

ДИССИПАТИВНЫЕ СОЛИТОННЫЕ ВИХРИ И ТРОПИЧЕСКИЕ ЦИКЛОНЫ

С. Г. Чефранов^{a*}, А. Г. Чефранов^{b**}

^a *Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук
119017, Москва, Россия*

^b *Восточно-Средиземноморский университет
Фамагуста, Северный Кипр, Турция*

Поступила в редакцию 7 мая 2017 г.

Получено новое точное стационарное решение уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости, которое соответствует обобщению известного решения Салливана (1959) при дополнительном учете эффектов внешнего (экмановского) трения и вращения системы как целого. В отличие от радиальной структуры вихря Салливана, в новом решении во внутренней и внешней ячейках возможна реализация разных направлений циркуляции тангенциальной компоненты поля скорости. Рассмотрено соответствие этого решения наблюдаемой в тропических циклонах радиальной вихревой структуре, где во внутреннем ядре («глаз тайфуна-урагана») всегда имеется именно антициклоническая циркуляция, сопряженная с нисходящими вертикальными течениями при циклоническом направлении вращения (и восходящих потоках), осуществляемом вне этого ядра.

DOI: 10.7868/S0044451017100194

1. ВВЕДЕНИЕ

В классической гидродинамике вязкой несжимаемой жидкости существует относительно немного точных решений и получение новых решений, а также исследование их устойчивости имеет важное фундаментальное и прикладное значение для многих задач физики, геофизики и астрофизики [1–3]. В отличие от рассмотренных в работах [2, 3] точных стационарных решений, существующих только при наличии внешних границ жидкости, известны и вихревые стационарные режимы вязкой несжимаемой жидкости в неограниченной жидкости, которые соответствуют точным решениям, полученным Бюргерсом [1] и Салливаном [4]. Их существование обусловлено не наличием внешних границ, а балансом между трехмерным растяжением вихревых нитей, приводящим к взрывному росту энтропии [1, 5, 6], и стабилизирующим эффектом объемной вязкой диссипации.

В настоящей работе получено новое точное решение уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости, которое обобщает решение Салли-

вана [4] за счет совместного дополнительного учета эффекта внешнего трения и вращения жидкости как целого. При этом показана важная роль не только объемного, но и внешнего трения в формировании радиальной структуры тангенциальной компоненты поля скорости обобщения вихря Салливана (ВС).

С другой стороны, в работе [7] показано, что учет внешнего (экмановского) трения при наличии вращения системы как целого может влиять на устойчивость твердотельного вращения ядра и одноячеекового вихря Бюргерса (ВБ) и двухячеекового вихря Салливана (ВС). Так, при надпороговой скорости вращения системы оказывается возможной реализация диссипативно-центробежной неустойчивости (ДЦН) вихревых ядер ВБ и ВС. Например, в результате ДЦН возможно возникновение интенсивных циклонических вихревых режимов, обусловленных именно исходными антициклоническими режимами твердотельного вращения ядер ВБ и ВС [7]. В этом проявляется циклон-антициклонная вихревая асимметрия, наблюдаемая в атмосферах быстро вращающихся планет и в лабораторных экспериментах [8–10].

Для полученного в настоящей работе обобщения ВС также оказывается характерна указанная циклон-антициклонная асимметрия, которая в данном

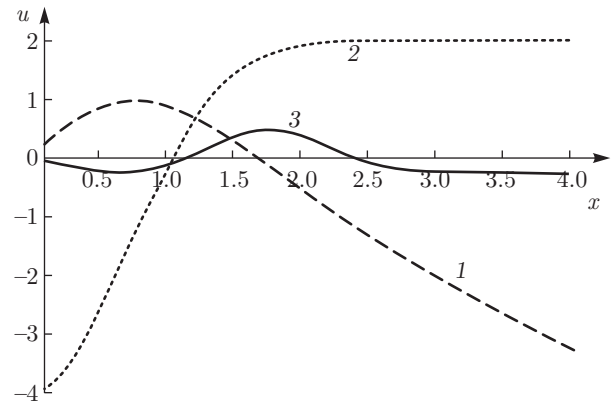
* E-mail: schefranov@mail.ru

** E-mail: Alexander.chefranov@emu.edu.tr

случае проявляется в самом типе получаемой стационарной радиальной структуры, когда внутреннее ядро вихря всегда имеет только антициклоническое направление циркуляции тангенциальной компоненты поля скорости. Такая особенность оказывается присущей и наблюдаемым интенсивным тропическим циклонам, имеющим двухячейковую радиальную структуру (см. [9] и приведенные там ссылки).

В этой связи, полученное в настоящей работе обобщение ВС представляет интерес для моделирования структуры развитого тропического циклона, для начального этапа зарождения которого в работе [9] предложен механизм ДЦН, связанный с исходным формированием именно антициклонической фоновой завихренности в верхних слоях тропосферы. Действительно, для развитого тропического циклона во внутренней ячейке (называемой «глазом тайфуна-урагана» [9]) реализуется именно антициклонический режим вращения при медленном вертикальном движении среды сверху вниз, сопряженным с растеканием от центра. При этом вне центрального ядра тайфуна имеет место интенсивное противоположно направленное циклоническое вращение, когда одновременно реализуются, наоборот, восходящие потоки среды, имеющие направление радиального движения к центру тайфуна. Казалось бы, что для такой двухячейковой вихревой структуры в тайфуне должно наиболее подходить описание с помощью точного стационарного ВС [4], имеющего также структуру вихря в виде двух ячеек, в отличие от ВБ. Однако, как известно, для ВС отсутствует различие в направлении циркуляции во внутренней и внешней ячейках, что принципиально не соответствует радиальной структуре тангенциальной компоненты поля скорости, наблюдаемой в тайфуне.

В настоящей работе получено обобщение ВС, для которого вращение среды во внутренней ячейке всегда является антициклоническим. При этом только для надпороговых величин коэффициента внешнего трения вращение во внешней ячейке может уже быть циклоническим и соответствовать структуре наблюдаемых тропических циклонов. Показано, что возможна и более сложная радиальная структура тангенциальной компоненты поля скорости, которая соответствует трем ячейкам при реализации именно антициклонического типа вращения не только в центральном ядре, но и на периферии в радиальном направлении (см. рисунок). Это соответствует рассмотренному в работе [9] механизму зарождения тропического циклона, для которого важно наличие исходного антициклонического фонового вращения.



Радиальное распределение компонент поля скорости: кривая 1 соответствует $u_r(x)$ из (5); кривая 2 — для $u_z(x)$ из (6) при $z_1 = 1$; кривая 3 — для u_φ из (7), (8) (при решении уравнения (8) для граничных условий $y(0) = -0.5$; $(dy(x)/dx)_{x=0} = 0$ при $\alpha_1 = 2$, $\Omega_1 = 0.5$)

Различные аспекты исследования диссипативных вихрей типа ВС и ВБ связаны с рассмотрением вихревых структур в нормальной и сверхтекучей жидкостях, а также в оптически активных средах [11–14], при том что в полученном решении (см. рисунок) проявляется отмеченная в работе [14] особенность, отличающая диссипативные солитонные вихри от консервативных и состоящая в возможности формирования дискретного набора характерных размеров таких вихрей.

2. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ И ИХ РЕШЕНИЕ

Во вращающейся с частотой $\Omega > 0$ (например, для системы, связанной с Землей, $\Omega \approx 10^{-5} \text{ с}^{-1}$) системе координат при учете коэффициента внешнего трения $\alpha > 0$ [10, 15] уравнения гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости при условии вращательной симметрии имеют следующий вид в цилиндрических координатах (r, z, φ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{(u_\varphi + \Omega r)^2}{r} = \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} - 2\alpha u_r + \nu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + 2\Omega u_r = \\ = -2\alpha u_\varphi + \nu \left(\Delta u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \Delta u_z, \quad (3)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

В (1)–(4) ρ_0 — постоянная плотность среды, а ν — ее коэффициент кинематической вязкости. Величина $\alpha = \sqrt{\Omega\nu}/h$, где h — характерный размер слоя среды по вертикали [7].

Будем искать стационарное решение системы (1)–(4) в виде, структурно сходном с ВС, когда компоненты поля скорости для обобщения ВС имеют вид (см. Приложение):

$$u_{r0} = \frac{u_r}{u_0} = -x + \frac{3}{x} (1 - \exp(-x^2)), \quad (5)$$

$$u_0 = \sqrt{2a\nu}, \quad x = r\sqrt{\frac{a}{2\nu}},$$

$$u_{z0} = \frac{u_z}{u_0} = 2z_1 (1 - 3 \exp(-x^2)), \quad z_1 = z\sqrt{\frac{a}{2\nu}}, \quad (6)$$

$$u_{\varphi 0} = \frac{u_\varphi}{u_0} = \frac{y(x)H(x)}{x},$$

$$H(x) = \int_0^{x^2} dp \exp\left(-p + 3 \int_0^p dq \frac{1 - e^{-q}}{q}\right), \quad (7)$$

$$y = \frac{\Gamma}{\Gamma_0}, \quad \Gamma_0 = 4\pi H(\infty)\nu.$$

В (7) функция $\Gamma(r)$ не является заданной (в отличие от ВС, где это просто постоянная величина, не зависящая от радиальной координаты), а должна определяться как решение следующего из (2) обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2A(x) \frac{dy}{dx} - 4\alpha_1 y = 4B(x)\Omega_1, \quad (8)$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{a}, \quad \Omega_1 = \frac{\Omega}{a},$$

$$A(x) = x - \frac{1}{2x} - \frac{3}{x} (1 - \exp(-x^2)) + \frac{2x}{H(x)} \times$$

$$\times \exp\left(-x^2 + 3 \int_0^{x^2} dq \frac{1 - e^{-q}}{q}\right), \quad (9)$$

$$B(x) = \frac{x(-x + 3x^{-1}(1 - e^{-x^2}))}{H(x)}. \quad (10)$$

Для случая, когда $\Omega = 0$, $\alpha = 0$ и $\Gamma = \text{const}$ решение (5)–(7) точно совпадает решением для ВС, полученным в работе [2], для которого уравнение (8) удовлетворяется тождественно. При этом направление циркуляции для тангенциальной компоненты поля скорости в (7) не меняет знак в зависимости от радиальной переменной x .

Покажем, что это уже не так при ненулевых значениях $\Omega \neq 0$, $\alpha \neq 0$, когда направление циркуляции становится зависящим от радиальной переменной x . Действительно, в пределе $x \rightarrow 0$ уравнение (8) имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{dy}{dx} - 4\alpha_1 y = 8\Omega_1. \quad (11)$$

Частное решение неоднородного уравнения (11) имеет вид

$$y = -\frac{2\Omega_1}{\alpha_1} = -\frac{2\Omega}{\alpha}. \quad (12)$$

Это означает, что во внутренней ячейке обобщения ВС (5)–(10) всегда реализуется именно антициклонический режим вращения среды. Поскольку $H(x) \approx x^2$ при $x \ll 1$, с учетом (12) получаем из (7)

$$u_\varphi \approx -\frac{2\Omega a}{\alpha} r. \quad (13)$$

В пределе $x \gg 1$ уравнение (8) имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 4\alpha_1 y = -\frac{4x^2 \Omega_1}{H(\infty)}. \quad (14)$$

Приближенным решением уравнения (14) (когда вклад первого члена в левой части (14) является много меньшим, чем от остальных членов этого уравнения) в рассматриваемом пределе является

$$y(x) \approx C_\infty x^2, \quad (15)$$

$$C_\infty = \frac{\Omega_1}{H(\infty)(\alpha_1 - 1)}.$$

Таким образом, только при условии

$$\alpha_1 > 1 \quad (16)$$

во внешней ячейке обобщения ВС может реализоваться циклонический режим вращения среды. При нарушении условия (16), как и для ВС, во внутренней и во внешней ячейках нового вихревого режима осуществляется вращение в одном направлении, которое соответствует именно антициклоническому направлению циркуляции. В этом проявляется нарушение вихревой симметрии. Для ВС такого нарушения вихревой симметрии не было, поскольку ВС

рассматривается только при нулевой частоте вращения $\Omega = 0$.

Из (7) с учетом (14), (15) получаем в размерном виде

$$u_\varphi \approx \frac{2a\Omega}{\alpha - a} r. \quad (17)$$

Таким образом, твердотельный режим стационарного вращения жидкости имеет место и вблизи ядра обобщенного ВС в (13), и на его периферии в (17), но при этом частоты такого вращения имеют разные величины, а при условии (16) еще и разные знаки.

3. ВЫВОДЫ

Итак, в настоящей работе получено обобщение решения Салливана [4], которое имеет отличие от ВС в характере радиального распределения тангенциальной компоненты поля скорости и которое определяется видом решения уравнения (8) (см. рисунок). Действительно, размер внутреннего ядра ВС, как и представленного здесь его обобщения, определяется значением безразмерной радиальной координаты $x = 1.7$, где кривая 1, описывающая радиальное распределение радиальной компоненты скорости, меняет знак с положительного на отрицательный. Имеется совпадение и с представленной в работе [4] радиальной зависимостью для вертикальной компоненты поля скорости ВС, представленной на рисунке кривой 2, которая меняет знак при $x = 1$.

Однако для тангенциальной компоненты обобщения ВС радиальное распределение, представленное кривой 3, уже существенно отличается от радиального распределения ВС из работы [4], полученного без учета вращения системы как целого и внешнего придонного трения. Кривая 3 меняет знак с отрицательного на положительный при $x = 1.2$, что соответствует смене антициклонического направления циркуляции на циклоническое.

В результате, полученное решение имеет структуру, сходную с наблюдаемой радиальной структурой тропических циклонов [9, 16, 17], и может быть использовано для их моделирования. При этом получено пороговое условие (16) по величине внешнего трения, которое определяет возможность смены знака в направлении циркуляции тангенциальной компоненты поля скорости. Лишь при выполнении (16) реализуется радиальная структура тангенциальной компоненты поля скорости, которое соответствует наблюдаемой структуре в развитых тропических циклонах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-17-00806).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для получения стационарного решения системы (1)–(4) используем следующее безразмерное представление для радиальной и вертикальной компонент поля скорости (которое имеет более общий вид чем для решения, соответствующего ВС, удовлетворяющих уравнению непрерывности (4)):

$$u_{r0} = \frac{1}{x} (\gamma_2(x) + \gamma_1 (1 - \exp(-x^2))), \quad (18)$$

$$u_{z0} = -z_1 \left(\left(\frac{d\gamma_2}{dx} / x \right) + 2\gamma_1 \exp(-x^2) \right). \quad (19)$$

В (19), (20) $\gamma_1 = \text{const}$ и, в частности, для ВС при этом $\gamma_2(x) = -x^2$, $\gamma_1 = 3$, когда из (18), (19) следует представление (5), (6) для радиальной и вертикальной компонент поля скорости ВС.

Для согласования уравнений (1) и (3) при использовании представления (18), (19) требуется, чтобы функция $\gamma_2(x)$, входящая в определение (18), (19), удовлетворяла следующему уравнению (получаемому из равенства $\partial^2 p / \partial x \partial z_1 = 0$, которое требуется удовлетворить для (3), поскольку оно всегда имеет место в (1) при условии выполнения соотношений (18), (19)):

$$\frac{d^3 \gamma_2}{dx^3} - B_1(\gamma_2, x) \frac{d^2 \gamma_2}{dx^2} + \frac{2}{x} \left(\frac{d\gamma_2}{dx} \right)^2 + B_2(\gamma_2, x) \frac{d\gamma_2}{dx} + B_3(\gamma_2, x) = 2xB_0, \quad B_0 = \text{const}, \quad (20)$$

$$B_1 = \frac{1}{x} (1 + 2\gamma_2(x) + 2\gamma_1 (1 - \exp(-x^2))),$$

$$B_2 = 8\gamma_1 \exp(-x^2) + \frac{1}{x} B_1,$$

$$B_3 = 8\gamma_1 x (x^2 - 1 + \gamma_1 + \gamma_2(x)) \exp(-x^2), \quad \gamma_1 = \text{const}.$$

Нетрудно убедиться в том, что уравнение (20) точно выполнено для ВС (5), (6), когда $\gamma_2 = -x^2$, $\gamma_1 = 3$ в (18), (19) и при этом в (20) имеем $B_0 = 4$.

В (20) параметры γ_1 и B_0 в общем случае являются произвольными постоянными величинами. Представляет интерес найти новое, отличное от ВС, решение (20), удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$\gamma_2(0) = \left(\frac{d\gamma_2}{dx} \right)_{x=0} = y_2(\infty) = 0. \quad (21)$$

При выполнении представления (18) можно из (2) получить следующее общее выражение для тангенциальной компоненты поля скорости:

$$u_{\varphi 0} = \frac{y(x)H(x)}{x}, \quad (22)$$

$$H = C \int dx x \exp \left(2 \int dx u_{r0}(x) \right), \quad (23)$$

$$C = \text{const},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(-\frac{1}{x} - 2u_{r0} + \frac{2}{H} \frac{dH}{dx} \right) \frac{dy}{dx} - 4\alpha_1 y = \\ = \frac{4\Omega_1 x u_{r0}}{H}. \end{aligned} \quad (24)$$

В частности, для радиальной компоненты поля скорости ВС в (5) из (22)–(24) следует представление (7), (8) для тангенциальной компоненты поля скорости, соответствующей обобщению решения для ВС [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. P. G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England (1992).
2. С. Г. Чефранов, А. Г. Чефранов, Доклады РАН **463**, 286 (2015).
3. С. Г. Чефранов, А. Г. Чефранов, ЖЭТФ **149**, 1068 (2016).
4. R. D. Sullivan, J. Aero/Space Sci. **26**, 767 (1959).
5. P. G. Saffman and D. I. Meiron, Phys. Fluids **29**, 2377 (1986).
6. С. Г. Чефранов, ЖЭТФ **95**, 547 (1989).
7. С. Г. Чефранов, А. Г. Чефранов, частное сообщение.
8. С. Г. Чефранов, Письма в ЖЭТФ **73**, 312 (2001).
9. В. Н. Блажко, С. Г. Чефранов, Изв. РАН, Физика атм. и океана **41**, 593 (2005).
10. С. Г. Чефранов, ЖЭТФ **149**, 876 (2016).
11. В. П. Гончаров, В. М. Гряник, ЖЭТФ **91**, 1653 (1986).
12. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, Письма в ЖЭТФ **101**, 181 (2015).
13. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, arXiv:1511.03113v1 [nlin.CD] 10 Nov 2015.
14. N. A. Veretenov, N. N. Rosanov, and S. V. Fedorov, Phys. Rev. Lett. **117**, 183901 (2016).
15. Ф. В. Должанский, В. А. Крымов, Д. Ю. Манин, УФН **160**, 7 (1990).
16. V. F. Dvorak, Mon. Wea. Rev. **103**, 420 (1975).
17. D. P. Jorgensen, J. Atmos. Sci. **41**, 1287 (1984).