

НЕУСТОЙЧИВОЕ ПОВЕДЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНЫХ ФЕРМИОННЫХ МОДЕЛЯХ СПИНОРНОГО ТИПА

*Ф. Айдогмус**

*Физический факультет, Стамбульский университет
34452, Стамбул, Турция*

Поступила в редакцию 30 марта 2017 г.

(Перевод с английского)

UNSTABLE BEHAVIOURS OF CLASSICAL SOLUTIONS IN SPINOR-TYPE CONFORMAL INVARIANT FERMIONIC MODELS

F. Aydogmus

Хорошо известно, что инстантоны являются классическими топологическими решениями, существующими в контексте квантовых теорий поля, которые лежат в основе Стандартной Модели частиц. Для лучшего понимания динамической природы инстантонных решений спинорного типа рассматриваются конформно-инвариантные чисто спинорные фермионные модели, допускающие решения типа частиц для получения классических полевых уравнений при наличии периодической косинусоидальной внешней силы. Для этого воздействие внешней периодической вынуждающей силы на две системы, имеющие разные размерности и квантовые спинорные числа и полученные с использованием анзаца Гейзенберга, исследуется путем построения их сечений Пуанкаре в фазовом пространстве. В результате в обеих чисто спинорных фермионных моделях наблюдаются бифуркации и хаос в зависимости от амплитуды внешней вынуждающей силы.

DOI: 10.7868/S0044451017110013

1. ВВЕДЕНИЕ

Идея описания бозонов и фермионов, имеющих спиновые числа не выше 2, с помощью фермионного поля была предложена Луи де Бройлем [1]. Более того, дираковское волновое уравнение для нелинейного спинорного поля позволило успешно получить интерпретацию электронной и антиэлектронной (позитронной) систем [2]. Позднее Гейзенберг и Паули развили это уравнение в своей объединенной теории поля [3]. После этого физики-теоретики начали усилённый поиск новых нелинейных безмассовых конформно-инвариантных, не содержащих размерных параметров полевых уравнений, особенно таких, которые имели бы классические решения. В

этом контексте в работе [4] была предложена модель, которая могла бы лечь в основу единого описания элементарных частиц и которая могла бы иметь более широкие динамические симметрии по сравнению с рассмотренными в работах Дирака и Гейзенберга. Эта первая конформно-инвариантная четырехмерная чисто фермионная модель вызвала большой интерес. Позднее был найден класс ее точных решений с нелинейным самодействующим спинорным членом $(\bar{\psi}\psi)^{4/3}$ и было показано, что эти решения имеют инстантонный характер [5, 6]. Эти классические решения аналогичны решениям чисто янг-милловских [7] уравнений в случае четырех измерений.

Еще одна система спинорного поля была рассмотрена в работе [8], предложенная там конформно-инвариантная модель описывает дираковские фермионы в безмассовом пространстве-времени

* E-mail: fatma.aydogmus@gmail.com; fatmaa@istanbul.edu.tr

размерности $(1+1)$, однако при этом там имеется нелинейный член самодействия $(\bar{\psi}\psi)^2$. Эта модель имеет много черт, характерных для квантования релятивистских квантовых теорий поля. Также для этой двумерной фермионной модели были найдены классические решения инстантонного типа. Было показано, что эти решения имеют такой же вид, что и решения четырехмерной модели [9].

В некоторых случаях нелинейные классические теории поля позволяют вывести уравнения движения частицы как сингулярности с точки зрения полевого уравнения. Однако они обладают некоторыми недостатками, в частности, это сложности, встречающиеся при решении и квантовании этих уравнений. Некоторые исследования по квантованию и перенормировке четырехмерного спинорного волнового уравнения были также представлены в работах [10–13]. Исследованию роли постоянной взаимодействия в эволюции четырехмерных инстантонов спинорного типа посвящена недавняя работа [14]. Некоторое время спустя динамика возбужденных инстантонов в размерности 4 была исследована с помощью нелинейных динамических методов [15]. Хаос наблюдался также в упомянутых выше четырехмерных диссипативных нелинейных фермионных моделях [16].

В настоящей работе мы возвращаемся к классическим уравнениям, выводимым из конформно-инвариантных двух- и четырехмерных чисто спинорных фермионных систем, получаемых с помощью анзаца Гейзенберга. Сначала мы сравним характер устойчивости этих инстантонов спинорного типа с устойчивостью решений уравнения Дуффинга. Затем с помощью периодической силы мы будем возбуждать эти нелинейные системы, чтобы понять, как можно повлиять на характер устойчивости. Для этой цели мы построим диаграммы бифуркаций систем, а также сечения Пуанкаре, зависящие от амплитуды и частоты внешней вынуждающей силы.

2. КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНЫЕ ЧИСТО СПИНОРНЫЕ ФЕРМИОННЫЕ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

2.1. Двумерная фермионная модель

Двумерное фермион-фермионное взаимодействие описывается конформно-инвариантным лагранжианом

$$L = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{g}{2}(\bar{\psi}\psi)^2. \quad (1)$$

Фермионное поле $\psi(x)$ имеет масштабную размерность $1/2$ [8]. Уравнение движения, которое следует из этого лагранжиана, имеет вид

$$i\sigma_\mu\partial_\mu\psi + g(\bar{\psi}\psi)\psi = 0, \quad (2)$$

где σ_μ — матрицы Паули, а g — положительная постоянная взаимодействия.

2.2. Четырехмерная фермионная модель

Общепринятое обобщение лагранжиана (1) на четырехмерный случай должно быть основано на фермионных полях масштабной размерности $3/2$ [4]

$$L = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + g(\bar{\psi}\psi)^{4/3}. \quad (3)$$

Уравнение движения, которое следует из этого лагранжиана, имеет вид

$$i\gamma_\mu\partial_\mu\psi + g(\bar{\psi}\psi)^{1/3}\psi = 0, \quad (4)$$

где γ_μ — (4×4) матрицы Дирака, $\psi(x)$ — 4-компонентная комплексная спинорная функция, $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$, а g — положительная постоянная взаимодействия. Было показано, что уравнение (4) инвариантно относительно конформных преобразований [4]. Такая четырехмерная конформно-инвариантная чисто фермионная модель с нелинейным самодействующим спинорным членом аналогична гейзенберговскому нелинейному обобщению уравнения Дирака [2].

3. ИНСТАНТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ФЕРМИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

В работе [17] был предложен специальный метод нахождения $\bar{\psi}\psi$ с помощью спонтанного нарушения симметрии полной конформной группы с сохранением инвариантности относительно преобразований специальной подгруппы, причем оказалось, что она отражает конечные свойства симметрии основного состояния системы. Это было реализовано с помощью оператора

$$R_\mu = \frac{1}{2} \left(aP_\mu + \frac{1}{a}D_\mu \right), \quad (5)$$

где P_μ — 4-импульс, а D_μ — операторы конформной масштабной инвариантности в четырехмерном евклидовом пространстве-времени. Здесь a — параметр, имеющий размерность длины. Таким образом, проблема сводится к нахождению решения следующего уравнения:

$$R_\mu(\bar{\psi}\psi) \equiv \frac{i}{a} \left[\frac{a^2 - x^2}{2} \partial_\mu + (x\partial + 2d)x_\mu \right] (\bar{\psi}\psi) = 0, \quad (6)$$

где

$$\bar{\psi}\psi = \pm \frac{a}{g(a^2 + x^2)}. \tag{7}$$

Это решение было названо решением инстантонного типа, оно связано со специальным случаем евклидовой конфигурации анзаца Гейзенберга. Евклидова конфигурация анзаца Гейзенберга имеет вид [3]

$$\psi = [ix_\mu \gamma_\mu \chi(s) + \varphi(s)] c, \tag{8}$$

где введена произвольная спинорная постоянная c . Здесь $\chi(s)$ и $\varphi(s)$ — вещественные функции от $s = x^2 + t^2$ ($x_1 \equiv x, x_2 \equiv t$).

В работе [9] были найдены классические решения инстантонного и меронного типа для случая двумерного конформно-инвариантного лагранжиана с использованием тех же аргументов, связанных с симметрией, что и в случае калибровочных и скалярных полей. Одно из них приводит к обращению в нуль тензора энергии-импульса и к конечному действию [8, 9]. Обращение в нуль тензора энергии-импульса дает этому решению шанс на роль кандидата для вакуума в квантовом мире, поскольку классические решения интерпретируются как средние значения по вакууму. Также классические решения инстантонного и меронного типа были найдены для случая четырехмерного конформно-инвариантного лагранжиана. Было показано, что они соответствуют спонтанному нарушению пространственно-временных симметрий [5, 6]. В настоящей работе нам удалось получить безразмерный вид фермионных систем, подставляя анзац Гейзенберга в уравнения движения и используя преобразования, приводимые в работе [5]. Затем мы получаем картины фазового пространства для решений инстантонного типа для систем безразмерного вида.

4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИНСТАНТОНОВ СПИНОРНОГО ТИПА

Подставляя уравнение (8) в уравнение (2), получаем

$$2 \frac{dF(u)}{du} + \frac{1}{2} F(u) - \alpha AB (F(u)^2 + G(u)^2) \times G(u) = 0, \tag{9a}$$

$$2 \frac{dG(u)}{du} - \frac{1}{2} G(u) + \alpha AB (F(u)^2 + G(u)^2) \times F(u) = 0 \tag{9b}$$

в безразмерном виде. Здесь $u = \ln s$ ($s = x^2 + t^2$ для двумерной системы), F и G — безразмерные функции от u , а α, A и B — константы [5]. Определив новую константу $\beta \equiv \alpha AB$, систему можно записать как поток:

$$\mathbf{f}_{2D} = \left(-\frac{1}{4} F + \frac{1}{2} \beta [F^2 + G^2] G, \frac{1}{4} G - \frac{1}{2} \beta [F^2 + G^2] F \right). \tag{10}$$

Если взять дивергенцию от \mathbf{f}_T , то мы увидим, что этот поток сохраняется, поскольку $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$.

Якобиан данной системы равен

$$J_{2D} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + FG\beta & -F^2\beta - \frac{1}{2}(F^2 + G^2)\beta \\ G^2\beta + \frac{1}{2}(F^2 + G^2)\beta & +\frac{1}{4} - FG\beta \end{pmatrix} \tag{11}$$

при этом

$$\det(J_{2D}) = -\frac{1}{16} + \frac{FG\beta}{2} + \frac{3F^4\beta^2}{4} + \frac{3}{2} F^2 G^2 \beta^2 + \frac{3G^4\beta^2}{4}. \tag{12}$$

Характеристические собственные значения, приводящие к пониманию топологического поведения в окрестности точек сингулярности, получаются из уравнения

$$|J_T - \lambda I| = 0$$

и имеют вид

$$\lambda_{2D\pm} = \pm \frac{1}{4} \times \sqrt{1 - 8\beta FG - 12\beta^2 F^4 - 12\beta^2 G^4 - 24\beta^2 F^2 G^2}. \tag{13}$$

При $\beta = 0$ собственные значения становятся вещественными; неподвижная точка является гиперболической. Для других значений β собственные значения чисто мнимые. Поэтому неподвижные точки являются эллиптическими [18]. С помощью аналогичных действий, используя уравнение (4) [3–5], получаем следующие уравнения, в которых $u = \ln s$ ($s = x_\mu^2 = r^2 + t^2$ и $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ для четырехмерной системы):

$$2 \frac{dF(u)}{du} + \frac{3}{2} F(u) - \alpha (AB)^{1/3} [F(u)^2 + G(u)^2]^{1/3} \times G(u) = 0, \tag{14a}$$

$$2 \frac{dG(u)}{du} - \frac{3}{2} G(u) + \alpha (AB)^{1/3} [F(u)^2 + G(u)^2]^{1/3} \times F(u) = 0. \tag{14b}$$

Эту систему также можно записать как поток, определив новую константу $\gamma = \alpha(AB)^{1/3}$:

$$\mathbf{f}_{4D} = \left(-\frac{3}{4}F + \frac{1}{2}\gamma[F^2 + G^2]^{1/3}G, \right. \\ \left. \frac{3}{4}G - \frac{1}{2}\gamma[F^2 + G^2]^{1/3}F \right). \quad (15)$$

Этот поток также сохраняется, поскольку $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$. Якобиан равен

$$J_{4D} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} + \frac{FG\gamma}{3(F^2 + G^2)^{2/3}} & \frac{G^2\gamma}{3(F^2 + G^2)^{2/3}} + \frac{1}{2}(F^2 + G^2)^{1/3}\gamma \\ -\frac{F^2\gamma}{3(F^2 + G^2)^{2/3}} - \frac{1}{2}(F^2 + G^2)^{1/3}\gamma & \frac{3}{4} - \frac{FG\gamma}{3(F^2 + G^2)^{2/3}} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

при этом

$$\det(J_{4D}) = -\frac{9}{16} + \frac{FG\gamma}{2(F^2 + G^2)^{2/3}} + \frac{F^2\gamma^2}{6(F^2 + G^2)^{1/3}} + \\ + \frac{G^2\gamma^2}{6(F^2 + G^2)^{1/3}} + \frac{1}{4}(F^2 + G^2)^{2/3}\gamma^2. \quad (17)$$

Характеристические собственные значения получаются из уравнения

$$|J_G - \lambda I| = 0$$

и имеют вид

$$\lambda_{4D\pm} = \pm \frac{\sqrt{27 - \frac{24\gamma FG}{(F^2 + G^2)^{2/3}} - \frac{8\gamma^2 F^2}{(F^2 + G^2)^{1/3}} - \frac{8\gamma^2 G^2}{(F^2 + G^2)^{1/3}} - 12\gamma^2(F^2 + G^2)^{2/3}}}{4\sqrt{3}}. \quad (18)$$

При $\gamma = 0$ собственные значения вещественные. Поэтому неподвижная точка является гиперболической. При других значениях γ собственные значения чисто мнимые. Поэтому неподвижные точки являются эллиптическими [18]. Подробности этих вычислений можно найти в работе [18].

5. УСТОЙЧИВОЕ ПОВЕДЕНИЕ ДУФФИНГОВОГО ТИПА ДЛЯ ИНСТАНТОНОВ СПИНОРНОГО ТИПА

Сначала проверим устойчивость дuffингового типа для наших двух- и четырехмерных уравнений спиорного типа. Для этого мы сначала рассмотрим уравнение Дuffинга для осциллятора — известный пример, описывающий движение классической частицы в двухъямном потенциале [19]. Многие годы исследованию этого уравнения посвящались многочисленные работы. Это связано с тем, что это уравнение характерно для многих нелинейных систем, а также с тем, что оно обладает исключительно богатой динамикой — ему соответствуют множество сложных решений и хаотическое поведение.

Наиболее общий вид уравнения Дuffинга для осциллятора следующий:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} \pm \mu x + \eta x^3 = f \cos(\omega t + \phi), \quad (19)$$

что отличается от уравнений гармонического осциллятора с вынуждающей силой и с затуханием только наличием нелинейного члена ηx^3 . Здесь δ — коэффициент вязкого затухания, а f — амплитуда возбуждения. Мы рассмотрим это уравнение со знаком минус и без вынуждающей силы. Если записать его в виде потока, то получим систему

$$\dot{x} = y, \quad (20a)$$

$$\dot{y} = \mu x - \eta x^3 - \delta y. \quad (20b)$$

Характерный фазовый портрет представлен на рис. 1а.

Используя приведенные выше уравнения (2) и (4), соответствующие рассматриваемым двух- и четырехмерным инстантонам спиорного типа, мы также можем получить характерные картины фазового пространства. Они представлены на рис. 1б и рис. 1в, соответственно.

Как видно из рис. 1 (графики приведены для $\beta = \gamma = \mu = \nu = 1$), динамика фазового пространства для двух- и четырехмерных инстантонов спиорного типа обладает характеристиками уравнения типа уравнения Дuffинга для осциллятора в установившемся режиме без вынуждающей силы и без затухания [14, 20].

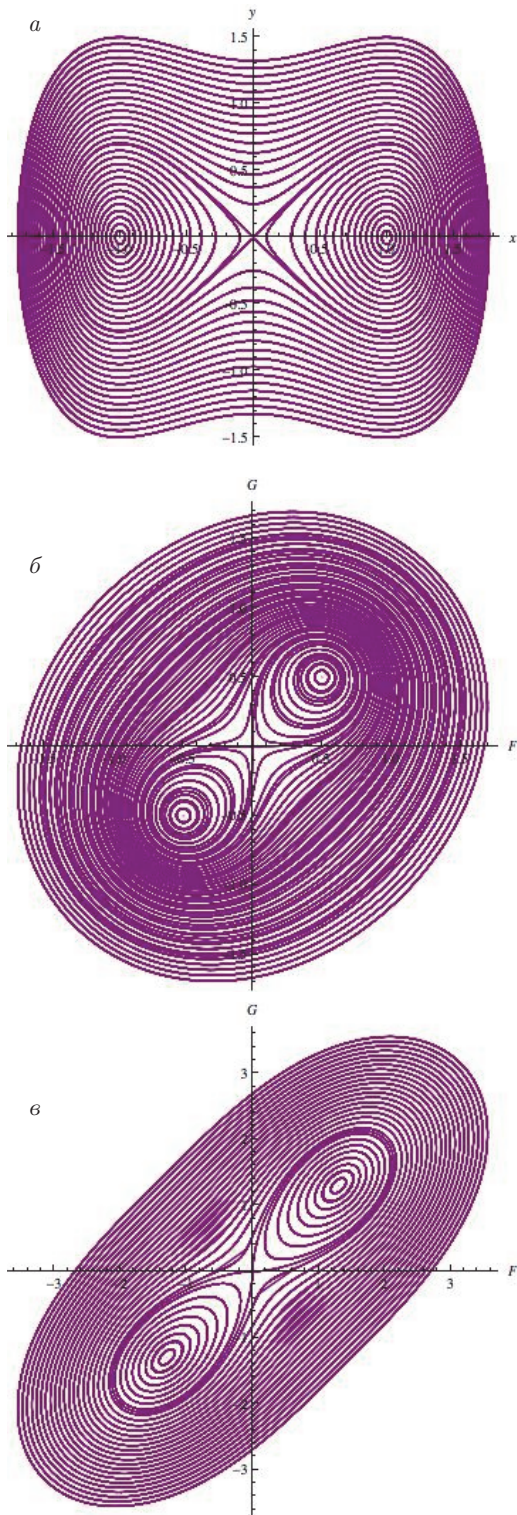


Рис. 1. Картины фазового пространства потока Дуффинга (а), двумерного спинорного волнового уравнения (поток Тирринга) (б) и четырехмерного спинорного волнового уравнения (поток Гюрши) (с)

6. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ВЫНУЖДАЮЩАЯ СИЛА В ИНСТАНТОННЫХ УРАВНЕНИЯХ

Динамике нелинейных осцилляторов, находящихся под воздействием внешней синусоидальной вынуждающей силы, посвящены многочисленные исследования, поскольку она имеет много приложений к реальным физическим системам. С помощью такой вынуждающей силы можно создавать разное нелинейное поведение динамических систем и управлять им. В настоящей работе мы будем рассматривать периодическую косинусоидальную вынуждающую силу.

Наложим возмущение на двумерную фермионную модель:

$$2 \frac{dF(u)}{du} + \frac{1}{2} F(u) - \beta (F(u)^2 + G(u)^2) G(u) = 0, \quad (21a)$$

$$2 \frac{dG(u)}{du} - \frac{1}{2} G(u) + \beta (F(u)^2 + G(u)^2) F(u) = A_{2D} \cos(\omega_{2D} u). \quad (21b)$$

Здесь A_{2D} — амплитуда вынуждающей силы, а ω_{2D} — ее частота. Эту систему можно преобразовать в поток:

$$2 \frac{dF(u)}{du} + \frac{1}{2} F(u) - \beta (F(u)^2 + G(u)^2) G(u) = 0, \quad (22a)$$

$$2 \frac{dG(u)}{du} - \frac{1}{2} G(u) + \beta (F(u)^2 + G(u)^2) F(u) = A_{2D} \cos[\omega_{2D} H(u)]. \quad (22b)$$

$$\frac{dH(u)}{du} = \Omega. \quad (22c)$$

Здесь Ω добавляет дополнительную размерность для численных расчетов. Векторное поле имеет вид

$$\mathbf{f}_{F2D} = \left(-\frac{1}{4} F + \frac{1}{2} \beta [F^2 + G^2] G, \frac{1}{4} G - \frac{1}{2} \beta [F^2 + G^2] F + A_{2D} \cos(\omega_{2D} H), \Omega \right) \quad (23)$$

при этом его дивергенция обращается в нуль, $\nabla \cdot \mathbf{f}_{F2D} = 0$, поэтому под действием внешней вынуждающей силы поток сохраняется. В консервативной системе набор траекторий будет занимать постоянный объем в фазовом пространстве, поскольку траектории управляются динамикой системы. Это известная теорема Лиувилля [21].

Аналогичным образом наложим возмущение на четырехмерную фермионную модель:

$$2\frac{dF(u)}{du} + \frac{3}{2}F(u) - \gamma [F(u)^2 + G(u)^2]^{1/3} \times G(u) = 0, \quad (24a)$$

$$2\frac{dG(u)}{du} - \frac{3}{2}G(u) + \gamma [F(u)^2 + G(u)^2]^{1/3} F(u) = A_{4D} \cos(\omega_{4D}u). \quad (24b)$$

Эту систему также можно преобразовать в поток:

$$2\frac{dF(u)}{du} + \frac{3}{2}F(u) - \gamma [F(u)^2 + G(u)^2]^{1/3} \times G(u) = 0, \quad (25a)$$

$$2\frac{dG(u)}{du} - \frac{3}{2}G(u) + \gamma [F(u)^2 + G(u)^2]^{1/3} F(u) = A_{4D} \cos[\omega_{4D}K(u)], \quad (25b)$$

$$\frac{dK(u)}{du} = \Gamma. \quad (25c)$$

Константа Γ добавляет дополнительную размерность для численных расчетов. Векторное поле имеет вид

$$\mathbf{f}_{F4D} = \left(-\frac{3}{4}F + \frac{1}{2}\gamma[F^2 + G^2]^{1/3}G, \frac{3}{4}G - \frac{1}{2}\gamma[F^2 + G^2]^{1/3}F + A_{4D} \cos(\omega_{4D}K), \Gamma \right) \quad (26)$$

при этом его дивергенция обращается в нуль, $\nabla \cdot \mathbf{f}_{FG} = 0$, поэтому под действием внешней вынуждающей силы поток сохраняется.

7. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Выше мы показали, что при воздействии внешней вынуждающей силы системы остаются консервативными. Хорошо известно, что хаотическое поведение характерно не только для диссипативных, но также и для консервативных систем. Однако феноменология хаоса в консервативных и диссипативных системах несколько различна. В отличие от консервативной системы, в диссипативных системах начальный объем в фазовом пространстве не сохраняется в течение эволюции. Консервативная система может двигаться вдоль любой доступной траектории, в зависимости от ее энергии [22]. Изучение хаоса в консервативных системах помогает пролить свет на многие важные свойства классической нелинейной динамики и выделить некоторые важные проблемы в вопросе соответствия квантового и

классического. Кроме того, некоторую информацию на эту тему может предоставить нам проверка на устойчивость дуффингового типа инстантонов спинорного типа при воздействии внешней вынуждающей силы. Для этого будем искать динамическое поведение инстантонов спинорного типа, численно изменяя параметры вынуждающей силы, строя диаграммы бифуркаций и отображения Пуанкаре.

Хорошо известно, что хаотические системы чувствительно реагируют на изменения начальных условий, а переходы из регулярных состояний к хаосу обусловлены незначительными изменениями начальных условий. Чтобы продемонстрировать такую исключительную чувствительность инстантонов спинорного типа к изменению начальных условий при возбуждении, на рис. 2 мы привели сечения Пуанкаре, соответствующие регулярному и хаотическому поведению с двумя различными, но очень близкими начальными условиями. Как видно из рис. 2а, для двумерной системы поток представляет собой замкнутую орбиту, поэтому поведение при $F(0) = 0.70, G(0) = 0.250$ и $H(0) = 0$ и при $\omega = \pi$ и $A = 1$ является регулярным, на самом деле, квазипериодическим. При других, очень близких, начальных условиях ($F(0) = 0.71, G(0) = 0.251$ и $H(0) = 0$) будут наблюдаться хаотические орбиты, см. рис. 2б. Аналогично, чувствительность четырехмерной системы к изменению начальных условий показана на рис. 2в,г.

Бифуркация означает фундаментальное изменение в природе решения, а бифуркационная диаграмма предоставляет нам полезный способ показать, как поведение нелинейных систем изменяется при изменении управляющего параметра [23]. Для системы с вынуждающей силой можно рассмотреть два главных управляющих параметра: амплитуду и частоту возбуждения. Соответствующие бифуркационные диаграммы для двух- и четырехмерных инстантонов спинорного типа в (A, F) -плоскости приведены на рис. 3. На этом рисунке показано внезапное появление различных решений системы при варьировании параметра A . Множество беспорядочных точек на диаграмме соответствуют хаотическому поведению [24]. Если проанализировать бифуркационные диаграммы систем, то можно заметить упорядоченные участки, на которых системы ненадолго выходят из хаотического состояния, а затем быстро возвращаются к хаосу при возрастании параметра A . Эти короткие интервалы являются вполне периодическими или квази-периодическими.

Рисунок 4 иллюстрирует регулярное и хаотическое поведение двумерной системы для некоторых

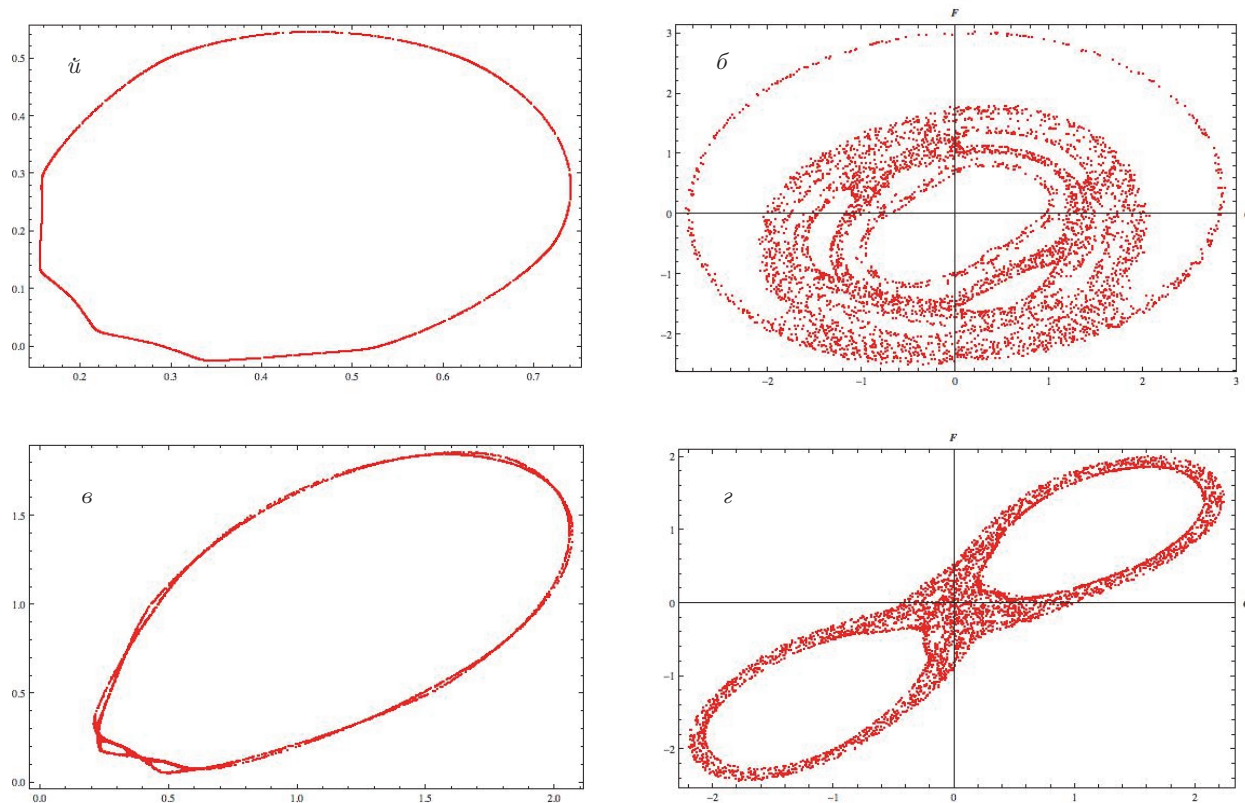


Рис. 2. Зависимости от начальных условий для двумерного спинорного волнового уравнения при $\omega = \pi$, $A = 1$, $a - F(0) = 0.70$, $G(0) = 0.250$, $H(0) = 0$, $б - F(0) = 0.71$, $G(0) = 0.251$, $H(0) = 0$, и для четырехмерного спинорного волнового уравнения при $\omega = \pi/2$, $A = 1$, $в - F(0) = 0.470$, $G(0) = 0.970$, $K(0) = 0$, $г - F(0) = 0.471$, $G(0) = 0.975$, $K(0) = 0$

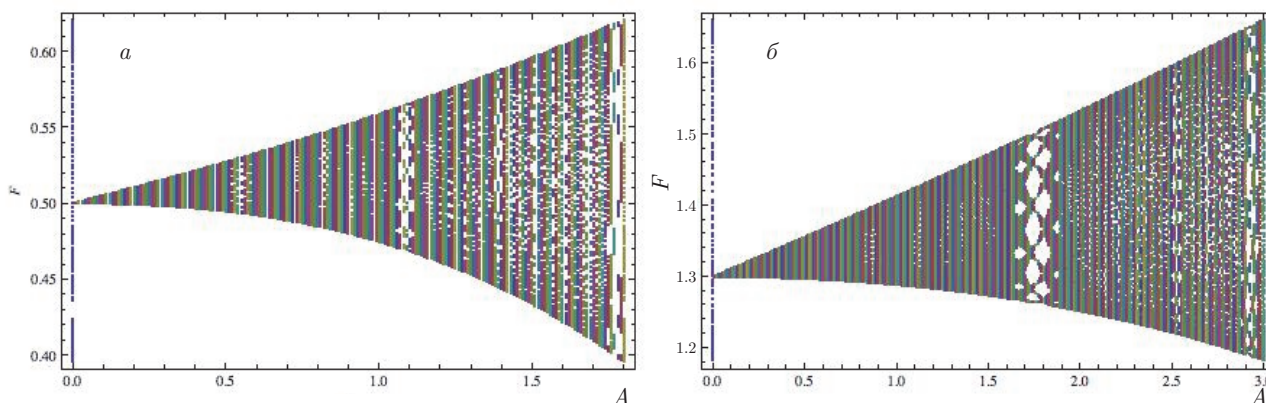


Рис. 3. (В цвете онлайн) Бифуркационные диаграммы в (A, F) -плоскости для двумерной модели при $\omega = \pi$ (a) и для четырехмерной модели при $\omega = \pi/2$ ($б$)

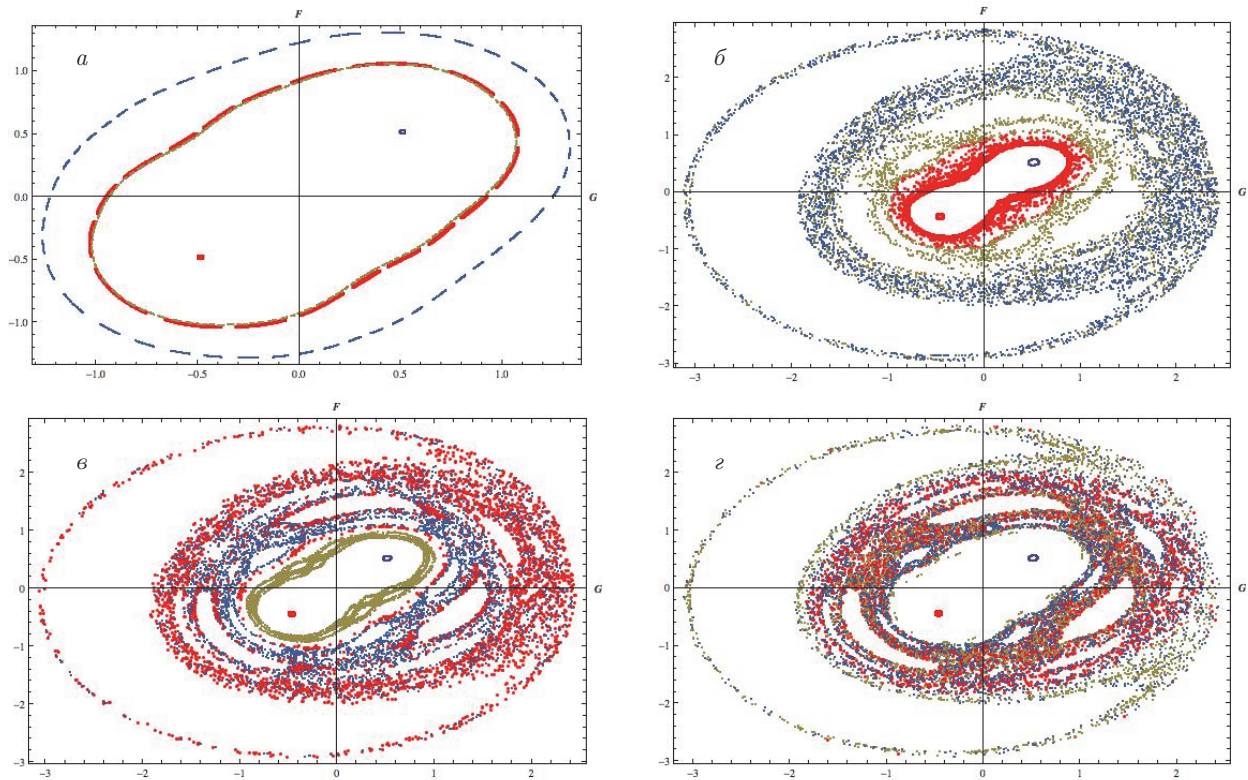


Рис. 4. (В цвете онлайн) Сечения Пуанкаре для двумерного спинорного волнового уравнения при $\omega = \pi$ при различных начальных условиях $A = 0.570$ (а), 0.943 (б), 1.017 (в), 1.270 (г)

случайных возможных начальных значений $A = 0.570, 0.943, 1.017, 1.270$ при $\omega = \pi$ и $\beta = 1$. Интересно, что полученные картины фазового пространства являются типичными для динамики типа динамики Колмогорова – Арнольда – Мозера (КАМ). Хорошо известно, что фазовые пространства, имеющие структуру типа КАМ, фундаментально отличаются от управляющих диссипативных хаотических аттракторов. Некоторые исходные периодические решения остаются регулярными и означают квазипериодичность, в то время как другие решения ведут себя хаотически [25]. В случае слабого управления (рис. 4а) система демонстрирует регулярное поведение в соответствии с бифуркационной диаграммой. При усилении управления (рис. 4б–г) мы видим, что в области вблизи центра фазового пространства появляются хаотические орбиты. Как видно из рис. 1б, двумерный инстантон спинорного типа лежит на сепарабельных замкнутых кривых, которые соответствуют регулярным траекториям. Однако внешняя вынуждающая сила разрушает сепаратрису, при этом некоторое число хаотических инстантонов оказывается зависящим от амплитуды внешней вынуждающей силы.

Аналогично, картина фазового пространства для четырехмерной модели имеет структуру типа КАМ, что легко видеть из рис. 5. Некоторое количество хаотических инстантонов появляется в четырехмерной конформно-инвариантной чисто спинорной модели с нелинейным самодействующим спинорным членом, зависящим от значения амплитуды внешней вынуждающей силы. Полученные результаты указывают на то, что двух- и четырехмерные чисто фермионные модели с дробной нелинейностью обладают богатым набором возбужденных фермионных состояний (что соответствует результатам работы [26]). Нелинейность может проявляться, например, в виде скачка, т. е. устойчивое поведение существенно меняется из-за перехода от одного устойчивого решения к другому, если амплитуда возбуждения изменяется при изменении управляющего параметра.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хорошо известно, что инстантоны рассматриваются как конфигурации квантовых полей, которые выражают эффект туннелирования между раз-

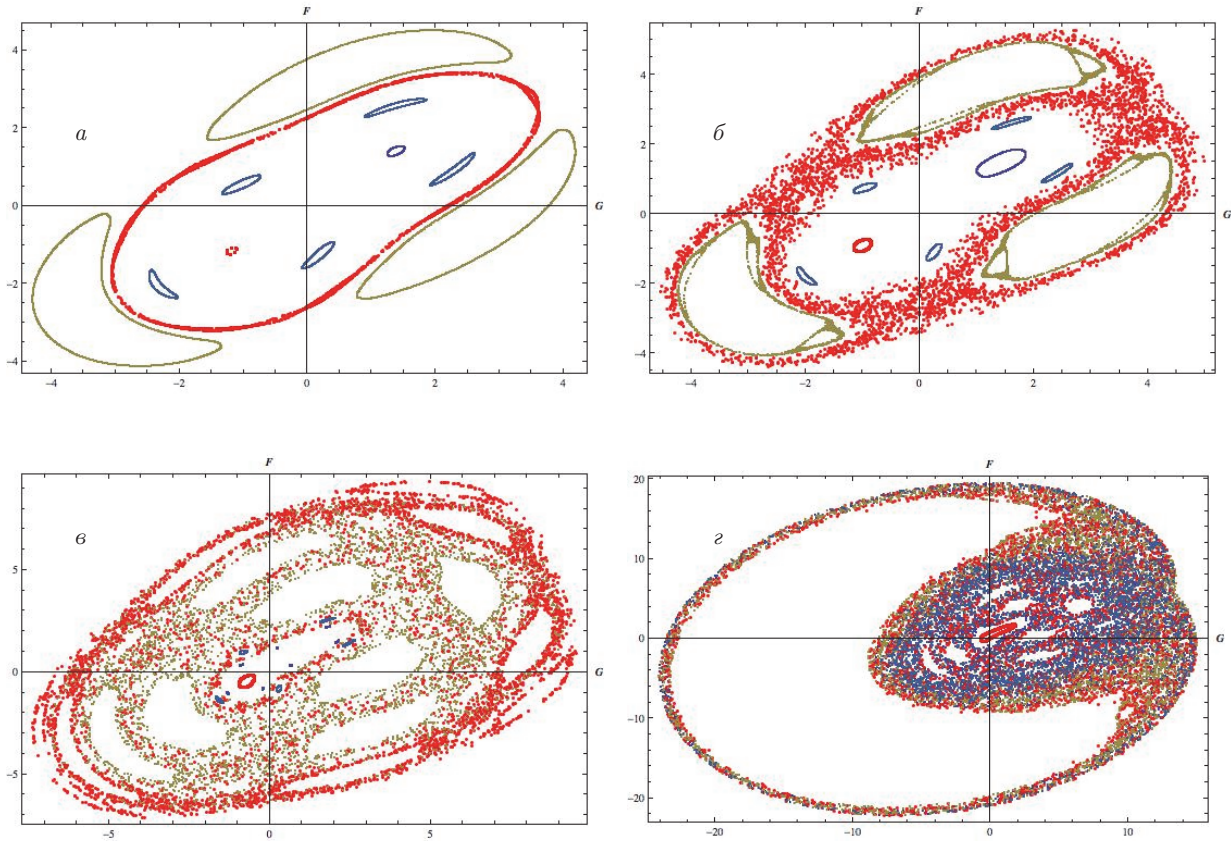


Рис. 5. (В цвете онлайн) Сечения Пуанкаре для четырехмерного спинорного волнового уравнения при $\omega = \pi/2$ при различных начальных условиях $A = 0.870$ (а), 0.910 (б), 1.000 (в), 1.215 (г)

личными топологическими вакуумами в пространстве-времени. Туннелирование играет важную роль в теориях калибровочных полей. Как известно, классические теории калибровочных полей по своей природе являются хаотическими [27]. Поэтому также представляет интерес исследование хаоса в физике инстантонов на основании критерия хаоса в квантовой теории поля.

В настоящей работе мы, во-первых, показали, что возбужденные инстантоны спинорного типа чувствительны к изменению начальных условий. Переходы от регулярных состояний к хаосу обусловлены незначительными изменениями начальных условий для обеих чисто спинорных фермионных моделей. Во-вторых, с помощью построения бифуркационных диаграмм и сечений Пуанкаре была исследована динамика инстантонов спинорного типа в размерностях 2 и 4 при воздействии периодической косинусоидальной внешней силы. Отметим, что обе системы в присутствии периодической силы имеют аналогичные бифуркационные структу-

ры. Обнаружены регулярные участки, на которых системы ненадолго выходят из хаотического состояния, а затем быстро возвращаются к хаосу. Как видно из рис. 1, двух- и четырехмерные инстантоны спинорного типа лежат на сепарабельных замкнутых кривых, соответствующих регулярным траекториям. Результаты, полученные на основании сечений Пуанкаре и бифуркационных диаграмм, показали, что характеристики устойчивости дурффингового типа инстантонов спинорного типа в фазовом пространстве, в зависимости от значений параметров внешней вынуждающей силы, обращаются в нуль. Внешняя сила разрушает сепаратрису и образует стохастический слой. В этом слое число хаотических инстантонов для обеих систем оказывается близким. Существует много различных способов исследований хаотических инстантонов [28–31]; однако в настоящей работе мы впервые наблюдали общее поведение хаотических инстантонов в фермионных моделях спинорного типа. Кроме того, фазовое пространство потока для обеих систем обладает струк-

турой типа КАМ, т. е. некоторые исходные периодические решения остаются регулярными и означают квази-периодичность, в то время как другие ведут себя хаотически [25]. Наблюдаемое регулярное и хаотическое поведение в обеих возбужденных системах на сечениях Пуанкаре для различных значений амплитуд вынуждающей силы согласуется с бифуркационными диаграммами.

В свете полученных результатов можно сделать интересный вывод о том, что хотя модели имеют различные квантовые спиновые числа и размерности, поведение инстантонов спиринового типа в четырехмерной фермионной модели аналогично поведению инстантонов спиринового типа в двумерной фермионной модели при воздействии периодической косинусоидальной вынуждающей силы. Поскольку нам известно критическое поведение конформно-симметричной квантовой теории поля вблизи неподвижных точек, такой результат не кажется удивительным [32–36]. Отличительной чертой настоящей работы является то, что в ней впервые отмечено, что хаотические инстантоны спиринового типа в фазовом пространстве не зависят ни от квантового дробного спиринового числа, ни от размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. de Broglie, *An Introduction to the Study of Wave Mechanics*, Methuen and Co. Ltd., London (1930).
2. P. A. M. Dirac, *The Quantum Theory of the Electron*, in: Proc. Royal Soc. London (1928).
3. W. Heisenberg, Zs. Naturforsch. **9a**, 292 (1954).
4. F. Gursey, Nuovo Cimento **3**, 988 (1956).
5. F. Kortel, Nuovo Cimento **4**, 210 (1956).
6. K. G. Akdeniz, Nuovo Cimento **33**, 40 (1981).
7. A. A. Belavin, A. M. Polyakof, A. S. Schwartz, and Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. B **59**, 85 (1975).
8. W. E. Thirring, Anal Physics **3**, 91 (1958).
9. K. G. Akdeniz and A. Smailagic, Nuovo Cimento A **51**, 345 (1979).
10. K. G. Akdeniz, M. Arik, M. Durgut, M. Hortacsu, S. Kaptanoglu, and N. K. Pak, Phys. Lett. B **116**, 34 (1982).
11. M. Hortacsu and B. C. Lutfuoglu, Phys. Rev. D **76**, 025013 (2007).
12. M. Hortacsu, B. C. Lutfuoglu, and F. Taskin, Mod. Phys. Lett. A **22**, 2521 (2007).
13. F. Taskin, Europ. Phys. J. C **68**, 277 (2010).
14. F. Aydogmus, B. Canbaz, C. Onem, and K. G. Akdeniz, Acta Physica Polonica B **44**, 1837 (2013).
15. F. Aydogmus, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **147**, 240 (2015) [JETP **120**, 210 (2015)].
16. F. Aydogmus, J. Mod. Phys. C **26**(7) (2015).
17. R. Jackew, Rev. Mod. Phys. **49**, 681 (1977); A. Chakrabarti, *Introduction to Classical Solutions of Yang–Mills Filed Equations* (1968).
18. F. Aydogmus and E. Tosyali, Adv. High Energy Phys. 148375 (2014).
19. G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei Veranderlicher Eigenfrequenz*, ed. by F. Vieweg and Sohn, Braunschweig (1918).
20. B. Canbaz, C. Onem, F. Aydogmus, and K. G. Akdeniz, Chaos Solitons and Fractals **45**, 188 (2012).
21. H. Bradt and S. Olbert, *Liouville's Theorem*, Cambridge University Press (2008).
22. L. M. Pismen, *Patterns and Interfaces in Dissipative Dynamics*, Springer (2006).
23. S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Perseus Books (1999).
24. M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag (1986).
25. A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **98**, 527 (1954) [English translation in: *Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*, Volta Memorial Conf. (1977)]; Lecture Notes in Phys. **93**, 51 (1979); V. I. Arnold, Russ. Math. Surv. **18**, 13 (1963); J. Moser, Nachr. Akad. Wiss. Gott. **II**, 1 (1962).
26. J. Kraskiewicz and R. Raczka, Nuovo Cimento A **93**, 28 (1986).
27. T. S. Biro, S. G. Matinyan, and B. Muller, *Chaos and Gauge Field Theory*, World Scientific (1994).
28. V. Kuvshinov and A. Kuzmin, Phys. Lett. A **296**, 82 (2002).
29. V. Kuvshinov, A. Kuzmin, and R. G. Shulyakovsky, Phys. Rev. E **67**, (2003).
30. K. A. Aoki, M. Horikoshi, M. Taniguchi, and H. Te-
rao, *Non-Perturbative Renormalization Group and Quantum Tunneling*, World Scientific (1998).

-
31. H. Jirari, H. Kroger, X. Q. Luo, K. J. M. Moriarty, and S. G. Rubin, *Phys. Lett. A* **281**, 1 (2001).
32. A. M. Polyakov, *JETP Lett.* **12**, 381 (1970).
33. A. A. Migdal, *Phys. Lett. B* **37**, 98, 386 (1971).
34. G. Parisi and L. Peliti, *Lett. Nuovo Cimento* **2**, 627 (1971).
35. G. Mack and I. T. Todorov, ICTP, Trieste, Preprint IC/71/139 (1971).
36. I. T. Todorov, in: *Lecture Notes in Phys.* **17**; ed. by W. Ruhi and A. Vancura, Springer-Verlag (1973).