

ЭЛЕКТРОННЫЕ СВОЙСТВА ВЕЙЛЕВСКОГО ПОЛУМЕТАЛЛА В СКРЕЩЕННЫХ МАГНИТНОМ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

З. З. Алисултанов*

*Институт физики им. Х. И. Амирханова Дагестанского научного центра Российской академии наук
367003, Махачкала, Россия
Дагестанский государственный университет
367000, Махачкала, Россия*

Поступила в редакцию 25 апреля 2017 г.

Исследование вейлевских полуметаллов является одним из самых актуальных вопросов физики конденсированного состояния. Эти материалы проявляют интересные свойства в магнитном поле. В настоящей работе мы исследовали зоны Ландау и квантовые осцилляции плотности состояний в вейлевском полуметалле в скрещенных магнитном и электрическом полях. Мы получили выражение для энергетического спектра такой системы, используя три различных метода: алгебраический подход, подход, основанный на лоренцевском сдвиге, и квазиклассический подход. Интересно, что энергетический спектр, полученный в рамках квазиклассического подхода, полностью совпадает с тем, что получен в рамках микроскопических подходов. Мы показали, что электрическое поле приводит к кардинальной перестройке зон Ландау. Кроме того, мы исследовали классическое движение трехмерного дираковского фермиона в скрещенных полях. Мы показали, что в случае дираковского спектра продольная относительно магнитного поля $p_z \parallel H$ компонента импульса является осциллирующей функцией магнитного поля. Когда электрическое поле равно $v_{\perp} H/c$, происходит коллапс уровней Ландау, а движение становится полностью линейным. Однако происходит это необычным образом. При этом условии волновая функция для объемных состояний обращается в нуль. Сохраняются только состояния с $p_z = 0$. Электрическое поле влияет на характер осцилляций плотности состояний. Мы получили аналитические выражения для квантовой электроемкости в скрещенных полях в случаях сильного и слабого электрического полей. Таким образом, электрическое поле является дополнительным параметром для перестройки диамагнитных свойств вейлевских полуметаллов.

DOI: 10.7868/S0044451017110141

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование дираковских материалов является одним из основных направлений современной физики конденсированного состояния [1, 2]. Помимо графена, открытие которого положило начало глобальным исследованиям дираковских материалов, возрастающий интерес представляют топологические изоляторы [3, 4] и вейлевские полуметаллы [1, 2, 5–10]. В вейлевских полуметаллах, в отличие от графена и топологических изоляторов, имеются трехмерные киральные носители с линейным спектром вблизи так называемых вейлевских точек. С топологической точки зрения трехмерные вейлевские точки более стабильны, чем двумер-

ные. Последние вообще возможны только при некоторых типах симметрии кристаллической решетки (см., например, [1]) и дополнительных симметриях. Например, в случае графена, когда не нарушены P - и T -симметрии, в зоне Бриллюэна имеются две неэквивалентные точки Дирака, которые не являются устойчивыми к возмущениям. Безмассовые фермионы в таких системах обладают топологической защитой [11], что приводит к квантово-электродинамическим эффектам, многие из которых известны из физики высоких энергий [12]. Киральность и линейный спектр носителей приводят к уникальным транспортным свойствам вейлевских полуметаллов, таким как отрицательное магнитосопротивление, аномальный эффект Холла, киральный магнитный эффект и др. [13–16]. Благодаря этим свойствам вейлевские полуметаллы рассматриваются как перспективные материалы для современной электроники.

* E-mail: zaur0102@gmail.com

Исследование вейлевских полуметаллов представляет большой фундаментальный интерес, так как на сегодняшний день возбуждения в этих материалах являются единственными известными вейлевскими фермионами. Действительно, на сегодняшний день известно, что нейтрино обладает массой, т.е. не является вейлевской частицей [17]. Кроме того, различные модификации вейлевских полуметаллов дают совершенно новые эффекты и явления, неизвестные для частиц в вакууме. Недавно были предложены вейлевские полуметаллы нового типа [18–21]. Также недавно теоретически было показано, что WTe_2 является системой фермионов нового типа с сильным нарушением лоренц-инвариантности, которые долго игнорировались квантовой теорией поля. Такие материалы уже открыты экспериментально [22].

Помимо объемных состояний, носители заряда в вейлевских полуметаллах обладают бесщелевыми поверхностными состояниями. Различные граничные условия для носителей заряда в вейлевских полуметаллах рассмотрены в недавних работах [23, 24]. Наличие экзотических поверхностных состояний — ферми-дуг — является визитной карточкой вейлевских полуметаллов и приводит к сильной нелокальности транспорта в тонкослойных образцах [13, 25, 26], а также к аномальным квантовым осцилляциям [15]. Поверхностные состояния в виде ферми-дуг — уникальное свойство вейлевских полуметаллов, связанное исключительно с киральностью носителей.

Частным случаем вейлевских полуметаллов являются дираковские полуметаллы. Дираковские точки отличаются от вейлевских отсутствием киральности. Число Черна для дираковских точек равно нулю. Это происходит потому, что при одновременном наличии обеих симметрий — пространственной и временной инверсий — вейлевские точки с противоположными знаками киральности совмещаются в одну дираковскую точку с нулевой киральностью. В качестве примера дираковского полуметалла можно привести β -кристаллит BiO_2 . Кроме того, по отношению к реальному спину графен является дираковским полуметаллом.

В настоящей работе мы исследуем зоны Ландау и квантовые осцилляции в вейлевских и дираковских полуметаллах в скрещенных магнитном и электрическом полях (см. рис. 1). Такие исследования в графене проведены в работах [27–32]. В скрещенных полях дираковские материалы проявляют интересные особенности, имеющие исключительно релятивистское происхождение. В нерелятивистских материалах,

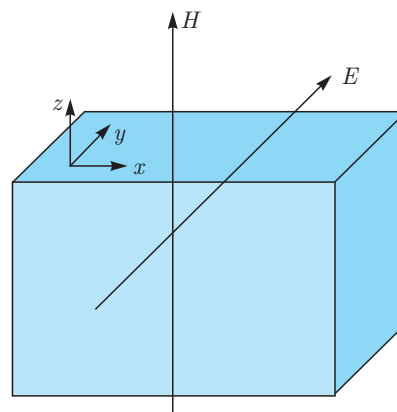


Рис. 1. Схематическое изображение исследуемой системы. Вейлевский полуметалл помещен в скрещенные магнитное и электрическое поля

где энергетический спектр является параболическим, циклотронная масса не зависит от энергии. Действительно, в рамках квазиклассической теории циклотронная масса есть

$$m_c(\varepsilon) = (2\pi)^{-1} dS/d\varepsilon, \quad (1)$$

где $S(\varepsilon)$ — площадь сечения изоэнергетической поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon$ в импульсном пространстве. Для спектра $\varepsilon(\mathbf{p}) = p^2/2m^*$ получим $m_c = m^*$. Следовательно, приложенное электрическое поле не будет влиять на циклотронную частоту, а соответственно, и на уровни Ландау. В дираковских материалах энергетический спектр линейный. Это означает, что циклотронная масса, а соответственно, и уровни Ландау будут зависеть от электрического поля. Например, для графена $\varepsilon(\mathbf{p}) \sim |\mathbf{p}|$, а следовательно, $m_c \sim \varepsilon$. Такая зависимость приводит к возможности управления диамагнетизмом дираковских систем с помощью электрического поля. Можно таким образом перестраивать квантовые осцилляции, магнитооптические эффекты и т.д. С другой стороны, в строгой теории явлений, протекающих в скрещенных полях (эффект Холла, магнитопроводимость, магнитотеплопроводность и т.д.) зависимость уровней Ландау от приложенного возмущения (электрического поля в случае проводимости, градиента температуры — в случае теплопроводности) должна учитываться с самого начала.

Очевидно, что электрическое поле будет влиять на зоны Ландау в вейлевских и дираковских полуметаллах. В отличие от графена в этих материалах спектр трехмерный. Кроме того, носители тока в вейлевских полуметаллах являются киральными. И то и другое приводит к принципиально новым эффектам в режиме скрещенных полей. В работах [33–35] исследовались уровни Ландау в вейлев-

ских полуметаллах типов I и II в скрещенных магнитном и электрическом полях. Мы здесь представляем подробное исследование энергетического спектра, волновой функции, а также квантовых осцилляций плотности состояний.

Необходимо также отметить работу Аронова и Пикуса [36], в которой исследовалось оптическое поглощение полупроводника в скрещенных магнитном и электрическом полях. Исследование проведено в рамках уравнения Дирака для трехмерного массивного электрона. Здесь мы рассматриваем случай безмассовых киральных носителей. Принципиальная разница между случаями вейлевского полуметалла и полупроводником, описываемым уравнением Дирака, заключается в том, что в полупроводнике, из-за того что эффективная масса является функцией импульса (энергии), вообще говоря, каждый электрон обладает своей скоростью. А в случае вейлевского полуметалла существует характерная скорость — скорость Ферми v_F , — которая является одинаковой для всех электронов системы (вблизи точек Вейля), т. е. является настоящим аналогом скорости света. Это приводит к новым результатам, и по этой причине исследование вейлевского полуметалла в скрещенных полях заслуживает отдельного внимания.

Настоящая статья организована следующим образом. В разд. 2 мы приводим информацию об электронном спектре и уровнях Ландау в вейлевском полуметалле. В разд. 3 мы подробно исследовали уровни Ландау в вейлевских полуметаллах в скрещенных полях. В разд. 4 исследованы осцилляции плотности состояний в скрещенных полях и приведено сравнение случаев релятивистских и нерелятивистских (шредингеровских) материалов. Заключение по полученным результатам приведено в разд. 5. В Приложениях рассмотрены различные подходы к решению спектральной задачи, а также движение релятивистского электрона в скрещенных магнитном и электрическом полях.

2. ЭЛЕКТРОННЫЙ СПЕКТР В ВЕЙЛЕВСКОМ ПОЛУМЕТАЛЛЕ

Изначально вейлевские полуметаллы были предложены в виде многослойного топологического изолятора [5]. В такой модели гамильтониан электронов вблизи вейлевской точки имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}} = \pm [v_{\perp}(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y) + v_{\parallel} \sigma_z p_z], \quad (2)$$

где « \pm » означает киральность вейлевской точки, \mathbf{p} — импульс электронов вблизи точек Вейля,

$$\mathbf{p} = \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{\pm}), \quad \mathbf{p} = \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{\pm}),$$

v_{\perp} , v_{\parallel} — скорости Ферми носителей соответственно в плоскости xy и вдоль оси z , $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ — матрицы Паули. Этот гамильтониан помимо линейности спектра содержит в себе еще некоторую анизотропию вейлевского полуметалла, выражающуюся в различности скоростей v_{\perp} и v_{\parallel} . Такая модель достаточно адекватно описывает электронный спектр носителей вблизи вейлевских точек типа I, и мы ее будем использовать далее. Гамильтониан (2) дает следующее выражение для энергетического спектра:

$$E = \pm \sqrt{v_{\perp}^2(p_x^2 + p_y^2) + v_{\parallel}^2 p_z^2}.$$

Из-за использования всех трех матриц Паули такой гамильтониан защищен от появления щели, т. е. вейлевские точки устойчивы. Действительно, возмущение в виде единичной матрицы (например, электрическое поле) приводит лишь к смещению энергии точки Вейля:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}} + \mathbf{I}U_0 \Rightarrow E = E(p) + U_0.$$

С другой стороны, возмущение в виде матрицы Паули приводит к смещению компонент импульсов, соответствующих точке Вейля:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{U} \Rightarrow E = E(p_{\perp} + U_{\perp}/v_{\perp}, p_z + U_z/v_{\parallel}).$$

Ни в одном из перечисленных случаев в спектре не открывается щель. Аналогично можно показать, что, например, в спектре графена щель можно открыть с помощью возмущения в форме $\sigma_z U_z$.

В магнитном поле $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ с использованием калибровки Ландау гамильтониан (2) переписывается следующим образом:

$$\hat{\mathcal{H}} = \pm \left(v_{\perp} \sigma_x \left(\hat{p}_x - \frac{e}{c} H y \right) + v_{\perp} \sigma_y \hat{p}_y + v_{\parallel} \sigma_z \hat{p}_z \right). \quad (3)$$

Такой гамильтониан приводит к зонам Ландау

$$\varepsilon_{n,p_z} = \text{sgn}(n) \sqrt{2v_{\perp}^2 \hbar^2 l_B^{-2} n + v_{\parallel}^2 p_z^2} \quad \text{для } n \neq 0, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{0,p_z} = \pm v_{\parallel} p_z \quad \text{для } n = 0, \quad (5)$$

где $l_H = \sqrt{\hbar c / e H}$. В последней формуле знаки « \pm » соответствуют разным вейлевским точкам. Киральная природа нулевого уровня Ландау приводит к различным интересным последствиям. Например, электрическое поле, приложенное параллельно магнитному полю, нарушает баланс между состояниями с положительной и отрицательной киральностями. Это явление называется киральной аномалией [37, 38]. Другой эффект заключается в появлении

необычных поверхностных состояний — так называемых ферми-дуг, которые приводят к необычным квантовым осцилляциям [15]. Далее мы исследуем влияние перпендикулярного электрического поля на зоны Ландау и обсудим последствия такого влияния на киральные свойства вейлевских полуметаллов.

3. УРОВНИ ЛАНДАУ В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

3.1. Микроскопический подход: метод лоренцевского сдвига

Гамильтониан носителей вейлевского полуметалла в скрещенных магнитном $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ и электрическом $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ полях запишется в виде

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} v_{\parallel} \hat{p}_z + eEy & v_{\perp} \left(\hat{p}_x - \frac{e}{c} Hy - i\hat{p}_y \right) \\ v_{\perp} \left(\hat{p}_x - \frac{e}{c} Hy + i\hat{p}_y \right) & -v_{\parallel} \hat{p}_z + eEy \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для решения поставленной задачи мы воспользуемся методом лоренцевского сдвига. Для случая графена этот метод был использован в работе [27]. Чтобы решить волновое уравнение с гамильтонианом (6), перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью cE/H , совпадающей со скоростью дрейфа электронов в направлении, перпендикулярном электрическому и магнитному полям. Этот переход необходимо осуществить с помощью следующих преобразований Лоренца [27, 39]:

$$p_{\nu} = g_{\nu\mu} \tilde{p}_{\mu}, \quad (7)$$

$$g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} \text{ch } \theta & \text{sh } \theta & 0 & 0 \\ \text{sh } \theta & \text{ch } \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $\nu = t, x, y, z$, $\text{th } \theta = cE/v_{\perp}H = \beta$. Волновое уравнение в новых переменных запишется в виде

$$\left[v_{\perp} \sigma_x \left(-\hat{p}_t \text{sh } \theta + \hat{p}_x \text{ch } \theta - \frac{e}{c} H \hat{y} \right) v_{\perp} \sigma_y \hat{p}_y + v_{\parallel} \sigma_z \hat{p}_z + I \left(eE \hat{y} - v_{\perp} \hat{p}_t \text{ch } \theta + v_{\perp} \hat{p}_x \text{sh } \theta \right) \right] \Psi = 0, \quad (9)$$

где $p_t = \varepsilon/v_{\perp}$. Поскольку $v_{\perp}/c \ll 1$, изменением полей мы можем пренебречь. Используя свойство матрицы Паули $\sigma_x \sigma_x = I$, а также следствие из этого свойства $I \text{ch } \theta - \sigma_x \text{sh } \theta = \exp(-\sigma_x \theta)$, получим

$$\left[v_{\perp} \left(-e^{-\sigma_x \theta} \hat{p}_t + \sigma_x e^{-\sigma_x \theta} \left(\hat{p}_x - \frac{eB}{c \text{ch } \theta} \hat{y} \right) + \sigma_y \hat{p}_y \right) + v_{\parallel} \sigma_z \hat{p}_z \right] \Psi = 0. \quad (10)$$

Далее воспользуемся свойствами [40]

$$\begin{aligned} e^{-\sigma_x \theta/2} \sigma_y e^{-\sigma_x \theta/2} &= \sigma_y, \\ e^{-\sigma_x \theta/2} \sigma_z e^{-\sigma_x \theta/2} &= \sigma_z, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\tilde{\Psi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = e^{-\sigma_x \theta/2} \Psi(x, y, z, t), \quad (12)$$

для стационарной задачи $\tilde{\Psi}(\tilde{r}, \tilde{t}) = \exp(-i\tilde{E}\tilde{t}/\hbar) \tilde{\psi}(\tilde{r})$ получаем окончательно

$$\left(-\tilde{\varepsilon} + v_{\perp} \sigma_x \left(\hat{p}_x - \frac{e}{c} \tilde{H} \tilde{y} \right) + v_{\perp} \sigma_y \hat{p}_y + v_{\parallel} \sigma_z \hat{p}_z \right) \tilde{\psi} = 0, \quad (13)$$

где $\tilde{H} = H\sqrt{1-\beta^2}$. Положив

$$\tilde{\psi} = \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\tilde{p}_x \tilde{x} + \tilde{p}_z \tilde{z}) \right] \psi(\tilde{y}),$$

для спектра получаем

$$\tilde{\varepsilon}_{n, \tilde{p}_z} = \text{sgn}(n) \sqrt{2v_{\perp}^2 \hbar^2 l_H^{-2} n \sqrt{1-\beta^2} + v_{\parallel}^2 \tilde{p}_z^2}. \quad (14)$$

Применяя обратные преобразования Лоренца, переходим в неподвижную систему отсчета и получаем

$$\varepsilon_{n, p_x, p_z} = \text{sgn}(n) \times \sqrt{2v_{\perp}^2 \hbar^2 l_H^{-2} n (1-\beta^2)^{3/2} + v_{\parallel}^2 p_z^2 (1-\beta^2) + v_0 p_x}. \quad (15)$$

В случае графена, когда $p_z = 0$, это выражение совпадает с результатом работ [27, 28]. Заметим, что для обеих точек Вейля (с разными знаками киральности) добавочный член имеет одинаковый знак.

Решение стационарного уравнения (13) есть

$$\tilde{\psi}_{n, \tilde{p}_x, \tilde{p}_z}(\tilde{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\tilde{p}_x \tilde{x} + \tilde{p}_z \tilde{z}) \right] \times \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{n-1}(\tilde{\zeta}) \\ i \text{sgn}(n) \tilde{\varphi}(\tilde{\zeta}) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где

$$\tilde{\zeta} = \frac{(1-\beta^2)^{1/4}}{l_H} \left(\tilde{y} - \frac{\tilde{p}_x l_H^2}{\hbar(1-\beta^2)^{1/2}} \right), \quad (17)$$

а $\tilde{\varphi}_n(\tilde{\zeta})$ — собственные функции задачи квантового гармонического осциллятора. Осуществим теперь обратное преобразование Лоренца. Прежде всего заметим, что

$$\tilde{p}_x = \frac{p_x - (v_0/v_\perp^2)\varepsilon_{n,p_x,p_z}}{\sqrt{1-\beta^2}} = p_x\sqrt{1-\beta^2} - \beta \operatorname{sgn}(n)\sqrt{2\hbar^2 l_H^{-2} n(1-\beta^2)^{1/2} + \frac{v_\parallel^2}{v_\perp^2} p_z^2}. \quad (18)$$

Тогда

$$\zeta = \frac{(1-\beta^2)^{1/4}}{l_H} \left(y - \frac{p_x l_H^2}{\hbar} + \frac{l_H^2 \beta \operatorname{sgn}(n)}{\hbar(1-\beta^2)^{1/2}} \times \sqrt{2\hbar^2 l_H^{-2} n \sqrt{1-\beta^2} + \frac{v_\parallel^2}{v_\perp^2} p_z^2} \right). \quad (19)$$

Наконец, из лоренц-инвариантности скалярного произведения 4-импульса $p_\mu = (\varepsilon/v_\perp, -\mathbf{p})$ и 4-радиус-вектора $x^\mu = (v_\perp t, \mathbf{r})$

$$\tilde{p}_\mu \tilde{x}^\mu = p_\mu x^\mu \quad (20)$$

следует, что

$$\tilde{\varepsilon} t - \tilde{p}_x \tilde{x} = \varepsilon t - p_x x. \quad (21)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\Psi_{n,p_x,p_z}(r,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\sigma_x \frac{\theta}{2}\right\} \times \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(\varepsilon t - p_x x - p_z z)\right\} \times \begin{pmatrix} \varphi_{n-1}(\zeta) \\ i \operatorname{sgn}(n) \varphi_n(\zeta) \end{pmatrix} \quad \text{для } n \neq 0, \quad (22)$$

$$\Psi_{0,p_x,p_z}(r,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\sigma_x \frac{\theta}{2}\right\} \times \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(\varepsilon t - p_x x - p_z z)\right\} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \varphi_0 \quad \text{для } n = 0. \quad (23)$$

Обсуждение энергетического спектра и волновой функции приведено в подсекции **В** этой секции. В Приложениях А, В мы привели алгебраическое и квазиклассическое решения спектральной задачи. Во втором случае мы аналитически показали, что фаза Берри в точности равна π . Кроме того, некоторые результаты (например, зависимость z -компоненты энергии от электрического поля) могут быть лучше поняты при исследовании классического движения. Такое исследование приведено в Приложении С.

3.2. Обсуждение

Обсудим теперь полученное выражение для энергетического спектра. Во-первых, заметим, что электрическое поле снимает вырождение уровней Ландау. Действительно, разным значениям p_x соответствуют разные значения энергии из-за члена $v_0 p_x$. Во-вторых, радиус циклотронной орбиты есть функция электрического поля. Действительно, из (26) следует, что при $v_0 \rightarrow v_\perp$ радиус циклотронной орбиты, который определяется как масштаб неоднородности волновой функции вдоль оси y , стремится к бесконечности. На самом деле, масштаб неоднородности y_0 определяется через коэффициент перед аргументом y , т. е.

$$\left((1-\beta^2)^{1/4}/l_H\right) y = y/y_0,$$

откуда видно, что $y_0 \rightarrow \infty$ при $v_0 \rightarrow v_\perp$. Это означает, что движение по соответствующей оси исчезает. Другими словами, волновая функция по оси y становится однородной и соответствующий импульс обращается в нуль. Это следует и из того, что при $v_0 = v_\perp$ мы получаем, что $\varepsilon = v_\perp p_x$, т. е. движение становится одномерным. Это является исключительно релятивистским эффектом. Важно, что условие $v_0 = v_\perp$ может быть достигнуто с помощью приложения электрического поля. Таким образом, приложение продольного электрического поля приводит к глобальным изменениям в энергетическом спектре.

Рассмотрим более подробно волновую функцию (22). Из формулы (19) следует, что при $v_0 = v_\perp$ и при $p_z \neq 0$ волновая функция исчезает, так как $\zeta \rightarrow \infty$. Если же $p_z = 0$, то волновая функция отлична от нуля. Это означает, что при $v_0 = v_\perp$ исчезают все состояния, кроме состояний с $p_z = 0$. Таким образом, при этом условии спектр становится линейным и чисто поверхностным. Этот результат может быть получен, если рассматривать случай $v_0 = v_\perp$ с самого начала. Из гамильтониана (6) при $v_0 = v_\perp$ получаем следующее уравнение для волновой функции:

$$\left\{v_\perp^2 \hbar^2 l_H^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + J_1 I\right\} \begin{pmatrix} u \\ \nu \end{pmatrix} = \left(\varepsilon^2 - v_\parallel^2 p_z^2 - v_\perp^2 p_x^2\right) \begin{pmatrix} u \\ \nu \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$J_1 = v_\perp^2 \hat{p}_y^2 - 2v_\perp(\varepsilon - v_\perp p_x) \hbar l_H^{-2} y, \quad (25)$$

где ε — энергетический спектр при $v_0 = v_\perp$, т.е. $\varepsilon = v_\perp p_x$. Если раскрыть матрицы в (24), получим уравнение

$$J_1 h = \left(\varepsilon^2 - v_\parallel^2 p_z^2 - v_\perp^2 p_x^2 \right) h, \quad (26)$$

где $h = u + v$. Решение уравнения (26) выражается через функцию Эйри

$$h(\xi) = C \text{Ai}(-\xi), \quad (27)$$

где

$$\xi = \frac{y}{l} + l^2 \tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2 - v_\parallel^2 p_z^2 - v_\perp^2 p_x^2}{v_\perp^2 \hbar^2},$$

$$l = \left(\frac{v_\perp \hbar l_H^2}{2(v_\perp p_x - \varepsilon)} \right)^{1/3}.$$

Теперь подставим $\varepsilon = v_\perp p_x$. Получаем, что $\xi \rightarrow -\infty$. Используя асимптотическое выражение для функции Эйри

$$h(\xi) = \{\xi \rightarrow -\infty\} \approx \frac{C}{2|\xi|^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}|\xi|^{3/2}\right),$$

приходим к выводу, что при $v_0 = v_\perp$ имеем $h = 0$. Однако, если мы положим $p_z = 0$, то волновая функция будет отлична от нуля. Действительно, в этом случае $\xi = 0$ за счет второго слагаемого, что дает

$$h = \frac{C}{3^{2/3} \Gamma(2/3)}.$$

На рис. 2 приведен энергетический спектр (15) при $n \neq 0$. Из рисунка следует, что расстояние между зонами Ландау уменьшается по мере роста электрического поля. Такое уменьшение приведет к изменению характера осцилляций термодинамических величин. В разд. 4 мы демонстрируем это на примере плотности состояний. При $v_0 = v_\perp$ исчезает орбитальное движение электронов и движение становится линейным.

Тот факт, что энергетический спектр (15) для каждого уровня n зависит от двух импульсов p_x и p_z , означает, что в некоторых случаях существует множество пар этих чисел, соответствующих одной и той же энергии для данного номера уровня. Из формулы (22) видно, что различным таким парам соответствуют различные волновые функции, т.е. каждый уровень Ландау оказывается вырожденным с некоторой краткостью.

Особый интерес представляет нулевой уровень Ландау. В данном случае нулевой уровень определяется двумя импульсами: p_x и p_z . Как было отмечено в разд. 1, нулевой уровень Ландау в вейлевском

полуметалле приводит к явлению киральной аномалии. Включим в исследуемую нами систему (рис. 1) слабое постоянное электрическое поле параллельно магнитному полю. Эта ситуация может быть описана с помощью векторного потенциала

$$A = \left(-\frac{e}{c} H y, 0, A_z(t) \right),$$

а электрическое поле определяется как

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z(t)}{\partial t}.$$

Если скорость изменения $A_z(t)$ намного меньше, чем расстояние между энергетическими уровнями (для системы с конечными размерами), то мы можем использовать адиабатическую теорему для получения собственных значений. Для этого мы будем решать задачу при значении $A_z(t)$ в данный момент времени, а затем будем медленно «сканировать» спектр во времени. Тогда для нулевого уровня получим

$$\varepsilon_{p_x, p_z} = \pm v_\parallel \sqrt{1 - \beta^2} \left(p_z - \frac{e}{c} A_z \right) + v_0 p_x,$$

где знак «+» относится к одной точке Вейля, а знак «-» — к другой точке. Из формулы следует, что здесь мы будем иметь дело со случаем несимметричной киральной аномалии из-за дополнительного члена $v_0 p_x$. Действительно, рассмотрим частный случай $v_0 = v_\parallel / \sqrt{1 + v_\parallel^2 / v_\perp^2}$. В этом случае для двух точек Вейля имеем

$$\varepsilon_{p_x, p_z}^+ = v_0 \left(p_z - \left(\frac{e}{c} A_z - p_x \right) \right),$$

$$\varepsilon_{p_x, p_z}^- = -v_0 \left(p_z - \left(\frac{e}{c} A_z + p_x \right) \right).$$

Из этих формул следует, что изменения положительного и отрицательного киральных зарядов не равны по модулю.

Все указанные выше эффекты связаны с релятивистским характером энергетического спектра. В случае параболического спектра поперечное электрическое поле влияет на уровни Ландау следующим образом:

$$\varepsilon_{n, p_x, p_z} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + v_0 \left(p_x + \frac{eE}{\omega_c} \right) + \frac{m v_0^2}{2} + \frac{p_z^2}{2m}. \quad (28)$$

Таким образом, в случае параболического спектра электрическое поле приводит просто к смещению уровней Ландау и дрейфу электронов. Расстояние между уровнями и z -компонента энергии не зависят от электрического поля.

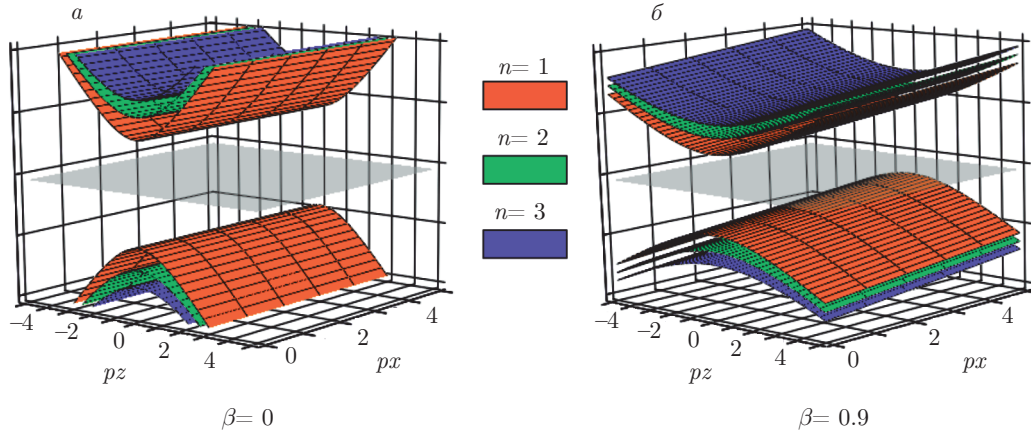


Рис. 2. Зоны Ландау при отсутствии (а) и наличии электрического поля (б)

4. КВАНТОВЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

4.1. Плотность состояний и квантовая емкость в вейлевском полуметалле

Квантование Ландау приводит к осцилляциям термодинамических величин. Последние определяются с помощью плотности состояний. Здесь мы рассмотрим осцилляции плотности состояний. При конечных температурах поведение плотности состояний исследуется с помощью квантовой емкости. Квантовые осцилляции в вейлевском полуметалле исследовались в работах [15, 16, 41, 42].

Плотность состояний определяется как

$$\rho(\varepsilon) = \frac{L_x L_z}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^{p_x \max} dp_x \int dp_z \times \left\{ |\varepsilon - v_0 p_x| \delta\left((\varepsilon - v_0 p_x)^2 - v_{\parallel}^2 \gamma^2 p_z^2\right) + \sum_{n=1, \alpha=\pm}^{\infty} \delta(\varepsilon - v_0 p_x - \alpha E_{n, p_z}) \right\}. \quad (29)$$

Величина $p_x \max$ определяется из условия вырожденности уровней Ландау. Используя результат микроскопического подхода, получаем

$$0 < \Delta y = \frac{c}{eH} \Delta p_x < L_y, \quad (30)$$

откуда $\Delta p_x \max = eHL_y/c$. Интегрируя по p_z , получаем

$$\rho(\varepsilon) = \frac{L_x L_z}{(2\pi\hbar)^2} \frac{eHL_y}{\gamma c v_{\parallel}} \left\{ 1 + \frac{2}{eEL_y} \times \int_0^{eEL_y \left[\frac{(\varepsilon - \zeta)^2 v_{\perp}^2}{v_{\perp}^2 2\hbar^2 \gamma^3} \right]} \sum_{n=1} \frac{|\varepsilon - \zeta| d\zeta}{\sqrt{(\varepsilon - \zeta)^2 - \frac{2\hbar^2}{l_H^2} v_{\perp}^2 \gamma^3 n}} \right\}. \quad (31)$$

При отсутствии электрического поля ($E = 0$) и при $v_{\perp} = v_{\parallel} = v_F$ получаем

$$\rho(\varepsilon) = \frac{L_x L_z}{(2\pi\hbar)^2} \frac{eHL_y}{c v_F} \times \left\{ 1 + 2 \frac{|\varepsilon|}{v_F} \sum_{n=1}^{\left[\frac{\varepsilon^2 l_H^2}{v_{\perp}^2 2\hbar^2} \right]} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - \frac{2\hbar^2}{l_H^2} n}} \right\}, \quad (32)$$

что совпадает с результатом работы [41].

На рис. 3 показана зависимость плотности состояний (31) от обратного магнитного поля при различных значениях электрического поля. На рисунке видно, что электрическое поле изменяет характер квантовых осцилляций особенно существенно вблизи значений, когда $v_0 = v_F$. Последнее связано с коллапсом уровней Ландау.

Из (31) видно, что при $v_0 = v_{\perp}$ плотность состояний расходится. Возникает вопрос, связано ли такое поведение плотности состояний с нашей низкоэнергетической моделью. На самом деле, это недостаток континуальной модели. Действительно,

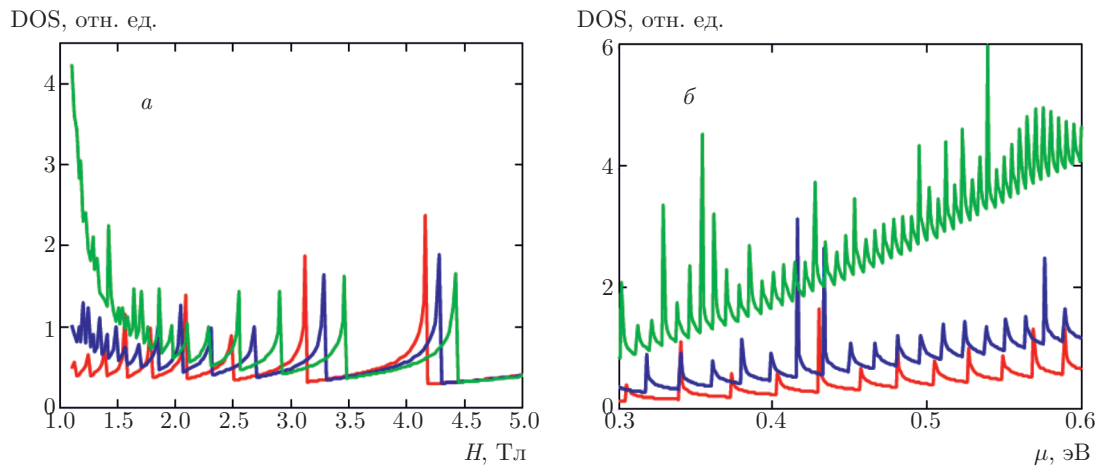


Рис. 3. (В цвете онлайн) Плотность состояний как функция магнитного поля при $\mu = 0.3$ эВ (а) и как функция химического потенциала при $H = 2$ Тл для различных значений электрического поля (б): $E = 0$ (красный), $E = 400$ В/см (синий), $E = 700$ В/см (зеленый)

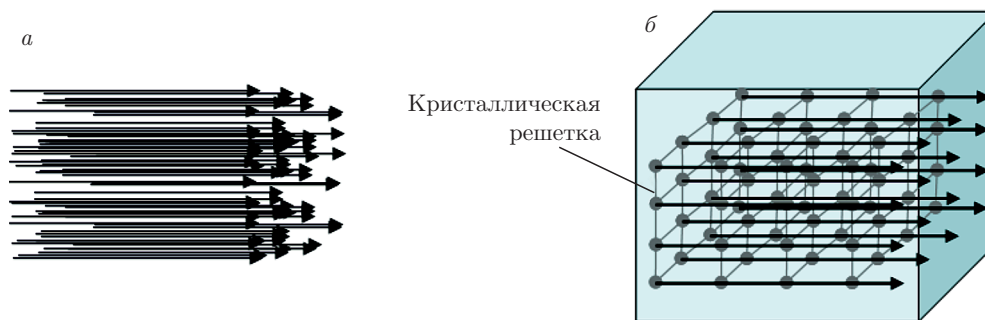


Рис. 4. Траектории носителей в трехмерном вейлевском полуметалле при $v_0 = v_{\perp}$ в непрерывной модели (а) и решеточной модели (б). В непрерывной модели таких траекторий бесконечное число, что приводит к расходимости плотности состояний

при $v_0 = v_{\perp}$ движение становится чисто одномерным. Но наша система является трехмерной. Вопрос: сколько одномерных траекторий уместится в трехмерной системе? Ответ: если не учитывать периодическую структуру кристалла (континуальная модель), то таких одномерных траекторий в системе будет бесконечное число (рис. 4а). Соответственно, бесконечным будет и число состояний. С этим и связано расхождение плотности состояний. Понятно, что если учесть периодическую структуру (решеточная модель), то плотность состояний будет ограничена сверху концентрацией атомов, т. е. между одномерными траекториями будет дистанция, равная кристаллической постоянной (рис. 4б).

Таким образом, чтобы избежать расходимости плотности состояний, необходимо принять во внимание кристаллическую структуру. В нашем случае

достаточно ограничить импульсы сверху значением $p_0 \sim \hbar/a$, где a — постоянная кристаллической структуры. Учитывая сказанное, для плотности состояний при $v_0 = v_{\perp}$ получаем

$$\rho(\varepsilon) = \frac{L_x L_z}{(\pi \hbar)^2} \frac{p_0}{v_{\perp}} \Theta(v_{\perp} p_{x \max} - \varepsilon). \quad (33)$$

Отсюда видно, что при $p_0 \rightarrow \infty$, т. е. в непрерывной модели ($a \rightarrow 0$), плотность состояний расходится.

Получим теперь аналитическое выражение для квантовой электроемкости при низких температурах. На измерениях электроемкости, а также ее осцилляций в квантующем магнитном поле [43, 44], основан один из экспериментальных методов изучения плотности состояний. В работе [45] были исследованы квантовые осцилляции электроемкости многослойного графена. В случае вейлевского полуметалла такое исследование является методом изучения

поверхностных состояний, а наш результат по квантовой электроемкости может быть важен при оценке объемного вклада в плотность состояний. Квантовая электроемкость определяется как

$$C = -e^2 \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \rho(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (34)$$

где

$$f(\varepsilon) = (\exp((\varepsilon - \mu)/k_B T) + 1)^{-1}$$

— функция распределения Ферми–Дирака, μ — химический потенциал. Применим формулу Пуассона

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \int_0^\infty f(x) dx + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty f(x) e^{2\pi i k x} dx \end{aligned} \quad (35)$$

к формуле (29). Тогда получим

$$\rho = \rho_0 + \rho_{osc}, \quad (36)$$

где

$$\rho_0 = \frac{L_x L_z}{(2\pi\hbar)^2} \frac{\tilde{v}_\parallel}{\tilde{v}_\perp^2} \frac{\varepsilon^3 - (\varepsilon - v_0 p_{x \max})^3}{3eE\hbar}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \rho_{osc} &= \frac{L_x L_z}{(2\pi\hbar)^2} \frac{1}{\tilde{v}_\parallel} \frac{1}{\hbar^2 \tilde{v}_\perp^2 l_H^{-2}} \int_0^{p_{x \max}} \tilde{\varepsilon}^2 dp_x \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} \cos \pi k \frac{\tilde{\varepsilon}^2 l_H^2}{\hbar^2 \tilde{v}_\perp^2} (1-y), \end{aligned} \quad (38)$$

где введены обозначения $\tilde{v}_\parallel = \gamma v_\parallel$, $\tilde{v}_\perp = \gamma^{3/4} v_\perp$. Чтобы рассчитать интеграл по y , мы воспользуемся результатом работы [41]. Тогда окончательно получим

$$\begin{aligned} \rho_{osc} &= \frac{L_x L_z}{(2\pi\hbar)^2} \frac{\hbar \tilde{v}_\perp}{2\pi v_0 l_H \tilde{v}_\parallel} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(\cos \left(\frac{\pi k l_H^2}{\hbar^2 \tilde{v}_\perp^2} (\varepsilon - v_0 p_{x \max})^2 + \frac{\pi}{4} \right) - \right. \\ &\left. - \cos \left(\frac{\pi k l_H^2}{\hbar^2 \tilde{v}_\perp^2} \varepsilon^2 + \frac{\pi}{4} \right) \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Заметим, что при $v_0 = v_\perp$ мы получаем $\rho_{osc} = 0$. Это связано с тем, что при этом условии происходит коллапс уровней Ландау, исчезает орбитальное движение, а соответственно, и соответствующие квантовые осцилляции.

Воспользуемся тригонометрическим соотношением

$$\begin{aligned} \cos \left(\pi k \bar{\xi}_\varepsilon + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\pi k \xi_\varepsilon + \frac{\pi}{4} \right) &= \\ &= 2 \sin \left(\frac{\pi k}{3} (\bar{\xi}_\varepsilon + \xi_\varepsilon) + \frac{\pi}{4} \right) \times \\ &\times \sin \left(\pi k v_0 p_{x \max} \left(\varepsilon - \frac{v_0 p_{x \max}}{2} \right) \tilde{l}_H \right), \end{aligned} \quad (40)$$

где для удобства мы ввели обозначения

$$\bar{\xi}_\varepsilon = (\varepsilon - v_0 p_{x \max})^2 l_H^2 / \hbar^2 \tilde{v}_\perp^2, \quad \xi_\varepsilon = \varepsilon^2 \tilde{l}_H^2.$$

Для слабых электрических полей, когда $\mu > eEL_y$, для выражения (40) приблизительно получаем

$$2 \sin \left(\pi k \frac{\varepsilon^2 l_H^2}{\hbar^2 \tilde{v}_\perp^2} + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\pi k \frac{\varepsilon v_0 p_{x \max} l_H^2}{\hbar^2 \tilde{v}_\perp^2} \right). \quad (41)$$

Таким образом, помимо осцилляций де Гааза–ван Альфена, имеется некоторая модуляция этих осцилляций с частотой $\Delta(1/H) \propto (\varepsilon v_0 p_{x \max})^{-1}$, которая стремится к бесконечности при отсутствии электрического поля.

Если $\mu \ll eEL_y$, то получаем

$$\begin{aligned} \cos \pi \left(k \bar{\xi}_\varepsilon + \frac{1}{4} \right) - \cos \pi \left(k \xi_\varepsilon + \frac{1}{4} \right) &\approx \\ \approx \cos \pi \left(k \frac{v_0^2 p_{x \max}^2 l_H^2}{\hbar^2 \tilde{v}_\perp^2} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Таким образом, в случае сильных электрических полей характерной энергией, определяющей период квантовых осцилляций, является величина $v_0 p_{x \max}$. При отсутствии электрического поля формула (39) дает результат работы [41].

Подставим теперь плотность состояний в формулу (34). При низких температурах подынтегральное выражение в (34) существенно отлично от нуля лишь в непосредственной окрестности точки химического потенциала. Поэтому мы запишем

$$\varepsilon^2 \approx \mu^2 + 2\mu(\varepsilon - \mu), \quad (43)$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon - v_0 p_{x \max})^2 &\approx (\mu - v_0 p_{x \max})^2 + \\ &+ 2(\mu - v_0 p_{x \max})(\varepsilon - \mu). \end{aligned} \quad (44)$$

Тогда для осциллирующей части квантовой электроемкости получим

$$\begin{aligned} C_{osc} &= e^2 \frac{L_x L_z}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{v}_\perp}{2\pi \hbar v_0 l_H \tilde{v}_\parallel} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{\bar{\chi}_k}{\operatorname{sh} \bar{\chi}_k} \cos \left(\pi k \bar{\xi}_\mu + \frac{\pi}{4} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{\chi_k}{\operatorname{sh} \chi_k} \cos \left(\pi k \xi_\mu + \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

где $\bar{\chi}_k = \pi k \bar{\xi}_\mu k_B T$, $\chi_k = \pi k \xi_\mu k_B T$. При получении (45) использована формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha z}}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{z}{2}} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^z}{(e^z + 1)^2} e^{i\alpha z} dz = \frac{\pi \alpha}{\operatorname{sh} \pi \alpha}. \quad (46)$$

Измерение квантовой емкости позволит непосредственно проверить предсказанные в данной работе эффекты. Используя полученные здесь выражения, можно исследовать термодинамические свойства в скрещенных полях [46, 47].

4.2. Сравнение со случаем шредингеровских фермионов

Для нерелятивистских (шредингеровских) электронов в скрещенных полях плотность состояний запишется в следующем виде:

$$\rho_{Sch}(\varepsilon) = \frac{L_x L_z}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^{p_x \max} dp_x \int dp_z \times \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\varepsilon - v_0 p_x - E_{n,p_z}), \quad (47)$$

где

$$E_{n,p_z} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{v_0 e E}{\omega_c} + \frac{m v_0^2}{2} + \frac{p_z^2}{2m} = \hbar\omega_c n + \varepsilon_0 + \frac{p_z^2}{2m}.$$

После интегрирования получаем

$$\rho_{Sch}(\varepsilon) = \frac{L_x L_z \sqrt{2m}}{2(2\pi\hbar)^2 v_0} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0 - e E L_y - \hbar\omega_c n} - \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0 - \hbar\omega_c n} \right]. \quad (48)$$

Из этой формулы следует, что в отличие от релятивистских электронов, в данном случае плотность состояний изменяется очень незначительно. При отсутствии электрического поля получаем

$$\rho_{Sch}(\varepsilon) = \frac{L_x L_z \sqrt{2m}}{2(2\pi\hbar)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)}}. \quad (49)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы сделали следующие теоретические предсказания: зоны Ландау сокращаются и при некотором значении электрического поля

коллапсируют. Волновая функция объемных состояний исчезает при $E = v_\perp H/c$ и состояния оказываются чисто поверхностными. Указанные эффекты будут влиять на такие явления, как поверхностные состояния в виде ферми-дуг, киральная аномалия и т. д. Электрическое поле влияет на характер квантовых осцилляций.

Если положить $v_F = 10^7$ см/с, то в магнитном поле 1 Тл коллапс уровней Ландау происходит при $E_0 \approx 10^3$ В/см. Если размер образца $L_y = 200$ мкм (см., например, [10]), то $U_0 \approx 20$ В.

В конце отметим, что влияние продольного электрического поля на уровни Ландау дает уникальную возможность управлять магнетизмом вейлевских полуметаллов с помощью электрического поля. Лифшиц и Каганов, впервые обратившие внимание на этот эффект [48], предложили использовать его для исследования изоэнергетических поверхностей в полупроводниках. Действительно, из-за наличия запрещенной щели энергетический спектр полупроводника отличается от параболического, благодаря чему указанный эффект в этих материалах существует. В работе [34] было исследовано оптическое поглощение в полупроводниках в скрещенных магнитном и электрическом полях. В этой работе подробно рассмотрены случаи $E < H$ и $E > H$. Благодаря линейному спектру носителей, влияние электрического поля на уровни Ландау в вейлевских полуметаллах существенно сильнее, чем в обычных полупроводниках и других нерелятивистских материалах.

Обобщение идей и результатов настоящей работы на случай вейлевских полуметаллов типов III, IV, предсказанных в работе [49], на наш взгляд, представляет большой интерес. В качестве основы такого обобщения здесь приведен расчет энергетического спектра таких фермионов в магнитном поле.

Для взаимодействующих вейлевских фермионов можно написать следующий гамильтониан [49]:

$$\hat{H} = v_F \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{p} + \frac{\varepsilon}{v_F} \boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (50)$$

Для случая $\boldsymbol{\vartheta} = 0$, если $v_F > |\boldsymbol{\omega}|$, этот гамильтониан описывает вейлевские полуметаллы типа I с наклонным спектром, а если $v_F < |\boldsymbol{\omega}|$, то (50) соответствует вейлевским полуметаллам типа II. Для случая $\boldsymbol{\vartheta} \neq 0$ авторы работы [49] ввели следующую классификацию: случай $v_F > |\boldsymbol{\omega}|$ и $v_F < |\boldsymbol{\vartheta}|$ соответствует вейлевским полуметаллам типа III, а случай $v_F < |\boldsymbol{\omega}|$ и $v_F < |\boldsymbol{\vartheta}|$ соответствует типу IV.

В присутствии магнитного поля мы имеем

$$\hat{H} = v_F \sigma \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \omega \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \frac{\varepsilon}{v_F} \boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (51)$$

Далее мы будем рассматривать простое приближение $\omega_y = 0$ (более общий случай $\omega_y \neq 0$ рассмотрен в Приложении D). Используя калибровку Ландау, получим

$$\begin{aligned} \hat{H} = & v_F \sigma_x \left(p_x + \frac{\varepsilon}{v_F^2} \vartheta_x - \frac{e}{c} H y \right) + \\ & + v_F \sigma_y \left(p_y + \frac{\varepsilon}{v_F^2} \vartheta_y \right) + v_F \sigma_z \left(p_z + \frac{\varepsilon}{v_F^2} \vartheta_z \right) + \\ & + \omega_x p_x - \omega_x \frac{e}{c} H y + \omega_{\parallel} p_z. \end{aligned} \quad (52)$$

Волновое уравнение может быть записано как

$$\hat{\mathcal{H}} \Psi = (\varepsilon - \omega_x p_x - \omega_{\parallel} p_z) \Psi, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & v_F \sigma_x \left(p_x + \frac{\varepsilon}{v_F^2} \vartheta_x - \frac{e}{c} H y \right) + \\ & + v_F \sigma_y \left(p_y + \frac{\varepsilon}{v_F^2} \vartheta_y \right) + \\ & + v_F \sigma_z \left(p_z + \frac{\varepsilon}{v_F^2} \vartheta_z \right) - \omega_x \frac{e}{c} H y. \end{aligned}$$

Чтобы решить волновое уравнение с гамильтонианом \hat{H} , перейдем к новым переменным, используя преобразования Лоренца с $\beta = \text{th } \theta = -\omega_x / v_F$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left[-v_F e^{-\sigma_x \theta} \left(\hat{p}_t - \hat{p}_t \text{sh } \theta \frac{\vartheta_x}{v_F} \right) + \right. \\ & + v_F \sigma_x e^{-\sigma_x \theta} \left(\hat{p}_x + \text{ch } \theta \frac{\vartheta_x}{v_F} \hat{p}_t - \frac{e}{c} \frac{H}{\text{ch } \theta} y \right) + \\ & + v_F \sigma_y \left(\hat{p}_y + \frac{\vartheta_y}{v_F} \hat{p}_t \right) + \\ & \left. + v_F \sigma_z \left(p_z + \frac{\vartheta_z}{v_F} \hat{p}_t \right) \right] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Для стационарной задачи, используя ту же процедуру, что в разд. 3, мы получим

$$\begin{aligned} & \left[- \left(\tilde{\xi} - \varepsilon \text{sh } \theta \frac{\vartheta_x}{v_F} \right) + v_F \sigma_x \left(\tilde{p}_x + \text{ch } \theta \frac{\varepsilon}{v_F^2} \vartheta_x - \frac{e}{c} \tilde{H} y \right) + \right. \\ & \left. + v_F \sigma_y \left(\tilde{p}_y + \frac{\vartheta_y}{v_F} \varepsilon \right) + v_F \sigma_z \left(\tilde{p}_z + \frac{\vartheta_z}{v_F} \varepsilon \right) \right] \tilde{\Psi} = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Для собственных значений $\tilde{\xi}$ задачи (55) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_n - \varepsilon \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\vartheta_x}{v_F} = & \text{sgn}(n) v_F \times \\ & \times \sqrt{2 \hbar^2 l_H^{-2} n \sqrt{1 - \beta^2} + \left(\tilde{p}_z + \frac{\vartheta_z}{v_F} \varepsilon \right)^2}. \end{aligned} \quad (56)$$

Применяя обратные преобразования Лоренца, для собственных значений гамильтониана (52) получим

$$\varepsilon_n = \text{sgn}(n) \sqrt{2 \tilde{v}_{\perp}^2 \hbar^2 l_H^{-2} n + \tilde{v}_{\parallel}^2 p_z^2 + \tilde{\omega}_z p_z}, \quad (57)$$

$$\varepsilon_0 = (\tilde{v}_{\parallel} + \tilde{\omega}_z) p_z, \quad (58)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\perp} &= v_F \gamma^{3/2} / \sqrt{\bar{\omega}^2 - \frac{\gamma^2 \vartheta_z^2}{v_F^2}}, \\ \tilde{v}_{\parallel} &= v_F \gamma \left(\bar{\omega} + \frac{\omega_z \vartheta_z}{v_F^2} \right) / \left(\bar{\omega}^2 - \frac{\gamma^2 \vartheta_z^2}{v_F^2} \right), \\ \tilde{\omega}_z &= (\bar{\omega} \omega_z + \gamma^2 \vartheta_z) / \left(\bar{\omega}^2 - \frac{\gamma^2 \vartheta_z^2}{v_F^2} \right), \\ \bar{\omega} &= 1 + \frac{\omega_x \vartheta_x}{v_F^2}, \quad \gamma = \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned}$$

При алгебраическом решении этой задачи возникают дополнительные трудности, из-за которых нельзя непосредственно использовать результат работы [28]. Поэтому в Приложении D мы привели алгебраический подход к этой задаче, причем рассмотрели самый общий случай $\omega_y \neq 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов президента РФ (МК-МК-2130.2017.2), РФФИ (№ 15-02-03311а), а также фонда «Династия».

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Алгебраический подход для расчета спектра

Здесь мы представим алгебраический подход к решению спектральной задачи (6). Представив волновую функцию в виде

$$\psi = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p_x x + p_z z) \right\} \varphi(y), \quad (A.1)$$

получим

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & \\ = & \begin{pmatrix} v_{\parallel} p_z + e E y & v_{\perp} (p_x - \hbar l_H^{-2} y - i \hat{p}_y) \\ v_{\perp} (p_x + i \hat{p}_y - \hbar l_H^{-2} y) & -v_{\parallel} p_z + e E y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (A.2)$$

Вводя новую переменную $p_x - \hbar l_H^{-2} y = -\hbar \bar{y} / l_H$ и переходя к операторам вторичного квантования $a = (\bar{y} + \partial / \partial \bar{y}) / \sqrt{2}$, $a^{\dagger} = (\bar{y} - \partial / \partial \bar{y})$, получаем

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} v_{\parallel}p_z + v_0p_x + A(a + a^+) & \text{Ва} \\ \text{Ва}^+ & -v_{\parallel}p_z + v_0p_x + A(a + a^+) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

где $A = eEl_H/\sqrt{2}$, $B = \sqrt{2}v_{\perp}\hbar/l_H$, $v_0 = cE/H$. Волновое уравнение в данном случае можно записать в виде

$$\hat{\mathcal{H}}|\psi\rangle = \bar{\varepsilon}|\psi\rangle, \quad (\text{A.4})$$

где

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon - v_0p_x, \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} v_{\parallel}p_z + A(a + a^+) & \text{Ва} \\ \text{Ва}^+ & -v_{\parallel}p_z + A(a + a^+) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Гамильтониан (A.6) нельзя привести к диагональному виду, воспользовавшись методом из работы [28]. Мы воспользуемся другим очень простым, но более общим, чем в [28], методом, который, кстати, можно применить и в более сложных случаях (см. Приложение D). Представим волновую функцию в виде

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |\nu\rangle \end{pmatrix}.$$

Тогда мы получим следующие два уравнения из (A.4):

$$\text{Ва}|\nu\rangle = (\bar{\varepsilon} - v_0p_x - A(a + a^+))|u\rangle, \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Ва}^+|u\rangle = (\bar{\varepsilon} + v_0p_x - A(a + a^+))|\nu\rangle. \quad (\text{A.8})$$

Поддействуем оператором Ва на уравнение (A.8) и оператором Ва⁺ на (A.7). Принимая во внимание коммутационные соотношения $[aa^+] = 1$, окончательно получим

$$(J\mathbf{I} + K)|\psi\rangle = (\bar{\varepsilon}^2 - v_{\parallel}^2p_z^2)|\psi\rangle, \quad (\text{A.9})$$

где

$$J = -A^2(aa + a^+a^+) - 2\bar{\varepsilon}A(a + a^+) + (B^2 - 2A^2)a^+a,$$

$$K = \begin{pmatrix} B^2 - A^2 & -AB \\ AB & -A^2 \end{pmatrix}.$$

Диагонализация оператора в уравнении (A.9) и решение этого уравнения приведены в работе [28]. Используя результат этой работы, получим (15).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Фаза Берри и квазиклассический подход

Интересно отметить, что квазиклассический подход приводит к правильному выражению для энергетического спектра. В отличие от предыдущих параграфов, здесь мы будем, следуя Лифшицу и Каганову [48, 50] и нашим работам [29–32, 51], использовать квазиклассический подход, основанный на использовании обобщенных условий квантования Лифшица–Онсагера [52, 53], которые можно записать в виде

$$A(\varepsilon^*) = 2\pi\hbar^2l_H^{-2}(n + \gamma), \quad (\text{B.1})$$

где $A(\varepsilon^*)$ — площадь сечения поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}) - \mathbf{v}_0\mathbf{p} = \varepsilon^*$, где $\mathbf{v}_0 = c[\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]/H^2$ — средняя скорость дрейфа электрона перпендикулярно плоскости, в которой лежат \mathbf{E} и \mathbf{H} , $\gamma = 1/2 - \chi/2\pi$, где χ — фаза Берри. Такое обобщение связано с тем, что в скрещенных полях сохраняется не энергия, а величина $\varepsilon^*(\mathbf{p})$. В нашем случае $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, а $\mathbf{v}_0 = cE\mathbf{e}_x/H$, где \mathbf{e}_x — единичный вектор вдоль оси x . Тогда $\mathbf{v}_0\mathbf{p} = v_0p_x$. Для спектра вблизи вейлевской точки имеем

$$A(\varepsilon^*, p_z) = \frac{\pi}{v_{\perp}\sqrt{v_{\perp}^2 - v_0^2}} \left(\frac{\varepsilon^{*2}v_{\perp}^2}{v_{\perp}^2 - v_0^2} - v_{\parallel}^2p_z^2 \right). \quad (\text{B.2})$$

Тогда

$$\varepsilon = \sqrt{2v_{\perp}^2(1 - \beta^2)^{3/2}\hbar^2l_H^{-2}(n + \gamma) + v_{\parallel}^2(1 - \beta^2)p_z^2} + v_0p_x. \quad (\text{B.3})$$

Покажем, что для гамильтониана (2) фаза Берри равна π , т. е. $\gamma = 0$. Для этого мы воспользуемся методом Фальковского из работы [54], которая была написана, кстати, задолго до опубликования известной работы Берри [55]. В [54, 56] для $\chi(\varepsilon)$ было получено следующее выражение:

$$\chi(\varepsilon) = \text{Im} \oint \frac{dk_x}{\varphi_0^* \varphi_0 v_y} \varphi_0^* V_y \frac{d\varphi_0}{dk_x}, \quad (\text{B.4})$$

где $V_y = \partial H / \partial k_y$ — оператор скорости, φ_0 — собственные функции гамильтониана. Представим собственные функции гамильтониана (2) в виде

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} v_{\perp}(p_x - ip_y) \\ \varepsilon - v_{\parallel}p_z \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Тогда

$$\varphi_0^* \varphi_0 = v_{\perp}^2 p_{\perp}^2 + (\varepsilon - v_{\parallel} p_z)^2. \quad (\text{B.6})$$

Оператор скорости V_y имеет вид $V_y = v_{\perp} \sigma_y$. Тогда имеем

$$\text{Im } \varphi_0^* V_y \frac{d\varphi_0}{dp_x} = v_{\perp}^2 [\varepsilon - v_{\parallel} p_z]. \quad (\text{B.7})$$

Прежде всего, заметим, что функции (B.6) и (B.7) не зависят от p_x . Далее, мы имеем

$$\oint dp_x / v_y = dA / d\varepsilon.$$

На самом деле, по определению

$$A = \oint dp_x dp_y.$$

С другой стороны,

$$dp_y = d\varepsilon / (\partial\varepsilon / \partial p_y) = d\varepsilon / v_y.$$

Тогда

$$A = \oint d\varepsilon dp_x / v_y.$$

В нашем случае

$$\frac{dA}{d\varepsilon} = \frac{2\pi\varepsilon}{v_F^2}. \quad (\text{B.8})$$

Используя формулы (B.7), (B.8), можно показать, что $\chi = \pi$. Таким образом, квазиклассический подход приводит к такому же выражению для энергетического спектра, что и микроскопический.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Классическое движение дираковских электронов в скрещенных полях

Исследование классического движения частиц помогает понять некоторые результаты, полученные в настоящей работе. Из предыдущих пунктов может возникнуть вопрос о зависимости от электрического поля z -компоненты энергетического спектра. Поясним этот момент. Запишем выражения для компонент скоростей нерелятивистской и релятивистской частиц:

$$v_{x,y,z} = p_{x,y,z} / m \quad (\text{C.1})$$

— для нерелятивистской частицы,

$$v_{x,y,z} = \frac{v_F p_{x,y,z}}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \quad (\text{C.2})$$

— для релятивистской частицы.

Из этих выражений следует, что в случае дираковских частиц каждая из компонент скорости зависит от всех компонент импульсов в противоположность нерелятивистскому случаю. Это означает, что независимо от направления приложения электрического поля оно будет влиять на все компоненты энергии: $\varepsilon = v_x p_x + v_y p_y + v_z p_z$. Легко понять, что в случае нерелятивистских частиц такого влияния не будет. Это чисто релятивистский эффект, с которым связаны некоторые интересные последствия, которые будут рассмотрены в Приложении D.

Рассмотрим классическое движение дираковских частиц в скрещенных магнитном и электрическом полях. Направим электрическое поле вдоль оси y , а магнитное — вдоль оси z . Тогда уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{e}{c} H v_y, \quad \frac{dp_y}{dt} = eE - \frac{e}{c} H v_x, \quad \frac{dp_z}{dt} = 0. \quad (\text{C.3})$$

Кроме того, из этих уравнений можно получить

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = eE v_y. \quad (\text{C.4})$$

Из этих уравнений мы получаем

$$p_z = \text{const}, \quad \varepsilon - v_0 p_x = \text{const}. \quad (\text{C.5})$$

Чтобы решить уравнения движения (C.3), перейдем в движущуюся со скоростью $v_0 = cE/H$ систему отсчета, аналогично тому, как мы поступали в Приложении В. Поскольку $v_0 \ll c$, изменения полей будем пренебрегать. Прежде всего, из (C.5) получаем

$$\varepsilon - v_0 p_x = \tilde{\varepsilon} \sqrt{1 - \beta^2} = \text{const}. \quad (\text{C.6})$$

Таким образом, в движущейся системе отсчета энергия сохраняется, $\tilde{\varepsilon} = \text{const}$. Это означает, что

$$\frac{d\tilde{\varepsilon}}{d\tilde{t}} = 0. \quad (\text{C.7})$$

С другой стороны,

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{v_{\perp}^2 (\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2) + v_{\parallel}^2 \tilde{p}_z^2},$$

что дает

$$\frac{d\tilde{\varepsilon}}{d\tilde{t}} = \tilde{v}_x \frac{d\tilde{p}_x}{d\tilde{t}} + \tilde{v}_y \frac{d\tilde{p}_y}{d\tilde{t}} = 0, \quad (\text{C.8})$$

так как $d\tilde{p}_z/d\tilde{t} = 0$. Далее, используя преобразования Лоренца для координат, импульсов и скоростей для второго уравнения (C.3) получим

$$\frac{d\tilde{p}_y}{d\tilde{t}} = -\frac{e}{c} \tilde{H} \tilde{v}_x, \quad (\text{C.9})$$

где $\tilde{H} = H\sqrt{1 - \beta^2}$. Подставляя (С.9) в (С.8), получаем

$$\frac{d\tilde{p}_x}{d\tilde{t}} = \frac{e}{c} \tilde{H} \tilde{v}_y. \quad (\text{C.10})$$

Поделим обе части уравнений (С.9) и (С.10) на $\tilde{\varepsilon}$ и учтем, что $\tilde{v}_i = v_{\perp, \parallel}^2 \tilde{p}_i / \tilde{\varepsilon}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{v}_x}{d\tilde{t}} &= \frac{v_{\perp}^2 e \tilde{H}}{c \tilde{\varepsilon}} \tilde{v}_y, & \frac{d\tilde{v}_y}{d\tilde{t}} &= -\frac{v_{\perp}^2 e \tilde{H}}{c \tilde{\varepsilon}} \tilde{v}_x, \\ \frac{d\tilde{v}_z}{d\tilde{t}} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Таким образом, задача свелась к задаче о движении дираковского электрона в одном только магнитном поле \tilde{H} . Эти уравнения легко решить:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_x &= \tilde{v}_y \cos \tilde{\omega} \tilde{t}, & \tilde{v}_y &= -\tilde{v}_{\perp} \sin \tilde{\omega} \tilde{t}, \\ \tilde{v}_z &= \tilde{v}_{z0} = \text{const}, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

где

$$\tilde{\omega} = \frac{v_{\perp}^2 e \tilde{H}}{c \tilde{\varepsilon}}, \quad \tilde{v}_{\perp} = \sqrt{\tilde{v}_x^2 + \tilde{v}_y^2}.$$

Применяя обратные преобразования Лоренца, а также учитывая, что $\tilde{\omega} \tilde{t} = \omega t \sqrt{1 - \beta^2}$, получаем

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v_{\perp} \cos(\gamma \omega t) + v_{z0}}{1 + \beta \cos(\gamma \omega t)}, & v_y &= \frac{v_{\perp} \sin(\gamma \omega t)}{1 + \beta \cos(\gamma \omega t)} \gamma, \\ v_z &= \frac{\tilde{v}_{z0}}{1 + \beta \cos(\gamma \omega t)} \gamma. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Из этих формул следует, что при $v_0 = v_{\perp}$ имеем $v_x = v_{\perp}$ и $v_y = v_z = 0$, т.е. движение становится линейным в полном соответствии с результатами предыдущих параграфов. Кроме того, интересно, что периодическими функциями времени являются не только компоненты скорости x, y , но и компонента z . Это чисто релятивистские эффекты, ко-

торые в данном случае возникают только в режиме скрещенных полей. В случае графена необходимо положить $v_{z0} = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ D

Алгебраический подход для расчета спектра взаимодействующих вейлевских фермионов в магнитном поле

Введем новые переменные

$$P_i = \hat{p}_i + \frac{\varepsilon}{v_F^2} \vartheta_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_F \psi &= \begin{pmatrix} P_z + \frac{\omega_y}{v_F} \hat{p}_y + e \frac{\check{E}}{v_F} y & P_x - iP_y - \hbar l_H^{-2} y \\ P_x + iP_y - \hbar l_H^{-2} y & -P_z + \frac{\omega_y}{v_F} \hat{p}_y + e \frac{\check{E}}{v_F} y \end{pmatrix} \psi = \\ &= (\varepsilon - \omega_x p_x - \omega_z p_z) \psi, \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

где $\check{E} = -\omega_x H/c$. Далее, введем следующие операторы вторичного квантования:

$$a = \left(\bar{y} + \partial/\partial \bar{y} + i \frac{l_H}{\hbar} \frac{\varepsilon}{v_F^2} \vartheta_y \right) / \sqrt{2}, \quad (\text{D.2})$$

$$a^+ = \left(\bar{y} - \partial/\partial \bar{y} - i \frac{l_H}{\hbar} \frac{\varepsilon}{v_F^2} \vartheta_y \right) / \sqrt{2}, \quad (\text{D.3})$$

$$P_x - \hbar l_H^{-2} y = -\hbar \bar{y} / l_H. \quad (\text{D.4})$$

Тогда мы получим

$$\begin{pmatrix} v_F P_z + (A + C)a + (A - C)a^+ & -Ba \\ -Ba^+ & -v_F P_z + (A + C)a + (A - C)a^+ \end{pmatrix} \psi = \bar{\varepsilon} \psi, \quad (\text{D.5})$$

где

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \left(1 + \frac{\omega_x \vartheta_x}{v_F^2} + \frac{\omega_y \vartheta_y}{v_F^2} \right) - v_0 p_x - \omega_z p_z, \quad (\text{D.6})$$

$$A = \frac{e \check{E} l_H}{\sqrt{2}}, \quad B = -\frac{\sqrt{2} v_F \hbar}{l_H}, \quad C = \frac{\omega_y}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{i l_H}.$$

Используя процедуру, описанную в Приложении A, уравнение (D.5) можно привести к виду

$$[\hat{J}I + \hat{K}] \psi = (\bar{\varepsilon}^2 - v_F^2 P_z^2) \psi, \quad (\text{D.7})$$

где

$$\begin{aligned} \hat{J} &= 2\bar{\varepsilon} ((C + A)a + (A - C)a^+) - (C + A)^2 aa - \\ &- (A - C)^2 a^+ a^+ + (B^2 - 2(A^2 - C^2)) a^+ a, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} B^2 - (A^2 - C^2) & -B(A - C) \\ B(C + A) & -(A^2 - C^2) \end{pmatrix}. \quad (\text{D.9})$$

Представим волновую функцию в виде

$$\psi = |\phi\rangle \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

где $|\phi\rangle$ — собственная функция оператора \hat{J} , а $\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ — собственная функция оператора \hat{K} . Прежде всего, имеем

$$K \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^2 - (A^2 - C^2) & -B(A - C) \\ B(C + A) & -(A^2 - C^2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (\text{D.10})$$

$$\lambda_{1,2} = -(A^2 - C^2) + \frac{B^2 \pm B\sqrt{B^2 - 4(A^2 - C^2)}}{2}. \quad (\text{D.11})$$

Тогда задача сводится к решению уравнения

$$\hat{J}|\phi\rangle = (\bar{\varepsilon}^2 - v_F^2 P_z^2 - \lambda_{1,2}) |\phi\rangle. \quad (\text{D.12})$$

Для диагонализации оператора \hat{J} нельзя непосредственно воспользоваться результатом работы [28]. Мы воспользуемся следующими каноническими преобразованиями:

$$\begin{aligned} a &= u(\beta - \alpha^*) + \nu(\beta^+ - \alpha), \\ a^+ &= u^*(\gamma^+ - \alpha) + \nu^*(\gamma - \alpha^*), \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

где

$$\alpha = 2\bar{\varepsilon}(A(u + \nu^*) + C(u - \nu^*)) / \omega,$$

$$\omega = \sqrt{B^4 - 4B^2(A^2 - C^2)},$$

$$\frac{\nu}{u^*} = \frac{2(A - C)^2}{\omega + B^2 - 2(A^2 - C^2)},$$

$$\frac{u}{\nu^*} = -\frac{2(A - C)^2}{\omega - (B^2 - 2(A^2 - C^2))}.$$

Тогда для \hat{J} можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \hat{J} &= \frac{1}{2} (\omega (B^2 - 2(A^2 - C^2))) - \\ &\quad - \frac{4\bar{\varepsilon}^2(A^2 - C^2)B^2}{\omega^2} + \omega\beta^+\beta. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Из (D.14) мы получим выражение (15) только с заменой $\bar{\omega} \rightarrow \bar{\omega}$ и $\gamma \rightarrow \tilde{\gamma}$, где

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{1 - \tilde{\beta}^2}, \quad \tilde{\beta}^2 = \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{v_F^2}, \quad \bar{\omega} = 1 + \frac{\omega_x \vartheta_x}{v_F^2} + \frac{\omega_y \vartheta_y}{v_F^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. O. Vafek and A. Vishwanath, *Ann. Rev. Cond. Matt. Phys.* **5**, 83 (2014).
2. Sh. Jia, S.-Y. Xu, and M. Z. Hasan, *Nature Mater.* **15**, 1140 (2016).
3. M. Z. Hasan and C. L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010).
4. X.-L. Qi and S.-C. Zhang, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057 (2011).
5. A. A. Burkov and L. Balents, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 127205(4) (2011).
6. A. Turner and A. Vishwanath, arXiv:1301.0330.
7. A. A. Burkov, *J. Phys.: Condens. Matter* **27**, 113201 (2015).
8. S.-Y. Xu et al., *Science* **349**, 613 (2015).
9. L. Lu et al., *Science* **349**, 622 (2015).
10. B. Q. Lv et al., *Phys. Rev. X* **5**, 031013 (2015).
11. P. G. Grinevich and G. E. Volovik, *J. Low Temp. Phys.* **72**, 371 (1988).
12. G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Clarendon Press, Oxford (2003).
13. S. A. Parameswaran, T. Grover, D. A. Abanin, D. A. Pesin, and A. Vishwanath, *Phys. Rev. X* **4**, 031035 (2014).
14. P. Hosur and X. Qi, *Comp. Rend. Phys.* **14**, 857 (2013).
15. A. C. Potter, I. Kimchi, and A. Vishwanath, *Nat. Commun.* **5**, 5161 (2014).
16. D. Bulmash and X.-L. Qi, *Phys. Rev. B* **93**, 081103(R) (2016).
17. A. R. Bhattye and A. Moss, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 051303 (2014).
18. T.-R. Chang et al., *Nat. Commun.* **7**, 10639 (2016).
19. A. Soluyanov et al., *Nature* **527**, 495 (2015).
20. Z. J. Wang et al., *Phys. Rev. Lett.* **117**, 056805 (2016).
21. Y. Sun, S.-C. Wu, M. N. Ali, C. Felser, and B. Yan, *Phys. Rev. B* **92**, 161107 (2015).
22. I. Belopolski, D. S. Sanchez et al., *Nature Commun.* **7**, 13643 (2016).
23. Y. Alavirad and J. D. Sau, *Phys. Rev. B* **94**, 115160 (2016).
24. B. A. Волков, В. В. Еналдиев, *ЖЭТФ* **149**, 702 (2016).

25. Y. Baum, E. Berg, S. A. Parameswaran, and A. Stern, *Phys. Rev. X* **5**, 041046 (2015).
26. Y. Baum and A. Stern, arXiv:1612.00018.
27. V. Lukose, R. Shankar, and G. Baskaran, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 116802 (2007).
28. N. Peres and E. V. Castro, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 406231 (2007).
29. З. З. Алисултанов, *Письма в ЖЭТФ* **99**, 813 (2014).
30. З. З. Алисултанов, *Письма в ЖЭТФ* **99**, 258 (2014).
31. Z. Z. Alisultanov and M. S. Reis, *Europhys. Lett.* **113**, 28004 (2016).
32. Z. Z. Alisultanov and M. S. Reis, *Sol. St. Commun.* **234–235**, 26 (2016).
33. З. З. Алисултанов, *Письма в ЖЭТФ* **105**, 437 (2017).
34. Z.-M. Yu, Y. Yao, and S. A. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 077202 (2016).
35. S. Tchoumakov, M. Civelli, and M. O. Goerbig, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 086402 (2016).
36. А. Г. Аронов, Г. Е. Пикус, *ЖЭТФ* **51**, 505 (1966).
37. J. S. Bell and R. Jackiw, *Il Nuovo Cimento A* **60**, 47 (1969).
38. S. L. Adler, *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1969).
39. A. H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **28**, 2235 (1983).
40. J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1964).
41. P. E. C. Ashby and J. P. Carbotte, *Eur. Phys. J. B* **87**, 92 (2014).
42. E. C. Phillip, P. E. C. Ashby and J. P. Carbotte, *Phys. Rev. B* **87**, 245131 (2013).
43. L. A. Ponomarenko, R. Yang, R. V. Gorbachev, P. Blake, A. S. Mayorov, K. S. Novoselov, M. I. Katsnelson, and A. K. Geim, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 136801 (2010).
44. G. L. Yu, R. Jalil, B. Belle, A. S. Mayorov, P. Blake, F. Schedin, S. V. Morozov, L. A. Ponomarenko, F. Chiappini, S. Wiedmann, U. Zeitler, M. I. Katsnelson, A. K. Geim, K. S. Novoselov, and D. C. Elias, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **110**, 3281 (2013).
45. V. P. Gusynin, V. M. Loktev, I. A. Luk'yanchuk, S. G. Sharapov, and A. A. Varlamov, *Low Temp. Phys.* **40**, 270 (2014).
46. З. З. Алисултанов, *ЖЭТФ* **149**, 393 (2016).
47. З. З. Алисултанов, *ЖЭТФ* **146**, 340 (2014).
48. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, *УФН* **69**, 419 (1959).
49. J. Nissinen and G. E. Volovik, *Pis'ma v ZhETF* **105**, 442 (2017).
50. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
51. Z. Z. Alisultanov, *Physica B* **438**, 41 (2014).
52. И. М. Лифшиц, А. М. Косевич, *ЖЭТФ* **29**, 730 (1955).
53. L. Onsager, *Phil. Mag.* **43**, 1006 (1952).
54. Л. А. Фальковский, *ЖЭТФ* **49**, 609 (1965).
55. M. V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond. A* **392**, 45 (1984).
56. А. Ю. Озерин и Л. А. Фальковский, *Phys. Rev. B* **85**, 205143 (2012).