

# ВОЛНЫ РОССБИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Д. А. Климачков<sup>a\*</sup>, А. С. Петросян<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> *Институт космических исследований Российской академии наук  
117997, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Московский физико-технический институт  
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 28 декабря 2016 г.

Изучаются вращающиеся магнитогиродинамические течения тонкого слоя астрофизической плазмы со свободной границей на бета-плоскости. Для изучения нелинейных взаимодействий волн Россби используется приближение мелкой воды, основанное на усреднении по глубине исходных уравнений магнитной гидродинамики плазмы. Магнитогиродинамические уравнения мелкой воды обобщены на случай слоя плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле. Рассматриваются два типа течений: течения во внешнем вертикальном магнитном поле и течения при наличии горизонтального магнитного поля. Качественный анализ дисперсионных кривых показывает наличие трехволновых нелинейных взаимодействий магнитных волн Россби в обоих случаях. В частном случае отсутствия внешнего магнитного поля динамика волн в слое плазмы аналогична динамике волн в нейтральной жидкости. Асимптотическим методом многомасштабных разложений выведены нелинейные уравнения взаимодействия для медленно меняющихся амплитуд, описывающие трехволновые взаимодействия в вертикальном внешнем магнитном поле и трехволновые взаимодействия волн в горизонтальном магнитном поле. Показано, что существуют распадные неустойчивости и механизмы параметрического усиления волн для каждого из рассматриваемых случаев. Найдены инкременты неустойчивостей и коэффициенты параметрического усиления для соответствующих процессов.

DOI: 10.7868/S004445101710008X

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена развитию нелинейной теории волн Россби в слоях астрофизической и космической плазмы в приближении мелкой воды на бета-плоскости. Волнами Россби здесь мы будем называть крупномасштабные волны, возникающие вследствие неоднородности силы Кориолиса в зависимости от широты на сфере, распространяющиеся вследствие сохранения полной завихренности во вращающейся плазме, по аналогии с нейтральной жидкостью. Такие волны определяют крупномасштабную динамику солнца и звезд [1–4], динамику магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами от несущей звезды [5], течения в аккреционных дисках нейтронных звезд [6]. Несмот-

ря на сложность наблюдения волн Россби в астрофизической плазме, они совсем недавно впервые были обнаружены на Солнце [7]. Отметим также ряд исследований, косвенно указывающих на существование волн Россби на Солнце [8–12].

Крупномасштабные волны Россби в нейтральной жидкости определяют глобальную динамику планетных атмосфер. Изучение таких волн является предметом многочисленных исследований в геофизической гидродинамике [13, 14]. В этом случае волны рассматриваются на фоне тривиального стационарного состояния (состояния покоя), и теория таких волн развивается с использованием приближения мелкой воды или геострофического приближения. Прямым аналогом волн Россби в геофизической гидродинамике являются дрейфовые волны в плазме [13, 15]. В случае течений астрофизической плазмы теория волн Россби значительно усложняется вследствие наличия нетривиальных стационар-

\* E-mail: klimachkovdmitry@gmail.com

ных состояний магнитного поля (например, тороидальное и полоидальное поле или внешнее вертикальное магнитное поле) [3, 4, 16, 17], поэтому основные результаты относительно магнитных волн Россби получены в линейном приближении.

В нашей работе развита слабонелинейная теория магнитогидродинамических волн Россби. Отметим существенное различие динамики волн Россби при наличии и отсутствии внешнего вертикального магнитного поля. Основное различие состоит в том, что в приближении мелкой воды во внешнем магнитном поле значительную роль играет уравнение непрерывности магнитного поля, корректный учет которого значительно меняет традиционные представления о двумерности уравнений мелкой воды и о возможности использования двумерной магнитной гидродинамики для понимания крупномасштабных процессов.

Магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды играют такую же важную роль в космической и астрофизической плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной жидкости. Система уравнений получается из классических уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой плазмы усреднением по глубине в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи [18–24]. Такое приближение использовалось для развития теории трехволновых взаимодействий волн Пуанкаре магнитной гидродинамики [25, 26]. Заметим, что существенным различием магнитогидродинамических уравнений для вращающейся плазмы и для нейтральной жидкости является присутствие условия бездивергентности магнитного поля, выполняющегося тождественно. Отсюда следует, что для приближенных уравнений мелкой воды должно присутствовать следствие условия бездивергентности в исходной системе магнитогидродинамических уравнений, которое также должно выполняться тождественно для полученной упрощенной системы. В результате уравнения мелкой воды при наличии внешнего вертикального магнитного поля [26] отличаются от традиционных. Усреднение уравнений магнитной гидродинамики по глубине при наличии внешнего магнитного поля показывает принципиальную трехкомпонентность магнитного поля вместе с двухкомпонентностью поля скоростей [26]. Следовательно, использование модернизированных уравнений мелкой воды обеспечивает детальное описание магнитного поля, объясняет его трехмерную структуру и позволяет

глубже понять как линейные, так и нелинейные эффекты.

В настоящей работе сделан существенный шаг в изучении волн Россби. Выписаны магнитогидродинамические уравнения мелкой воды на бета-плоскости во внешнем магнитном поле с учетом тождеств, обеспечивающих бездивергентность магнитного поля в приближенных уравнениях. В отсутствие внешнего магнитного поля система уравнений мелкой воды сводится к традиционной и имеет стационарные решения в виде горизонтальных (полоидального, тороидального и их суммы) магнитных полей. Для каждого из стационарных состояний развита слабонелинейная теория волн, получены уравнения волновых пакетов волн Россби и исследованы параметрические неустойчивости [27–29].

В разд. 2 приведена система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле. Проведен качественный анализ дисперсионных соотношений для магнитогидродинамических волн Россби в вертикальном внешнем магнитном поле и волн Россби в горизонтальном (тороидальном и полоидальном) магнитном поле и сделаны выводы о возможности трехволновых взаимодействий для этих волн.

В разд. 3 методом многомасштабных разложений получена система уравнений медленно меняющихся амплитуд трехволновых взаимодействий волн Россби во внешнем вертикальном магнитном поле. Проанализированы параметрические неустойчивости. В разд. 4 то же самое сделано для случая горизонтального магнитного поля. В Заключении обсуждаются результаты работы.

## 2. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

### 2.1. Модернизированные уравнения мелкой воды магнитной гидродинамики на бета-плоскости

Уравнения магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды описывают течения тонкого слоя плазмы (магнитной жидкости) со свободной границей в однородном поле силы тяжести, во вращающейся системе отсчета во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 1) [26]:

$$\partial_t h + \operatorname{div}(h\mathbf{v}) = 0, \quad (2.1)$$

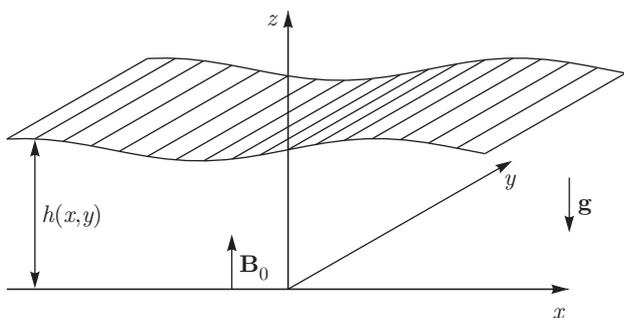


Рис. 1. Геометрия задачи

$$\partial_t(h\mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(h\mathbf{v}) + h\mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)(h\mathbf{B}) - h\mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} + \operatorname{grad} \left( \frac{1}{2}gh^2 \right) + B_0\mathbf{B} + fh[\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}] = 0, \quad (2.2)$$

$$\partial_t(h\mathbf{B}) + \operatorname{rot}(h[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]) - B_0\mathbf{v} = 0, \quad (2.3)$$

$$\partial_t B_z + B_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.4)$$

$$\operatorname{div}(h\mathbf{B}) + B_z = 0. \quad (2.5)$$

В уравнениях (2.1)–(2.5)  $h$  — толщина слоя,  $\mathbf{v}(v_x, v_y)$  — усредненная по толщине горизонтальная скорость,  $\mathbf{B}(B_x, B_y)$  — усредненное по толщине слоя горизонтальное магнитное поле,  $B_z$  — усредненная по толщине слоя вертикальная компонента магнитного поля,  $g$  — ускорение свободного падения,  $f$  — параметр Кориолиса,  $B_0$  — внешнее вертикальное магнитное поле. Система (2.1)–(2.5) является результатом интегрирования трехмерных уравнений магнитной гидродинамики вдоль вертикальной координаты  $z$ . Считаем полное давление (сумма гидродинамического и магнитного) гидростатическим. Уравнение (2.1) является следствием уравнения непрерывности, уравнение (2.2) получено в результате усреднения по толщине слоя уравнения изменения импульса, уравнения (2.3), (2.4) описывают изменения магнитного поля, (2.5) — условие бездивергентности магнитного поля, усредненное по высоте. В случае, когда внешнее вертикальное магнитное поле  $B_0 = 0$ , уравнения (2.1)–(2.5) сводятся к хорошо известным магнитогидродинамическим уравнениям мелкой воды [18, 23, 30, 31]. Система уравнений (2.1)–(2.3) является замкнутой и используется для анализа линейных волн и нелинейных взаимодействий [17, 25].

Поясним физический смысл дополнительных уравнений (2.4), (2.5) [26]. В традиционном выводе магнитогидродинамических уравнений мелкой воды из полной системы трехмерных уравнений магнитной гидродинамики вертикальная составляющая магнитного поля принимается равной нулю.

Отметим, что наличие вертикального магнитного поля приводит к существенным изменениям горизонтальной динамики магнитного поля в приближении мелкой воды. Горизонтальное магнитное поле соленоидально для случая течений без внешнего магнитного поля, в присутствии же внешнего вертикального магнитного поля это не так. Вертикальные изменения магнитного поля отличны от нуля, и условие бездивергентности содержит вертикальную составляющую (2.5). Поэтому, чтобы полностью описать динамику магнитного поля, необходимо добавить уравнение (2.4) для вертикального изменения магнитного поля. Таким образом, магнитное поле является принципиально трехмерным, и каждая из его компонент зависит только от горизонтальных координат. Условие бездивергентности (2.5) выполняется тождественно как следствие уравнений (2.3), (2.4) для магнитного поля и используется для задания корректных начальных условий. Уравнения (2.4) и (2.5) являются важными в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды во внешнем магнитном поле не только как технические детали, необходимые для получения правильного следствия из условия бездивергентности для приближения мелкой воды, но также они показывают существование  $z$ -компоненты магнитного поля, уравнение для которой отделяется от уравнений мелкой воды [26]. Для описания крупномасштабных волн магнито-Россби используем приближение бета-плоскости для силы Кориолиса по аналогии с вращающимися течениями нейтральной жидкости на сфере.

Считаем величину вертикальной компоненты скорости вращения изменяющейся в зависимости от широты  $\theta$ . Волны, вызванные широтной зависимостью силы Кориолиса, являются аналогами волн Россби в геофизической гидродинамике и называются волнами магнито-Россби. В приближении бета-плоскости полагаем изменения параметра Кориолиса  $f$  малыми при малых изменениях широты и представляем в следующем виде:

$$f = 2\Omega \sin \theta \approx 2\Omega \sin \theta_0 + 2\Omega(\theta - \theta_0) \cos \theta_0 = f_0 + \beta y. \quad (2.6)$$

Здесь  $\Omega$  — угловая скорость вращения слоя,  $f_0 = 2\Omega \sin \theta_0$  и  $\beta = \partial f / \partial y$ . С учетом зависимости параметра Кориолиса от широты (2.6) уравнения изменения импульса (2.2) описывают вращающиеся течения на сфере в декартовой системе координат. Таким образом, имеем из (2.1)–(2.3) в качестве исходных уравнений для исследования волн магнито-Россби следующую систему:

$$\partial_t h + \operatorname{div}(h\mathbf{v}) = 0, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(h\mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(h\mathbf{v}) + h\mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)(h\mathbf{B}) - \\ - h\mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} + \operatorname{grad} \left( \frac{1}{2}gh^2 \right) + B_0\mathbf{B} + \\ + (f_0 + \beta y)h[\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}] = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\partial_t(h\mathbf{B}) + \operatorname{rot}(h[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]) - B_0\mathbf{v} = 0, \quad (2.9)$$

$$\partial_t B_z + B_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.10)$$

Система уравнений (2.7)–(2.10) используется ниже для изучения волн магнито-Росби во внешнем вертикальном магнитном поле. При  $B_0 = 0$  исходная система (2.7)–(2.10) переходит в систему магнито-гидродинамических уравнений в приближении мелкой воды на бета-плоскости и будет использована для анализа нелинейных процессов в горизонтальных (тороидальном и полоидальном) полях. Ниже мы приводим полное решение линейной задачи как в случае внешнего вертикального магнитного поля, так и в случае его отсутствия, что необходимо для построения теории возмущений в слабонелинейном приближении.

### 2.2. Линейные волны Росби в вертикальном магнитном поле

Линеаризуя исходную систему (2.7)–(2.9) относительно состояния покоя ( $h = H = \text{const}$ ,  $v_x = v_y = v_z = 0$ ), получим

$$\partial_t h + H\partial_x v_x + H\partial_y v_y = 0, \quad (2.11)$$

$$H\partial_t v_x + gH\partial_x h + B_0 B_x - (f_0 + \beta y)Hv_y = 0, \quad (2.12)$$

$$H\partial_t v_y + gH\partial_y h + B_0 B_y + (f_0 + \beta y)Hv_x = 0, \quad (2.13)$$

$$H\partial_t B_x - B_0 v_x = 0, \quad (2.14)$$

$$H\partial_t B_y - B_0 v_y = 0. \quad (2.15)$$

Продифференцируем уравнение (2.12) по  $y$ :

$$\begin{aligned} H\partial_y \partial_t v_x + gH\partial_y \partial_x h + B_0 \partial_y B_x - \\ - f_0 H \partial_y v_y - \beta H v_y = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Используем далее приближение бета-эффекта [14], так же как и для течений нейтральной жидкости. Ищем решение системы (2.11)–(2.15) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} h \\ v_x \\ v_y \\ B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 \\ v_{x0} \\ v_{y0} \\ B_{x0} \\ B_{y0} \end{pmatrix} \exp [i(k_x x + k_y y - \omega t)]. \quad (2.17)$$

Подставляя это решение в систему (2.11)–(2.15) и в уравнение (2.16), получим систему линейных уравнений

$$A \begin{pmatrix} h_0 \\ v_{x0} \\ v_{y0} \\ B_{x0} \\ B_{y0} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.18)$$

в которой линейный оператор  $A$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -i\omega & ik_x H & ik_y H & 0 & 0 \\ -gHk_x k_y & \omega k_y H & -ik_y f_0 H - \beta H & ik_y B_0 & 0 \\ igHk_y & f_0 H & -i\omega H & 0 & B_0 \\ 0 & B_0 & 0 & -i\omega H & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & 0 & -i\omega H \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Система (2.18) имеет нетривиальные решения, когда выполняется условие  $\det A = 0$ . Несложными преобразованиями получим из (2.18) дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \omega^4 - \omega^2 \left[ f_0^2 + C_0^2 k^2 + 2 \left( \frac{v_A}{H} \right)^2 \right] - \omega C_0^2 \beta k_x + \\ + \left( \frac{v_A}{H} \right)^2 \left[ C_0^2 k^2 + \left( \frac{v_A}{H} \right)^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где  $v_A = B_0$  — альфвеновская скорость и  $C_0 = \sqrt{gH}$ . В высокочастотном приближении в выражении (2.20) исчезает зависимость параметра Кориолиса от широты и дисперсионное соотношение описывает моду магнито-Пуанкаре в магнитной гидродинамике в приближении мелкой воды. Данное приближение приводит к дисперсионному соотношению, в котором динамику волны определяют гравитационная сила, вращение и внешнее вертикальное магнитное поле:

$$\omega^2 \approx f_0^2 + C_0^2 k^2 + 2 \left( \frac{v_A}{H} \right)^2. \quad (2.21)$$

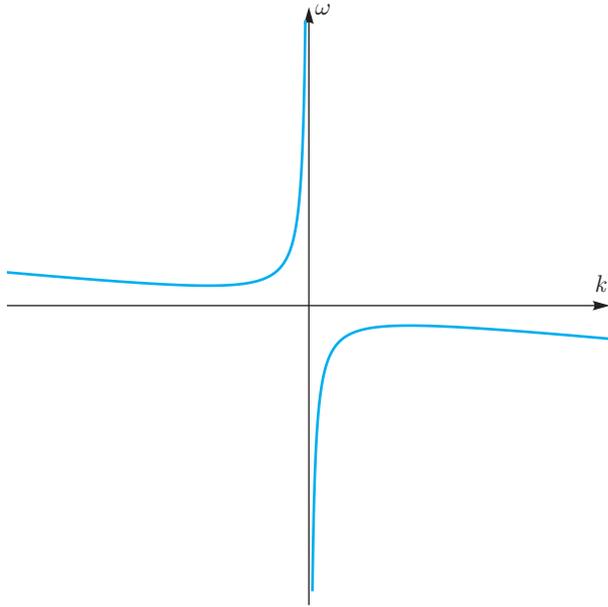


Рис. 2. Дисперсионные кривые волн Россби магнитной гидродинамики во внешнем вертикальном поле

В низкочастотном приближении дисперсионное соотношение (2.20) описывает крупномасштабные движения волн Россби. Дисперсионное соотношение для волн Россби в магнитной гидродинамике в приближении мелкой воды видоизменяется в присутствии внешнего вертикального магнитного поля  $B_0$  и принимает вид:

$$\omega = \frac{(v_A/H)^2 [C_0^2 k^2 + (v_A/H)^2]}{C_0^2 \beta k_x}. \quad (2.22)$$

Заметим, что в интервале между высокочастотными решениями дисперсионного уравнения в виде мод магнито-Пуанкаре и низкочастотными решениями для медленных волн магнито-Россби дисперсионное соотношение допускает моды быстрых волн магнито-Россби [4].

Соотношение (2.22) описывает волны Россби в приближении мелкой воды, распространяющиеся вдоль направления  $k$ . Основным механизмом их образования заключается в сдвиге вращающегося потока вследствие того, что сила Кориолиса изменяется в зависимости от широты. Общий вид дисперсионных кривых представлен на рис. 2. Решением линеаризованной системы являются волны с амплитудой  $\alpha(\mathbf{k})$ . В общем виде решение  $\mathbf{u}_1$  линейной системы дифференциальных уравнений (2.11)–(2.15) выглядит следующим образом:

$$\mathbf{u}_1 = \int dk_x dk_y \mathbf{a} \alpha(\mathbf{k}) \exp [i(k_x x + k_y y - \omega(\mathbf{k})t)] + \text{с.с.}, \quad (2.23)$$

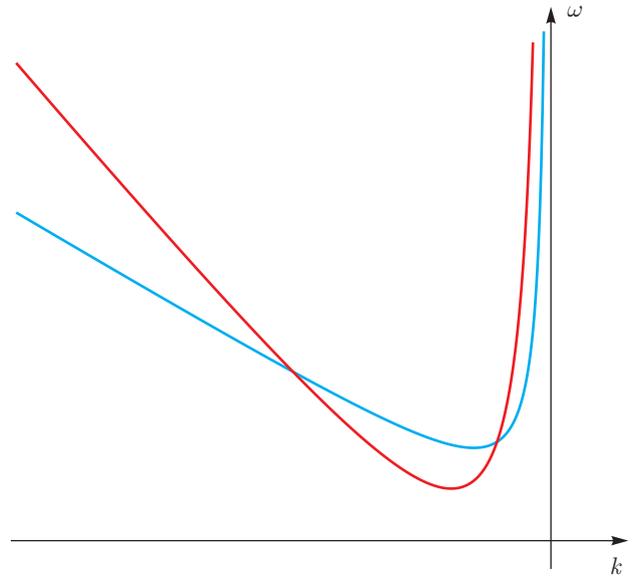


Рис. 3. Дисперсионные кривые волн Россби магнитной гидродинамики в отсутствие крупномасштабного магнитного поля

где  $\omega(\mathbf{k})$  определяется выражением (2.20),  $\mathbf{a}$  — собственный вектор линейного оператора  $A$ ,

$$A\mathbf{a} = 0. \quad (2.24)$$

Система (2.24) имеет нетривиальные решения  $\mathbf{a} \neq 0$ , так как выполняется условие (2.20). Отсюда найдем собственный вектор

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \omega^2 k_x H - k_x H \left(\frac{B_0}{H}\right)^2 - i\omega k_y f H \\ \omega^3 - \omega \left(\frac{B_0}{H}\right)^2 - \omega k_y^2 g H \\ \omega k_x k_y g H - i\omega^2 f \\ -\omega^2 \left(\frac{B_0}{H}\right) - \left(\frac{B_0}{H}\right)^3 - k_y^2 g H \left(\frac{B_0}{H}\right) \\ -k_x k_y g H \left(\frac{B_0}{H}\right) + i\omega f \left(\frac{B_0}{H}\right) \end{pmatrix} = \mathbf{a}(\mathbf{k}), \quad (2.25)$$

где  $\omega = \omega(\mathbf{k})$  согласно (2.20).

Для того чтобы оценить возможность межволновых взаимодействий для описанной волны, необходимо проанализировать ее дисперсионное соотношение, определить асимптотику дисперсионных кривых. Условие синхронизма, необходимое для возникновения взаимодействия между волнами с разными волновыми векторами и частотами в общем случае имеет вид

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2).$$

Изобразим это условие на графике (рис. 3). Первое слагаемое задает точку  $(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$  дисперсионной кривой одного из решений, второе слагаемое — точку  $(\mathbf{k}_2, \omega(\mathbf{k}_2))$  на смещенной на  $(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$  дисперсионной кривой. Наличие пересечения будет означать существование такого набора из трех волн, который удовлетворяет условию синхронизма. Качественный анализ дисперсионных кривых позволяет определить, могут ли выполняться приведенное выше условие синхронизма для волн Россби во внешнем вертикальном магнитном поле. На рис. 3 видно, что дисперсионная кривая  $\omega(\mathbf{k})$  пересекает такую же кривую, смещенную от начала координат на  $(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$ , а значит, найдутся такие три волны, для которых будут выполнены условия синхронизма. Таким образом, в случае вертикального внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  имеют место трехволновые взаимодействия.

### 2.3. Линейные волны Россби в горизонтальном магнитном поле

Исследуем теперь линейную задачу в отсутствие внешнего магнитного поля. Как указывалось выше, в этом случае система (2.7)–(2.9) имеет стационарные решения в виде горизонтального (тороидального, полоидального и их суммы) магнитного поля. Рассмотрим в качестве исходных уравнений для исследования волн Россби в горизонтальном магнитном поле систему (2.7)–(2.9) при  $B_0 = 0$ . Линеари-

зуем эту систему относительно стационарного решения, описывающего горизонтальное поле  $B^0$ :  $h = H$ ,  $v_x = v_y = 0$ ,  $B_x = B_x^0$ ,  $B_y = B_y^0$ :

$$\partial_t h + H\partial_x v_x + H\partial_y v_y = 0, \quad (2.26)$$

$$\partial_t \partial_y v_x - B_x^0 \partial_x \partial_y B_x - B_y^0 \partial_y^2 B_x + g\partial_x \partial_y h - f_0 \partial_y v_y - \beta v_y = 0, \quad (2.27)$$

$$\partial_t v_y - B_x^0 \partial_x B_y - B_y^0 \partial_y B_y + g\partial_y h + f_0 v_x = 0, \quad (2.28)$$

$$\partial_t B_x - B_x^0 \partial_x v_x - B_y^0 \partial_y v_x = 0, \quad (2.29)$$

$$\partial_t B_y - B_y^0 \partial_y v_y - B_x^0 \partial_x v_y = 0. \quad (2.30)$$

Из последних двух уравнений, (2.29) и (2.30), следует условие бездивергентности магнитного поля:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0.$$

Учитывая это условие, после подстановки решения в виде волны получим систему линейных уравнений

$$A_h \begin{pmatrix} h_0 \\ v_{x0} \\ v_{y0} \\ B_{x0} \\ B_{y0} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.31)$$

в которой оператор  $A_h$  имеет вид

$$A_h = \begin{pmatrix} -i\omega & ik_x H & ik_y H & 0 & 0 \\ -gk_x k_y & \omega k_y & -ik_y f_0 - \beta & k_y (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0) & 0 \\ ik_y g & f_0 & -i\omega & 0 & -i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0) \\ 0 & -i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0) & 0 & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0) & 0 & -i\omega \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Дисперсионное соотношение с учетом обозначений  $\mathbf{v}_A = \mathbf{B}^0$  и  $C_0^2 = gh$  имеет вид

$$\omega^4 - \omega^2 [2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 + f_0^2 + C_0^2 k^2] - \omega k_x C_0^2 \beta + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 [C_0^2 k^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2] = 0. \quad (2.33)$$

Аналогично случаю (2.22) с вертикальным внешним магнитным полем, для низких частот и длинноволновых течений дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega = \frac{C_0^2 k^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^4}{C_0^2 k_x \beta} \quad (2.34)$$

и описывает моду медленных магнитных волн Россби в магнитной гидродинамике в приближении мелкой воды [4]. Общий вид дисперсионных кривых представлен выше на рис. 2.

Проанализируем качественно полученные дисперсионные кривые, чтобы выяснить возможность реализации слабонелинейных взаимодействий. Для того чтобы волны Россби испытывали трехволновые взаимодействия, необходимо, чтобы три волны удовлетворяли условию синхронизма

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \quad (2.35)$$

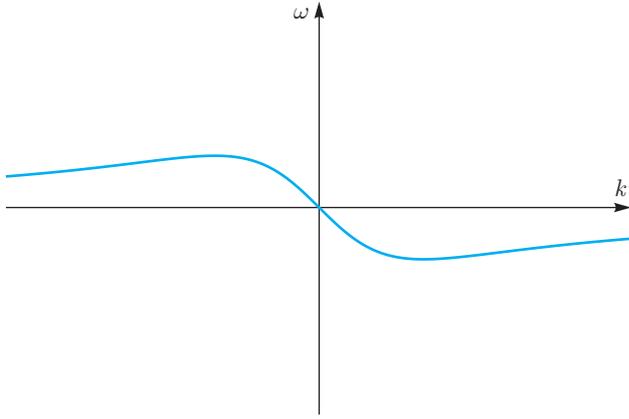


Рис. 4. Условие синхронизма трех волн Россби магнитной гидродинамики во внешнем вертикальном поле

Рассмотрим три волны с дисперсионным соотношением (2.34). Их трехволновые взаимодействия возможны при выполнении условия (2.35), что соответствует наличию пересечения дисперсионных кривых на рис. 3. Наличие пересечения указывает на возможность трехволновых взаимодействий магнито-гидродинамических волн Россби в горизонтальном магнитном поле  $\mathbf{B}^0 = (B_x^0, B_y^0)$ .

В частном случае тороидального магнитного поля дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega = \frac{k_x(v_{Ax})^2[C_0^2k^2 + (k_x v_{Ax})^2]}{C_0^2\beta}. \quad (2.36)$$

Такая конфигурация магнитного поля характерна для течений в солнечном тахоклине [2, 3].

В случае полоидального магнитного поля дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega = \frac{C_0^2k^2(k_y v_{Ay})^2 + (k_y v_{Ay})^4}{C_0^2k_x\beta}. \quad (2.37)$$

В пределе нейтральной жидкости,  $B_x^0 = 0, B_y^0 = 0$ , дисперсионное соотношение для волн Россби принимает вид

$$\omega^3 - \omega(f_0^2 + C_0^2k^2) - C_0^2\beta k_x = 0. \quad (2.38)$$

В случае длинноволнового приближения дисперсионное уравнение (2.38) имеет решение (рис. 4)

$$\omega = -\frac{k_x C_0^2\beta}{f_0^2 + C_0^2k^2}. \quad (2.39)$$

Заметим, что в случае отсутствия горизонтального магнитного поля линеаризованные уравнения для магнитного поля приводятся к тривиальному виду

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, волна перестает быть магнито-гидродинамической, и дисперсионное соотношение опи-

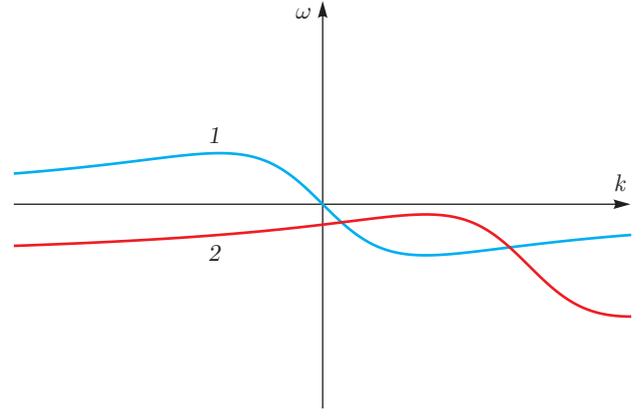


Рис. 5. Условие синхронизма для трех волн Россби магнитной гидродинамики в отсутствие крупномасштабного магнитного поля

сывает динамику только гидродинамических параметров. Собственный вектор в этом случае имеет вид

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \omega k_x H - i k_y f H \\ \omega^2 - k_y^2 g H \\ k_x k_y g H - i \omega f \end{pmatrix} = \mathbf{a}(\mathbf{k}), \quad (2.40)$$

где  $\omega = \omega(\mathbf{k})$  в соответствии с (2.39).

Проанализируем качественно полученные дисперсионные кривые, чтобы выяснить возможность реализации слабонелинейных взаимодействий. На рис. 5 для случая без горизонтального магнитного поля показано, что найдутся такие  $\omega_1, \mathbf{k}_1, \omega_2, \mathbf{k}_2$  и  $\omega_3, \mathbf{k}_3$ , при которых выполняются условия синхронизма  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$ . Действительно, координаты точек на кривой 1 представляют собой волновой вектор и частоту первой волны. Точки на кривой 2, которая смещена относительно кривой 1 на  $\omega_1, \mathbf{k}_1$ , имеют координаты  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  — сумма двух волновых векторов,  $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2)$  — сумма двух частот. Тот факт, что кривая 2 пересекает кривую 1, означает, что в точке пересечения координаты точки на кривой 1 и кривой 2 совпадают, т. е. выполнено условие синхронизма. Поэтому в случае отсутствия горизонтального магнитного поля для получившейся гидродинамической задачи имеют место трехволновые взаимодействия волн Россби [32].

### 3. ТРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОЛН РОССБИ ВО ВНЕШНЕМ ВЕРТИКАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Для получения уравнений трехволновых взаимодействий воспользуемся асимптотическим методом многомасштабных разложений [33]. Решение системы (2.7)–(2.10) представим в виде ряда по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2 + \dots, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{u}_1$  — решение линеаризованной системы (2.18),  $\mathbf{u}_2$  — поправка, описывающая влияние квадратичной нелинейности. Выписав слагаемые, пропорциональные  $\varepsilon^2$ , получим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений относительно  $\mathbf{u}_2$ , содержащую в правой своей части резонансные слагаемые, приводящие к линейному росту решения (по времени и по координате). Таким образом, нарушается условие  $\varepsilon^2 u_2 \ll \varepsilon u_1$  на больших масштабах. Поэтому для того, чтобы исключить влияние резонансных слагаемых, введем зависимость амплитуды волны от больших временных и больших пространственных масштабов в виде

$$\mathbf{u}_1(T_1, X_1, Y_1) \exp[i(k_x X_0 + k_y Y_0 - \omega T_0)].$$

Эволюционное уравнение для медленно меняющейся амплитуды обеспечивает равномерную сходимость асимптотического ряда. Перейдем, таким образом, от аргументов  $t, x, y$  к «быстрым» ( $T_0, X_0, Y_0$ ) и «медленным» ( $T_1, X_1, Y_1$ ) аргументам в соответствии с соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial Y_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y_1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставим в исходную систему (2.7)–(2.10) выражения (3.1) и (3.2) и выпишем слагаемые, пропорциональные  $\varepsilon^2$ :

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{c} \frac{\partial h_2}{\partial T_0} + H \frac{\partial v_{x2}}{\partial X_0} + H \frac{\partial v_{y2}}{\partial Y_0} \\ H \frac{\partial^2 v_{x2}}{\partial T_0 \partial Y_0} + gH \frac{\partial^2 h_2}{\partial X_0 \partial Y_0} + B_0 \frac{\partial B_{x2}}{\partial y_0} - f_0 H \frac{\partial v_{y2}}{\partial Y_0} - \beta H v_{y2} \\ H \frac{\partial v_{y2}}{\partial T_0} + gH \frac{\partial h_2}{\partial Y_0} + B_0 B_{y2} + f_0 H \partial v_{x2} \\ H \frac{\partial B_{x2}}{\partial T_0} - B_0 v_{x2} \\ H \frac{\partial B_{y2}}{\partial T_0} - B_0 v_{y2} \end{array} \right) = \\ &= - \left( \begin{array}{c} \frac{\partial h_1}{\partial T_1} + H \frac{\partial v_{x1}}{\partial X_1} + H \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_1} \\ H \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial T_1 \partial Y_0} + H \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial T_0 \partial Y_1} + gH \frac{\partial^2 h_1}{\partial X_1 \partial Y_0} + gH \frac{\partial^2 h_1}{\partial X_0 \partial Y_1} + B_0 \frac{\partial B_{x1}}{\partial Y_1} - f_0 H \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_1} \\ H \frac{\partial v_{y1}}{\partial T_1} + gH \frac{\partial h_1}{\partial Y_1} \\ H \frac{\partial B_{x1}}{\partial T_1} \\ H \frac{\partial B_{y1}}{\partial T_1} \end{array} \right) - \\ &- \left( \begin{array}{c} \frac{h_1 v_{x1}}{\partial X_0} + \frac{h_1 v_{y1}}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial^2 h_1 v_{x1}}{\partial T_0 \partial Y_0} + g \frac{\partial h_1}{\partial X_0} \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} - f_0 h_1 \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_0} - \beta h_1 v_{y1} \\ \frac{\partial h_1 v_{y1}}{\partial T_0} + g h_1 \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} + f_0 h_1 v_{x1} \\ \frac{\partial h_1 B_{x1}}{\partial T_0} \\ \frac{\partial h_1 B_{y1}}{\partial T_0} \end{array} \right). \quad (3.3) \end{aligned}$$

В правой части полученных уравнений содержатся слагаемые, включающие найденные решения задачи первого приближения, которые могут вызвать резонанс с оператором левой части. Для исключения резонансных слагаемых в правой части воспользуемся условием ортогональности

$$\det \begin{pmatrix} -i\omega & ik_x H & ik_y H & 0 & 0 \\ -gHk_x k_y & \omega k_y H & -ik_y f_0 H - \beta H & ik_y B_0 & 0 \\ igHk_y & f_0 H & -i\omega H & 0 & B_0 \\ 0 & B_0 & 0 & -i\omega H & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & 0 & -i\omega H \end{pmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

Откуда получаем дисперсионное соотношение (2.20). Собственный вектор  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^T$  удовлетворяет следующей системе:

$$-i\omega z_1 + ik_x H z_2 + ik_y H z_3 = 0, \quad (3.5)$$

$$-gHk_x k_y z_1 + \omega k_y H z_2 - (ik_y f_0 H + \beta H) z_3 + ik_y B_0 z_4 = 0, \quad (3.6)$$

$$igHk_y z_1 + f_0 H z_2 - i\omega H z_3 + B_0 z_5 = 0, \quad (3.7)$$

$$B_0 z_2 - i\omega H z_4 = 0, \quad (3.8)$$

$$B_0 z_3 - i\omega H z_5 = 0. \quad (3.9)$$

Выражение для собственного вектора с точностью до константы выглядит следующим образом:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} igk_x H^4 f \lambda_0 + gk_y \lambda_0^2 H^4 + gk_y H^2 B_0^2 \\ iH^3 f \lambda_0^2 - k_x k_y g H^4 \lambda_0 \\ \lambda_0^3 H^3 + B_0^2 H \lambda_0 + k_x^2 g H^4 \lambda_0 \\ -H^2 f \lambda_0 B_0 - ik_x k_y g H^3 B_0 \\ iB_0 \lambda_0^3 H^2 + iB_0^3 \lambda_0 + ik_x^2 g B_0 H^3 \lambda_0 \end{pmatrix} c, \quad (3.10)$$

правой части выражения (3.3) ядру оператора  $A$  (2.19), известным как условие совместности. Обозначим собственный вектор оператора  $A^*$  как  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^T$ . Найдем собственные векторы оператора  $A^*$ :

где  $c$  — произвольная константа. Представим решение в виде трех волн магнито-Россби, удовлетворяющих условию синхронизма (2.35), где  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$ :

$$\mathbf{u}_1 = \phi \mathbf{a}(\mathbf{k}_1) \exp(i\theta_1) + \psi \mathbf{a}(\mathbf{k}_2) \exp(i\theta_2) + \chi \mathbf{a}(\mathbf{k}_3) \exp(i\theta_3) + \text{с.с.}, \quad (3.11)$$

где  $\phi, \psi, \chi$  — амплитуды взаимодействующих волн,  $\theta_i = -\omega(\mathbf{k}_i)T_0 + k_{xi}X_0 + k_{yi}Y_0$  — фазы волн,  $\mathbf{a}$  — собственный вектор оператора  $A$ ,  $\mathbf{a}^*$  — комплексно-сопряженный вектор. Правая часть системы уравнений (3.3), пропорциональная  $\exp(i\theta_1)$ , после выполнения операций дифференцирования примет вид

$$- \begin{pmatrix} a_1 \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + a_2 H \frac{\partial \phi}{\partial X_1} + a_3 H \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} \\ a_2 H \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + a_1 g H \frac{\partial \phi}{\partial X_1} \\ -i\omega(\mathbf{k}_1) a_3 H \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} + ik_{y1} a_3 H \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + 2ik_{y1} a_1 g H \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} + a_5 B_0 \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} + a_2 f_0 H \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} \\ a_4 H \frac{\partial \phi}{\partial T_1} \\ a_5 H \frac{\partial \phi}{\partial T_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2ik_{x1} a_1 a_2 \psi^* \chi + 2ik_{y1} a_1 a_3 \psi^* \chi \\ -2i\omega(\mathbf{k}_1) a_1 a_2 \psi^* \chi + 2ik_{x1} g a_1^2 \psi^* \chi - f_0 a_1 a_3 \psi^* \chi \\ \omega(\mathbf{k}_1) k_{y1} a_1 a_3 \psi^* \chi - 2k_{y2} k_{y3}^2 g a_1^2 \psi^* \chi + 2ik_{y1} f_0 a_1 a_2 \psi^* \chi + \beta a_1 a_2 \psi^* \chi \\ -2i\omega(\mathbf{k}_1) a_1 a_4 \psi^* \chi \\ -2i\omega(\mathbf{k}_1) a_1 a_5 \psi^* \chi \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Домножим выражение (3.12) на собственный вектор сопряженного оператора  $\mathbf{z}$  (3.10). Используя условие совместности  $A^*\mathbf{z} = 0$ , получим следующее уравнение для амплитуды  $\phi$  первой волны:

$$s_{v1}\phi = f_{v1}\psi^*\chi, \quad (3.13)$$

где  $s_{v1}$  — дифференциальный оператор по медленному времени и координатам  $T_1, X_1, Y_1$  и коэффициент  $f_{v1}$  зависят только от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн:

$$s_{v1} = r_{v1}\frac{\partial}{\partial T_1} + p_{v1}\frac{\partial}{\partial X_1} + q_{v1}\frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (3.14)$$

$$r_{v1} = z_1a_1 + z_2a_2H + ik_{y1}z_3a_3H + z_4a_4H + z_5a_5H, \quad (3.15)$$

$$p_{v1} = z_1a_2H + z_2a_1gH, \quad (3.16)$$

$$q_{v1} = z_1a_3H - i\omega(\mathbf{k}_1)z_3a_3H + 2ik_{y1}z_3a_1gH + z_3a_5B_0 + z_3a_2f_0H. \quad (3.17)$$

В выражениях (3.14)–(3.17) собственный вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_1)$ ,

$$f_{v1} = f_{v1}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_0, \beta, g, H, B_0) = 2iz_1a_1(k_{x1}a_2 + k_{y1}a_3) + 2iz_2a_1[\omega(\mathbf{k}_1)a_2 + k_{x1}ga_1 - f_0a_3] + z_3a_1[\omega(\mathbf{k}_1)k_{y1}a_3 - 2k_{y2}k_{y3}ga_1 + 2ik_{y1}f_0a_2 + \beta a_2] - 2i\omega(\mathbf{k}_1)a_1(z_4a_4 + z_5a_5). \quad (3.18)$$

В выражении (3.18) произведение вида  $a_i a_j = [a_i^*(\mathbf{k}_2)a_j(\mathbf{k}_3) + a_i(\mathbf{k}_3)a_j^*(\mathbf{k}_2)]/2$ .

Аналогично, для слагаемых, пропорциональных  $\exp(i\theta_2)$ , домножая правую часть системы (3.3) на собственный вектор  $\mathbf{z}$ , получим уравнение для амплитуды  $\psi$  второй волны:

$$s_{v2}\psi = f_{v2}\phi^*\chi, \quad (3.19)$$

где

$$s_{v2} = r_{v2}\frac{\partial}{\partial T_1} + p_{v2}\frac{\partial}{\partial X_1} + q_{v2}\frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (3.20)$$

$$r_{v2} = z_1a_1 + z_2a_2H + ik_{y2}z_3a_3H + z_4a_4H + z_5a_5H, \quad (3.21)$$

$$p_{v2} = z_1a_2H + z_2a_1gH, \quad (3.22)$$

$$q_{v2} = z_1a_3H - i\omega(\mathbf{k}_1)z_3a_3H + 2ik_{y1}z_3a_1gH + z_3a_5B_0 + z_3a_2f_0H. \quad (3.23)$$

В выражениях (3.20)–(3.23) собственный вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_2)$ . Коэффициент  $f_{v2}$  имеет вид

$$f_{v2} = f_{v2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_0, \beta, g, H, B_0) = 2iz_1a_1(k_{x2}a_2 + k_{y2}a_3) + 2iz_2a_1[\omega(\mathbf{k}_1)a_2 + k_{x2}ga_1 - f_0a_3] + z_3a_1[\omega(\mathbf{k}_2)k_{y2}a_3 - 2k_{y1}k_{y3}ga_1 + 2ik_{y3}f_0a_2 + \beta a_2] - 2i\omega(\mathbf{k}_3)a_1(z_4a_4 + z_5a_5). \quad (3.24)$$

В выражении (3.24) произведение вида  $a_i a_j = (a_i^*(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_3) + a_i(\mathbf{k}_3)a_j^*(\mathbf{k}_1))/2$ .

Выписав слагаемые, пропорциональные  $\exp(i\theta_3)$ , из правой части (3.3), получим уравнение для амплитуды  $\chi$  третьей взаимодействующей волны:

$$s_{v3}\chi = f_{v3}\phi\psi, \quad (3.25)$$

где

$$s_{v3} = r_{v3}\frac{\partial}{\partial T_1} + p_{v3}\frac{\partial}{\partial X_1} + q_{v3}\frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (3.26)$$

$$r_{v3} = z_1a_1 + z_2a_2H + ik_{y3}z_3a_3H + z_4a_4H + z_5a_5H, \quad (3.27)$$

$$p_{v3} = z_1a_2H + z_2a_1gH, \quad (3.28)$$

$$q_{v3} = z_1a_3H - i\omega(\mathbf{k}_1)z_3a_3H + 2ik_{y1}z_3a_1gH + z_3a_5B_0 + z_3a_2f_0H. \quad (3.29)$$

В выражениях (3.26)–(3.29) собственный вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_3)$ . Коэффициент взаимодействия  $f_{v3}$  имеет вид

$$f_{v3} = f_{v3}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_0, \beta, g, H, B_0) = 2iz_1a_1(k_{x3}a_2 + k_{y3}a_3) + 2iz_2a_1[\omega(\mathbf{k}_3)a_2 + k_{x3}ga_1 - f_0a_3] + z_3a_1[\omega(\mathbf{k}_3)k_{y3}a_3 - 2k_{y1}k_{y2}ga_1 + 2ik_{y2}f_0a_2 + \beta a_2] - 2i\omega(\mathbf{k}_2)a_1(z_4a_4 + z_5a_5). \quad (3.30)$$

В выражении (3.30) произведение вида  $a_i a_j = (a_i(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_2) + a_i(\mathbf{k}_2)a_j(\mathbf{k}_1))/2$ .

Таким образом, получена система взаимодействующих амплитуд трех волн для волн Россби в магнитной гидродинамике в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле. Для удобства дальнейшего анализа выпишем полученную систему в следующем виде:

$$s_{v1}\phi = f_{v1}\psi^*\chi, \quad (3.31)$$

$$s_{v2}\psi = f_{v2}\phi^*\chi, \quad (3.32)$$

$$s_{v3}\chi = f_{v3}\phi\psi. \quad (3.33)$$

Мы получили систему из трех уравнений для амплитуд  $\phi, \psi, \chi$  взаимодействующих волн. Система

(3.31)–(3.33) описывает трехволновые взаимодействия волн Россби, удовлетворяющих условию синхронизма (2.35). В уравнениях (3.31)–(3.33) коэффициенты  $f_{v1}$ ,  $f_{v2}$  и  $f_{v3}$  определены соответственно в (3.18), (3.24) и (3.30), а операторы  $s_{v1}$ ,  $s_{v2}$  и  $s_{v3}$  — в (3.14), (3.20) и (3.26).

Используем систему (3.31)–(3.33) для качественного анализа [34] параметрических неустойчивостей волн Россби. Рассмотрим случай, когда амплитуда одной из трех взаимодействующих волн в начальный момент много больше амплитуд двух других волн,  $\phi \gg \psi, \chi$ . Тогда амплитуду первой волны можно приближенно считать постоянной,  $\phi = \phi_0$ ; при этом обратным влиянием волн с амплитудами  $\psi$  и  $\chi$  на волну накачки с амплитудой  $\phi$  можно пренебречь. Таким образом, система (3.31)–(3.33) принимает вид

$$s_{v2}\psi = f_{v2}\phi_0^*\chi, \tag{3.34}$$

$$s_{v3}\chi = f_{v3}\phi_0\psi. \tag{3.35}$$

Решение полученной линейной системы уравнений ищем в виде

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix} \exp(\Gamma T_1). \tag{3.36}$$

Отсюда найдем инкремент неустойчивости

$$\Gamma = \sqrt{\frac{|f_{v2}f_{v3}|}{|r_{v2}r_{v3}|}}|\phi_0| > 0, \tag{3.37}$$

где  $f_{v2}$  и  $f_{v3}$  определены в (3.24) и (3.30), а  $r_{v2}$  и  $r_{v3}$  — в (3.21) и (3.27).

Таким образом, одна волна магнито-Россби с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  и частотой  $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$  распадается на две волны магнито-Россби с волновыми векторами  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$ , частотами  $\omega_2$  и  $\omega_3$  с инкрементом (3.37).

Возможны два случая развития неустойчивости, когда амплитуды растущих волн становятся сравнимы с амплитудой волны накачки: взрывной рост и насыщение неустойчивости. Рассмотренное выше приближение справедливо, пока амплитуда  $\phi_0$  волны накачки много больше амплитуд двух других волн магнито-Россби,  $\psi$  и  $\chi$ . Однако на определенной стадии процесса амплитуды растущих волн станут сравнимы с амплитудой  $\phi_0$ . В рассмотрение, таким образом, необходимо включить уравнение (3.31). При условии  $f_{v1} < 0$  амплитуда  $\phi$  волны накачки, так же как и скорости роста амплитуд  $\psi$  и  $\chi$ , уменьшаются, что приводит к насыщению параметрической неустойчивости.

При наличии линейного затухания систему (3.34), (3.35) запишем в виде [27]

$$s_{v2}\psi + \eta_2\psi = f_{v2}\phi_0^*\chi, \tag{3.38}$$

$$s_{v3}\chi + \eta_3\chi = f_{v3}\phi_0\psi, \tag{3.39}$$

где слагаемые  $\eta_2\psi$  и  $\eta_3\chi$  определяют затухание. В этом случае экспоненциально растущие решения вида (3.36) будут существовать только при условии

$$\phi_0 > \sqrt{\eta_2\eta_3|r_{v2}r_{v3}|/|f_{v2}f_{v3}|}.$$

Таким образом, существует пороговое значение амплитуды волны накачки,  $\phi_0^{cr}$ , начиная с которого развивается неустойчивость,

$$\phi_0^{cr} = \sqrt{\frac{\eta_2\eta_3}{|f_{v2}f_{v3}|}|r_{v2}r_{v3}|}, \tag{3.40}$$

с инкрементом

$$\Gamma = \sqrt{\frac{|f_{v2}f_{v3}|}{|r_{v2}r_{v3}|}}\phi_0^{cr}. \tag{3.41}$$

Рассмотрим теперь случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн много меньше амплитуд двух других волн,  $\phi \ll \psi, \chi$ , так что можно считать амплитуды  $\psi$  и  $\chi$  постоянными,  $\psi = \psi_0$  и  $\chi = \chi_0$ . Уравнение для амплитуды  $\phi$  (3.31) принимает вид

$$s_{v1}\phi = f_{v1}\psi_0^*\chi_0. \tag{3.42}$$

Ищем решение уравнения (3.42) в виде

$$\phi = \phi' \exp(\Gamma T_1). \tag{3.43}$$

Подставляя в (3.42) решение в этом виде, для коэффициента усиления получаем

$$\Gamma = \frac{|f_{v1}|}{|r_{v1}|}|\psi_0\chi_0| > 0, \tag{3.44}$$

где величина  $f_{v1}$  определена в (3.18), а  $r_{v1}$  — в (3.15). В данном случае параметрического усиления две начальные волны магнито-Россби с волновыми векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  и частотами  $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$  и  $\omega_2 = \omega(\mathbf{k}_2)$  усиливают волну магнито-Россби с волновым вектором  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  и частотой  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  с коэффициентом усиления (3.44).

Рассмотренное выше приближение справедливо, пока амплитуды  $\psi_0$  и  $\chi_0$  волн накачки много больше амплитуды  $\phi$  другой волны магнито-Россби. Однако на определенной стадии процесса амплитуда растущей волны станет сравнима с амплитудами  $\psi_0, \chi_0$ . В рассмотрение, таким образом, необходимо включить уравнения (3.32), (3.33). Амплитуды  $\psi_0$  и  $\chi_0$  волн накачки, так же как и скорость роста амплитуды  $\phi$ , уменьшаются, что приводит к насыщению параметрической неустойчивости.

При наличии затухания уравнение для амплитуды волны (3.42) записывается в следующем виде:

$$s_{v1}\phi + \eta_1\phi = f_{v1}\psi_0^*\chi_0, \tag{3.45}$$

где  $\eta_1$  — линейный коэффициент затухания амплитуды  $\phi$  в (3.45). Таким образом, для развития неустойчивости необходимо, чтобы выполнялось условие  $\eta_1 < |\psi_0^* \chi_0| |f_{v1}| / |r_{v1}|$ .

Это условие определяет пороговое значение для произведения амплитуд волн  $(\psi_0 \chi_0)^{cr}$ , при котором решение возрастает экспоненциально,

$$(\psi_0^* \chi_0)^{cr} = \eta_1 \frac{|r_{v1}|}{|f_{v1}|}, \quad (3.46)$$

с инкрементом

$$\Gamma = \frac{|f_{v1}|}{|r_{v1}|} (\psi_0^* \chi_0)^{cr}. \quad (3.47)$$

#### 4. ТРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОЛН РОССБИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Для количественного описания взаимодействия волн Россби в горизонтальном магнитном поле, ана-

логично случаю с вертикальным полем, сделаем замену переменных: перейдем от  $t, x, y$  к «быстрым»  $(T_0, X_0, Y_0)$  и «медленным»  $(T_1, X_1, Y_1)$  аргументам согласно выражениям (3.2). Решение системы (2.7)–(2.9) при  $B_0 = 0$  представим в виде

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}_1(T_1, X_1, Y_1) \times \exp[i(k_x X_0 + k_y Y_0 - \omega T_0)] + \dots \quad (4.1)$$

Эволюционное уравнение для медленно меняющейся амплитуды получим из условия совместности. Выпишем для исходной системы (2.7)–(2.9) при  $B_0 = 0$  слагаемые, пропорциональные  $\varepsilon^2$ :

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c} \frac{\partial h_2}{\partial T_0} + H(\nabla_0 \cdot \mathbf{v}_2) \\ H \frac{\partial^2 v_{x2}}{\partial T_0 \partial Y_0} - H(\mathbf{B}^0 \cdot \nabla_0) \frac{\partial B_{x2}}{\partial Y_0} + gH \frac{\partial^2 h_2}{\partial X_0 \partial Y_0} - f_0 H \frac{\partial v_{y2}}{\partial Y_0} - \beta H v_{y2} \\ H \frac{\partial v_{y2}}{\partial T_0} - H(\mathbf{B}^0 \cdot \nabla_0) B_{y2} + gH \frac{\partial h_2}{\partial Y_0} + f_0 H \partial v_{x2} \\ H \frac{\partial B_{x2}}{\partial T_0} - H(\mathbf{B}^0 \cdot \nabla_0) v_{x2} \\ H \frac{\partial B_{y2}}{\partial T_0} - H(\mathbf{B}^0 \cdot \nabla_0) v_{y2} \end{array} \right) = \\ & = - \left( \begin{array}{c} \frac{\partial h_1}{\partial T_1} + H(\nabla_1 \cdot \mathbf{v}_1) \\ H \left( \frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial Y_0} + \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial Y_1} \right) v_{x1} - H(\mathbf{B}^0 \cdot \nabla_0) \frac{\partial B_{x1}}{\partial Y_1} - H(\mathbf{B}^0 \cdot \nabla_1) \frac{\partial B_{x1}}{\partial Y_0} + gH \left( \frac{\partial^2}{\partial X_0 \partial Y_1} + \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial Y_0} \right) h_1 - f_0 H \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_1} \\ H \frac{\partial v_{y1}}{\partial T_1} - H(\mathbf{B}^0 \cdot \nabla_1) \partial B_{y1} + gH \frac{\partial h_1}{\partial Y_1} \\ H \frac{\partial B_{x1}}{\partial T_1} - H(\mathbf{B}^0 \cdot \nabla_1) v_{x1} \\ H \frac{\partial B_{y1}}{\partial T_1} - H(\mathbf{B}^0 \cdot \nabla_1) v_{y1} \end{array} \right) - \\ & - \left( \begin{array}{c} \frac{h_1 v_{x1}}{\partial X_0} + \frac{h_1 v_{y1}}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial^2 h_1 v_{x1}}{\partial T_0 \partial Y_0} + H \frac{\partial^2 (v_{x1}^2 - B_{x1}^2)}{\partial X_0 \partial Y_0} + H \frac{\partial^2 (v_{x1} v_{y1} - B_{x1} B_{y1})}{\partial^2 Y_0} + g \frac{\partial h_1}{\partial X_0} \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} + g h_1 \frac{\partial^2 h_1}{\partial X_0} \partial Y_0 - f_0 \frac{\partial h_1 v_{y1}}{\partial Y_0} - \beta h_1 v_{y1} \\ \frac{\partial h_1 v_{y1}}{\partial T_0} + H \frac{\partial (v_{x1} v_{y1} - B_{x1} B_{y1})}{\partial X_0} + H \frac{\partial (v_{y1}^2 - B_{y1}^2)}{\partial Y_0} + g h_1 \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} + f_0 h_1 v_{x1} \\ \frac{\partial h_1 B_{x1}}{\partial T_0} + H \frac{\partial (v_{y1} B_{x1} - v_{x1} B_{y1})}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial h_1 B_{y1}}{\partial T_0} + H \frac{\partial (v_{x1} B_{y1} - v_{y1} B_{x1})}{\partial X_0} \end{array} \right) - \end{aligned}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 \\ (\mathbf{B}^0 \cdot \nabla_0) \frac{\partial h_1 B_{x1}}{\partial Y_0} \\ (\mathbf{B}^0 \cdot \nabla_0) h_1 B_{y1} \\ (\mathbf{B}^0 \cdot \nabla_0) h_1 v_{x1} \\ (\mathbf{B}^0 \cdot \nabla_0) h_1 v_{y1} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Так же как и в предыдущем случае, для исключения резонансных слагаемых в правой части воспользуемся условием ортогональности правой части выражения (4.2) ядру оператора  $A_h$  (2.32). Для это-

го обозначим собственный вектор оператора  $A_h^*$  как  $\mathbf{z}_h = (z_{h1}, z_{h2}, z_{h3}, z_{h4}, z_{h5})^T$  и найдем собственные векторы оператора  $A_h^*$ :

$$\det \begin{pmatrix} -i\omega & ik_x H & ik_y H & 0 & 0 \\ igk_x & -i\omega & -f_0 & -i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0) & 0 \\ -gk_y^2 & ik_y f_0 + \beta & \omega k_y & 0 & k_y(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0) \\ 0 & -i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0) & 0 & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0) & 0 & -i\omega \end{pmatrix} = 0. \quad (4.3)$$

Отсюда следует (2.33). Собственный вектор  $\mathbf{z}_h = (z_{h1}, z_{h2}, z_{h3}, z_{h4}, z_{h5})^T$  удовлетворяет системе  $A_h^* \mathbf{z}_h = 0$ , откуда

$$-i\omega z_{h1} + ik_x H z_{h2} + ik_y H z_{h3} = 0, \quad (4.4)$$

$$igk_x z_1 - i\omega z_{h2} - f_0 z_{h3} - i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0) z_{h4} = 0, \quad (4.5)$$

$$-gk_y^2 z_{h1} + (ik_y f_0 + \beta H) z_{h2} + \omega k_y z_{h3} + k_y(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0) z_{h5} = 0, \quad (4.6)$$

$$-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0) z_{h2} - i\omega z_{h4} = 0, \quad (4.7)$$

$$-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^0) z_{h3} - i\omega z_{h5} = 0. \quad (4.8)$$

Из системы (4.4)–(4.8) с точностью до константы определяется собственный вектор оператора  $A_h^*$ :

$$\mathbf{z}_h = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Представим опять решение в виде (3.11), где теперь  $\mathbf{a}$  — собственный вектор оператора  $A_h$ , т.е. в виде трех волн магнито-Россби, удовлетворяющих условию синхронизма (2.35). Используем правую часть системы уравнений (4.2), пропорциональную  $\exp(i\theta_1)$ , для получения первого уравнения трехволновых взаимодействий для амплитуды волны  $\phi$ . Из правой части системы уравнений (4.2) будут выбраны слагаемые, пропорциональные  $\exp(i\theta_1)$

и  $\exp(i\theta_3) \exp(-i\theta_2)$ . Как и прежде, домножив эту часть на собственный вектор  $\mathbf{z}$  сопряженного оператора и используя условие совместности  $A_h^* \mathbf{z} = 0$ , получим уравнение для амплитуды первой из взаимодействующих волн магнито-Россби:

$$s_{h1} \phi = f_{h1} \psi^* \chi, \quad (4.10)$$

где оператор  $s_{h1}$  выражается следующим образом:

$$s_{h1} = r_{h1} \frac{\partial}{\partial T_1} + p_{h1} \frac{\partial}{\partial X_1} + q_{h1} \frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (4.11)$$

$$r_{h1} = z_1 a_1 + z_2 a_2 H + ik_{y1} z_3 a_3 H + z_4 a_4 H + z_5 a_5 H, \quad (4.12)$$

$$p_{h1} = z_1 a_2 H + z_2 (a_1 g H - a_4 B_x^0 H) - z_4 (a_2 + a_3) B_x^0 H, \quad (4.13)$$

$$q_{h1} = z_1 a_3 H + z_2 a_4 B_y^0 H + i\omega(\mathbf{k}_1) z_3 a_3 H - 2ik_{y1} z_3 a_5 B_y^0 H + 2ik_{y1} z_3 a_1 g H + z_3 a_2 f_0 H - z_4 a_2 B_y^0 H - z_5 a_3 B_y^0 H. \quad (4.14)$$

В выражениях (4.11)–(4.14) собственный вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_1)$ . Коэффициент  $f_{h1}$  в уравнении (4.10) имеет вид

$$\begin{aligned}
 f_{h1} = f_{h1}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_0, \beta, g, H, \mathbf{B}^0) = & 2ik_{x1}z_1a_1a_2 + 2ik_{y1}z_1a_1a_3 - 2i\omega(\mathbf{k}_1)z_2a_1a_2 + 2ik_{x1}z_2a_2^2 - 2ik_{x1}z_2a_4^2 + \\
 & + 2ik_{y1}z_2a_2a_3 - 2ik_{y1}z_2a_4a_5 + 2ik_{x1}z_2a_1^2g + \\
 & + 2(\mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{k}_1)z_2a_1a_4 - 2f_0z_2a_1a_3 + 2\omega_1k_{y1}z_3a_1a_3 + \\
 & + 2k_{x1}k_{y1}z_3(a_2a_3 - a_4a_5)H + 2k_{y1}^2z_3(a_3^2 - a_5^2)H + \\
 & + 2k_{y1}^2z_3a_1^2g + (k_{y2}^2 + k_{y3}^2)z_3a_1^2g - 2ik_{y1}(\mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{k}_1)z_3a_1a_5 + \\
 & + 2ik_{y1}z_3a_1a_2f_0 + z_3a_1a_2\beta + 2i\omega(\mathbf{k}_1)z_4a_1a_4 + \\
 & + 2ik_{y1}z_4(a_3a_4 - a_2a_5)H - 2(\mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{k}_1)z_4a_1a_2 + \\
 & + 2i\omega(\mathbf{k}_1)z_4a_1a_5 + 2ik_{x1}z_4(a_2a_5 - a_3a_4)H - \\
 & - 2(\mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{k}_1)z_4a_1a_3. \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

В выражении (4.15) произведения вида  $a_i a_j = [a_i^*(\mathbf{k}_2)a_j(\mathbf{k}_3) + a_i(\mathbf{k}_3)a_j^*(\mathbf{k}_2)]/2$ .

Используя аналогичную процедуру для слагаемых, пропорциональных  $\exp(i\theta_2)$ , получим из правой части системы (4.2), домноженной на собственный вектор  $\mathbf{z}$ , уравнение для амплитуды  $\beta$  второй из взаимодействующих волн магнито-Росби:

$$s_{h2}\psi = f_{h2}\phi^*\chi, \quad (4.16)$$

где

$$s_{h2} = r_{h2}\frac{\partial}{\partial T_1} + p_{h2}\frac{\partial}{\partial X_1} + q_{h2}\frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}
 r_{h2} = z_1a_1 + z_2a_2H + ik_{y2}z_3a_3H + \\
 + z_4a_4H + z_5a_5H, \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{h2} = z_1a_2H + z_2(a_1gH - a_4B_x^0H) - \\
 - z_4(a_2 + a_3)B_x^0H, \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{h2} = z_1a_3H + z_2a_4B_y^0H + i\omega(\mathbf{k}_1)z_3a_3H - \\
 - 2ik_{y1}z_3a_5B_y^0H + 2ik_{y1}z_3a_1gH + \\
 + z_3a_2f_0H - z_4a_2B_y^0H - z_5a_3B_y^0H. \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

В выражениях (4.17)–(4.20) собственный вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_2)$ . Выражение для коэффициента  $f_{h2}$  в уравнении (4.16) имеет вид

$$\begin{aligned}
 f_{h2} = f_{h2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_0, \beta, g, H, \mathbf{B}^0) = & 2ik_{x2}z_1a_1a_2 + 2ik_{y2}z_1a_1a_3 - 2i\omega(\mathbf{k}_2)z_2a_1a_2 + 2ik_{x2}z_2a_2^2 - 2ik_{x2}z_2a_4^2 + \\
 & + 2ik_{y2}z_2a_2a_3 - 2ik_{y2}z_2a_4a_5 + 2ik_{x2}z_2a_1^2g + \\
 & + 2(\mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{k}_2)z_2a_1a_4 - 2f_0z_2a_1a_3 + 2\omega_2k_{y2}z_3a_1a_3 + \\
 & + 2k_{x2}k_{y2}z_3(a_2a_3 - a_4a_5)H + 2k_{y2}^2z_3(a_3^2 - a_5^2)H + \\
 & + 2k_{y2}^2z_3a_1^2g + (k_{y1}^2 + k_{y3}^2)z_3a_1^2g - 2ik_{y2}(\mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{k}_2)z_3a_1a_5 + \\
 & + 2ik_{y2}z_3a_1a_2f_0 + z_3a_1a_2\beta + 2i\omega(\mathbf{k}_2)z_4a_1a_4 + \\
 & + 2ik_{y2}z_4(a_3a_4 - a_2a_5)H - 2(\mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{k}_2)z_4a_1a_2 + \\
 & + 2i\omega(\mathbf{k}_2)z_4a_1a_5 + 2ik_{x2}z_4(a_2a_5 - a_3a_4)H - \\
 & - 2(\mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{k}_2)z_4a_1a_3. \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

В выражении (4.21) для  $f_{h2}$  произведения вида  $a_i a_j = [a_i^*(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_3) + a_i(\mathbf{k}_3)a_j^*(\mathbf{k}_2)]/2$ .

Наконец, выписывая только слагаемые, пропорциональные  $\exp(i\theta_3)$  в правой части (4.2), получим уравнение для амплитуды  $\chi$  третьей взаимодействующей волны:

$$s_{h3}\chi = f_{h3}\phi\psi, \quad (4.22)$$

где

$$s_{h3} = r_{h3}\frac{\partial}{\partial T_1} + p_{h3}\frac{\partial}{\partial X_1} + q_{h3}\frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
 r_{h3} = z_1a_1 + z_2a_2H + ik_{y3}z_3a_3H + \\
 + z_4a_4H + z_5a_5H, \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{h3} = z_1a_2H + z_2(a_1gH - a_4B_x^0H) - \\
 - z_4(a_2 + a_3)B_x^0H, \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{h3} = z_1a_3H + z_2a_4B_y^0H + i\omega(\mathbf{k}_1)z_3a_3H - \\
 - 2ik_{y1}z_3a_5B_y^0H + 2ik_{y1}z_3a_1gH + z_3a_2f_0H - \\
 - z_4a_2B_y^0H - z_5a_3B_y^0H. \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

В выражениях (4.23)–(4.26) собственный вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_3)$ . Коэффициент взаимодействия для уравнения (4.22) имеет вид

$$\begin{aligned}
 f_{h3} = f_{h3}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_0, \beta, g, H, \mathbf{B}^0) = & 2ik_{x3}z_1a_1a_2 + 2ik_{y3}z_1a_1a_3 - 2i\omega(\mathbf{k}_3)z_2a_1a_2 + 2ik_{x3}z_2a_2^2 - 2ik_{x3}z_2a_4^2 + \\
 & + 2ik_{y3}z_2a_2a_3 - 2ik_{y3}z_2a_4a_5 + 2ik_{x3}z_2a_1^2g + \\
 & + 2(\mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{k}_3)z_2a_1a_4 - 2f_0z_2a_1a_3 + 2\omega_1k_{y3}z_3a_1a_3 + \\
 & + 2k_{x3}k_{y3}z_3(a_2a_3 - a_4a_5)H + 2k_{y3}^2z_3(a_3^2 - a_5^2)H + \\
 & + 2k_{y3}^2z_3a_1^2g + (k_{y1}^2 + k_{y2}^2)z_3a_1^2g - 2ik_{y3}(\mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{k}_3)z_3a_1a_5 + \\
 & + 2ik_{y3}z_3a_1a_2f_0 + z_3a_1a_2\beta + 2i\omega(\mathbf{k}_3)z_4a_1a_4 + \\
 & + 2ik_{y3}z_4(a_3a_4 - a_2a_5)H - 2(\mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{k}_3)z_4a_1a_2 + \\
 & + 2i\omega(\mathbf{k}_3)z_4a_1a_5 + 2ik_{x3}z_4(a_2a_5 - a_3a_4)H - \\
 & - 2(\mathbf{B}^0 \cdot \mathbf{k}_3)z_4a_1a_3. \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

В выражении для коэффициента взаимодействия  $f_{h3}$  произведения вида  $a_i a_j = a_i(\mathbf{k}_1) a_j(\mathbf{k}_2) + a_i(\mathbf{k}_1) a_j(\mathbf{k}_2)$ .

Таким образом, получена система взаимодействующих амплитуд трех волн для волн Россби в магнитной гидродинамике в приближении мелкой воды в горизонтальном магнитном поле. Для удобства дальнейшего анализа выпишем полученную систему в следующем виде:

$$s_{h1}\phi = f_{h1}\psi^*\chi, \quad (4.28)$$

$$s_{h2}\psi = f_{h2}\phi^*\chi, \quad (4.29)$$

$$s_{h3}\chi = f_{h3}\phi\psi. \quad (4.30)$$

Выписывая из уравнения (4.2) отдельно слагаемые, пропорциональные каждой из взаимодействующих волн, мы получили систему (4.28)–(4.30) из трех уравнений для амплитуд  $\phi, \psi, \chi$  взаимодействующих волн. Система (4.28)–(4.30) описывает трехволновые взаимодействия волн Россби, удовлетворяющих условию синхронизма (2.35). В (4.28)–(4.30) коэффициенты  $f_{h1}, f_{h2}, f_{h3}$  и операторы  $s_{h1}, s_{h2}, s_{h3}$  зависят только от начальных параметров задачи и однозначно определяются условием совместности  $A_h^* \mathbf{z} = 0$  аналогично случаю с внешним вертикальным магнитным полем (4.15), (4.21), (4.27) и (4.11), (4.17), (4.23). Используем систему (4.28)–(4.30) для качественного анализа [34] параметрических неустойчивостей волн Россби.

Рассмотрим случай, когда амплитуда одной из трех взаимодействующих волн в начальный момент много больше амплитуд двух других волн,  $\phi \gg \psi, \chi$ . Амплитуду первой волны можно считать постоянной,  $\phi = \phi_0$ , при этом обратным влиянием волн с амплитудами  $\psi, \chi$  на волну с амплитудой  $\phi$  можно пренебречь. В этом случае система (4.28)–(4.30) принимает вид

$$s_{h2}\psi = f_{h2}\phi_0^*\chi, \quad (4.31)$$

$$s_{h3}\chi = f_{h3}\phi_0\psi. \quad (4.32)$$

Решение полученной линейной системы уравнений ищем в виде

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix} e^{i\varphi}. \quad (4.33)$$

Отсюда найдем инкремент неустойчивости

$$\Gamma = \sqrt{\frac{|f_{h2}f_{h3}|}{|r_{h2}r_{h3}|}} |\phi_0| > 0, \quad (4.34)$$

где  $f_{h2}$  и  $f_{h3}$  определены в (4.21) и (4.27). Таким образом, одна волна магнито-Россби с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  и частотой  $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$  распадается на две

волны магнито-Россби с волновыми векторами  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$ , частотами  $\omega_2$  и  $\omega_3$  с инкрементом (4.34).

Рассмотренное выше приближение справедливо, пока амплитуда  $\phi_0$  волны накачки много больше амплитуд  $\psi, \chi$  двух других волн магнито-Россби. Однако на определенной стадии процесса амплитуды растущих волн станут сравнимы с амплитудой  $\phi_0$ . В рассмотрение, таким образом, необходимо включить уравнение (4.28). При условии  $f_{h1} < 0$  амплитуда волны накачки  $\phi$ , так же как и скорости роста амплитуд  $\psi$  и  $\chi$ , уменьшается, что приводит к насыщению параметрической неустойчивости.

При наличии линейного затухания, система (4.31), (4.32) записывается в следующем виде:

$$s_{h2}\psi + \eta_2\psi = f_{h2}\phi_0^*\chi, \quad (4.35)$$

$$s_{h3}\chi + \eta_3\chi = f_{h3}\phi_0\psi, \quad (4.36)$$

где слагаемые  $\eta_2\psi$  и  $\eta_3\chi$  определяют затухание. В этом случае экспоненциально растущие решения вида (4.33) будут существовать только при условии

$$\phi_0 > \sqrt{\eta_2\eta_3|r_{h2}r_{h3}|/|f_{h2}f_{h3}|}.$$

Таким образом, существует пороговое значение  $\phi_0^{cr}$  амплитуды волны накачки, начиная с которого развивается неустойчивость,

$$\phi_0^{cr} = \sqrt{\frac{\eta_2\eta_3|r_{h2}r_{h3}|}{|f_{h2}f_{h3}|}}, \quad (4.37)$$

с инкрементом

$$\Gamma = \sqrt{\frac{|f_{h2}f_{h3}|}{|r_{h2}r_{h3}|}} \phi_0^{cr}. \quad (4.38)$$

Рассмотрим теперь случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн много меньше амплитуд двух других волн,  $\phi \ll \psi, \chi$ , так что можно считать амплитуды  $\psi$  и  $\chi$  постоянными,  $\psi = \psi_0$  и  $\chi = \chi_0$ . Уравнение для амплитуды  $\phi$  принимает вид

$$s_{h1}\phi = f_{h1}\psi_0^*\chi_0. \quad (4.39)$$

Ищем его решение в виде

$$\phi = \phi' \exp(\Gamma T_1). \quad (4.40)$$

Подставляя это решение в уравнение (4.39), получаем выражение для коэффициента усиления:

$$\Gamma = \frac{|f_{h1}|}{|r_{h1}|} |\psi_0^*\chi_0| > 0, \quad (4.41)$$

где величина  $f_{h1}$  определена в (4.15). В данном случае параметрического усиления две начальные волны магнито-Россби с волновыми векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  и частотами  $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$  и  $\omega_2 = \omega(\mathbf{k}_2)$  усиливают волну магнито-Россби с волновым вектором  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  и частотой  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  с коэффициентом усиления (4.41).

Рассмотренное выше приближение справедливо, пока амплитуды  $\psi_0$  и  $\chi_0$  волн накачки много больше амплитуды  $\phi$  другой волны магнито-Россби. Однако на определенной стадии процесса амплитуда растущей волны станет сравнима с амплитудами  $\psi_0$  и  $\chi_0$ . В рассмотрение, таким образом, необходимо включить уравнения (4.29), (4.30). Амплитуды  $\psi_0$  и  $\chi_0$  волн накачки, так же как и скорость роста амплитуды  $\phi$ , уменьшаются, что приводит к насыщению параметрической неустойчивости.

При наличии затухания выражение (4.39) для амплитуды волны записывается в виде

$$s_{h1}\phi + \eta_1\phi = f_{h1}\psi_0^*\chi_0, \quad (4.42)$$

где  $\eta_1$  — линейный коэффициент затухания амплитуды  $\phi$  в (4.42). Таким образом, для развития неустойчивости необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\eta_1 < |\psi_0^*\chi_0| |f_{h1}| / |r_{h1}|.$$

Это условие определяет пороговое значение  $(\psi_0^*\chi_0)^{cr}$  для произведения амплитуд волн, при котором решение возрастает экспоненциально,

$$(\psi_0^*\chi_0)^{cr} = \eta_1 \frac{|r_{h1}|}{|f_{h1}|}, \quad (4.43)$$

с инкрементом

$$\Gamma = \frac{|f_{h1}|}{|r_{h1}|} (\psi_0^*\chi_0)^{cr}. \quad (4.44)$$

В частном случае тороидального магнитного поля ( $B_x = B_x^0, B_y = 0$ ) выражения для коэффициентов взаимодействия  $f_{h1}, f_{h2}, f_{h3}$  и дифференциальных операторов  $s_{h1}, s_{h2}, s_{h3}$  вместо множителя  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A$  включают множитель  $k_x v_{Ax}$ .

В случае полоидального магнитного поля ( $B_x = 0, B_y = B_y^0$ ) выражения для коэффициентов взаимодействия  $f_{h1}, f_{h2}, f_{h3}$  и дифференциальных операторов  $s_{h1}, s_{h2}, s_{h3}$  вместо множителя  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A$  включают множитель  $k_y v_{Ay}$ .

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе обсуждается модель мелкой воды для описания крупномасштабных процессов в астрофи-

зической плазме. Показано, что структура магнитного поля во внешнем вертикальном магнитном поле при магнитогидродинамическом течении мелкой воды существенно отличается от структуры магнитного поля в отсутствие внешнего поля. Необходимость учета условия бездивергентности магнитного поля в этом случае навязывает системе вертикальную компоненту магнитного поля, делая структуру магнитного поля волн Россби существенно трехмерной. При отсутствии внешнего вертикального магнитного поля, как хорошо известно, в приближении мелкой воды магнитное поле двумерно. Сделан вывод о невозможности анализа волн Россби магнитной гидродинамики во внешнем вертикальном поле с использованием двумерных уравнений магнитной гидродинамики. Необходимо использовать усредненные по глубине магнитогидродинамические уравнения в качестве исходных. Замечено, что предложенная система уравнений в частном случае отсутствия вертикального магнитного поля переходит в традиционную.

Приближение мелкой воды магнитной гидродинамики использовано для развития слабонелинейной теории волн Россби во внешнем вертикальном магнитном поле и при отсутствии вертикального магнитного поля для стационарных состояний при наличии горизонтального поля (полоидального, тороидального и их суммы). Качественный анализ дисперсионных кривых волн Россби в магнитной гидродинамике показал возможность трехволновых взаимодействий в приближении слабой нелинейности.

Методом многомасштабных асимптотических разложений развита слабонелинейная теория волн Россби и получены трехволновые уравнения для медленно меняющихся амплитуд. Приближенный анализ полученных систем уравнений для медленных амплитуд показал, что в системе могут развиваться два типа параметрических неустойчивостей: параметрический распад и параметрическое усиление волн Россби. Получены инкременты найденных неустойчивостей.

Мы благодарны рецензенту за тщательное рассмотрение нашей статьи, за полезные замечания и комментарии.

Работа выполнена при поддержке Программы 7 «Экспериментальные и теоретические исследования объектов солнечной системы и звездных планетных систем» Президиума РАН и РФФИ (грант № 14-29-06065).

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. Dikpati and P. Charbonneau, *Astrophys. J.* **518**, 508 (1999).
2. D. W. Hughes, R. Rosner, and N. O. Weiss, *The Solar Tachocline*, Cambridge Univ. Press (2007).
3. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, J. L. Ballester et al., *Astron. Astrophys.* **532**, A139 (2011).
4. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, J. L. Ballester, and B. M. Shergelashvili, *Astron. Astrophys.* **470**, 815 (2007).
5. J. Y.-K. Cho, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **366**, 4477 (2008).
6. N. A. Inogamov and R. A. Sunyaev, *Astronomy Lett.* **36**, 848 (2010).
7. Scott W. McIntosh, William J. Cramer, Manuel Pichardo Marcano, and Robert J. Leamon, *Nature Astronomy* **1**, 0086 (2017).
8. J. R. Kuhn, J. D. Armstrong, R. I. Bush, and P. Scherrer, *Nature* **405**, 544 (2000).
9. Y.-Q. Lou, *Astrophys. J.* **540**, 1102 (2000).
10. T. V. Zaqarashvili, M. Carbonell, R. Oliver, and J. L. Ballester, *Astrophys. J.* **709**, 749 (2010).
11. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, A. Hanslmeir et al., *Astrophys. J. Lett.* **805**, L14 (2015).
12. S. W. McIntosh, R. J. Leamon, L. D. Krista et al., *Nature Comm.* **6**, 6491 (2015).
13. В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные волны в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат, Москва (1989).
14. G. K. Vallis, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation*, Cambridge Univ. Press (2006).
15. C. Connaughton, S. Nazarenko, and B. Quinn, *Phys. Rep.* **604**, 1 (2015).
16. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, and J. L. Ballester, *Astrophys. J. Lett.* **691**, L41 (2009).
17. K. Heng and A. Spitkovsky, *Astrophys. J.* **703**, 1819 (2009).
18. P. A. Gilman, *Astrophys. J. Lett.* **544**, L79 (2000).
19. К. В. Карельский, А. С. Петросян, С. В. Тарасевич, *ЖЭТФ* **140**, 606 (2011).
20. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and S. V. Tarasevich, *Phys. Scripta* **155**, 014024 (2013).
21. H. De Sterck, *Phys. Plasmas* **8**, 3293 (2001).
22. P. J. Dellar, *Phys. Plasmas* **10**, 581 (2003).
23. V. Zeitlin, *Nonlin. Proc. Geophys.* **20**, 893 (2013).
24. Д. А. Клиmachков, А. С. Петросян, *ЖЭТФ* **150**, 602 (2016).
25. Д. А. Клиmachков, А. С. Петросян, *ЖЭТФ* **149**, 965 (2016).
26. D. A. Klimachkov and A. S. Petrosyan, *Phys. Lett. A* **381**, 106 (2017).
27. A. D. Craik, *Wave Interactions and Fluid Flows*, Cambridge Univ. Press (1988).
28. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, в сб. *Вопросы теории плазмы*, вып. 7, под ред. М. А. Леонтовича, Атомиздат, Москва (1973), стр. 3.
29. В. Н. Ораевский, *Основы физики плазмы* т. 2, под ред. А. А. Галиева и Р. Судана, Энергоатомиздат, Москва (1984), стр. 7.
30. K. V. Karelsky and A. S. Petrosyan, *Fluid Dyn. Res.* **38**, 339 (2006).
31. К. В. Карельский, А. С. Петросян, А. В. Черняк, *ЖЭТФ* **143**, 779 (2013).
32. A. C. Newell, *J. Fluid Mech.* **35**, 255 (1969).
33. L. Ostrovsky, *Asymptotic Perturbation Theory of Waves*, World Sci., Singapore (2014).
34. G. Falkovich, *Fluid Mechanics: a Short Course for Physicists*, Cambridge Univ. Press (2011).