

# РЕШЕНИЯ В $f(\mathcal{G})$ -ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПЛОСКОСТНОЙ СИММЕТРИИ

*М. Ф. Шамир\**, *А. Саид\*\**

*Факультет естественных и гуманитарных наук,  
Национальный Университет компьютерных и инновационных наук  
54000, Лазор, Пакистан*

Поступила в редакцию 16 мая 2017 г.

(Перевод с английского)

## PLANE SYMMETRIC SOLUTIONS IN $f(\mathcal{G})$ GRAVITY

*M. F. Shamir, A. Saeed*

Исследуется Вселенная в рамках  $f(\mathcal{G})$ -теории гравитации. С использованием реалистичной модели  $f(\mathcal{G})$ -гравитации выбирается общий случай статического пространства–времени с плоскостной симметрией и рассматриваются точные решения. В частности, обсуждаются решения, изменяющиеся по степенному и экспоненциальному законам. Показана физическая обоснованность решений с метрикой Тауба и анти-деситтеровским пространством–временем. Для подтверждения исследования приведен графический анализ плотности энергии во Вселенной и давления темной энергии.

DOI: 10.7868/S0044451017120100

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее интригующих проблем, обсуждавшихся в последнее десятилетие, является космологическое расширение нашей Вселенной. Считается, что этот процесс является ускоряющимся, причем ответственна за это некая загадочная энергия, которую исследователи называют темной энергией. Согласно оценкам, темная энергия дает вклад около 70% в полную энергию Вселенной. Космологическая постоянная, которую Эйнштейн использовал в полевых уравнениях, также является аргументом в пользу темной энергии. Ускоренное расширение Вселенной подтверждается различными доказательствами, уже описанными в литературе, такими как образование скоплений галактик, флуктуации космического микроволнового фона и хорошо известные эксперименты со сверхновыми [1–4]. Отношение давления темной энергии  $p$  к плотности энергии во Вселенной  $\rho$ ,

$\omega = p/\rho$ , также известное как параметр уравнения состояния, может эффективно прояснить вопросы, связанные с темной энергией. Имеется мнение, что модифицированные теории гравитации могут быть полезны для понимания предмета темной энергии и космологического расширения нашей Вселенной на поздней стадии, происходящего с возрастающей скоростью [5].

За последние десять лет многими исследователями были предложены модификации общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна. Значительный интерес вызывают исследования в области  $f(R)$ - и  $f(R, T)$ -теорий гравитации, где  $R$  — скаляр Риччи, а  $T$  — след тензора энергии–импульса. Работа [6] представляет собой одно из первых исследований по  $f(R)$ -теории, в ней обсуждаются свойства данной теории и исследуется космология Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ). В этой работе показано, что  $f(R)$ -теория гравитации, в соответствии со своими свойствами, допускает объединение инфляции на ранней стадии и расширения на поздней стадии. Этого направления придерживались и многие другие исследователи, и  $f(R)$ - и  $f(R, T)$ -теории гравитации специально учитывались при обсужде-

\* E-mail: farasat.shamir@nu.edu.pk

\*\* E-mail: atrooba\_saeed@hotmail.com

нии вопросов, относящихся к темной энергии [7–13]. Эквивалентность  $f(R)$ -теории гравитации и скалярной тензорной теории гравитации также обсуждалась в работах [14, 15]. Значительные успехи были достигнуты с помощью другой интересной модифицированной теории, а именно,  $f(\mathcal{G})$ -теории гравитации (здесь имеется в виду функция общего вида от инварианта Гаусса–Бонне (ГБ)  $\mathcal{G}$ ) [16, 17]. После того, как эксперименты, проведенные в пределах Солнечной системы, подтвердили правильность этой теории, она стала заметным направлением в исследованиях загадки ускоренного расширения нашей Вселенной. Это способствовало значительному росту числа исследований, выполненных в рамках этой теории.

В работе [18] рассмотрена  $f(\mathcal{G})$ -гравитация как гравитационная альтернатива темной энергии. В некоторых работах исследовалось объединение инфляции на ранней стадии и расширения на поздней стадии, космологическая реконструкция и будущие сингулярности в рамках  $f(\mathcal{G})$ -теории гравитации [19]. В работе [20] с помощью  $f(\mathcal{G})$ -теории гравитации в условиях анизотропии исследовались решения, изменяющиеся по степенному закону. Некоммутативные статические сферически-симметричные решения в виде кротовых нор исследовались в работе [21] в модифицированной гравитации ГБ с учетом эффективно работающей модели  $f(\mathcal{G})$ -гравитации. В работе [22] обсуждалась также возможность существования в упомянутой теории анизотропных компактных звезд. Для анализа ускоряющегося космологического расширения Вселенной на поздней стадии было построено несколько конкретных реалистичных моделей  $f(\mathcal{G})$ -гравитации [23, 24]. В работе [25] обсуждался способ устранения будущих сингулярностей при конечных временах с использованием моделей темной энергии. Также в работе [25] дискутировалась согласованность диапазона параметра рассматриваемых моделей  $f(\mathcal{G})$ -гравитации с энергетическими условиями. В недавней работе [26] обсуждались космологические модели  $f(\mathcal{G})$ -гравитации в условиях анизотропии. В работе [27] в аналогичном контексте была разработана детальная динамика  $f(\mathcal{G})$ -гравитации. В работе [28] были найдены нетеровские симметрии для  $f(\mathcal{G})$ -гравитации в рамках космологии ФРУ. В работе [29] была исследована часть инварианта ГБ для зависящего от времени ускоряющегося расширения Вселенной. При этом также учитывалась  $f(R, \mathcal{G})$ -теория гравитации, которая является еще одним обобщением теории гравитации ГБ. В работе [30] для исследования устойчивости решений шварцшильдовского

типа использовались линейные возмущения метрики. В работе [31] использовался динамический подход, включающий лагранжевы множители. В работе [32] Вселенная ФРУ исследовалась с использованием подхода, основанного на нетеровских симметриях. В работе [33] для исследования Вселенной типа Бьянки-I с локальной вращательной симметрией использовались те же приемы и был сделан вывод, что можно реконструировать решение Каснера и  $\Lambda$ CDM-космологию. Авторы работы [34] исследовали случай сферической симметрии, используя точные решения. В работе [35] исследовалась космологическая инфляция. В работе [36] была предпринята попытка использовать энергетические условия в рамках  $f(R, \mathcal{G})$ -гравитации. В работе [37] исследовались сингулярности при конечных временах. Таким образом, представляет значительный интерес исследование модифицированных теорий гравитации, в особенности тех, которые имеют отношение к  $f(\mathcal{G})$ -гравитации.

Наиболее близким к подходам, основанным на сферической и цилиндрической симметриях, является подход, основанный на плоскостной симметрии. Ранее уже использовались решения, полученные в  $f(R)$ - и  $f(R, T)$ -теориях гравитации для случая плоскостной симметрии, что дало некоторые интересные результаты [38, 39]. В настоящей работе мы сконцентрируемся на рассмотрении решений в  $f(\mathcal{G})$ -гравитации в случае плоскостной симметрии. Чтобы выработать подход к получению общих решений системы дифференциальных уравнений, которые по своей природе являются сложными, мы рассмотрим модель  $f(\mathcal{G})$ -гравитации со степенным законом.

Работа построена следующим образом. Сначала приводятся некоторые предварительные сведения о  $f(\mathcal{G})$ -гравитации. Раздел 2 представляет собой краткое введение в полевые уравнения. В разд. 3 мы используем хорошо известный выбор модели  $f(\mathcal{G})$ -гравитации, что позволяет получить решения полевых уравнений. Последний раздел представляет собой заключительные замечания.

## 2. $f(\mathcal{G})$ -ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ: ОСНОВНАЯ СТРУКТУРА

Действие для модифицированной гравитации ГБ имеет вид [16]

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + f(\mathcal{G})] + \mathcal{S}_m(g^{\mu\nu}, \psi), \quad (1)$$

где  $\kappa$  — постоянная взаимодействия, а  $g$  — определитель метрического тензора  $g^{\mu\nu}$ . Минимальное

взаимодействие материи с метрическим тензором посредством действия  $\mathcal{S}_m(g^{\mu\nu}, \psi)$ , где  $\psi$  — поле материи, означает чисто метрическую характеристику  $f(\mathcal{G})$ -теории гравитации. Функция  $f(\mathcal{G})$  является функцией общего вида от инварианта ГБ  $\mathcal{G}$ , который описывается как

$$\mathcal{G} \equiv R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma}. \quad (2)$$

Варьируя действие, заданное в уравнении (1), по метрическому тензору, можно получить гравитационные полевые уравнения в виде

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + 8\left[R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} - R_{\rho\sigma}g_{\nu\mu} - R_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} + R_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} + \frac{1}{2}R(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})\right]\nabla^\rho\nabla^\sigma F + (\mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - f)g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3)$$

где  $\nabla_\mu$  действует как ковариантное дифференцирование, а нижний индекс  $\mathcal{G}$  в  $f_{\mathcal{G}}$  означает вариацию  $f$  по  $\mathcal{G}$ . Приведем вид полевых уравнений, более напоминающий уравнения ОТО:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T^{eff}_{\mu\nu}, \quad (4)$$

где

$$T^{eff}_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} - 8\left[R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} - R_{\rho\sigma}g_{\nu\mu} - R_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} + R_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} + \frac{1}{2}R(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})\right]\nabla^\rho\nabla^\sigma F - (\mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - f)g_{\mu\nu}. \quad (5)$$

Начнем с рассмотрения статического пространства-времени с плоскостной симметрией, которое задается как [39]

$$ds^2 = A dt^2 - dx^2 - B[dy^2 + dz^2], \quad (6)$$

где  $A$  и  $B$  — метрические функции переменной  $x$ . Соответствующий инвариант ГБ и скаляр Риччи имеют вид

$$\mathcal{G} = \frac{-1}{2} \times \left[ \frac{A'^2 B'^2}{A^2 B^2} - 4 \frac{A' B' B''}{A B^2} - 2 \frac{A'' B'^2}{A B^2} + 2 \frac{A' B'^3}{A B^3} \right], \quad (7)$$

$$R = \frac{1}{2} \left[ 2 \frac{A''}{A} - \frac{A'^2}{A^2} + 2 \frac{A' B'}{A B} + 4 \frac{B''}{B} - \frac{B'^2}{B^2} \right], \quad (8)$$

где штрих означает дифференцирование по  $x$ . Предполагается, что Вселенная заполнена идеальной

жидкостью, что приводит к тензору энергии-импульса следующего вида:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (9)$$

где  $u_\mu$  — 4-скорость,  $\rho$  — плотность энергии во Вселенной, а  $p$  — давление темной энергии. Скаляр расширения  $\theta$  и скаляр сдвига  $\sigma$  имеют вид

$$\theta = \frac{A'}{A} + 2 \frac{B'}{B}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{3} \left[ \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right]^2. \quad (10)$$

Используя уравнение (6), полевые уравнения (3) можно переписать в виде

$$-\frac{B''}{B} + \frac{B'^2}{4B^2} + 2 \left( \frac{B'^3}{B^3} - 2 \frac{B' B''}{B^2} \right) f'_{\mathcal{G}} - 2 \frac{B'^2}{B^2} f''_{\mathcal{G}} + \mathcal{G} f_{\mathcal{G}} - f = \kappa \rho, \quad (11)$$

$$\frac{B'^2}{4B^2} + \frac{A' B'}{2AB} + 3 \frac{A' B'^2}{A B^2} f'_{\mathcal{G}} - \mathcal{G} f_{\mathcal{G}} + f = \kappa p, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{A' B'}{4AB} + \frac{A''}{2A} + \frac{B''}{2B} - \frac{A'^2}{4A^2} - \frac{B'^2}{4B^2} + \\ & + \left( 2 \frac{A' B''}{AB} - \frac{A' B'^2}{A B^2} + 2 \frac{A'' B'}{A B} - \frac{A'^2 B'}{A^2 B} \right) f'_{\mathcal{G}} + \\ & + 2 \frac{A' B'}{A B} f''_{\mathcal{G}} - \mathcal{G} f_{\mathcal{G}} + f = \kappa p. \end{aligned} \quad (13)$$

Эти дифференциальные уравнения с пятью неизвестными являются в сильной степени нелинейными и очень сложными по своей природе. Поэтому чтобы получить их решения, мы должны рассмотреть некоторые дополнительные связи. Пропорциональность скаляра сдвига  $\sigma$  скаляру расширения  $\theta$  приводит к следующему соотношению между метрическими коэффициентами:

$$A = B^n, \quad n \in \mathcal{R}. \quad (14)$$

Это физическое условие крайне важно, поскольку, как показали недавние наблюдения, расширение Вселенной может достичь изотропности, если отношение скаляра сдвига к скаляру расширения постоянно [40]. Это условие использовалось многими исследователями для получения решений полевых уравнений [41–46]. Таким образом, с учетом упомянутого выше условия, полевые уравнения (11)–(13) принимают вид

$$-\frac{B''}{B} + \frac{B'^2}{4B^2} + 2 \left( \frac{B'^3}{B^3} - 2 \frac{B' B''}{B^2} \right) f'_{\mathcal{G}} - 2 \frac{B'^2}{B^2} f''_{\mathcal{G}} + \mathcal{G} f_{\mathcal{G}} - f = \kappa \rho, \quad (15)$$

$$(2n + 1)\frac{B'^2}{4B^2} + 3n\frac{B'^3}{B^3}f'_G - Gf_G + f = \kappa\rho, \quad (16)$$

$$(n^2 - n - 1)\frac{B'^2}{4B^2} + (n + 1)\frac{B''}{2B} + \left(4n\frac{B'B''}{B^2} + n(n - 3)\frac{B'^3}{B^3}\right)f'_G + 2n\frac{B'^2}{B^2}f''_G - Gf_G + f = \kappa\rho. \quad (17)$$

В следующем разделе мы получим несколько общих решений описанной редуцированной системы полевых уравнений.

### 3. МОДЕЛЬ $f(\mathcal{G})$ -ГРАВИТАЦИИ СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ

Для этой цели рассмотрим популярную модель  $f(\mathcal{G})$ -гравитации, которая задается как

$$f(\mathcal{G}) = \alpha\mathcal{G}^{m+1}, \quad (18)$$

где  $\alpha$  и  $m$  — произвольные постоянные. Такая модель была предложена в работе [47], и она вызывает большой интерес, поскольку в ней может не быть хорошо известной сингулярности Большого Разрыва (Big Rip). Насколько эффективно работает упомянутая выше модель, обсуждалось также в рамках космологического подхода [48, 49]. Кроме того, данная модель является свободной от нерегулярных духов спина 2 [50]. В режиме малой кривизны  $f(\mathcal{G})$ -член является доминирующим по сравнению с эйнштейновским членом в ограниченном диапазоне значений  $m$ . Также рассматриваемая модель дает доминантный член в более общем случае  $f(\mathcal{G})$ -модели,

$$f(\mathcal{G}) = c_1\mathcal{G}^{\beta_1} + c_2\mathcal{G}^{\beta_2}, \quad \beta_1 > \beta_2,$$

в режиме большой кривизны [51]. Вычитая уравнение (16) из уравнения (17), получаем

$$(n^2 - 3n - 2)\frac{B'^2}{4B^2} + (n + 1)\frac{B''}{2B} + \left(4n\frac{B'B''}{B^2} + n(n - 6)\frac{B'^3}{B^3}\right)f'_G + 2n\frac{B'^2}{B^2}f''_G = 0. \quad (19)$$

Из уравнения (18) следует, что

$$f_G = \alpha(m + 1)\mathcal{G}^m. \quad (20)$$

Из соображений удобства выбираем

$$\alpha = \frac{1}{m + 1},$$

тогда уравнение (19) принимает вид

$$(n^2 - 3n - 2)\frac{B'^2}{4B^2} + (n + 1)\frac{B''}{2B} + nm\mathcal{G}^m \left[ \left(4\frac{B'B''}{B^2} + (n - 6)\frac{B'^3}{B^3}\right)\frac{\mathcal{G}'}{\mathcal{G}} + 2\frac{B'^2}{B^2} \left( (m - 1)\frac{\mathcal{G}'^2}{\mathcal{G}^2} + \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}} \right) \right] = 0. \quad (21)$$

Это уравнение может иметь много решений. Здесь мы ограничимся двумя типами решений.

#### 3.1. Подход, основанный на степенном законе

Рассмотрим степенной закон вида [26]

$$B(x) = \gamma x^k, \quad (22)$$

где  $\gamma$  и  $k$  — произвольные постоянные. С учетом этого из уравнения (21) следуют уравнения связей вида

$$k = 2(n + 1)/n(n - 1), \quad (23)$$

$$m(2n^3m + n^3 + 1 - 2nm) = 0.$$

Модели  $f(\mathcal{G})$ -гравитации, соответствующие двум корням второго из уравнений (23), имеют вид

$$f(\mathcal{G}) = \mathcal{G} + c_1, \quad (24)$$

$$f(\mathcal{G}) = \frac{2n(n - 1)}{n^2 - n - 1}\mathcal{G}^{(n^2 - n - 1)/[2n(n - 1)]} + c_2,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные интегрирования. Первая возможная модель является тривиальной при  $c_1 = 0$ . Вторая возможная модель может привести к важным результатам. Метрика данного решения будет иметь вид

$$ds^2 = \gamma^n x^{2(n+1)/(n-1)} dt^2 - dx^2 - \gamma x^{2(n+1)/[n(n-1)]} [dy^2 + dz^2]. \quad (25)$$

Уравнения (15)–(17) дают соответствующие выражения для плотности энергии во Вселенной и давления темной энергии:

$$\rho = \frac{1}{(m + 1)(n - 1)^4 n^3 x^4 \kappa} (n + 1) \times$$

$$\times \left[ -16^{m+1} m(1 + n)(3 + 8m^2(n - 1)^2 n + n(2 + n(7n - 18)) + 2m(n - 1)(-2 + n(7n - 9))) \times \right.$$

$$\times \left( -\frac{(1 + n)^3(-1 + n(n - 3))}{(n - 1)^4 n^3 x^4} \right)^m +$$

$$\left. + (1 + m)n(n - 1)^2(n - 3)(2n + 1)x^2 \right], \quad (26)$$

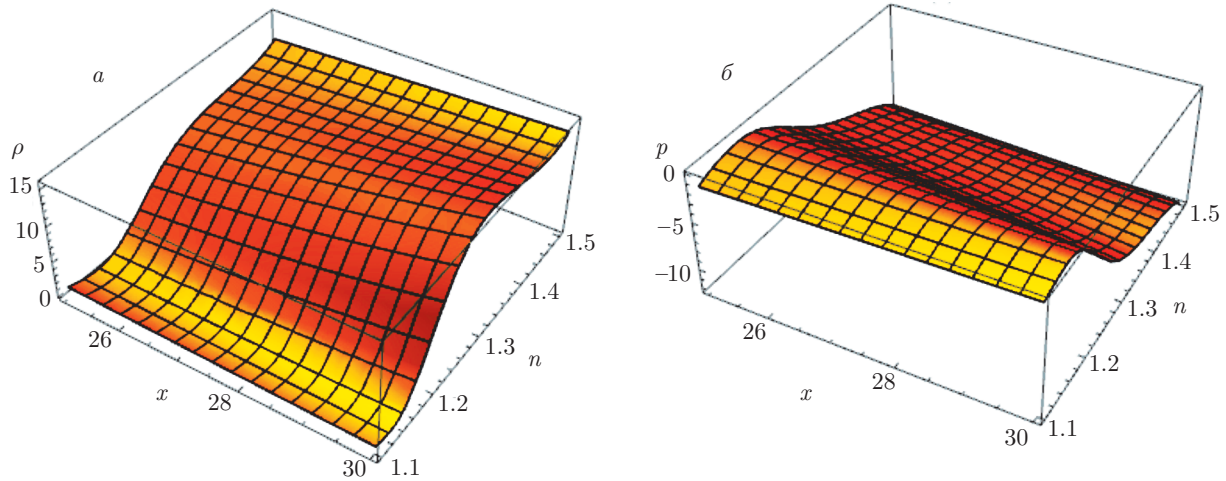


Рис. 1. Поведение плотности энергии во Вселенной  $\rho$  и давления темной энергии  $p$  при  $m = -(1/2)(n^2 - n + 1)/n(n - 1)$

$$p = \frac{1}{(1+m)(n-1)^4 n^3 x^4 \kappa} \times \left[ 16^{m+1} m(n+1)^2 (-1 + n(4m^2(n-1)^2 n + n(2+n(2n-9)) + 2m(2+n(4+3(n-3)n)))) \times \left( -\frac{(n+1)^3 (-1 + (n-3)n)}{(n-1)^4 n^3 x^4} \right)^m + (1+m)n(2n+1)(n^2-1)^2 x^2 \right]. \quad (27)$$

Очевидно, что приведенные выше выражения определены при

$$n \in \mathcal{R} - \{0, 1\} \quad \text{и} \quad m = -\frac{1}{2} \frac{n^2 - n + 1}{n(n-1)}.$$

На рис. 1 показано поведение плотности энергии во Вселенной и давления темной энергии при  $1 < n < 1.5$ . Соответствующие скаляр Риччи и инвариант ГБ принимают вид

$$R = -\frac{16(1+n)^2(-1-4n-2n^2+n^3)}{n^3(-1+n)^4 x^4}, \quad (28)$$

$$\mathcal{G} = \frac{2(9n^2+2n^3+3+10n)}{n^2(n-1)^2 x^2}.$$

Скаляр расширения и скаляр сдвига принимают вид

$$\theta = \frac{2(n+1)(n+2)}{n(n-1)x}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{3} \left[ \frac{2(n+1)}{xn} \right]^2. \quad (29)$$

В рассматриваемом случае при  $\sigma^2/\theta \rightarrow 0$  и при  $x \rightarrow \infty$  условие изотропии также удовлетворяется. На рис. 2 приведено поведение параметра изотропии. Теперь обсудим специальный случай.

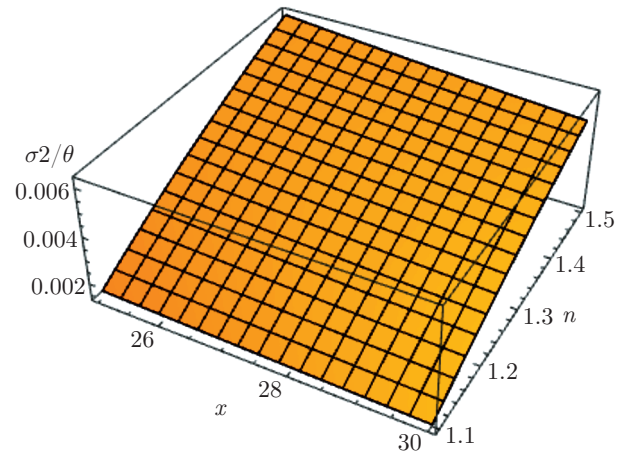


Рис. 2. Поведение параметра изотропии  $\sigma^2/\theta$  при  $m = -(1/2)(n^2 - n + 1)/n(n - 1)$

**Метрика Тауба.** Положим в уравнении (25)  $n = -1/2$ , тогда

$$ds^2 = \gamma^{-1/2} x^{-2/3} dt^2 - dx^2 - \gamma x^{4/3} [dy^2 + dz^2]. \quad (30)$$

Легко проверить, что для этого частного значения величины  $n$  мы получаем  $R = 0$ . После переопределения параметров можно реконструировать знаменитую метрику Тауба [52].

### 3.2. Подход, основанный на экспоненциальном законе

Очевидно, что уравнение (21) имеет решение экспоненциального типа:

$$B(x) = e^x. \quad (31)$$



Следует отметить, что к справедливости описанных выше решений экспоненциального типа приводит следующее условие:

$$n(n - 1) = 0. \quad (32)$$

Метрика решения для случая  $n = 1$  будет иметь вид

$$ds^2 = e^x [dt^2 - dy^2 - dz^2] - dx^2. \quad (33)$$

Это соответствует хорошо известному случаю анти-деситтеровского пространства–времени в модели ГБ [53]. Как скаляр Риччи  $R$ , так и инвариант ГБ  $\mathcal{G}$  в этом случае являются постоянными.

### 3.3. Физические свойства решений

При решении физических задач в основном обращают внимание на характеристики, имеющие некоторый тип симметрии. Например, нельзя недооценивать роль сферической симметрии в исследовании решения Шварцшильда [54]. В настоящей работе мы рассматриваем плоскостную симметрию. Пространство–время с плоскостной симметрией можно рассматривать как лоренцево многообразие, имеющее физический тензор энергии–импульса. Различные свойства такого пространства–времени имеют существенные преимущества по сравнению с соответствующими свойствами сферически-симметричного пространства–времени. Кроме того, подход, основанный на плоскостной симметрии, позволяет редуцировать космологические задачи к более низкой размерности, что делает эту симметрию интересным объектом исследования. Пространство–время с плоскостной симметрией рассматривалось многими исследователями с различных точек зрения, см., например, работы [55–60]. Решения в виде плоских волн определяют, изучают и устанавливают, основываясь на идее рассмотрения группы движений в пространстве–времени как фундаментального фактора для плоских гравитационных волн [61–63].

Настоящая работа основана на решениях для пространства–времени с плоскостной симметрией в рамках модели  $f(\mathcal{G})$ -гравитации. Одно из решений соответствует метрике Тауба [52] с особенностью при  $x = 0$ , откуда следует существование черной дыры. Кроме того, с помощью не-сингулярного решения мы получаем анти-деситтеровское пространство–время [53]. Анти-деситтеровское пространство–время является точным решением полевых уравнений Эйнштейна для случая пустой Вселенной с отрицательной космологической постоянной. Для

дальнейшего развития подхода для решения проблемы космологической постоянной можно варьировать параметры предложенной теории.

### 4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Настоящая работа посвящена исследованию некоторых общих решений полевых уравнений в рамках  $f(\mathcal{G})$ -гравитации. Для этого было выбрано статическое пространство–время с плоскостной симметрией. Мы полагаем, что наша работа представляет собой первую попытку сделать это для такого пространства–времени в рамках модели  $f(\mathcal{G})$ -гравитации. Для получения общих решений полевых уравнений было использовано соотношение между метрическими коэффициентами и произвольной постоянной  $n$ , т.е.  $A = B^n$ , основанное на пропорциональности скаляра сдвига  $\sigma$  скаляру расширения  $\theta$ . Приведем основные положения работы.

1. Сначала, при получении решений, мы рассмотрели модель  $f(\mathcal{G})$ -гравитации со степенным законом, которую нетрудно найти в существующей литературе [52]. Эта модель очень интересна, поскольку в ней вероятность возникновения сингулярности Большой Разрыв обращается в нуль. Кроме того, соответствие результатов, полученных с помощью этой модели, данным наблюдений свидетельствует в поддержку существования переходной эпохи фантомного поля. Мы рассмотрели общее обыкновенное дифференциальное уравнение (21), у которого может быть много решений. В частности, мы исследовали решения модифицированных полевых уравнений, используя подходы, основанные на степенном и экспоненциальном законах.

2. Две модели  $f(\mathcal{G})$ -гравитации связаны с решением, полученным в рамках подхода, основанного на степенном законе. Одна из моделей становится тривиальной при  $c_1 = 0$ . Однако другая модель представляется нам более важной. С нетривиальной моделью  $f(\mathcal{G})$ -гравитации связаны два типа решений.

3. Мы рассмотрели специальный случай в рамках подхода, основанного на степенном законе, соответствующий хорошо известной метрике Тауба [52]. Решение хорошо выполняется при значении  $n = -1/2$ . В этом случае скаляр Риччи  $R$  и инвариант ГБ  $\mathcal{G}$  являются постоянными.

4. Второй набор решений получается в рамках подхода, основанного на экспоненциальном законе, что приводит к реконструкции знаменитого анти-деситтеровского пространства–времени [53] при зна-

чении параметра анизотропии  $n = 1$ . В этом случае скаляр Риччи становится равным 3, а инвариант ГБ равен  $3/2$ .

Таким образом, можно заключить, что для реконструкции некоторых важных космологических решений, полученных ранее в рамках ОТО, могут быть использованы модифицированные полевые уравнения с некоторыми важными эффективно работающими моделями  $f(\mathcal{G})$ -гравитации. Мы представили решения, полученные в рамках подхода, основанного только на степенном законе. Анализ может быть проведен и для других моделей  $f(\mathcal{G})$ -гравитации. В частности, могут представлять интерес и требуют отдельного рассмотрения решения для случая плоскостной симметрии с использованием других модифицированных теорий, таких как  $f(R, \mathcal{G})$ - и  $f(\mathcal{G}, T)$ -теорий гравитации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. D. N. Spergel et al., *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).
2. A. G. Riess et al. (Supernova Search Team), *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
3. C. L. Bennett et al., *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1 (2003).
4. M. Tegmark et al., *Phys. Rev. D* **69**, 103501 (2004).
5. S. Capozziello, *Int. J. Mod. Phys. D* **11**, 483 (2002).
6. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **68**, 123512 (2003).
7. A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **91**, 99 (1980).
8. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **70**, 103522 (2004).
9. T. Harko, F. S. N. Lobo, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **84**, 024020 (2011).
10. S. A. Appleby and R. A. Battye, *Phys. Lett. B* **654**, 7 (2007).
11. S. A. Appleby, R. A. Battye, and A. A. Starobinsky, *JCAP* **1006**, 005 (2010).
12. A. D. Felice and S. Tsujikawa, *Living Rev. Rel.* **13**, 3 (2010); arXiv:1002.4928.
13. K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, *Astrophys. Space Sci.* **342**, 155 (2012).
14. S. Capozziello, S. Nojiri, S. D. Odintsov, and A. Troisi, *Phys. Lett. B* **639**, 135 (2006).
15. T. Chiba, T. L. Smith, and A. L. Erickcek, *Phys. Rev. D* **75**, 124014 (2007).
16. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* **631**, 1 (2005); S. Nojiri, S. D. Odintsov, and O. G. Gorbunova, *J. Phys. A* **39**, 6627 (2006).
17. G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, and S. Zerbini, *Phys. Rev. D* **73**, 084007 (2006).
18. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *ECONF C0602061*, 06 (2006); *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **4**, 115 (2007).
19. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rep.* **505**, 59 (2011).
20. V. Fayaz, H. Hossienkhani and A. Mohammadi, *Astrophys. Space Sci.* **357**, 136 (2015).
21. M. Sharif and H. I. Fatima, *Mod. Phys. Lett. A* **30**, 1550142 (2015).
22. G. Abbas, D. Momeni, M. A. Ali, R. Myrzakulov, and S. Qaisar, *Astrophys. Space Sci.* **357**, 158 (2015).
23. S. Nojiri, S. D. Odintsov, and P. V. Tretyakov, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **172**, 81 (2008).
24. K. Bamba, S. D. Odintsov, L. Sebastiani, and S. Zerbini, *Eur. Phys. J. C* **67**, 295 (2010).
25. N. M. Garcia, T. Harko, F. S. N. Lobo, and J. P. Mimoso, *Phys. Rev. D* **83**, 104032 (2011).
26. M. F. Shamir, *Astrophys. Space Sci.* **361**, 147 (2016).
27. M. F. Shamir, *Astrophys. Space Sci.* **362**, 67 (2017).
28. M. Sharif and H. I. Fatima, *JETP* **149**, 121 (2016).
29. M. Sharif and H. I. Fatima, *Int. J. Mod. Phys. D* **25**, 1650011 (2016).
30. A. D. Felice, T. Suyama, and T. Tanaka, *Phys. Rev. D* **83**, 104035 (2011).
31. S. Capozziello, A. N. Makarenko, and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **87**, 084037 (2013).
32. S. Capozziello, M. D. Laurentis, and S. D. Odintsov, *Mod. Phys. Lett. A* **29**, 1450164 (2014).
33. M. F. Shamir and F. Kanwal, *Eur. Phys. J. C* **77**, 286 (2017).
34. B. Wu and B. Ma, *Phys. Rev. D* **92**, 044012 (2015).
35. M. Laurentis, M. Paoella, and S. Capozziello, *Phys. Rev. D* **91**, 083531 (2015).
36. K. Atazadeh and F. Darabi, *Gen. Relativ. Gravit.* **46**, 1664 (2014).

37. L. Sebastiani, Springer Proceedings in Physics **137**, 261 (2011).
38. M. Sharif and M. F. Shamir, Mod. Phys. Lett. A **25**, 1281 (2010).
39. M. F. Shamir, Commun. Theor. Phys. **65**, 301 (2016).
40. R. Kantowski and R. K. Sachs, J. Math. Phys. **7**, 443 (1966).
41. W. Xing-Xiang, Chin. Phys. Lett. **22**, 29 (2005).
42. K. S. Thorne, Astrophys. J. **148**, 51 (1967).
43. C. B. Collins and S. W. Hawking, Astrophys. J. **180**, 317 (1973).
44. S. R. Roy and S. K. Banerjee, Class. Quantum Grav. **11**, 1943 (1995).
45. R. Bali and P. Kumawat, Phys. Lett. B **665**, 332 (2008).
46. M. Sharif and M. Zubair, Astrophys. Space Sci. **330**, 399 (2010).
47. G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, and S. Zerbini, Phys. Rev. D **73**, 084007 (2006).
48. G. Cognola, M. Gastaldi, and S. Zerbini, Int. J. Theor. Phys. **47**, 898 (2008).
49. A. D. Felice and S. Tsujikawa, Phys. Lett. B **675**, 1 (2009).
50. S. Tsujikawa, Lect. Notes Phys. **800**, 99 (2010).
51. G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, and S. Zerbini, Phys. Rev. D **73**, 084007 (2006).
52. M. L. Bedran, M. O. Calvo, F. M. Paiva, and D. Soares, Phys. Rev. D **55**, 3431 (1997).
53. T. Feroze, A. Qadir, and M. Ziad, J. Math. Phys. **42**, 4947 (2001).
54. K. Schwarzschild, arXiv:preprint physics/9905030 (1999).
55. H. Takeno, Tensor, New Series **7**, 141 (1957).
56. A. Peres, Phys. Rev. **118**, 1105 (1960).
57. T. Nordtvedt and H. Pegels, Ann. Phys. **17**, 426 (1962).
58. V. Gaikwad and T. M. Karade, Acta Physica Hungarica **67**, 259 (1990).
59. K. S. Adhav and T. M. Karade, *Plane Gravitational Waves in Higher Dimensional Space-Times-II*, CPNP (1994).
60. S. R. Bhoyar and A. G. Deshmukh, Rom. Rep. Phys. **64**, 933 (2012).
61. A. H. Taub, Annals Math. **53**, 472 (1951).
62. H. Bondi, Nature **179**, 1072 (1957).
63. H. Bondi, E. Pirani, and I. Robinson, Proc. Roy. Soc. **251**, 519 (1959).