

# ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАКРОЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ В РЕЖИМЕ СИЛЬНОГО ЭКРАНИРОВАНИЯ

*А. В. Филиппов<sup>a\*</sup>, И. Н. Дербенев<sup>a,b</sup>, А. А. Паутов<sup>a,c</sup>, М. М. Родин<sup>a,c</sup>*

*<sup>a</sup> ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований  
108840, Троицк, Москва, Россия*

*<sup>b</sup> School of Chemistry, University of Nottingham, University Park  
NG9 2SP, Nottingham, United Kingdom*

*<sup>c</sup> Московский физико-технический институт (государственный университет)  
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 24 марта 2017 г.

Изучено электростатическое взаимодействие сферических частиц в равновесной плазме или электролите в режиме умеренного и сильного экранирования, когда размеры макрочастиц оказываются сравнимыми или много больше дебаевского радиуса экранирования. Развита приближенная теория электростатического взаимодействия макрочастиц в случае постоянных потенциалов их поверхности в режимах слабого и умеренного экранирования. В этой теории при заданном межчастичном расстоянии заряды макрочастиц определяются с использованием вакуумных емкостных коэффициентов, скорректированных с учетом эффектов плазменного экранирования. Сама сила взаимодействия вычисляется с полученными зарядами на основе решения задачи о взаимодействии в однородном диэлектрике (вакууме) и домножается на плазменный фактор. Также найдено приближенное решение задачи в режиме сильного экранирования. Сравнение с точным решением показало высокую точность предложенных методов расчета.

DOI: 10.7868/S0044451017090176

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При изучении динамических явлений в физике пылевой плазмы и электролитов важную роль играет электростатическое взаимодействие заряженных макрочастиц [1–5]. В работах [6, 7] была рассмотрена задача о взаимодействии двух сферических заряженных макрочастиц с учетом экранирования в рамках линеаризованной теории Дебая–Хюккеля. Было найдено общее решение задачи для двух случаев, когда в процессе изменения расстояния между макрочастицами остаются постоянными либо заряды, либо потенциалы поверхности макрочастиц. Было показано, что в случае постоянных зарядов диэлектрических макрочастиц сила их взаимодействия в плазме на малых расстояниях в режиме слабого экранирования, когда размеры макрочастиц много меньше дебаевского радиуса, практически совпадает с силой в вакууме (или однородном ди-

электрике). Это позволило предложить приближенную процедуру определения силы взаимодействия, в которой она сначала определялась для макрочастиц с теми же зарядами в вакууме (или однородном диэлектрике), а затем домножалась на плазменную поправку, учитывающую эффект экранирования. Для случая постоянных потенциалов поверхности макрочастиц не удалось найти такой простой процедуры, так как даже на малых расстояниях сила оказалась сильно зависящей от постоянной экранирования. Это связано с тем, что при изменении межчастичного расстояния происходит не только перераспределение поверхностного заряда, но и изменение самого заряда макрочастиц, и это изменение в плазме оказывается совсем другим, чем в вакууме или однородном диэлектрике. Поэтому настоящая работа посвящена исследованию взаимодействия заряженных макрочастиц в плазме в случае постоянных потенциалов поверхности макрочастиц, а также в режиме сильного экранирования, когда размеры макрочастиц оказываются сравнимыми или больше дебаевского радиуса.

\* E-mail: fav@triniti.ru

Благодаря своим уникальным свойствам сегодня наночастицы широко используются в различных технологических и медицинских приложениях [8–11]. В этих приложениях важную роль играют процессы агломерации и взаимодействия наночастиц с другими объектами. Для описания электростатического взаимодействия с учетом эффектов экранирования зачастую используются результаты, полученные на основе рассмотрения взаимодействия бесконечных заряженных параллельных плоскостей (см., например, [12]). Именно таким способом впервые потенциал взаимодействия при постоянных и равных потенциалах сферических частиц одного размера был получен в работе [13] для случая, когда радиусы частиц много больше радиуса экранирования. В работе [14] этот результат был обобщен на случай частиц разных размеров и разных потенциалов поверхности, а в работе [15] — на случай постоянных плотностей зарядов.

Отметим, что в работе [16] также рассматривалась задача о взаимодействии двух сферических макрочастиц в рамках линеаризованной теории Дебая–Хюккеля с применением метода, похожего на использованный в работах [6, 7]. В работе [16] рассматривались диэлектрические макрочастицы не с поверхностным зарядом, а с точечным зарядом в центре макрочастицы. В этой работе при перерасложении решения в виде суммы ряда по полиномам Лежандра в системе координат с полюсом в центре одной из частиц по полиномам Лежандра в системе координат с полюсом в центре другой частицы функции Макдональда представлялись в виде многочленов. Поэтому окончательное решение задачи имело более громоздкий вид, чем в [6, 7].

Настоящая работа построена следующим образом. В разд. 2 кратко описано общее решение задачи в случае постоянных зарядов (разд. 2.1) и в случае постоянных потенциалов поверхностей макрочастиц (разд. 2.2). Взаимодействие макрочастиц в режиме слабого и умеренного экранирования для случая постоянных зарядов кратко рассмотрено в разд. 3. В разд. 4 развивается приближенная теория взаимодействия в случае постоянных потенциалов макрочастиц в режимах слабого и умеренного экранирования. В разд. 4.1 рассмотрены методы расчета емкостных и потенциальных коэффициентов, а методика расчета силы изложена в разд. 4.2. Взаимодействие макрочастиц в условиях сильного экранирования рассмотрено в разд. 5: в разд. 5.1 для случая постоянных зарядов и в разд. 5.2 для случая постоянных потенциалов поверхности. В заключении изложены основные выводы работы.

## 2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИХ МАКРОЧАСТИЦ В РАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

В работах [6, 7] решалась задача о взаимодействии двух сферических заряженных макрочастиц с учетом экранирования в рамках линеаризованной теории Дебая–Хюккеля [17]. Было показано, что распределение потенциала в области вне макрочастиц, занятой плазмой или электролитом, описывается выражением

$$\phi(r_1, \mu_1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu_1) \times \left\{ A_n \frac{K_{n+1/2}(\tilde{r}_1)}{\sqrt{\tilde{r}_1}} + \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(\tilde{r}_1, \tilde{R}) B_m \right\}, \quad (1)$$

где  $r_1, \theta_1$  — координаты в сферической системе координат с полюсом в центре первой макрочастицы и осью, направленной к центру другой,  $P_n$  — полиномы Лежандра,  $K_{n+1/2}$  — модифицированные функции Бесселя третьего рода или функции Макдональда,  $\tilde{r}_1 = k_D r_1$ ,  $\mu_1 = \cos \theta_1$ ,  $k_D$  — постоянная экранирования (обратный дебаевский радиус),  $b_{nm}$  — коэффициенты, определенные в Приложении. Аналогичное (1) выражение для потенциала можно написать и в сферической системе координат с полюсом в центре второй макрочастицы. Далее рассмотрим случаи, когда при изменении межчастичного расстояния остаются постоянными либо заряды, либо потенциалы поверхностей макрочастиц. Системы уравнений для определения коэффициентов разложения потенциала  $A_n$  и  $B_n$  в этих случаях оказываются разными. Системы также оказываются разными в случае диэлектрических и проводящих макрочастиц. Отметим, что случай проводящих макрочастиц (в этом случае потенциал поверхности не зависит от угловых координат, но меняется при изменении межчастичного расстояния) и случай постоянных потенциалов макрочастиц различаются только уравнениями для  $n = 0$  (см. ниже). В обоих этих случаях мы не можем произвольно задавать распределение по поверхности свободного заряда, так как это распределение формируется либо токами в проводнике, либо токами зарядки в плазме, чтобы обеспечить независимость потенциала поверхности от угловых координат.

### 2.1. Постоянные заряды макрочастиц

Коэффициенты разложения потенциала  $A_n$  и  $B_n$  в случае постоянных зарядов диэлектрических макрочастиц являются решением системы [6]

$$\alpha_n(\tilde{a}_1, \varepsilon_1) A_n + \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{nm}(\tilde{a}_1, \tilde{R}, \varepsilon_1) B_m = \sigma_{1,n},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \beta_{nm}(\tilde{a}_2, \tilde{R}, \varepsilon_2) A_m + \alpha_n(\tilde{a}_2, \varepsilon_2) B_n = \sigma_{2,n},$$
(2)

где  $a_1, a_2$  — радиусы макрочастиц,  $R$  — расстояние между центрами макрочастиц,  $\tilde{a}_1 = k_D a_1$ ,  $\tilde{a}_2 = k_D a_2$ ,  $\tilde{R} = k_D R$ , коэффициенты-функции  $\alpha_n$  и  $\beta_{nm}$  определены соотношениями

$$\alpha_n(\tilde{a}_i, \varepsilon_i) = \varepsilon \frac{K_{n+3/2}(\tilde{a}_i)}{\tilde{a}_i^{1/2}} + n(\varepsilon_i - \varepsilon) \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_i)}{\tilde{a}_i^{3/2}},$$

$$\beta_{nm}(\tilde{a}_i, \tilde{R}, \varepsilon_i) = \varepsilon_i \frac{n}{\tilde{a}_i} b_{nm}(\tilde{a}_i, \tilde{R}) - \varepsilon \frac{\partial b_{nm}(\tilde{a}_i, \tilde{R})}{\partial \tilde{a}_i},$$
(3)

$i = 1, 2$ ;  $\sigma_{i,n}$  — коэффициенты разложения плотности поверхностного заряда по полиномам Лежандра:

$$\sigma_{i,n} = \frac{4\pi}{k_D} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(\mu_i) \sigma_i(\mu_i) d\mu_i.$$
(4)

В настоящей работе рассматривается аксиально-симметричная задача, соответственно, распределение поверхностного заряда полагается аксиально-симметричным относительно оси  $z$ . В случае равномерного распределения свободного заряда отличен от нуля только член с  $n = 0$ :

$$\sigma_{i,0} = k_D \frac{q_i}{\tilde{a}_i^2}.$$
(5)

При численном решении задачи рассматривается конечное число членов разложения: индекс  $m$  меняется до некоторого выбранного числа  $n_{max}$ , при этом  $\ell \leq n_{max} - m$  и  $k \leq n_{max} - m - \ell$ . Это позволяет учесть все члены, содержащиеся члены до  $R^{-(n_{max}+1)}$  включительно.

Сила взаимодействия определяется выражением [6, 7]

$$F_{1z} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \times [\Xi_{n-1} - (n-1)\Psi_{n-1}][\Xi_n + (n+1)\Psi_n],$$
(6)

где

$$\Xi_n = A_n \frac{nK_{n+1/2}(\tilde{a}_1) - \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1)}{\tilde{a}_1^{1/2}} + \sum_{m=0}^{\infty} B_m \tilde{a}_1 \frac{\partial b_{nm}(\tilde{a}_1, \tilde{R})}{\partial \tilde{a}_1},$$
(7)

$$\Psi_n = A_n \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{\tilde{a}_1^{1/2}} + \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(\tilde{a}_1, \tilde{R}) B_m.$$

В работе [6] показано, что при  $\tilde{R} \gg 1$  сила, действующая на  $i$ -ю ( $i = 1, 2$ ) макрочастицу, хорошо описывается выражением ( $j = 3 - i$ )

$$F_{a,ij} = -\frac{q_1 q_2 (1 + \tilde{R})}{\varepsilon R^2} \exp(-\tilde{R} + \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2) \times \frac{1}{1 + \tilde{a}_j} \frac{1}{1 + \tilde{a}_i + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_i + 2\varepsilon} \tilde{a}_i^2}.$$
(8)

Интегрируя выражение (8) по межчастичному расстоянию, находим потенциал взаимодействия:

$$U_{ij,a} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R} \exp(-\tilde{R} + \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2) \times \frac{1}{1 + \tilde{a}_j} \frac{1}{1 + \tilde{a}_i + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_i + 2\varepsilon} \tilde{a}_i^2}.$$
(9)

Это выражение при  $\varepsilon_i \rightarrow \infty$  переходит в так называемый DLVO-потенциал [18, 19].

## 2.2. Постоянные потенциалы поверхностей макрочастиц

В равновесной плазме и электролитах имеет место термодинамическое равновесие, поэтому будут постоянными, независящими от расстояния между макрочастицами (и равными плавающему потенциалу плазмы) потенциалы их поверхностей:

$$(\phi_1 + \phi_2)|_{r_i=a_i} = \phi_{i,s}, \quad i = 1, 2,$$
(10)

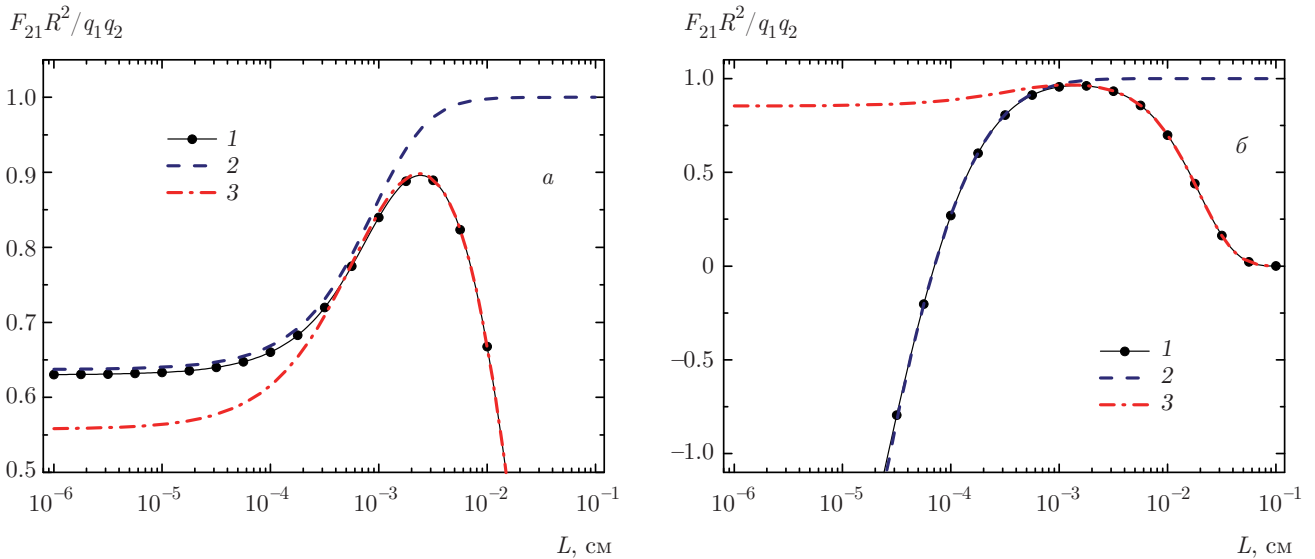
где  $\phi_{1s}, \phi_{2s}$  — потенциалы поверхностей макрочастиц (в равновесной плазме или электролитах  $\phi_{1s} = \phi_{2s}$ ). В случае постоянных потенциалов поверхности система для определения коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  упрощается и принимает вид

$$A_n \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{\sqrt{\tilde{a}_1}} + \sum_{m=0}^{\infty} B_m b_{nm}(\tilde{a}_1, \tilde{R}) = \phi_{1s} \delta_{n,0},$$

$$B_n \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_2)}{\sqrt{\tilde{a}_2}} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m b_{nm}(\tilde{a}_2, \tilde{R}) = \phi_{2s} \delta_{n,0}.$$
(11)

Потенциалы поверхностей макрочастиц связаны с зарядами макрочастиц  $q_{10}$  и  $q_{20}$  при  $R = \infty$  соотношениями

$$\phi_{1s} = \frac{q_{10}}{\varepsilon a_1 (1 + \tilde{a}_1)}, \quad \phi_{2s} = \frac{q_{20}}{\varepsilon a_2 (1 + \tilde{a}_2)}.$$
(12)



**Рис. 1.** Сила взаимодействия макрочастиц как функция  $L = R - a_1 - a_2$  в случае постоянных зарядов при  $k_D = 100 \text{ см}^{-1}$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 25$ ,  $\epsilon = 1$ . а)  $a_1 = a_2 = 10 \text{ мкм}$ ,  $q_1 = q_2 = 10^3 e$ ; б)  $a_1 = 1 \text{ мкм}$ ,  $q_1 = 10^2 e$ ,  $a_2 = 10 \text{ мкм}$ ,  $q_2 = 10^3 e$ . Кривые 1 — расчет с учетом экранирования при  $n_{max} = 50$ , 2 — расчет без учета экранирования в однородном диэлектрике согласно работе [20], 3 — расчет по формуле (8)

Соотношения (12) можно легко получить, рассматривая потенциал уединенной пылевой частицы конечного размера. В случае, если заданы заряды макрочастиц (этот случай описывает взаимодействие проводящих макрочастиц при постоянных зарядах), уравнения для  $n = 0$  в системе (11) заменяются на следующие:

$$\begin{aligned}
 A_0 \tilde{a}_1^{1/2} K_{3/2}(\tilde{a}_1) - \sum_{m=0}^{\infty} B_m \tilde{a}_1 \frac{\partial b_{0m}(\tilde{a}_1, \tilde{R})}{\partial \tilde{a}_1} &= \frac{q_1}{\epsilon a_1}, \\
 - \sum_{m=0}^{\infty} A_m \tilde{a}_2 \frac{\partial b_{0m}(\tilde{a}_2, \tilde{R})}{\partial \tilde{a}_2} + B_0 \tilde{a}_2^{1/2} K_{3/2}(\tilde{a}_2) &= \frac{q_2}{\epsilon a_2}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Тогда уравнения для  $n = 0$  определяют связь потенциала с зарядом при рассматриваемом межчастичном расстоянии. А если заданы потенциалы поверхностей макрочастиц, то уравнения (13) позволяют найти заряды макрочастиц при заданном  $R$ .

В случае постоянных потенциалов величины  $\Psi_n$  для  $n \geq 1$  обращаются в нуль, поэтому сила взаимодействия определяется выражением

$$F_{1z} = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \Xi_{n-1} \Xi_n.
 \tag{14}$$

В работе [6] было показано, что на больших расстояниях  $k_D R \gg 1$  сила описывается выражением

$$F_{\phi} = -a_2 a_1 \epsilon \phi_{1s} \phi_{2s} \frac{1 + \tilde{R}}{R^2} \exp \left\{ - \left( \tilde{R} - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 \right) \right\}.
 \tag{15}$$

Используя (12), выражение (15) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
 F_{\phi} = - \frac{q_{10} q_{20}}{(1 + \tilde{a}_1)(1 + \tilde{a}_2)} \frac{1 + \tilde{R}}{\epsilon R^2} \times \\
 \times \exp \left\{ - \left( \tilde{R} - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 \right) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Из (12) видно, что сила и в случае постоянных потенциалов при больших межчастичных расстояниях определяется выражением, следующим из DLVO-потенциала, но с зарядами при  $R = \infty$ .

### 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В РЕЖИМЕ СЛАБОГО И УМЕРЕННОГО ЭКРАНИРОВАНИЯ ПРИ $k_D a_{1,2} \lesssim 1$

На рис. 1 представлены зависимости силы взаимодействия от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц  $L = R - a_1 - a_2$  в случае постоянных зарядов для одинаковых макрочастиц и для макрочастиц разных радиусов с зарядами, пропорциональными радиусам макрочастиц. Расчеты проведены при типичной для пылевой плазмы

постоянной экранирования  $k_D = 100 \text{ см}^{-1}$  с числом членов разложения  $n_{max} = 50$ . На малых межчастичных расстояниях  $L < 10^{-6} \text{ см}$  для достижения разумной точности требуется учет большего количества членов разложения, но при  $n_{max} > 70-80$  точность решения системы уравнений (2) сильно уменьшается. Поэтому становится актуальной задача нахождения методов определения силы на малых расстояниях. На рис. 1 также приведены зависимости силы, рассчитанные из выражения (8) и согласно [20] для макрочастиц в однородном диэлектрике с использованием бисферических координат. Видно, что на малых расстояниях наблюдается хорошее согласие расчетов с учетом и без учета экранирования, а на больших расстояниях выражение (8) очень хорошо описывает силу взаимодействия с учетом экранирования. На основе данного обстоятельства в работе [6] для случая постоянных зарядов было предложено для определения силы взаимодействия в плазме выражение ( $i = 1, 2; j = 3 - i$ )

$$F_{q,ij} = F_{q,ud} f_{ij}, \quad (17)$$

которое с высокой точностью описывало силу взаимодействия в плазме в слабом и умеренном режимах экранирования при  $k_D a_1 \ll 1, k_D a_2 \ll 1$ . Здесь  $F_{q,ud}$  — сила взаимодействия макрочастиц в однородном диэлектрике при постоянных зарядах,  $f_{ij}$  — плазменная поправка, определенная согласно (8) выражением

$$f_{ij} = \frac{(1 + \tilde{R}) \exp \left\{ - \left( \tilde{R} - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 \right) \right\}}{(1 + \tilde{a}_j) \left( 1 + \tilde{a}_i + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_i + 2\varepsilon} \tilde{a}_i^2 \right)}. \quad (18)$$

В работе [6] показано, что в случае постоянных потенциалов поверхности макрочастиц сила и на малых межчастичных расстояниях оказывается сильно отличной от силы в однородном диэлектрике. Это связано с тем, что в случае постоянных потенциалов поверхности по мере сближения заряды макрочастиц уменьшаются, причем степень уменьшения зависит от постоянной экранирования, что хорошо видно на рис. 2. На рисунке также видно, что уменьшение заряда становится заметным уже на расстояниях  $L$  порядка радиуса экранирования. Представленные на рис. 3 зависимости приведенной силы взаимодействия при постоянных зарядах и при постоянных потенциалах подтверждают, что различие сил в этих двух случаях также начинается на расстояниях  $k_D L \sim 1$ , причем при одинаковых размерах макрочастиц сила при постоянных потенциалах поверхности оказывается меньше силы при

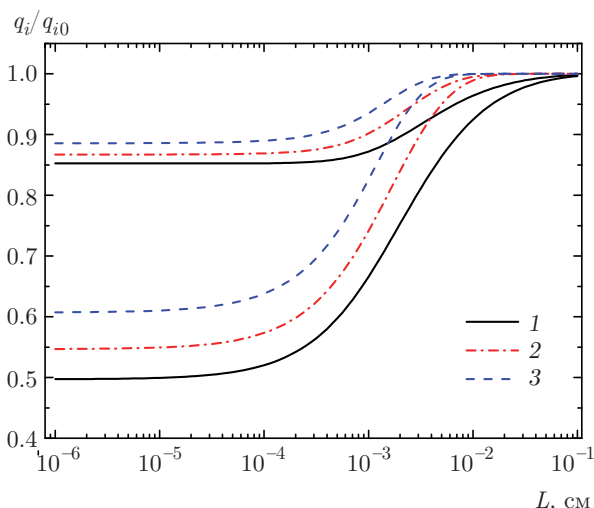


Рис. 2. Приведенные заряды макрочастиц как функции  $L$  в случае постоянных потенциалов при  $\varepsilon = 1, a_1 = 5 \text{ мкм}, a_2 = 10 \text{ мкм}, \phi_{1s} = \phi_{2s}; k_D = 10$  (1), 200 (2), 500 (3)  $\text{см}^{-1}$ ; верхние кривые — заряд макрочастицы радиусом 10 мкм, нижние — 5 мкм

постоянных зарядах на всех расстояниях между их центрами. При разных размерах на больших расстояниях наблюдается такая же картина, но по мере уменьшения расстояния в области перехода от отталкивания к притяжению сила при постоянных зарядах становится меньше. Также отметим, что при постоянных потенциалах для макрочастиц разного радиуса исчезает эффект перехода от отталкивания к притяжению. Это отмечалось и в работах [21, 22], в которых изучалось взаимодействие макрочастиц в вакууме. Это находится в полном соответствии и с выводами работы [20] о том, что в случае равных потенциалов поверхности макрочастиц между ними имеет место отталкивание на всех расстояниях.

Хорошее совпадение сил, рассчитанных при постоянных зарядах с учетом и без учета экранирования, подсказывает нам путь решения задачи о построении более простого метода расчета силы в случае постоянных потенциалов макрочастиц. В этом случае нам нужно определить реальные заряды макрочастиц по заданному потенциалу поверхности и далее следовать методу, предложенному в работе [6] для постоянных зарядов, т.е. посчитать силу с этими зарядами без учета экранирования, например, используя решение в бисферических координатах, как в работе [20], затем учесть эффекты экранирования по формуле (18). Для нахождения реальных зарядов попробуем найти приближенный метод определения емкостных коэффициентов.

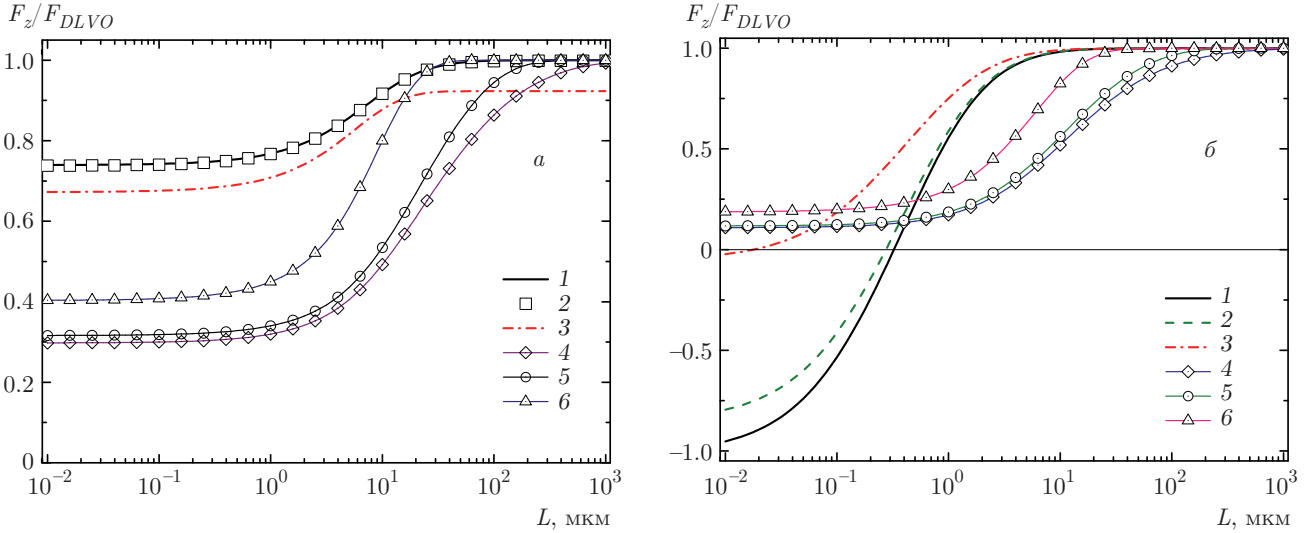


Рис. 3. Приведенная сила взаимодействия макрочастиц как функция  $L$  в случае постоянных зарядов (кривые 1–3) и постоянных потенциалов (кривые 4–6) при  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 4$ ,  $\epsilon = 1$ , а)  $a_1 = a_2 = 10$  мкм,  $q_1 = q_2 = 10^3 e$ ; б)  $a_1 = 1$  мкм,  $q_1 = 10^2 e$ ,  $a_2 = 10$  мкм,  $q_2 = 10^3 e$ ;  $k_D = 10$  (1,4),  $100$  (2,5),  $10^3$  (3,6) см<sup>-1</sup>

#### 4. ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАКРОЧАСТИЦ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ МАКРОЧАСТИЦ ПРИ

$$k_D a_{1,2} \lesssim 1$$

##### 4.1. Емкостные и потенциальные коэффициенты

Интегрированием плотности поверхностного заряда можно показать, что заряды макрочастиц как в случае постоянных зарядов, так и в случае постоянных потенциалов макрочастиц определяются выражением (13). В случае независимых от угловых координат потенциалов можно ввести емкостные и потенциальные коэффициенты, которые определяются соотношениями [23, 24]

$$\begin{aligned} \phi_{1s} &= S_{11}q_1 + S_{12}q_2, & \phi_{2s} &= S_{12}q_1 + S_{22}q_2, \\ q_1 &= C_{11}\phi_{1s} + C_{12}\phi_{2s}, & q_2 &= C_{12}\phi_{1s} + C_{22}\phi_{2s}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для определения потенциалов поверхности макрочастиц из (11) при  $n = 0$  находим

$$\begin{aligned} A_0 \frac{K_{1/2}(\tilde{a}_1)}{\sqrt{\tilde{a}_1}} + \sum_{m=0}^{\infty} B_m b_{0m}(\tilde{a}_1, \tilde{R}) &= \phi_{1s}, \\ B_0 \frac{K_{1/2}(\tilde{a}_2)}{\sqrt{\tilde{a}_2}} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m b_{0m}(\tilde{a}_2, \tilde{R}) &= \phi_{2s}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из выражений (13), (19), (20) ясно видна процедура определения емкостных коэффициентов с учетом экранирования. Сначала решаем систему (11) при

$\phi_{2s} = 0$  и из (13) находим заряды макрочастиц, которые позволяют из (19) определить  $C_{11}$  и  $C_{12}$ :

$$C_{11} = \frac{q_1}{\phi_{1s}}, \quad C_{12} = \frac{q_2}{\phi_{1s}}. \quad (21)$$

Затем, положив  $\phi_{1s} = 0$ , аналогично предыдущему случаю определяем  $C_{21}$  и  $C_{22}$ :

$$C_{21} = \frac{q_1}{\phi_{2s}}, \quad C_{22} = \frac{q_2}{\phi_{2s}}. \quad (22)$$

При больших межчастичных расстояниях  $R \gg \gg \max(a_1, a_2)$  для емкостных коэффициентов с учетом монопольного и дипольного членов можно получить выражения

$$\begin{aligned} C_{a,11} &= \epsilon a_1 \frac{1 + \tilde{a}_1}{D_a}, & C_{a,22} &= \epsilon a_2 \frac{1 + \tilde{a}_2}{D_a}, \\ C_{a,12} = C_{a,21} &= \epsilon \frac{a_1 a_2}{R} \frac{\exp(-\tilde{R} + \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)}{D_a}, \end{aligned} \quad (23)$$

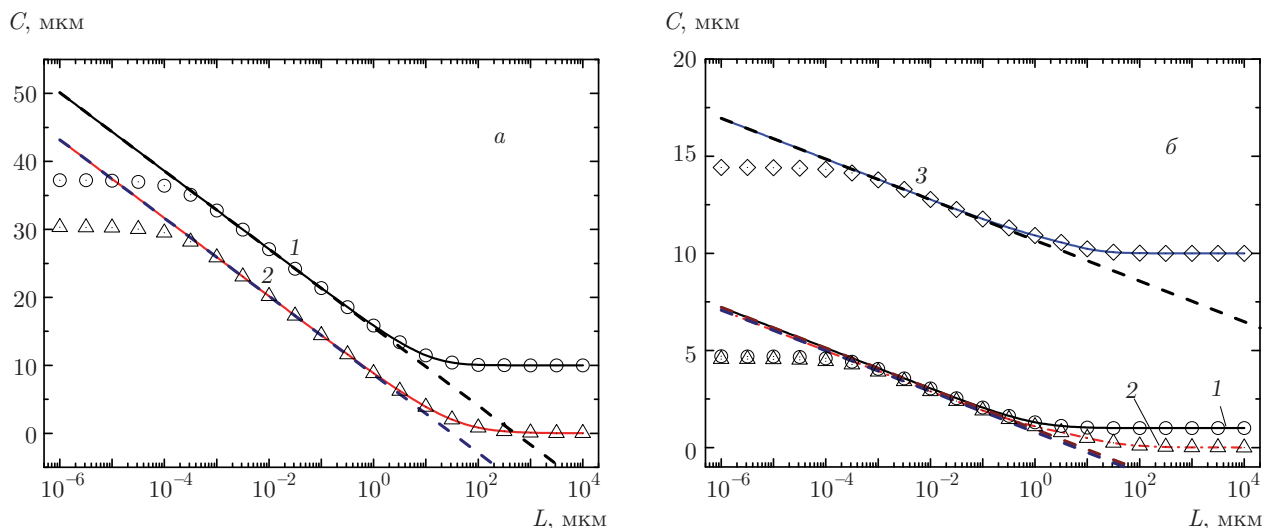
где

$$D_a = 1 - \frac{\exp(-2\tilde{R} + \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)}{\tilde{R}^2} \text{sh}(\tilde{a}_1) \text{sh}(\tilde{a}_2).$$

При  $k_D = 0$  из (23) следует (см. [24], формула (2.46)), что

$$\begin{aligned} C_{b,11} &= \epsilon \frac{a_1}{D_b}, & C_{b,22} &= \epsilon \frac{a_2}{D_b}, \\ C_{b,12} = C_{b,21} &= -\epsilon \frac{a_1 a_2}{R} \frac{1}{D_b}, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $D_b = 1 - a_1 a_2 / R^2$ .



**Рис. 4.** Зависимости от  $L$  емкостных коэффициентов макрочастиц равных радиусов  $a_1 = a_2 = 10$  мкм (а) и разных радиусов  $a_1 = 1$  мкм,  $a_2 = 10$  мкм (б). Сплошные кривые — расчет согласно [21] с точностью 12 значащих цифр, штриховые — расчет по асимптотическим формулам (25), символы — расчет с использованием решения в сферической системе координат с числом членов  $n_{max} = 500$ . Кривые 1 и символы  $\odot$  —  $C_{11}$ , 2 и  $\triangle$  —  $|C_{12}|$ , 3 и  $\diamond$  —  $C_{22}$

Учет эффектов экранирования при вычислении емкостных коэффициентов в настоящей работе проводился следующим образом. Сначала вычислялись емкостные коэффициенты макрочастиц, помещенных в однородный диэлектрик или вакуум по выражениям из работы [21], полученным с использованием бисферической системы координат. На рис. 4 представлены зависимости емкостных коэффициентов, вычисленные с точностью до 12 знаков для макрочастиц равных и разных радиусов. Там же представлены данные, полученные по асимптотическим формулам из [25, 26]:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} \frac{1}{L} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \psi \left( \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right) + O(L^2) \right], \\
 C_{12} = C_{21} &= -\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} \frac{1}{L} \right) + \gamma + O(L^2) \right], \\
 C_{22} &= \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} \frac{1}{L} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \psi \left( \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right) + O(L^2) \right],
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

где  $\gamma = 0.5772\dots$  — константа Эйлера,  $\psi(z)$  — логарифмическая производная гамма-функции [27].

На рис. 4 также приведены емкостные коэффициенты, рассчитанные на основе решения задачи о

взаимодействии двух макрочастиц в однородном диэлектрике с использованием сферической системы координат (см., например, [6];  $n \geq 1$ ):

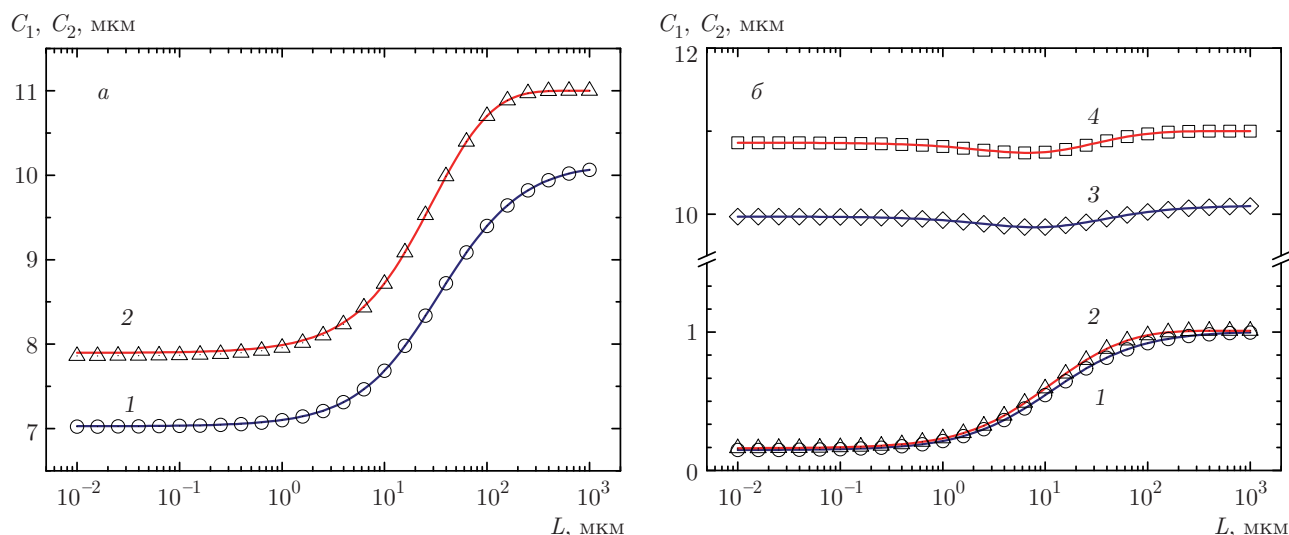
$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_n + \left( \frac{a_1}{R} \right)^{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!m!} \tilde{B}_m &= 0, \\
 \tilde{B}_n + \left( \frac{a_2}{R} \right)^{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!m!} \tilde{A}_m &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

где  $\tilde{A}_0 = q_1$ ,  $\tilde{B}_0 = q_2$ . При этом потенциалы поверхностей  $\phi_{1s}$  и  $\phi_{2s}$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 \phi_{1s} &= \frac{q_1}{\epsilon a_1} + \frac{q_2}{\epsilon R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{B}_n}{R}, \\
 \phi_{2s} &= \frac{q_2}{\epsilon a_2} + \frac{q_1}{\epsilon R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_n}{R}.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Система уравнений (26) решалась при  $q_2 = 0$ , затем по формулам (27) находились потенциалы поверхностей и по ним из (19) потенциальные коэффициенты:  $S_{11} = \phi_{1s}/q_1$ ,  $S_{12} = \phi_{2s}/q_1$ . Затем система уравнений (26) решалась при  $q_1 = 0$  и аналогично находились потенциальные коэффициенты:  $S_{21} = \phi_{1s}/q_2$ ,  $S_{22} = \phi_{2s}/q_2$ . Зная потенциальные коэффициенты, легко найти емкостные:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, \quad C_{12} = C_{21} = -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, \\
 C_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}.
 \end{aligned}$$



**Рис. 5.** Емкостные коэффициенты при  $k_D = 10$  и  $100 \text{ см}^{-1}$  в случае равных радиусов  $a_1 = a_2 = 10 \text{ мкм}$  (а) и разных радиусов  $a_1 = 1 \text{ мкм}$ ,  $a_2 = 10 \text{ мкм}$  (б). Сплошные кривые — суммы  $C_1 = C_{11} + C_{12}$  и  $C_2 = C_{21} + C_{22}$ , полученные с учетом экранирования из (21) и (22) с  $n_{max} = 50$ , символы — величины, полученные с использованием бисферической системы координат и умноженные на плазменные факторы (28). 1,2 —  $C_1$ ; 3,4 —  $C_2$ ;  $k_D = 10$  (1,3),  $100$  (2,4)  $\text{см}^{-1}$

Представленные на рис. 4 данные получены с учетом 500 членов разложения. При учете большего числа членов точность решения с использованием чисел с двойной точностью сильно уменьшалась. Видно, что ошибка при использовании решения в сферической системе координат становится заметной при  $L = 10^{-3} - 10^{-4} \text{ мкм}$ .

Как видно из (19), при равных потенциалах поверхности макрочастиц заряд макрочастиц определяется суммой собственного и взаимного емкостных коэффициентов. Поэтому в настоящей работе использовались следующие корректирующие факторы:

$$c_{1,pl} = \frac{C_{a,11} + C_{a,12}}{C_{b,11} + C_{b,12}}, \quad c_{2,pl} = \frac{C_{a,22} + C_{a,21}}{C_{b,22} + C_{b,21}}. \quad (28)$$

На рис. 5 приведены суммы  $C_1 = C_{11} + C_{12}$  и  $C_2 = C_{21} + C_{22}$ , полученные с учетом экранирования из (21) и (22) с  $n_{max} = 50$ , а также аналогичные величины, полученные с использованием бисферической системы координат и умноженные на плазменные факторы (28). Видно прекрасное согласие полученных величин. С ростом постоянной экранирования согласие ухудшалось, но и при  $k_D = 10^3 \text{ см}^{-1}$  отличие не превышало 5%.

#### 4.2. Методика расчета силы в случае постоянных потенциалов макрочастиц при $k_D a_{1,2} \lesssim 1$

Схема приближенного расчета силы в случае постоянных потенциалов макрочастиц в режимах слабого и умеренного экранирования  $k_D a_1 \lesssim 1$  и  $k_D a_2 \lesssim 1$  выглядит следующим образом.

1. С использованием формул из работы [21] вычисляются емкостные коэффициенты  $C_{11,bisph}$ ,  $C_{12,bisph}$ ,  $C_{21,bisph}$  и  $C_{22,bisph}$ .
2. Определяются емкости с учетом корректирующих факторов (28):

$$C_1 = c_{1,pl} (C_{11,bisph} + C_{12,bisph}),$$

$$C_2 = c_{2,pl} (C_{21,bisph} + C_{22,bisph}).$$

3. По заданным потенциалам поверхности вычисляются текущие заряды макрочастиц:

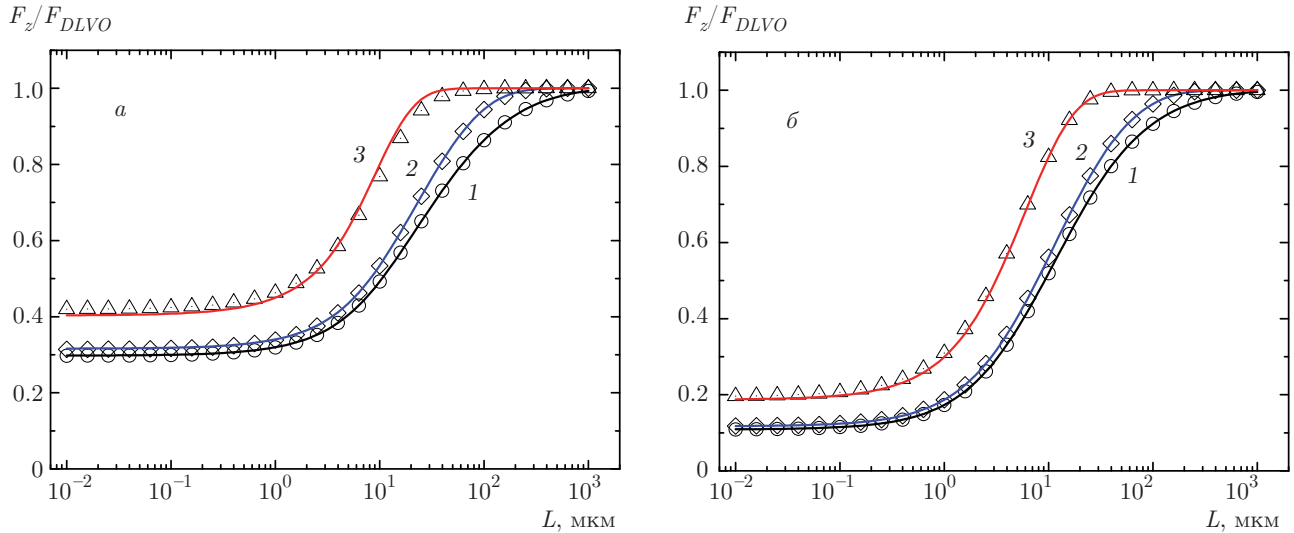
$$q_1 = C_1 \phi_s, \quad q_2 = C_2 \phi_s.$$

4. С новыми зарядами вычисляется сила взаимодействия, например, с использованием бисферической системы координат [21].

5. Полученное значение силы умножается на плазменный фактор (18).

Сравнение полученных по данной схеме значений силы с результатами расчетов с учетом экранирования представлено на рис. 6. Видно, что предложенная схема позволяет рассчитать силу с достаточно высокой точностью даже при  $k_D a_1 = 1$  и/или





**Рис. 6.** Приведенная сила взаимодействия макрочастиц при  $k_D = 10$  (1),  $10^2$  (2),  $10^3$  (3)  $\text{см}^{-1}$ : а)  $a_1 = a_2 = 10$  мкм,  $q_1 = q_2 = 10^3 e$ ; б)  $a_1 = 1$  мкм,  $q_1 = 10^2 e$ ,  $a_2 = 10$  мкм,  $q_2 = 10^3 e$ . Сплошные кривые — расчет с учетом экранирования при  $n_{max} = 50$ , символы — расчет по предложенной в настоящей работе схеме

$k_D a_2 = 1$ . Отметим, что с увеличением постоянной экранирования ошибка растет, поэтому в режиме сильного экранирования необходимо разработать иной подход для расчета силы взаимодействия.

### 5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИХ МАКРОЧАСТИЦ В УСЛОВИЯХ СИЛЬНОГО ЭКРАНИРОВАНИЯ $k_D a_{1,2} \gg 1$

Под сильным экранированием мы подразумеваем случай  $\tilde{a}_1 \gg 1$  и/или  $\tilde{a}_2 \gg 1$ . В этом случае на расстояниях  $\tilde{R} \gg 1$  можно пренебречь членами, содержащими квадратичные и более высокие степени величины  $\exp(-\tilde{R})$ . Тогда для решения задачи нужны только коэффициенты  $b_{n,m=0}$  и  $b_{n=0,m}$ . Для  $m = 0$  индексы имеют простой вид:

$$b_{n0}(\tilde{r}, \tilde{R}) = \Phi_{n+1/2}(\tilde{r}, \tilde{R}), \quad n = 0, 1, \dots, \infty. \quad (29)$$

Для  $n = 0$  после суммирования находим (в этом случае  $\gamma_k = \gamma_\ell$ ,  $m \geq k$ ,  $\ell \geq k$ , для остальных значений индексов коэффициенты  $h_{km\ell,0}$  равны нулю)

$$h_{km\ell,0} = \frac{(2m + \ell + k - 1)!!}{(\ell + k + 1)!! (2m - 1)!!} \times \frac{\left[ m + \frac{1}{2}(\ell - k) - 1 \right]!}{\left[ \frac{1}{2}(\ell - k) \right]!}. \quad (30)$$

В режиме сильного экранирования случай постоянных зарядов вряд ли реализуется, но для полноты картины рассмотрим и этот случай.

#### 5.1. Постоянные заряды в режиме сильного экранирования

Из системы (2), полагая все  $b_{nm}$  равными нулю для  $n \geq 1$  и  $m \geq 1$ , для коэффициентов с индексом  $n \geq 1$  находим

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{\beta_{n0}(\tilde{a}_1, \tilde{R}, \varepsilon_1)}{\alpha_n(\tilde{a}_1, \varepsilon_1)} B_0, \\ B_n &= -\frac{\beta_{n0}(\tilde{a}_2, \tilde{R}, \varepsilon_2)}{\alpha_n(\tilde{a}_2, \varepsilon_2)} A_0. \end{aligned} \quad (31)$$

Используя явные выражения для  $\beta_{n0}$  и  $\alpha_n$ , выражение (31) можно преобразовать к виду (см. [20])

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\tilde{R}^{1/2}} \psi_n(\tilde{a}_1, \varepsilon, \varepsilon_1) B_0, \\ B_n &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{K_{n+1/2}(\tilde{R})}{\tilde{R}^{1/2}} \psi_n(\tilde{a}_2, \varepsilon, \varepsilon_2) A_0, \end{aligned} \quad (32)$$

где (ср. с выражением (20) в [28])

$$\psi_n(\tilde{a}_i, \varepsilon, \varepsilon_i) = \frac{\pi}{2} \frac{\varepsilon \tilde{a}_i I_{n+3/2}(\tilde{a}_i) - n(\varepsilon_i - \varepsilon) I_{n+1/2}(\tilde{a}_i)}{\varepsilon \tilde{a}_i K_{n+3/2}(\tilde{a}_i) + n(\varepsilon_i - \varepsilon) K_{n+1/2}(\tilde{a}_i)}.$$

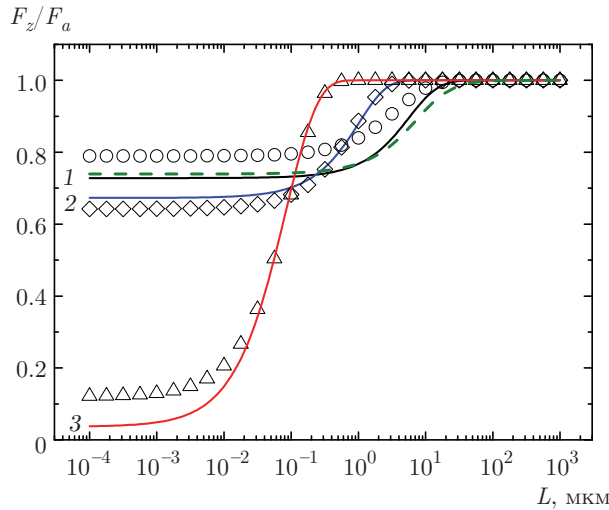


Рис. 7. Приведенная сила взаимодействия ( $F_a$  из (8)) в режиме сильного экранирования в случае постоянных зарядов при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $a_1 = a_2 = 10$  мкм,  $q_1 = q_2 = 10^3 e$ . Сплошные кривые — расчет на основе решения системы (2) с  $n_{max} = 50$ , символы — расчет на основе решения системы (33), штриховая кривая — расчет с использованием бисферических координат с поправкой (18)

Теперь, используя (31), из (2) для  $n = 0$  находим

$$\left[ 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_{0m}(\tilde{a}_1, \tilde{R}, \varepsilon_1) \beta_{m0}(\tilde{a}_2, \tilde{R}, \varepsilon_2)}{\alpha_0(\tilde{a}_1, \varepsilon_1) \alpha_m(\tilde{a}_2, \varepsilon_2)} \right] A_0 + \frac{\beta_{00}(\tilde{a}_1, \tilde{R}, \varepsilon_1)}{\alpha_0(\tilde{a}_1, \varepsilon_1)} B_0 = \frac{k_D q_1}{\tilde{a}_1^2} \frac{1}{\alpha_0(\tilde{a}_1, \varepsilon_1)}, \quad (33)$$

$$\left[ 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_{0m}(\tilde{a}_2, \tilde{R}, \varepsilon_2) \beta_{m0}(\tilde{a}_1, \tilde{R}, \varepsilon_1)}{\alpha_m(\tilde{a}_1, \varepsilon_1) \alpha_0(\tilde{a}_2, \varepsilon_2)} \right] B_0 + \frac{\beta_{00}(\tilde{a}_2, \tilde{R}, \varepsilon_2)}{\alpha_0(\tilde{a}_2, \varepsilon_2)} A_0 = \frac{k_D q_2}{\tilde{a}_2^2} \frac{1}{\alpha_0(\tilde{a}_2, \varepsilon_2)}.$$

На рис. 7 приведены зависимости силы взаимодействия в режиме сильного экранирования в случае постоянных зарядов макрочастиц, рассчитанные на основе решения системы (2) и упрощенной системы (33). Видно, что для макрочастиц равных размеров наблюдается достаточно хорошее согласие, а в случае макрочастиц разных радиусов согласие имело место только на расстояниях  $k_D R \geq 1$ . Это связано с тем, что в случае постоянных зарядов для макрочастиц разных размеров на малых расстояниях отталкивание переходит в притяжение и необходимо достаточно точное рассмотрение задачи для передачи данного эффекта. На рис. 7 также показаны результаты расчетов с использованием би-

сферических координат с последующей коррекцией на плазменные эффекты (18) (эта кривая оказывается одной и той же для всех постоянных экранирования после деления силы на  $F_a$ ). Отметим, что зависимости приведенной силы, найденные на основе решения системы (18), при  $k_D \leq 10^3$  см<sup>-1</sup> практически сливались. Поэтому мы можем повторить вывод работы [6], что при  $k_D \leq 10^3$  см<sup>-1</sup> расчет силы с использованием бисферических координат с последующим учетом плазменных эффектов путем умножения на (18) достаточно хорошо описывает силу взаимодействия заряженных макрочастиц в плазме в случае постоянных зарядов.

### 5.2. Постоянные потенциалы поверхности в режиме сильного экранирования

Для случая постоянных потенциалов поверхности из (11) получаем

$$A_n = - \frac{b_{n0}(\tilde{a}_1, \tilde{R}, \varepsilon_1) \sqrt{\tilde{a}_1}}{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)} B_0, \quad (34)$$

$$B_n = - \frac{b_{n0}(\tilde{a}_2, \tilde{R}, \varepsilon_2) \sqrt{\tilde{a}_2}}{K_{n+1/2}(\tilde{a}_2)} A_0.$$

Используя (34), из (11) для  $n = 0$  находим

$$\alpha_{11} A_0 + \alpha_{12} B_0 = \phi_{1s} \frac{\sqrt{\tilde{a}_1}}{K_{1/2}(\tilde{a}_1)}, \quad (35)$$

$$\alpha_{21} A_0 + \alpha_{22} B_0 = \phi_{2s} \frac{\sqrt{\tilde{a}_2}}{K_{1/2}(\tilde{a}_2)},$$

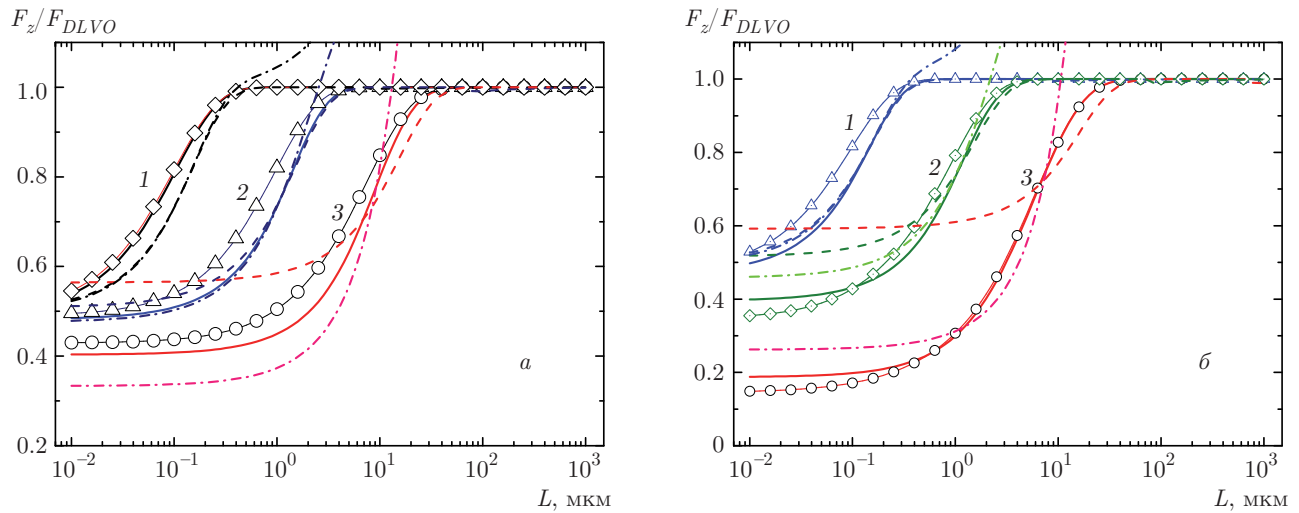
где

$$\alpha_{11} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2}}{K_{1/2}(\tilde{a}_1) K_{m+1/2}(\tilde{a}_2)} \times b_{m0}(\tilde{a}_2, \tilde{R}, \varepsilon_2) b_{0m}(\tilde{a}_1, \tilde{R}),$$

$$\alpha_{22} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2}}{K_{1/2}(\tilde{a}_2) K_{m+1/2}(\tilde{a}_1)} \times b_{m0}(\tilde{a}_1, \tilde{R}, \varepsilon_1) b_{0m}(\tilde{a}_2, \tilde{R}),$$

$$\alpha_{12} = \frac{b_{00}(\tilde{a}_1, \tilde{R}) \sqrt{\tilde{a}_1}}{K_{1/2}(\tilde{a}_1)}, \quad \alpha_{21} = \frac{b_{00}(\tilde{a}_2, \tilde{R}) \sqrt{\tilde{a}_2}}{K_{1/2}(\tilde{a}_2)}.$$

На рис. 8 приведены зависимости силы взаимодействия в режиме сильного экранирования в случае постоянных потенциалов поверхности макрочастиц, рассчитанные на основе решения системы (11)



**Рис. 8.** Сила взаимодействия в режиме сильного экранирования в случае постоянных потенциалов поверхности макрочастиц равных  $a_1 = a_2 = 10$  мкм (а) и разных (б) радиусов  $a_1 = 1$  мкм,  $a_2 = 10$  мкм при  $k_D = 10^5$  (1),  $10^4$  (2),  $10^3$  (3)  $\text{см}^{-1}$ . Сплошные кривые — расчет на основе решения системы (11) при  $n_{max} = 75$ , тонкие линии с символами — расчет на основе решения системы (34), штрихпунктирные кривые — расчет по формуле (38), штриховые кривые — расчет по формуле (40)

и упрощенной системы (34). Видно, что для макрочастиц равного размера наблюдается достаточно хорошее согласие, улучшающееся с ростом постоянной экранирования, а в случае макрочастиц разных радиусов согласие хуже, но с ростом  $k_D$  согласие становится лучше.

Потенциал взаимодействия для случая, когда радиусы частиц много больше радиуса экранирования в плазме или электролите, при постоянных и равных потенциалах сферических частиц одного размера был получен впервые в работе [13]. Затем в работе [14] тем же методом, что и в работе [13], потенциал взаимодействия был получен для частиц разных размеров и различающихся потенциалов поверхности. В работе [15] этот метод был распространен на случай постоянных плотностей зарядов (именно постоянных плотностей, а не только самих зарядов). Результаты этих работ можно представить выражением

$$V_{\phi(\sigma)} = \pm \frac{\varepsilon a_1 a_2}{4(a_1 + a_2)} \left[ (\phi_{1s} \pm \phi_{2s})^2 \ln(1 + e^{-k_D L}) + (\phi_{1s} \mp \phi_{2s})^2 \ln(1 - e^{-k_D L}) \right], \quad (36)$$

где индекс  $\phi$  и верхний знак относятся к случаю постоянных потенциалов, а  $\sigma$  и нижний знак — к случаю постоянных плотностей поверхностного заряда. Это выражение применимо при выполнении условий  $k_D a_1 \gg 1$ ,  $k_D a_2 \gg 1$  [13]. Для силы взаимодействия отсюда получаем

$$F_{\phi(\sigma)} = \frac{\varepsilon a_1 a_2 k_D}{a_1 + a_2} \frac{e^{-k_D L}}{1 - e^{-2k_D L}} \times \left[ \phi_{1s} \phi_{2s} \mp \frac{1}{2} (\phi_{1s}^2 + \phi_{2s}^2) e^{-k_D L} \right]. \quad (37)$$

Для случая равных потенциалов поверхности из (37) находим

$$F_{\phi(\sigma)} = \frac{\varepsilon a_1 a_2 k_D}{(a_1 + a_2)^2} \phi_s^2 \frac{e^{-k_D L}}{1 \pm e^{-k_D L}}. \quad (38)$$

Отметим, что если потенциал поверхности макрочастиц является постоянным, что предполагалось при выводе (36), то плотность поверхностного заряда макрочастиц будет постоянной только при бесконечном удалении макрочастиц друг от друга. Поэтому выражения (36)–(38) в случае постоянных плотностей зарядов имеют мало физического смысла и ими нельзя пользоваться в качестве потенциала и для определения силы взаимодействия диэлектрических и металлических макрочастиц.

На рис. 8 приведены зависимости силы взаимодействия в режиме сильного экранирования в случае постоянных потенциалов поверхности макрочастиц, рассчитанные из формулы (38). Видно, что на малых расстояниях наблюдается хорошее согласие с данными на основе решения системы (11) и согласие с ростом постоянной экранирования растет. Но на расстояниях  $k_D L \gtrsim 1$  формула (38) начинает приводить к большим ошибкам.

При  $k_D L \gg 1$  формула (38) имеет асимптоту, пропорциональную  $\exp(-k_D L)$ , которая отличается от DLVO-выражения. Поэтому для получения правильной асимптоты на больших расстояниях выражения (36) и (38) можно немного изменить без внесения больших ошибок при  $k_D a_{1,2} \gg 1$  (штриховые и штрихпунктирные кривые на рис. 8 при  $k_D = 10^5 \text{ см}^{-1}$  на малых расстояниях практически сливаются):

$$V_{\phi,c} = \frac{\varepsilon a_1 a_2}{R} \phi_s^2 \ln(1 + e^{-k_D L}) \quad (39)$$

и для силы

$$F_{\phi,c} = \frac{\varepsilon a_1 a_2 \phi_s^2}{R^2} \left[ \ln(1 + e^{-k_D L}) + \frac{k_D R}{1 + e^{k_D L}} \right]. \quad (40)$$

На рис. 8 приведены зависимости, рассчитанные из (40). Видно, что при выполнении условия  $k_D a_{1,2} \gg 1$  имеет место хорошее согласие на всех расстояниях с данными, полученными на основе решения системы (11). Поэтому мы можем сделать вывод, что выражения (39) и (40) можно использовать для описания взаимодействия двух макрочастиц в равновесной плазме или электролите в режиме сильного экранирования в случае постоянных потенциалов поверхности.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что сила взаимодействия диэлектрических макрочастиц в случае их постоянных зарядов и в случае постоянных потенциалов поверхности сильно различаются. Предложена методика расчета силы с учетом эффектов экранирования в режиме слабого и умеренного экранирования. Получены формулы для расчета силы в режиме сильного экранирования, которые с хорошей точностью описывают взаимодействие макрочастиц в случае постоянных потенциалов поверхности. Полученные результаты будут использованы для определения константы скорости коагуляции макрочастиц в равновесной плазме или электролитах.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-12-10424).

### ПРИЛОЖЕНИЕ

#### Коэффициенты $b_{nm}$

Коэффициенты  $b_{nm}$  определены выражением [6]

$$b_{nm}(\tilde{r}_i, \tilde{R}) = (2m-1)!! \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m h_{km\ell,n} (-1)^k \times \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{\Phi_{m+\ell+1/2}(\tilde{r}_i, \tilde{R})}{\tilde{R}^k \tilde{r}_2^{m-k}}. \quad (41)$$

Здесь

$$\Phi_{\nu}(\tilde{r}, \tilde{R}) = \nu \sqrt{\frac{2\pi}{\tilde{r}\tilde{R}}} \begin{cases} I_{\nu}(\tilde{r})K_{\nu}(\tilde{R}), & R > r, \\ K_{\nu}(\tilde{r})I_{\nu}(\tilde{R}), & R < r, \end{cases} \quad (42)$$

$I_{\nu}$  — модифицированные функции Бесселя первого рода или функции Инфельда. Коэффициенты  $h_{km\ell,n}$  в (41) определены соотношением

$$h_{km\ell,n} = \sum_{i=0}^k q_{k,i} \sum_{j=0}^{\ell} g_{m\ell,j} p_{n,i+j}, \quad (43)$$

$$n = 0, 1, \dots, i + j,$$

где [6] ( $\gamma_k = \text{mod}(k, 2)$ ,  $\gamma_{\ell} = \text{mod}(\ell, 2)$ )

$$q_{k,i} = \frac{1}{2^k} (-1)^{(k-i)/2} \frac{(k+i)!}{i! \left(\frac{k-i}{2}\right)! \left(\frac{k+i}{2}\right)!}, \quad (44)$$

$$i = \gamma_k, \gamma_k + 2, \dots, k;$$

$$g_{m\ell,j} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{(\ell-j)/2} \frac{(2m+\ell+j-1)!!}{j! \left(\frac{\ell-j}{2}\right)! (2m-1)!!}, \quad (45)$$

$$j = \gamma_{\ell}, \gamma_{\ell} + 2, \dots, \ell;$$

$$p_{n,k} = \frac{(2n+1)k!}{(k-n)!!(k+n+1)!!}, \quad (46)$$

$$n = \gamma_k, \gamma_k + 2, \dots, k.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. A. Ivlev, H. Löwen, G. Morfill, and C. P. Royall, *Complex Plasmas and Colloidal Dispersions: Particle-Resolved Studies of Classical Liquids and Solids*, Series in Soft Condensed Matter, Vol. 5, World Sci., Singapore (2012).
2. F. Babick, in *Suspensions of Colloidal Particles and Aggregates*, Vol. 20, *Particle Technology Series*, pp. 75–118, Springer Int. Publ., Cham (2016).
3. H. Ohshima, *Electrostatic Interaction Between Colloidal Particles*, in *Encyclopedia of Biocolloid and Biointerface Science*, 2V Set, J. Wiley & Sons, Hoboken, NJ, USA (2016).
4. C. Chen and W. Huang, *Environ. Sci. Technol.* **51**, 2077 (2017).
5. А. В. Филиппов, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, *ЖЭТФ* **148**, 1039 (2015).

6. А. В. Филиппов, И. Н. Дербенев, ЖЭТФ **150**, 1262 (2016).
7. I. N. Derbenev, A. V. Filippov, A. J. Stace, and E. Besley, J. Chem. Phys. **145**, 084103 (2016).
8. C. Peng, W. Zhang, H. Gao et al., Nanomaterials **7**, 21 (2017).
9. V. K. Sharma, K. M. Siskova, R. Zboril, and J. L. Gardea-Torresdey, Adv. Coll. Interface Sci. **204**, 15 (2014).
10. K. A. Huynh and K. L. Chen, Environ. Sci. Technol. **45**, 5564 (2011).
11. A. R. Petosa, D. P. Jaisi, I. R. Quevedo et al., Environ. Sci. Technol. **44**, 6532 (2010).
12. A. M. Mikelonis, S. Youn, and D. F. Lawler, Langmuir **32**, 1723 (2016).
13. B. Derjaguin, Trans. Faraday Soc. **35**, 203 (1940).
14. R. Hogg, T. W. Healy, and D. W. Fuerstenau, Trans. Faraday Soc. **62**, 1638 (1966).
15. S. Usui, J. Coll. Interface Sci. **44**(1), 107 (1973).
16. M. E. Fisher, Y. Levin, and X. Li, J. Chem. Phys. **101**, 2273 (1994).
17. P. Debye and E. Hückel, Phys. Zeitschr. **24**, 185 (1923).
18. E. Verwey, J. T. G. Overbeek, and K. V. Ness, *Theory of the Stability of Lyophobic Colloids. The Interaction of Sol Particles Having an Electrical Double Layer*, Elsevier, New York, Amsterdam, London, Brussels (1948).
19. A. E. Larsen and D. G. Grier, Nature **385**, 230 (1997).
20. В. Р. Муниров, А. В. Филиппов, ЖЭТФ **144**, 931 (2013).
21. А. В. Филиппов, ЖЭТФ **136**, 601 (2009).
22. А. В. Филиппов, Contr. Plasma Phys. **49**, 433 (2009).
23. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, Наука, Москва (1970).
24. В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, Изд-во иностр. лит., Москва (1954) [W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, New York, Toronto, London (1950)].
25. A. Russell, Proc. Roy. Soc. London A **82**, 524 (1909).
26. J. Lekner, J. Electrostat. **69**, 11 (2011).
27. P. J. Davis, *Handbook of Mathematical Functions*, NBS, ed. by M. Abramowitz and I. A. Stegun, Washington (1972).
28. В. Р. Муниров, А. В. Филиппов, ЖЭТФ **142**, 594 (2012).