ЖЭТФ, 2018, том 153, вып. 2, стр. 232–239 © 2018

ПРИЛИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ В НЕКОТОРЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫРАХ

*М. Шариф**, *С. Садик***

Математический факультет, Университет Пенджаба
54590, Лахор, Пакистан

Поступила в редакцию 14 июля 2017 г.

(Перевод с английского)

TIDAL EFFECTS IN SOME REGULAR BLACK HOLES

M. Sharif, S. Sadiq

Исследуются приливные силы, порождаемые некоторым классом регулярных черных дыр. Рассмотрено падение пробной частицы в радиальном направлении и получены радиальные и угловые компоненты приливных сил путем решения уравнений для расхождения геодезических. Вектор расхождения геодезических вычислений путем численного решения уравнения для расхождения геодезических. Оказалось, что в результате действия приливных сил частица претерпевает сжатие или растяжение в радиальном или угловом направлениях.

DOI: 10.7868/S0044451018020050

1. ВВЕДЕНИЕ

Гравитационная сила является слабейшей среди фундаментальных сил природы, при этом она ответственна за то, что одно тело притягивается к другому. В результате действия порождаемых гравитацией приливных сил не взаимодействующие частицы, свободно падающие в направлении Земли, подвергаются растяжению в направлении движения и сжатию в поперечном направлении. Приливные поля определяют динамическую эволюцию галактик вдоль их траекторий. В работе [1] рассматривался полный эффект приливных взаимодействий, которых оказалось недостаточно для преобразования спиральной галактики в эллиптическую, и было найдено, что приливный нагрев сильнее при низкой критической плотности кластеров. В работе [2] было обнаружено усиление приливных эффектов релятивистскими поправками высшего порядка, которые необходимы для точной фазировки гравитационного сигнала от двойных нейтронных звезд.

Приливные эффекты также имеют место, когда тело падает на черную дыру (ЧД), при этом вблизи сингулярности они стремятся к бесконечности. Гравитация ЧД порождает сильные приливные силы, которые деформируют и разрушают объекты вблизи ЧД. В случае ЧД Шварцшильда [3] свободно падающее тело из-за приливных эффектов претерпевает в радиальном направлении растяжение, а в угловом — сжатие. В работе [4] было показано, что из-за приливного сжатия, действующего в направлении, ортогональном орбитальной плоскости звезды, звезда может сжиматься, если периастр ее орбиты оказывается достаточно близко к горизонту ЧД. В работе [5] было проанализировано влияние приливных сил, порождаемых ЧД, на небольшие твердые объекты, размягченные сильным гравитационным полем ЧД. В работе [6] исследовались орбиты звезд в метрике Керра и было показано, что вращение ЧД увеличивает верхний предел массы ЧД, способной разрушить звезду посредством приливных сил. В работе [7] обсуждалось разрушение черными дырами звезд с малой массой из главной последовательности и белых карликов и были вычислены орбитальные параметры обломков. В работе [8] обсуждались растяжение и сжатие в радиальном и

* E-mail: msharif.math@pu.edu.pk
** E-mail: sobiasadiq.01@gmail.com

угловом направлениях частицы, свободно падающей на ЧД Рейсснера – Нордстрема (РН), и было найдено, что результаты отличаются от результатов, полученных для ЧД Шварцшильда. В работе [9] исследовалось разрушение, производимое ЧД Шварцшильда, и было показано, что при разрушении за счет приливных сил от звезды отщепляется больше вещества и при этом получаются более тесно связанные обломки, чем в случае ньютоновской гравитации.

В течение последнего столетия с помощью общей теории относительности был достигнут значительный успех в понимании различных наблюдательных фактов, таких как гравитационное красное смещение, прецессия орбиты Меркурия, искривление светового луча и т. д. Существенную роль здесь играли черные дыры Шварцшильда, Рейсснера – Нордстрема, Керра и Керра – Ньюмана, параметризованные массой, зарядом и моментом импульса. Хорошо известно, что эти решения демонстрируют сингулярность в кривизне под их горизонтом событий. Пенроуз в работе [10] предложил гипотезу космической цензуры, запрещающей существование голой сингулярности. Однако полное физическое понимание ЧД требует решений без сингулярности. В этом контексте были предложены некоторые решения для ЧД с регулярными центрами, известные как регулярные или несингулярные черные дыры.

Бардин [11] предложил решение для регулярной ЧД, которое в дальнейшем интерпретировалось как магнитное решение полевых уравнений, включающих взаимодействие с нелинейной электродинамикой [12]. В работе [13] с использованием подхода квантового туннелирования исследовались квантовые поправки к термодинамическим величинам для ЧД Бардина. Те же авторы в работе [14] исследовали влияние некоммутативного пространства на горизонт, сингулярность и термодинамические величины. В работе [15] ЧД Бардина рассматривалась как гравитационная линза и была получена граница для угла отклонения света. В работе [16] исследовалось другое решение для регулярной ЧД, в котором параметр l связан с космологической постоянной. В работе [17] исследовалось гравитационное линзирование черной дырой Хэйворда и было обнаружено влияние параметра несингулярности на положение и увеличение изображений.

В работе [18] представлено точное решение для нелинейной электродинамики во взаимодействии с общей теорией относительности. В работе [19] было получено возрастание энергии в системе центра масс сталкивающихся частиц для регулярной ЧД, вне зависимости от горизонта событий и голой сингулярности. В работе [20] в решениях для ЧД Бардина и ЧД Айон-Беато – Гарсиа (АБГ) было показано существование статической сферы, которая может быть окружена кеплеровским аккреционным диском. В работе [21] исследовалась динамика скалярной тонкой оболочки для регулярных черных дыр и было получено уравнение движения как для массивных, так и для безмассовых скалярных полей. В работе [22] были найдены термодинамические величины для регулярных черных дыр и был обнаружен скачок энтропии, приводящий к термодинамическим фазовым переходам второго рода.

Цель настоящей работы состоит в исследовании приливных эффектов от трех типов регулярных черных дыр, а именно, черной дыры Бардина, черной дыры Хэйворда и черной дыры Айон-Беато – Гарсиа. Работа построена следующим образом. В разд. 2 мы исследуем падение пробной частицы в радиальном направлении на ЧД каждого типа. В разд. 3 мы находим радиальные и угловые компоненты приливных сил, используя уравнение для расхождения геодезических. В разд. 4 мы вычисляем радиальную и угловую компоненты вектора расхождения геодезических, численно решая уравнение для расхождения геодезических. В последнем разделе приведены заключительные замечания.

2. РЕГУЛЯРНЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

Линейный элемент, характеризующий регулярные ЧД, имеет вид

$$ds^2 = h(r)\,dt^2 - \frac{dr^2}{h(r)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right), \quad (1)$$

где $h(r)$ для ЧД Бардина, Хэйворда и АБГ соответственно определяется как

$$h(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2+Q^2)^{3/2}}, \quad (2)$$

$$h(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{r^3+2l^2}, \quad (3)$$

$$h(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2+Q^2)^{3/2}} + \frac{Q^2r^2}{(r^2+Q^2)^2}. \quad (4)$$

Здесь M и l — константы, а Q — электрический заряд ЧД. Горизонты этих ЧД определяются путем вычисления корней уравнения

$$h(r) = 0.$$

При $Q = 0 = l$ все решения для ЧД редуцируются к пространству-времени, соответствующему ЧД Шварцшильда.

Геометрия пространства-времени визуализируется геодезическими, которые связаны с перемещением свободных частиц, движущихся вдоль своих траекторий. Пробные частицы при распространении обычно движутся по времениподобным и светоподобным геодезическим. Динамика этих частиц помогает понять геометрическую структуру пространства-времени, а также высокоэнергетические явления, происходящие вблизи ЧД, такие как аккреционные диски и образование джетов. Мы рассмотрим пробную частицу, движущуюся вдоль времениподобной геодезической в радиальном направлении, причем аффинный параметр τ отождествляется с собственным временем [23]:

$$ds = d\tau.$$

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$h(r)\dot{t}^2 - h^{-1}(r)\dot{r}^2 = 1, \tag{5}$$

где точкой обозначена производная по τ, причем

$$\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0.$$

Постоянная движения для радиальной геодезической имеет вид

$$E = h(r)\dot{t},$$

что представляет собой энергию на единицу массы частицы. Используя уравнение (5), получаем

$$E^2 = \dot{r}^2 + h(r). \tag{6}$$

Пробная частица, падающая в радиальном направлении из состояния покоя в положении α, обладает энергией

$$E = \sqrt{h(\alpha)}.$$

Базисные векторы для свободно падающих в радиальном направлении наблюдателей определяются как [8]

$$\begin{aligned} &\hat{\omega}^{\alpha}_{\hat{t}} = \left(Eh^{-1}, -\sqrt{E^2 - h}, 0, 0\right), \\ &\hat{\omega}^{\alpha}_{\hat{r}} = \left(-h^{-1}\sqrt{E^2 - h}, E, 0, 0\right), \\ &\hat{\omega}^{\alpha}_{\hat{\theta}} = \left(0, 0, r^{-1}, 0\right), \quad \hat{\omega}^{\alpha}_{\hat{\phi}} = \left(0, 0, 0, (r\sin\theta)^{-1}\right), \end{aligned} \tag{7}$$

при этом они удовлетворяют условию ортонормальности

$$\hat{\omega}^{\alpha}_{\hat{\mu}}\hat{\omega}_{\hat{\nu}\alpha} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}},$$

где $\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ — метрика Минковского.

Таблица 1. Значения радиуса горизонта для ЧД Бардина

Q	r	r_+	r_-
0.2	$\pm1.96946,\ \pm0.0687757$	1.96946	0.0687757
0.4	$\pm1.87022,\ \pm0.217109$	1.87022	0.217109
0.6	$\pm1.66546,\ \pm0.471171$	1.66546	0.471171

3. ПРИЛИВНЫЕ СИЛЫ

Существование приливных сил связано с концепцией расхождения геодезических, вдоль которых движутся частицы. Уравнение для расхождения геодезических, описывающее, как кривизна пространства-времени влияет на две соседние геодезические, заставляя их расходиться или сходиться, имеет вид

$$\frac{D^2\xi^{\alpha}}{D\tau^2} = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}v^{\beta}v^{\gamma}\xi^{\delta},$$

где v^{β} — касательный вектор к времениподобной геодезической в каждой точке, причем $\hat{\omega}^{\beta}_{\hat{t}} = v^{\beta}$, а ξ^{α} — вектор расхождения двух соседних геодезических. Вектор ξ^{α} также можно записать как

$$\xi^{\alpha} = \hat{\omega}^{\alpha}_{\hat{\beta}}\xi^{\hat{\beta}}.$$

Отличные от нуля компоненты уравнения для расхождения геодезических имеют вид

$$\frac{\ddot{\xi}^{\hat{r}}}{\xi^{\hat{r}}} = -\frac{h''}{2}, \quad \frac{\ddot{\xi}^{\hat{j}}}{\xi^{\hat{j}}} = -\frac{h'}{2r}, \tag{8}$$

где $j = \theta, \phi$, а штрихом обозначена производная по r. Приведенные уравнения описывают радиальные и угловые компоненты приливных сил.

Ниже мы вычислим радиусы внешнего и внутреннего горизонтов, а также положение точки разворота пробной частицы и рассмотрим поведение приливных сил для трех типов ЧД.

3.1. Черная дыра Бардина

Найдем радиус горизонта для ЧД Бардина, вычислив корни уравнения

$$r^6 + (3Q^2 - 4M^2)r^4 + 3Q^4r^2 + Q^6 = 0$$

для некоторых конкретных значений Q при $M = 1$, см. табл. 1. Здесь мы пренебрегли отрицательными корнями r и отождествили самое большое значение с

Таблица 2. Точки разворота при $\alpha = 100$

Q	r	r_{stop}
0.2	$\pm100, \ \pm0.0089577$	0.0089577
0.4	$\pm100, \ \pm0.0253742$	0.0253742
0.6	$\pm100, \ \pm0.0466854$	0.0466854

Таблица 3. Точки, в которых приливная сила обращается в нуль

Q	r_+^{rtf}	r_-^{rtf}	r^{atf}
0.2	0.460944	0.0867784	0.282843
0.4	0.921888	0.173557	0.565685
0.6	1.38283	0.260335	0.848528

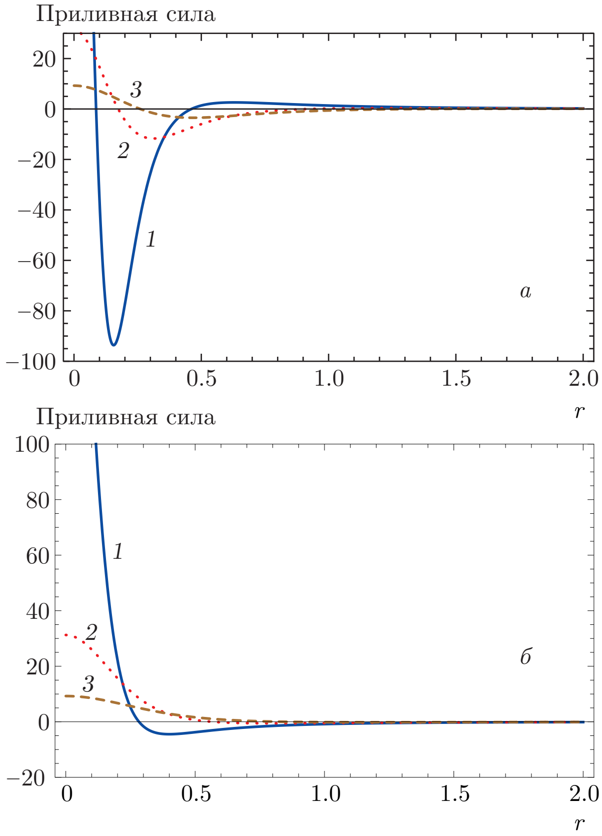

Рис. 1. (В цвете онлайн) Зависимости от r радиальной (*а*) и угловой (*б*) компонент приливной силы для ЧД Бардина при $M = 1$, $Q = 0.2$ (*1*), 0.4 (*2*), 0.6 (*3*)

радиусом внешнего горизонта (r_+), а самое маленькое — с радиусом внутреннего (r_-). Оказалось, что вещественные корни существуют только в области

$$0 \le Q \le 0.76,$$

при этом мы игнорируем мнимые корни, поскольку они являются нефизическими. Скорость пробной частицы, свободно падающей на ЧД, стремится к нулю в точке разворота, которой соответствует значение r_{stop}, уравнение (6) при этом принимает вид

$$E^2 - h(r) = 0.$$

Корни этого уравнения приведены в табл. 2.

Обращение в нуль радиальной и угловой компонент приливной силы для ЧД Бардина дает

$$r_\pm^{rtf} = \sqrt{\frac{Q^2\left(11 \pm \sqrt{105}\right)}{4}}, \qquad r^{atf} = \sqrt{2Q^2},$$

где индекс «rtf» соответствует радиальной, а индекс «atf» — угловой компоненте приливной силы. В табл. 3 приведены значения $r_\pm^{rtf}$ и r^{atf} для различных Q.

На рис. 1 приведены зависимости радиальной и угловой компонент приливной силы, полученные с использованием уравнений (2) и (8). Сравнение значений, при которых приливная сила обращается в нуль, с величинами, соответствующими внешнему горизонту, дает значение $Q \ge 0.8$, при котором радиальная компонента приливной силы меняет направление на противоположное и вызывает сжатие сразу за внешним горизонтом. Кроме того, видно, что радиальная компонента приливной силы имеет локальный максимум в точке $r = 0.5$. Для угловой компоненты приливной силы имеем

$$r_- < r^{atf} < r_+,$$

что указывает на то, что она обращается в нуль в минимуме $h(r)$, который расположен между внутренним и внешним горизонтами.

3.2. Черная дыра Хэйворда

Значения радиуса горизонта для ЧД Хэйворда приведены в табл. 4. В этом случае вещественные корни существуют при всех значениях l. Значения r_{stop}, полученные с использованием уравнения (3), приведены в табл. 5. Значения, при которых радиальная и угловая компоненты приливной силы обращаются в нуль, приведены в табл. 6. Зависимости радиальной и угловой компонент приливной силы от r показаны на рис. 2. Как видно из рисунка, сжатие пробной частицы происходит при $l \ge -1.6$. При

$$r_- < r^{atf} < r_+$$

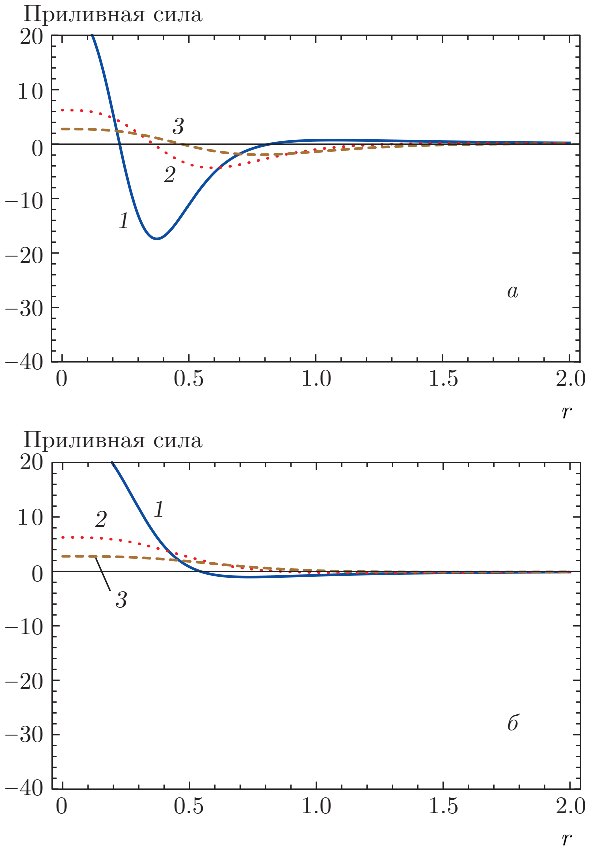

Рис. 2. (В цвете онлайн) Зависимости от r радиальной (a) и угловой ($б$) компонент приливной силы для ЧД Хэйворда при $M = 1$, $l = 0.2$ (*1*), 0.4 (*2*), 0.6 (*3*)

Таблица 4. Значения радиуса горизонта для ЧД Хэйворда

l	r	r_+	r_-
0.2	$-0.19108,\ 0.211495,\ 1.97959$	1.97959	0.211495
0.4	$-0.367636,\ 0.455122,\ 1.91251$	1.91251	0.455122
0.6	$-0.533135,\ 0.76289,\ 1.77024$	1.77024	0.76289

Таблица 5. Точки разворота при $\alpha = 100$

l	r	r_{stop}
0.2	$-0.0282803,\ 0.0282883,\ 100$	0.0282803
0.4	$-0.0565525,\ 0.0565845,\ 100$	0.0565525
0.6	$-0.0848168,\ 0.0848888,\ 100$	0.0848168

Таблица 6. Точки, в которых радиальная и угловая компоненты приливной силы обращаются в нуль

l	r^{rtf}	r^{atf}
0.2	0.226837, 0.81849	0.779339
0.4	0.360081, 1.29927	0.931019
0.6	0.471839, 1.70253	1.06454

угловая компонента приливной силы обращается в нуль для значений r, лежащих между внутренним и внешним горизонтами.

3.3. Черная дыра АБГ

Для ЧД АБГ радиусы горизонтов задаются следующим образом [18]:

$$r_\pm = Q\left(\left(\frac{1}{4s} + \frac{f^{1/2}}{12s} \pm \frac{6^{1/2}}{12s} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \sqrt{\frac{9}{2} - 12s^2 - \frac{f}{6} - \frac{9\,(12s^2-1)}{\sqrt{f}}}\right)^2 - 1\right)^{1/2},$$

где

$$s = \frac{Q}{2M}, \quad f = 6\left(\frac{3}{2} - 4s^2 + sg^{1/3} - \frac{4s\,(11s^2-3)}{g^{1/3}}\right),$$
$$g = 4\left(9s + 74s^3 + \left(27\left(400s^6 - 112s^4 + 47s^2 - 4\right)\right)^{1/2}\right).$$

Зависимости радиусов внутреннего и внешнего горизонтов для ЧД АБГ приведены на рис. 3. Значения r_{stop} для точек разворота для ЧД АБГ, полученные с использованием уравнения (4), приведены в табл. 7. Заметим, что мы игнорируем другие значения r_{stop}, как и в случае ЧД Бардина. Радиальная компонента приливной силы обращается в нуль в двух различных точках, соответствующие значения приведены в табл. 8. Зависимости радиальной и угловой компонент приливной силы показаны на рис. 4. Как видно из рисунка, поведение приливных сил тождественно поведению приливных сил для случаев черных дыр Бардина и Хэйворда.

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСХОЖДЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

В данном разделе мы найдем вектор, связывающий две соседние геодезические, численно решая уравнение (8). Уравнение (8) с учетом (6) дает

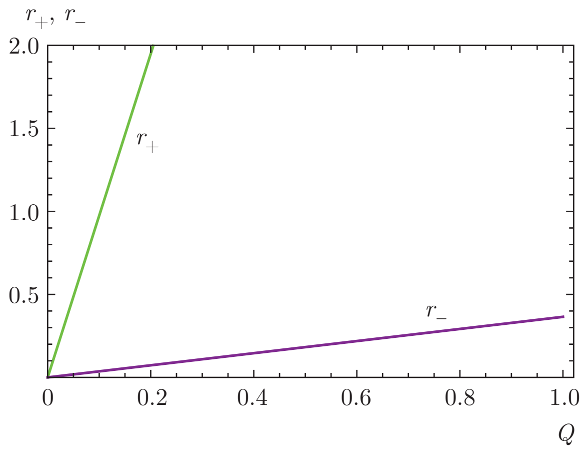

Рис. 3. (В цвете онлайн) Зависимости от Q радиусов внутреннего и внешнего горизонтов при $M=1$

Таблица 7. Точки разворота при $\alpha = 100$

Q	r_{stop}
0.2	0.00944229
0.4	0.0283703
0.6	0.055806

Таблица 8. Точки, в которых радиальная и угловая компоненты приливной силы обращаются в нуль

Q	r^{rtf}	r^{atf}
0.2	0.47668, 0.0886348	0.29172
0.4	0.990083, 0.182031	0.604422
0.6	1.54915, 0.282462	0.943864

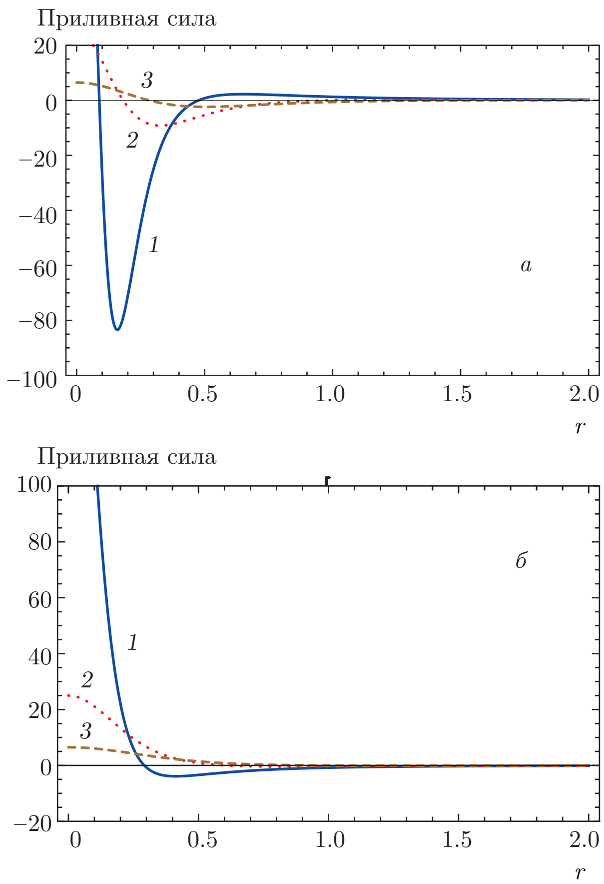

Рис. 4. (В цвете онлайн) Зависимости от r радиальной (a) и угловой ($б$) компонент приливной силы для ЧД АБГ при $M = 1$, $Q = 0.2$ (*1*), 0.4 (*2*), 0.6 (*3*)

$$(E^2-h)\xi^{\hat{r}''} - \frac{h'}{2}\xi^{\hat{r}'} + \frac{h''}{2}\xi^{\hat{r}} = 0,$$

$$(E^2-h)\xi^{\hat{\jmath}''} - \frac{h'}{2}\xi^{\hat{\jmath}'} + \frac{h'}{2r}\xi^{\hat{\jmath}} = 0.$$

Эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка для вектора расхождения геодезических. Зависимости радиальной ($\xi^{\hat{r}}$) и угловой ($\xi^{\hat{\jmath}}$) компонент вектора расхождения геодезических для частицы, падающей в радиальном направлении на регулярную ЧД, показаны на рис. 5 для начальных условий

$$\xi^{\hat{r}}(\alpha) = \xi^{\hat{\jmath}}(\alpha) = 0, \quad \xi^{\hat{r}'}(\alpha) = \xi^{\hat{\jmath}'}(\alpha) = 1.$$

Из рисунка видно, что поведение вектора расхождения геодезических одинаково при различных значениях Q и l. Радиальная компонента для случая ЧД Бардина постоянно убывает по мере того, как частица падает за горизонт событий, и достигает некоторого отрицательного значения для всех рассматриваемых значений Q. Для случаев ЧД Бардина и Хэйворда угловая компонента вектора постоянно убывает, в то время как для случая ЧД АБГ она постоянно возрастает.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Черные дыры являются объектами, изучение которых представляет большой интерес из-за их замечательных физических свойств; их гравитация порождает сильные приливные силы. В настоящей работе исследуются приливные силы, порожденные

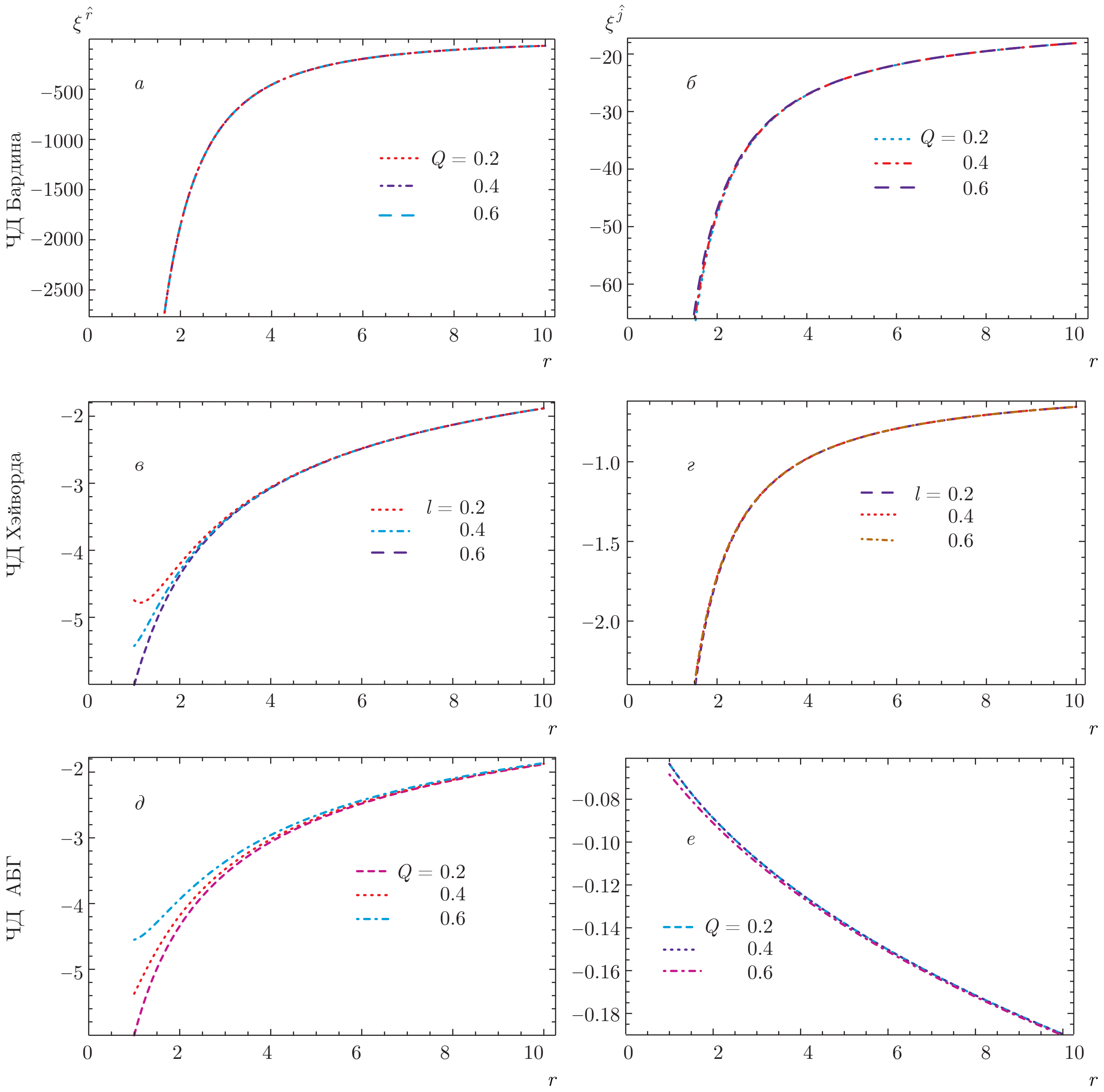

Рис. 5. (В цвете онлайн) Зависимости от r радиальной (левые панели) и угловой (правые панели) компонент вектора расхождения геодезических при $M = 1$; *а,б* — ЧД Бардина, *в,г* — ЧД Хэйворда, *д,е* — ЧД АБГ

в пространстве-времени, соответствующем трем типам регулярных черных дыр (Бардина, Хэйворда и АБГ). Для этого рассматривается пробная частица на времениподобной геодезической, свободно падающая в радиальном направлении. Приливные силы исследуются с использованием уравнения для расхождения двух соседних геодезических, описывающих пути движущихся объектов. Приливная сила для каждого случая имеет две независимые компоненты (радиальную и угловую). Получены значения Q и l, при которых существуют вещественные корни уравнения. Оказалось, что поведение приливных сил для регулярных ЧД аналогично поведению в пространстве-времени, соответствующем ЧД РН [8], но отличается от поведения в случае метрики Шварцшильда [3]. В пространстве-времени, соответстствующем ЧД Шварцшильда, приливные силы всегда порождают бесконечное растяжение в радиальном направлении и сжатие — в угловом. В нашем случае они могут порождать как растяжение, так и сжатие в любом направлении.

Кроме того, в работе получены значения для радиусов внешнего и внутреннего горизонтов, точки разворота пробной частицы и точек, в которых радиальная и угловая компоненты приливных сил обращаются в нуль для некоторых значений Q и l. Оказалось, что для некоторых значений r, лежащих между внутренним и внешним горизонтами, и для определенных значений Q и l пробная частица претерпевает сжатие, когда угловая компонента приливной силы обращается в нуль. Также получены численные решения уравнений для расхождения геодезических и изучено поведение вектора, связывающего две соседние геодезические, для случая действия приливных сил, порожденных черными дырами. Оказалось, что при $r \to 0$ радиальная компонента убывает и достигает некоторого отрицательного значения. Угловая компонента имеет некоторое конечное значение, которое находится в согласии с результатами, полученными для случая ЧД РН [8]. В случае ЧД Шварцшильда радиальная компонента всегда возрастает, а угловая — стремится к нулю при r стремящемся к нулю [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. O. Y. Gnedin, Astrophys. J. **582**, 141 (2003).

2. L. Baiotti, T. Damour, B. Giacomazzo, A. Nagar, and L. Rezzolla, Phys. Rev. Lett. **105**, 261101 (2010).

3. C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Co. (1973).

4. J. P. Luminet and J. A. Marek, Mon. Not. R. Astron. Soc. **212**, 57 (1985).

5. U. Kostic, A. Cadez, M. Calvani, and A. Gomboc, Astron. Astrophys. **496**, 307 (2009).

6. M. Kesden, Phys. Rev. D **85**, 024037 (2012).

7. R. M. Cheng and T. Bogdanovi, Phys. Rev. D **90**, 064020 (2014).

8. L. C. B. Crispino, A. Higuchi, L. A. Oliveira, and E. S. de Oliveira, Eur. Phys. J. C **76**, 168 (2016).

9. J. Servin and M. Kesden, Phys. Rev. D **95**, 083001 (2017).

10. R. Penrose, Riv. Nuovo Cim. **1**, 252 (1969).

11. J. M. Bardeen, Proc. Int. Conf. GR5, Tbilisi, USSR (1968).

12. E. Ayón-Beato and A. Garcia, Phys. Lett. B **493**, 149 (2000).

13. M. Sharif and W. Javed, J. Korean Phys. Soc. **57**, 217 (2010).

14. M. Sharif and W. Javed, Can. J. Phys. **89**, 1027 (2011).

15. E. F. Eiroa and C. M. Sendra, Class. Quantum Grav. **28**, 085008 (2011).

16. S. A. Hayward, Phys. Rev. Lett. **96**, 031103 (2006).

17. S. W. Wei, Y. X. Liu, and C. E. Fu, Adv. High Energy Phys. **2015**, 454217 (2015).

18. E. Ayón-Beato and A. García, Phys. Rev. Lett. **80**, 5056 (1998).

19. M. Sharif and N. Haider, Astrophys. Space Sci. **346**, 111 (2013).

20. Z. Stuchlík and J. Schee, Int. J. Mod. Phys. Lett. D **24**, 1550020 (2015).

21. M. Sharif and S. Iftikhar, Astrophys. Space Sci. **356**, 89 (2015).

22. R. Tharanath, J. Suresh, and C. Kuriakose, Gen. Relativ. Gravit. **47**, 46 (2015).

23. S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Clarendon Press (1992).