответствующего этой моде, в силу конденсации пара с образованием капель при восходящих движениях в области $x^* < x \leq x_0$.

Подчеркнем, что результаты работ [19–22, 24] для локализованных решений являются частным случаем представленной теории при $x^* \rightarrow 0$.

5.1. Предельный случай отсутствия вращения $f = 0$

Основное отличие задачи без вращения от задачи с вращением заключается в отсутствии зависимости масштаба x_0^* от номеров мод при фиксированных значениях исходных параметров R, R_m (см. Замечание 2). Приведем вывод результатов (кратко без вывода сформулированных в [28, 29], представляющих самостоятельный интерес).

Вместо (21) имеем явные выражения:

$$\tilde{R} = \lambda, \quad 2\sigma = \lambda_0 - \lambda, \quad \sigma = 2(1 + \kappa)/R_m. \quad (34)$$

Для каждой моды имеется критическое значение числа Рэлея $R_{cr}(R_m)$, которому соответствует инкремент нарастания $\kappa = 0$ ($\sigma = 2/R_m$). Оно достигается в верхней точке области неустойчивости соответствующей моды задачи с вращением, для которой из первого уравнения (34) имеем $\tilde{R}_{max} \equiv R_{cr}/R_m = \lambda_{max}$. Здесь $\lambda_{max}(R_m)$ — корень второго уравнения (34), в котором необходимо положить $\sigma = 2/R_m$. При $R_m \gg 1$ асимптотики $\lambda_{max}(R_m)$ даются соотношениями (26), откуда сразу получаем асимптотики $R_{cr}(R_m)$ для различных мод:

$$\begin{aligned} R_{cr}^{0,m} &\approx R_m - (\pi m)^{2/3} R_m^{1/3}, \quad n = 0; \\ R_{cr}^{n,m} &\approx R_m - [4 + (m - n)^2 / (mn)], \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Из второго уравнения (34), в котором кроме $\sigma = 2/R_m$ следует положить еще и $\lambda = 0$, находим значения $R_m^{n,m} = 4/\lambda_0^{n,m}$ (24), при которых λ_{max} и $R_{cr}^{n,m}(R_m)$ обращаются в нуль.

Схематические изображения кривых нейтральной устойчивости $R_{cr}(R_m)$ для мод $n, m = n + 1$ приведены на рис. 6 сплошными линиями, для мод $n, m = n + 2$ — штриховыми ($n = 0, 1$). Самая левая прямая $R_{cr} = R_m - 4$ — предельное положение кривых при $n \rightarrow \infty$. Области неустойчивости лежат ниже кривых.

Из (16) и первого соотношения (34) получаем

$$x_0^* = \pi/\sqrt{R_m - R}. \quad (36)$$

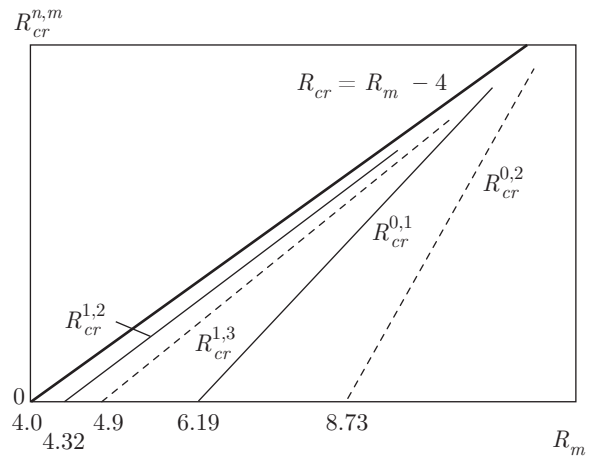


Рис. 6. Схематические изображения кривых нейтральной устойчивости $R_{cr}^{n,m}(R_m)$ для мод с номерами $n, m = n + 1$ — сплошные линии и для мод с номерами $n, m = n + 2$ — штриховые ($n = 0, 1$). Самая левая прямая $R_{cr} = R_m - 4$ — предельное положение кривых при $n \rightarrow \infty$. Области неустойчивости лежат ниже кривых

Как и в случае с вращением, в пределах областей неустойчивости x_0^* меняется от минимального для всех мод значения $x_{0\ min}^* = \pi/\sqrt{R_m}$ при $R = 0$ до максимальных значений $x_{0\ max}^{*n,m}$ на кривых нейтральной устойчивости. Соответствующие асимптотики при $R_m \gg 1$ приведены в (27). Инкремент нарастания для всех мод достигает максимального значения $\kappa_{max}^{n,m}$ при $R = 0$ и определяется в (28).

Сформулируем очевидные основные результаты в рассматриваемом предельном случае отсутствия вращения. При

$$0 \leq x^* < x_0^*$$

наибольшей скоростью роста обладает мода $n = 0, m = 1$; при

$$(2n - 1)x_0^* \leq x^* < (2n + 1)x_0^*, \quad n \geq 1 \quad (37)$$

наибольшей скоростью роста обладает мода $n, m = n + 1$. Моды $n, m = n + 2$ вообще не реализуются.

Если $0 \leq R \leq R_{cr}^{0,1}(R_m)$, при всех значениях x^* будет иметь место неустойчивость и пространственная структура возмущения, обладающего наибольшей скоростью роста, будет определяться значением x^* в соответствии с приведенным выше неравенством (37) для x^* (при $n = 0$ левую часть двойного неравенства (37) следует заменить нулем). Если же

$$R_{cr}^{n-1,n}(R_m) < R < R_{cr}^{n,n+1}(R_m), \quad n \geq 1,$$

то при $x^* < (2n - 1)x_0^*$ будет иметь место устойчивость, при $x^* \geq (2n - 1)x_0^*$ — неустойчивость,

и по-прежнему пространственная структура возмущения, обладающего наибольшей скоростью роста, будет определяться значением x^* в соответствии с (37).

Подчеркнем, что в рассматриваемом предельном случае полуинтервалы (37) для мод с различными $n, m = n + 1$ заполняют всю область значений x^* без пропусков и перекрытий. Точно так же заполняют всю область значений x^* отрезки (33) $2nx_0^* \leq x^* \leq (2n+2)x_0^*$, на которых моды $n, m = n + 2$ являются решениями исходной задачи, но обладают меньшей скоростью роста по сравнению с модами $n, m = n + 1$. Отметим, что середина последнего отрезка приходится как раз на конец полуинтервала (37).

Как отмечено ранее, при $\tilde{T} \neq 0$ появляются интервалы значений x^* (32), при которых моды $n, m = n + 1$ не являются решениями исходной задачи. Соответствующие интервалы появляются и для мод $n, m = n + 2$. Кроме того, отрезки (33), на которых моды $n, m = n + 2$ являются решениями исходной задачи, сдвигаются относительно интервалов (32). Понятно, что для любого n можно выбрать достаточно малые \tilde{T} , при которых отрезки (33) будут полностью включать в себя интервалы (32). Эти соображения позволили сформулировать Замечание 3, высказанное ранее, а также лежат в основе Замечания 4 из следующего разд. 6.

6. РЕШЕНИЯ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ НРС2

Остановимся вначале на анализе предельного случая отсутствия вращения. Очевидно, построенные в разд. 4 моды с номерами n, m являются точными решениями рассматриваемой задачи при значениях $x^* = (n + m)x_0^*$ (для таких решений $x_0 = x^*$, $w(x^*) = 0$). Как и ранее, для нечетных значений $n + m = 2k + 1$ наибольшей скоростью роста обладает мода $n = k, m = k + 1$, для четных значений $n + m = 2(k + 1)$ — мода $n = k, m = k + 2$, где $k \geq 0$. Поскольку на значение $w(x^*)$ никаких ограничений не накладываемся, решение задачи, обладающее наибольшей скоростью роста, непрерывным образом трансформируется по мере увеличения x^* . Рисунок 2 дает полное представление о том, как такая трансформация происходит, при условии, что параметры задачи принадлежат области неустойчивости моды $n = 0, m = 2$. Очевидно, верхний рисунок представляет решение, соответствующее значению $x^* = x_0^*$, второй сверху — значению $x^* = 2x_0^*$, третий сверху — значению $x^* = 3x_0^*$, и т. д. Если же, например, параметры задачи лежат за пределами области неустойчивости моды $n = 0, m = 2$, но в

пределах области неустойчивости моды $n = 0, m = 1$ (см. рис. 6), то в окрестности значения $x^* = 2x_0^*$ появляется область значений $x_0^* < x^* < 3x_0^*$, при которых будет иметь место устойчивость, и т. д. Как и в разд. 5, соответствующее общее правило может быть легко сформулировано. Подчеркнем, что, в отличие от разд. 5.1, при соответствующих значениях x^* моды $n, m = n + 2$ реализуются, если параметры задачи лежат в пределах их областей неустойчивости.

При наличии вращения в связи с зависимостью x_0^* от номера моды упомянутые выше значения x^* , которым соответствуют точные решения задачи, «расщепляются». Например, значение $x^* = 3x_0^*$ «расщепляется» на два: $x^* = 3x_0^{*1,2}$ и $x^* = 3x_0^{*0,3}$. При достаточно слабом вращении эти значения могут быть сколь угодно близки друг к другу, однако им соответствуют решения различной пространственной структуры и скорости роста. Очевидно, одно из них, а именно, мода $n = 0, m = 3$, не реализуется, а при значении $x^* = 3x_0^{*0,3}$ реализуется решение с пространственной структурой и скоростью роста, близкими к структуре и скорости роста моды $n = 1, m = 2$. Таким образом, по крайней мере, при достаточно слабом вращении при значениях $x^* = (2n + 1)x_0^{*n, n+1}$, $x^* = (2n + 2)x_0^{*n, n+2}$, где $n \geq 0$, реализуются моды соответственно с номерами $n, m = n + 1$ и $n, m = n + 2$, а трансформация их друг в друга при изменении x^* происходит непрерывным образом (Замечание 4). Это хорошо согласуется с Замечанием 3 из разд. 5. Все сказанное в предыдущем абзаце по поводу устойчивости остается в силе.

В задаче, рассматриваемой в настоящем разделе, найденные моды существуют и в области значений параметров $T > R^2/4 + R$, при которых функция Грина (6), (7) экспоненциально убывает на бесконечности, имея осциллирующий характер. В силу параметризации конденсационного источника тепла (3) и (4.2), осцилляции функции Грина не приводят к дополнительному тепловыделению в области $|x| > x^*$. Кривые (17) $\lambda = f^{n,m}(\lambda_0)$ продолжают в область $\lambda < 0$, соответствующим образом и области неустойчивости различных мод на плоскости \tilde{T}, \tilde{R} продолжают ниже кривых $\lambda = 0$: появляются вторые подобласти областей неустойчивости, соответствующие значениям $\lambda < 0$ (см. рис. 4 и рис. 5). При $\lambda < 0$ соотношения (19), (20) для $w_{n,m}(x)$ в пределах облачной среды не меняются, а в следующем за ними соотношении для $w_{n,m}(x)$ в области $|x| > x_0^{n,m}$ необходимо перейти от гиперболического синуса к тригонометрическому:

$$w_{n,m}(x) = -\sqrt{\frac{(1-\lambda)(1-\lambda_0)}{|\lambda|}} \times \\ \times \sin \left[\frac{\pi}{2}(n+m)\sqrt{\frac{|\lambda|}{1-\lambda}} \left(\frac{x}{x_0^{n,m}} - 1 \right) \right] \times \\ \times \exp \left[-\frac{\pi}{2}(n+m)\sqrt{\frac{\lambda_0}{1-\lambda}} \left(\frac{x}{x_0^{n,m}} - 1 \right) \right].$$

Моды по-прежнему экспоненциально убывают при $x \rightarrow \infty$ и в этом смысле остаются локализованными, имея, однако, осциллирующий характер. При $\lambda \rightarrow 0$ пространственный период таких осцилляций стремится к бесконечности и переход через границу $\lambda = 0$ между подобластями происходит непрерывным образом.

Из сказанного выше и определения \tilde{R} следует, что в задаче NPC2 локализованным модам соответствует влажнонеустойчивая стратификация $\gamma > \gamma_m$, однако она может быть как сухоустойчивой $\gamma \leq \gamma_a$, так и сухонеустойчивой $\gamma > \gamma_a$.

В задаче NPC2 в параметризации конденсационного источника тепла (3) и (4.2) отсутствует выделенное направление по вертикали. Это означает, что наряду с решениями $w(x)$ задача имеет решения противоположного знака ($-w(x)$), обладающие такой же скоростью роста.

7. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АЗИМУТАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОД

Установим пространственную структуру амплитуды азимутальной компоненты скорости $v_{n,m}(x)$ для мод с номерами $n, m = n + 1$ и $n, m = n + 2$. Подставляя соотношения (19), (20) в (8) и выполнив интегрирование, получим

$$\frac{v_{n,m}(\tilde{t})}{\sqrt{R_m} \tilde{T}^2} = \Phi_{n,m}(\lambda, \sigma, \tilde{t}) \equiv \\ \equiv \frac{[\pi(n+m)]^5}{(\sqrt{1-\lambda})^5} \sum_{j=1}^3 \frac{M_j^{-1} \exp(-a_j)}{(a_j^2 + b_1^2)(a_j^2 + b_2^2)} \times \\ \times \left\{ \pi(n+m) \left[\sqrt{\lambda_0} a_j [\pi(m-n) - 2\varphi] - \sqrt{1-\lambda_0}(a_j^2 + b_1 b_2) \right] \text{sh}(a_j \tilde{t}) + \right. \\ \left. + (-1)^n [b_1(a_j^2 + b_2^2) \sin(b_1 \tilde{t}) + b_2(a_j^2 + b_1^2) \sin(b_2 \tilde{t})] \exp(a_j) \right\}, \quad 0 \leq \tilde{t} \leq 1; \quad (38.1)$$

$$\frac{v_{n,m}(\tilde{t})}{\sqrt{R_m} \tilde{T}^2} = \Phi_{n,m}(\lambda, \sigma, \tilde{t}) = \\ = \frac{[\pi(n+m)]^6}{(\sqrt{1-\lambda})^5} \sum_{j=1}^3 \frac{M_j^{-1} \exp(-a_j \tilde{t})}{(a_j^2 + b_1^2)(a_j^2 + b_2^2)} \times \\ \times \left\{ \left[\sqrt{\lambda_0} a_j [\pi(m-n) - 2\varphi] - \sqrt{1-\lambda_0}(a_j^2 + b_1 b_2) \right] \text{sh}(a_j) + \right. \\ \left. + \sqrt{1-\lambda_0}(a_j^2 + b_1 b_2) \exp(a_j) \right\}, \quad \tilde{t} > 1. \quad (38.2)$$

Здесь введены обозначения $\tilde{t} = x/x_0^{n,m}$, $a_j = \lambda_j x_0^{n,m}$, откуда с учетом (10), (7), (21), а также (16), имеем

$$a_{1,2} = \pi(n+m) \left(\sqrt{\lambda_0} \pm \sqrt{\lambda} \right) / \left(2\sqrt{1-\lambda} \right),$$

$$a_3 = \pi(n+m) \sqrt{\sigma/2} / \sqrt{1-\lambda};$$

$$M_j = \prod_{i,i \neq j} (a_j^2 - a_i^2); \quad \varphi = \arccos \left(\sqrt{\lambda_0} \right);$$

$$b_1 = \pi n + \varphi; \quad b_2 = \pi m - \varphi.$$

В области неустойчивости каждой моды вдоль кривой $\lambda = \text{const}$ (см. разд. 4.3) σ меняется от значения $2/R_m$ в точке пересечения кривой $\lambda = \text{const}$ с правой границей области неустойчивости до значения $\sigma_{max}(\lambda) = 0.5(\lambda_0 - \lambda)$ в точке пересечения с левой границей (см. (21)). В этой точке $a_3 = \sqrt{a_1 a_2} \geq a_2$, и, таким образом, на левых границах областей неустойчивости асимптотики $v_{n,m}(\tilde{t})$ при $\tilde{t} \gg 1$ определяются величиной a_2 . На правых границах асимптотики определяются величиной a_3 при $\lambda \leq \lambda_a$ и величиной a_2 при $\lambda > \lambda_a$, где $\lambda_a < \lambda_{max}$ — корень уравнения $2/\sqrt{R_m} = \sqrt{\lambda_0} - \sqrt{\lambda}$ для соответствующей моды.

Как следует из (38.1), (38.2), для фиксированной моды пространственное распределение $v(\tilde{t})/|v(\tilde{t})|_{max}$ определяется двумя параметрами — λ и σ . На рис. 7 приведены зависимости $v(\tilde{t})/|v(\tilde{t})|_{max}$ при $\lambda = 0$, $\sigma = \sigma_{max}$ для мод $n, m = n + 1$, $n = 0, 1, 2$ ($\tilde{t} \geq 0$, $v(-\tilde{t}) = -v(\tilde{t})$). Соответствующие кривые для мод $n, m = n + 2$ внешне практически не отличаются от кривых для мод $n, m = n + 1$ для указанных значений n . Различия становятся заметны с увеличением n . На рис. 8 приведены соответствующие кривые для $n = 20$. Для всех мод положение экстремумов кривых несущественно меняется в зависимости от λ и σ , меняются асимптотики решений при $\tilde{t} \gg 1$, а также максимальные значения

$$|v_{n,m}(\tilde{t})|_{max} / (\sqrt{R_m} \tilde{T}^2) \equiv \Psi_{n,m}(\lambda, \sigma).$$

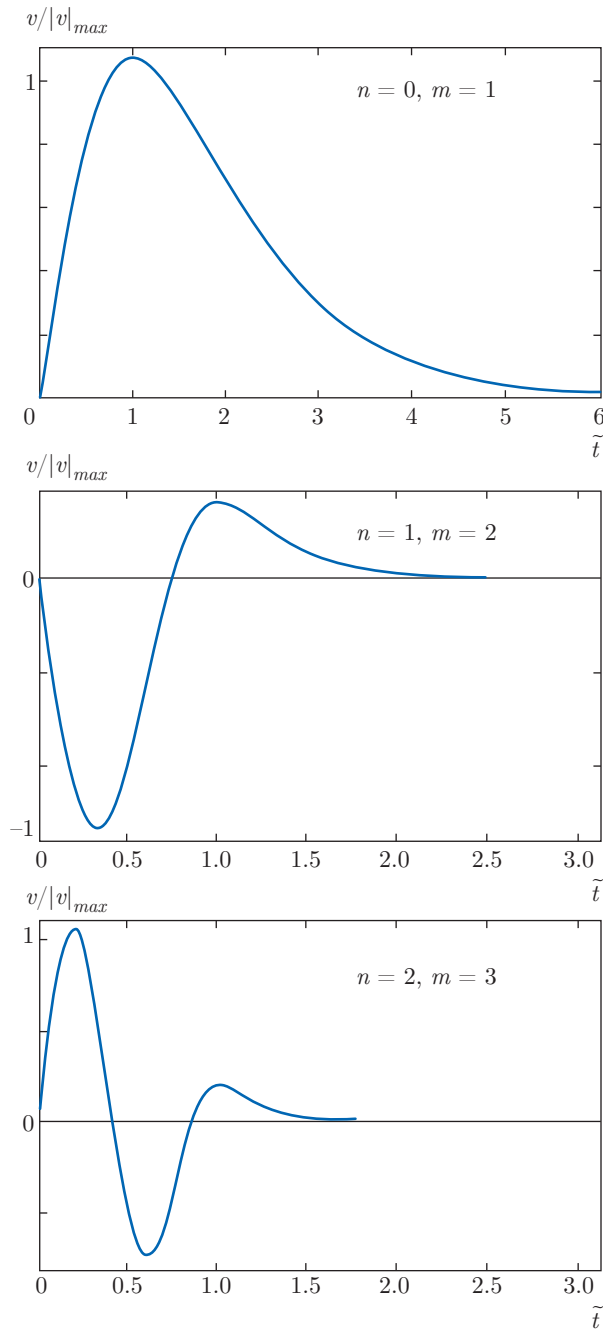


Рис. 7. Зависимости $v(\tilde{t})/|v(\tilde{t})|_{max}$ для первых мод, $\tilde{t} = x/x_0^{n,n+1}$, $n = 0, 1, 2$

Величины $\Psi_{n,m}(\lambda, \sigma)$ изменяются от минимальных значений при $\lambda = 0, \sigma = \sigma_{max}$ в левом нижнем углу области неустойчивости до максимальных значений в верхней точке области неустойчивости соответствующей моды. При движении вдоль кривых $\lambda = const$ слева направо значения $\Psi_{n,m}$ также возрастают. Ниже приведены области изменения величин $\Psi_{n,m}(\lambda, \sigma)$ для различных мод при значении

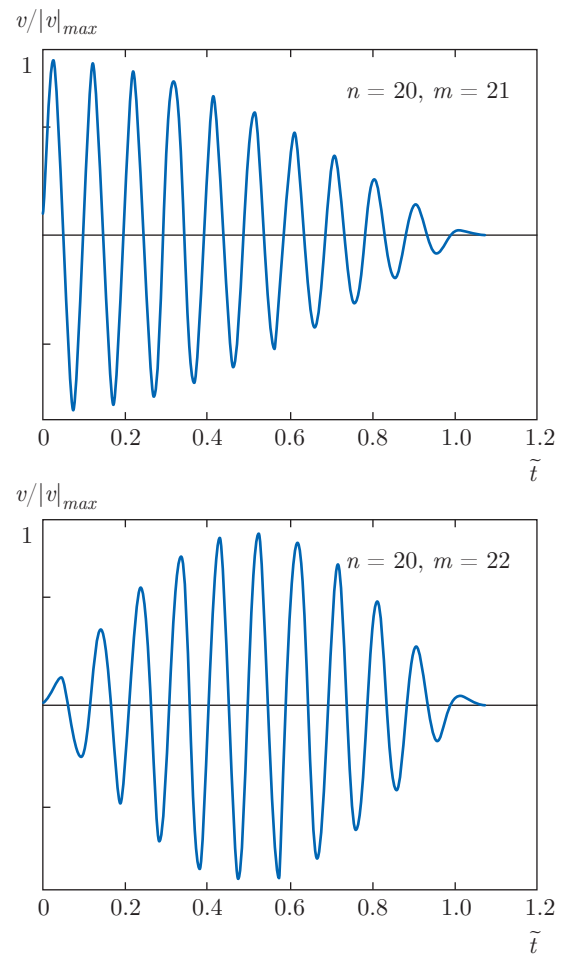


Рис. 8. Зависимости $v(\tilde{t})/|v(\tilde{t})|_{max}$ для мод с номерами $n = 20, m = 21$ и $n = 20, m = 22$; $\tilde{t} = x/x_0^{n,m}$

$R_m = 10^3$, слева в неравенствах стоят минимальные значения, справа — максимальные, в скобках справа — значения в крайних правых точках областей неустойчивости соответствующей моды:

$$\begin{aligned} 14 \leq \Psi_{0,1} \leq 1.8 \cdot 10^4(95), \\ 9.5 \leq \Psi_{1,2} \leq 3.2 \cdot 10^4(25), \\ 8 \leq \Psi_{2,3} \leq 3 \cdot 10^4(18); \end{aligned} \tag{39.1}$$

$$\begin{aligned} 750 \leq \Psi_{0,2} \leq 5 \cdot 10^5(5 \cdot 10^3), \\ 40 \leq \Psi_{1,3} \leq 1.2 \cdot 10^5(110), \\ 20 \leq \Psi_{2,4} \leq 6 \cdot 10^4(50). \end{aligned} \tag{39.2}$$

Значения $\Psi_{n,n+1}$ в указанных выше точках практически перестают меняться для мод с номерами $n \geq 2$, соответствующие значения $\Psi_{n,n+2} \rightarrow \Psi_{n,n+1}$ при $n \rightarrow \infty$, и практически перестают меняться уже для мод с номерами $n \geq 6$. При $R_m = 10^4$ максимальные значения $\Psi_{n,m}(\lambda, \sigma)$ увеличиваются более

чем на порядок. Поскольку σ и \tilde{T} однозначно связаны соотношением (21), функции $\Psi_{n,m}(\lambda, \sigma)$ можно считать функциями $\Psi_{n,m}(\lambda, \tilde{T})$, изменяющимися в указанных выше пределах при изменении \tilde{T} от нуля до максимального значения в точке пересечения кривой $\lambda = \text{const}$ с правой границей области неустойчивости соответствующей моды.

Решение задачи $w(x)$ определено с точностью до положительной константы, и в (19), (20) эта константа выбрана так, что $|w(x)|_{\max} = 1$ для мод $n, m = n + 1$ и $|w(x)|_{\max} \approx 1$ для мод $n, m = n + 2$. Тогда отношение безразмерной максимальной азимутальной скорости к безразмерной максимальной вертикальной скорости порядка $|v(\tilde{t})|_{\max}$ для всех рассматриваемых мод. Физический смысл имеет соответствующее отношение ψ размерных максимальных скоростей. С учетом масштабов азимутальной и вертикальной скоростей для указанного отношения имеем

$$\psi_{n,m} \approx \tilde{T} \sqrt{(\mu/\nu)/R_m} \Psi_{n,m}(\lambda, \tilde{T}). \quad (40)$$

Таким образом, при всех значениях параметров из области неустойчивости, $\psi_{0,2} \gg \psi_{n,m}$ для остальных мод.

8. О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ NPC1, NPC2 В СЛУЧАЕ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Приведенные решения описывают локализованные в пространстве системы конвективных облачных валов (в частности, уединенные валы). Они представляют самостоятельный интерес в качестве модели формирования состоящих из валов мезомасштабных облачных кластеров, непосредственно наблюдаемых на спутниковых снимках. С другой стороны, как показано в работах [21, 24], в случае осевой симметрии им должны соответствовать полные аналоги, представляющие собой осесимметричные конвективные вихри как с восходящими, так и с нисходящими движениями на оси симметрии. В зависимости от анизотропии турбулентного перемешивания (отношения μ/ν) их масштаб меняется от масштаба смерча до масштаба урагана. Под «глазом бури» урагана имеют в виду малую по сравнению с размером урагана круговую область нисходящих движений вблизи оси, свободную от облачного покрова на спутниковых снимках. Ее наличие характерно для супертайфунов. Мода $n = 0, m = 1$ может соответствовать урагану без «глаза бури» или смерчу без «хобота» с широкой областью восходящих движений на оси. Из результатов [21, 24] следует, что

в случае осевой симметрии мода $n = 0, m = 2$ (см. рис. 2) имеет малую по сравнению с масштабом вихря область нисходящих движений вблизи оси вихря. Таким образом, эта мода может претендовать на описание формирования урагана с «глазом бури» или смерча с «хоботом», опускающимся из материнского облака. Модам с номерами $n \geq 1$ соответствуют облачные кластеры с кольцевыми конвективными структурами. При этом в решениях для мод $n, m = n + 2$ в окрестности оси также могут появиться малые по сравнению с x_0^* области нисходящих (при четных значениях n) или восходящих (при нечетных значениях n) движений (см. рис. 2). В задаче NPC1 этот вопрос требует дополнительного рассмотрения. В задаче NPC2 такие области заведомо появляются при соответствующих значениях x^* . Их появление также может соответствовать формированию на оси кластеров смерчей с «хоботом», как опускающимся из материнского облака, так и поднимающимся к материнскому облаку. Из (39.1), (39.2), (40) при небольших значениях $n < 4$ следует чрезвычайно резкая немонотонная зависимость величин $\psi_{n,m}$ от номеров мод, т. е. фактически, от размера облачного пятна x^* . Эта зависимость носит ярко выраженный резонансный характер, и может стать основой классификации смерчей по их разрушительной силе. Для моды $n = 0, m = 2$ отношение максимальной азимутальной скорости к максимальной вертикальной превышает соответствующие отношения для всех других мод более чем на порядок: $\psi_{0,2} \gg \psi_{n,m}$. Этот важный результат, в частности, может служить объяснением гораздо большей разрушительной силы ураганов с «глазом бури» по сравнению с ураганами без «глаза бури».

Отметим, что для конвективных движений масштаба облака в сдвиговых фоновых течениях наряду с параметром Кориолиса f должна учитываться локальная угловая скорость вращения фонового течения, которая по модулю может значительно превышать параметр Кориолиса, а также иметь противоположный знак. В таком случае поменяется и знак азимутальной компоненты скорости вихря. Это согласуется, в частности, с тем, что часть смерчей вращается против часовой стрелки, а часть по часовой. При этом наиболее интенсивными являются смерчи, вращающиеся против часовой стрелки: для них завихренность фонового течения суммируется с планетарной.

В качестве иллюстрации на рис. 9 и рис. 10 приведены поля вертикальной скорости w , рассчитанные в рамках прогноза двух смерчеопасных ситуаций с использованием негидростатической модели

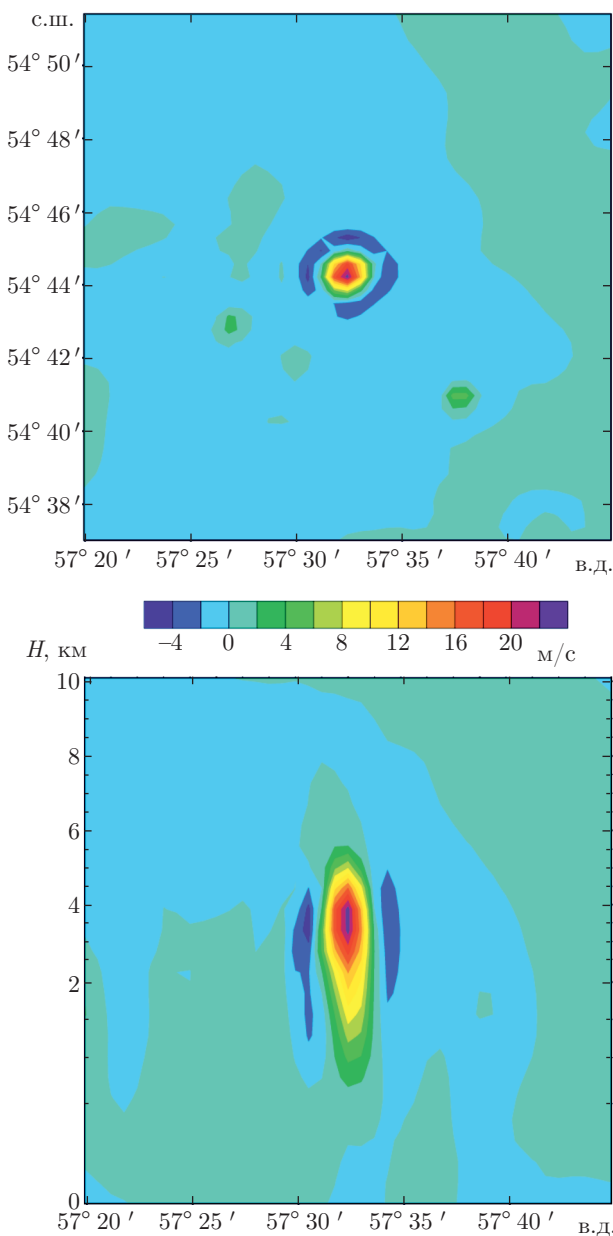


Рис. 9. Поле скорости w в горизонтальной (вверху) и вертикальной плоскостях для локализованного вихря в модели WRF

динамики атмосферы WRF (Weather Research and Forecasting Model). Она включает в себя полный учет нелинейных слагаемых, детальное описание пограничного слоя атмосферы, микрофизики облаков и т. д. Описание подхода и ссылки на модель WRF можно найти в работах [30, 31]. Мы признательны М. А. Новицкому за возможность представления указанных рисунков, полученных в ходе совместных исследований в развитие этих работ. Поля представлены в моменты времени, близкие к моменту реги-

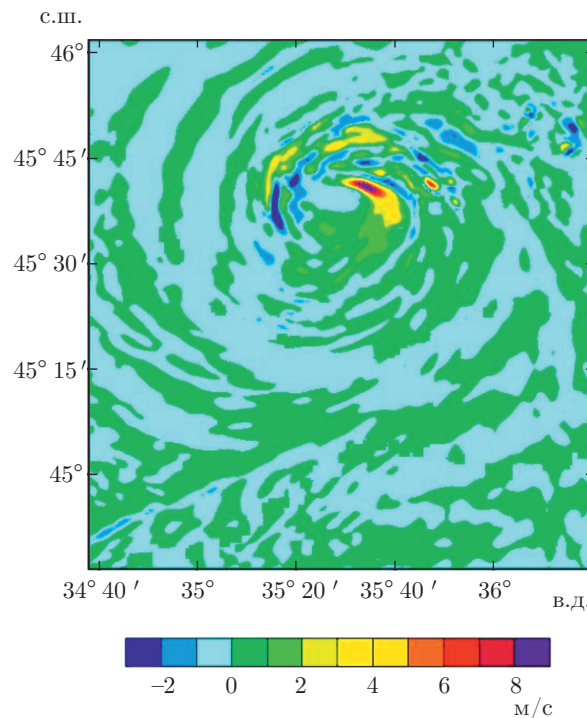


Рис. 10. Поле скорости w в горизонтальной плоскости для облачного кластера с кольцевыми конвективными структурами в модели WRF

страции соответствующего смерча, когда w достигает максимального в течение прогноза значения. Вверху на рис. 9 и на рис. 10, изображены поля w в горизонтальной плоскости на уровне, соответствующем максимальному значению w . Внизу на рис. 9 представлен разрез поля w в вертикальной плоскости, проведенной вдоль круга широты через центр вихря. Рисунок 9 может соответствовать осесимметричной моде $n = 0, m = 1$, рис. 10 — облачному кластеру с кольцевыми конвективными структурами и нисходящими движениями вблизи оси. Таким образом, основные структурные особенности аналитических решений сохраняются и в полных нелинейных моделях.

9. ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ

Приведем численные оценки полученных результатов при значениях входящих величин, характерных для атмосферы Земли [25, 26]: $\nu = 10 \text{ м}^2/\text{с}$, $g \approx 10 \text{ м}/\text{с}^2$, $\alpha \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, $f \approx 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $\gamma_a \approx 10^{-2} \text{ К}/\text{м}$, $\gamma_m \approx 6.4 \cdot 10^{-3} \text{ К}/\text{м}$. При описании движений масштаба урагана следует положить $h \approx 10^4 \text{ м}$, $\mu \approx 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$, тогда $R_m \approx 1.25 \cdot 10^4$, $\tilde{T} \approx 10^{-2}$, и при соответствующей

влажно-неустойчивой стратификации будут иметь место растущие локализованные моды. Из (27) имеем размерные значения $x_{0\ min}^* \approx 10$ км, $x_{0\ max}^* \approx 140$ км и из (40) $\psi_{n,m} \approx 10^{-2}\Psi_{n,m}$. Выбранное значение коэффициента горизонтальной вязкости μ соответствует движениям с масштабом $x_{0\ max}^*$ и существенно завышено для движений с масштабом $x_{0\ min}^*$. Рассмотрим мезомасштабные движения масштаба облачных кластеров, полагая $h \approx 10^3$ м, $\mu \approx 10^2$ м²/с. Имеем $R_m \approx 1.25 \cdot 10^3$, $\tilde{T} \approx 10^{-3}$, $x_{0\ min}^* \approx 100$ м, $x_{0\ max}^* \approx 700$ м, $\tau_{min} \approx 1$ мин (см. (28)) и $\psi_{n,m} \approx 10^{-4}\Psi_{n,m}$. С учетом приведенных в (39.1), (39.2) интервалов изменения величин $\Psi_{n,m}$, для первых мод в зависимости от λ могут выполняться как соотношения $\psi_{n,m} \ll 1$, так и соотношения $\psi_{n,m} \gg 1$. Последнее означает, что уже при величинах размерной вертикальной скорости $w_{max} \approx 1$ м/с, размерная азимутальная скорость может достигать ураганных значений как для движений масштаба тропического циклона, так и для движений масштаба облака. С другой стороны, для старших мод мезомасштабных движений с номерами $n \geq 6$ при всех значениях параметров из областей неустойчивости с учетом (39.1), (39.2), (40) получим $\psi_{n,m} < 3$.

Приведенные оценки согласуются с характеристиками ураганов, смерчей и облачных кластеров.

10. ВЫВОДЫ

Продолжено обобщение классической теории Рэлея конвективной неустойчивости слоя атмосферы на случай наличия фазовых переходов водяного пара. Ранее в предельном случае конвекции с мгновенным выпадением осадков (precipitation convection, PC) мы предложили подход, позволивший исследовать проблему конвективной неустойчивости насыщенного водяным паром слоя атмосферы аналитическими методами. В данной работе этот подход применен к анализу конвективной неустойчивости слоя атмосферы, в котором имеется конечная по горизонтали область, заполненная облачной средой, т. е. распространен на описание предельного случая конвекции без выпадения осадков (nonprecipitation convection, NPC). Рассмотрение проведено в простейшей двумерной постановке, когда нет зависимости от одной из горизонтальных координат. Построен новый класс обладающих наибольшей скоростью роста локализованных в окрестности облачного пятна решений. Их пространственная структура определяется горизонтальным размером области, запол-

ненной облачной средой. Построенные решения описывают локализованные в пространстве системы конвективных облачных валов (в частности, уединенные валы). При наличии вращения они обладают азимутальной компонентой скорости. Эти решения представляют самостоятельный интерес в качестве модели формирования состоящих из валов мезомасштабных облачных кластеров, непосредственно наблюдаемых на спутниковых снимках. С другой стороны, в случае осевой симметрии им соответствуют полные аналоги, представляющие собой осесимметричные конвективные вихри как с восходящими, так и с нисходящими движениями на оси симметрии. При значениях номера моды $n \geq 1$ их можно интерпретировать как мезомасштабные облачные кластеры с кольцевыми конвективными структурами. Моды с номерами $n = 0$, $m = 1$ (с восходящими движениями на оси симметрии) и $n = 0$, $m = 2$ (с узкой областью нисходящих движений на оси) представляют собой локализованные конвективные вихри с пространственной структурой, характерной для ураганов и смерчей. В зависимости от анизотропии турбулентного перемешивания (отношения μ/ν) их масштаб меняется от масштаба смерча до масштаба урагана. Решение с нисходящими движениями на оси может соответствовать формированию «хобота» смерча или «глаза бури» урагана. Показано, что для моды $n = 0$, $m = 2$ отношение максимальной азимутальной скорости к максимальной вертикальной скорости более чем на порядок превышает соответствующие отношения для всех остальных мод. Этот важный результат, в частности, может служить объяснением гораздо большей разрушительной силы ураганов с «глазом бури» по сравнению с ураганами без «глаза бури».

Полученные результаты демонстрируют принципиальное отличие пространственной структуры возмущений, обладающих наибольшей скоростью роста, в предельных случаях PC и NPC.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены только двумерные решения задачи. Вопрос о пространственной структуре и скорости роста облачных кластеров, состоящих из трехмерных конвективных ячеек, как и вопрос о структуре этих ячеек, остается открытым. По-видимому, в случае NPC возможно формирование как закрытых (с восходящими движениями в центре), так и открытых конвективных ячеек в зависимости от размеров облачного пятна.

Еще раз подчеркнем принципиальную разницу между физическими механизмами, определяющими пространственную структуру наиболее неустойчивых возмущений для NPC и PC. В обоих случаях она определяется структурой центральной области восходящих движений функции Грина для вертикальной скорости, которая задает масштаб x_0^* . В случае NPC в пределах облачного пятна соседние области восходящих и нисходящих движений масштаба x_0^* взаимно усиливают друг друга, и, таким образом, пространственная структура центральной области наиболее неустойчивых возмущений определяется соотношением между размером облачного пятна и масштабом x_0^* . Имеет место своеобразный резонанс между двумя указанными выше размерами. В случае PC вследствие отсутствия поглощения тепла на испарение капель облачной среды такого взаимного усиления не происходит и наиболее неустойчивым при тех же значениях параметров задачи является возмущение с масштабом области восходящих движений x_0^* .

Отметим, что подобная физико-математическая модель может быть использована для описания формирования полярных циклонов (polar low), для которых существенную роль играет выделение (поглощение) тепла кристаллизации капель при вертикальных движениях. Другим возможным применением может быть описание формирования вихрей в толще океана, насыщенной газом, растворимость которого зависит от давления и температуры. В этом случае восходящие движения приводят к появлению дополнительной плавучести, связанной с образованием газовых пузырьков. Реализация соответствующей неустойчивости может также являться причиной катастрофических газовых выбросов.

Авторы благодарят Е. А. Кузнецова за возможность представления некоторых полученных результатов на XXI и XXV Научных сессиях Совета РАН по нелинейной динамике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Гутман, *Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов*, Гидрометеоздат, Ленинград (1969).
2. П. Н. Белов, *Практические методы численного прогноза погоды*, Гидрометеоздат, Ленинград (1967).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
4. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
5. M. Yamasaki, J. Met. Soc. Jap. **50**, 465 (1972).
6. A. Delden, Beitr. Phys. Atmos. **58**, 202 (1985).
7. T. Asai and I. Nakasui, J. Met. Soc. Jap. **60**, 425 (1992).
8. T. Asai and I. Nakasui, J. Met. Soc. Jap. **55**, 151 (1977).
9. M. Yamasaki, J. Met. Soc. Jap. **52**, 365 (1974).
10. X. Y. Huanq, Tellus **42A**, 270 (1990).
11. A. Chlond, Beitr. Phys. Atmos. **61**, 312 (1988).
12. X. Huang and E. Kallen, Tellus **38A**, 381 (1986).
13. C. S. Bretherton, J. Atm. Sci. **44**, 1809 (1987).
14. S. M. Haque, Quart. J. Roy. Met. Soc. **78**, 394 (1958).
15. H. L. Kuo, Tellus **13**, 441 (1961).
16. D. K. Lilly, Mon. Wea. Rev. **88**, 1 (1960).
17. А. Е. Гилл, в сб. *Интенсивные атмосферные вихри*, под ред. Л. Бенгтссона, Дж. Лайтхилла, Мир, Москва (1985), с. 130.
18. В. П. Дымников, Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана **14**, 493 (1978).
19. Б. Я. Шмерлин, М. В. Калашник, Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана **25**, 421 (1989).
20. Б. Я. Шмерлин, М. В. Калашник, Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана **25**, 810 (1989).
21. М. В. Калашник, Б. Я. Шмерлин, Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана **26**, 787 (1990).
22. М. В. Калашник, Б. Я. Шмерлин, Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана **26**, 1034 (1990).
23. Б. Я. Шмерлин, М. В. Калашник, М. Б. Шмерлин, ЖЭТФ **142**, 1265 (2012).
24. Б. Я. Шмерлин, М. В. Калашник, УФН **183**, 497 (2013).
25. А. Е. Гилл, *Динамика атмосферы и океана*, Мир, Москва (1986).
26. Л. Т. Матвеев, *Физика атмосферы*, Гидрометеоздат, Ленинград (1984).
27. К. А. Emanuel, *Atmospheric Convection*, Oxford University Press, New York (1994).

28. B. Shmerlin, M. Kalashnik, and M. Shmerlin, *An Interdisciplinary J. of Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity* 4, 313 (2015).
29. Б. Я. Шмерлин, М. Б. Шмерлин, в сб. *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*, (Казань, 2015) под ред. А. М. Елизарова, Изд-во Казанского (Приволжского) федерального университета, Казань (2015), с. 4243.
30. М. А. Новицкий, Б. Я. Шмерлин, С. А. Петриченко и др., *Метеорология и гидрология* № 2, 13 (2015).
31. М. А. Новицкий, Ю. Б. Павлюков, Б. Я. Шмерлин и др., *Метеорология и гидрология* № 10, 30 (2016).