

АНОМАЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛА И ИМПУЛЬСА, ВОЗНИКАЮЩИЙ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ СЛОЕ НОРМАЛЬНОГО ^3He , ВСЛЕДСТВИЕ ШЕРОХОВАТОСТИ ОГРАНИЧИВАЮЩЕЙ ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

*П. Шарма**

*Центр нанонауки и инженерии, Индийский институт науки
560012, Бангалор, Индия*

Поступила в редакцию 19 апреля 2017 г.

(Перевод с английского)

ANOMALOUS HEAT AND MOMENTUM TRANSPORT ARISING FROM SURFACE ROUGHNESS IN A NORMAL ^3He SLAB

Priya Sharma

Обсуждается перенос тепла и импульса в мезоскопической пленке ^3He , находящейся в нормальном ферми-жидкостном состоянии и ограниченной шероховатыми стенками. Неупругое парное рассеяние квазичастиц, вызванное упругим рассеянием на шероховатой поверхности, дает вклад в когерентный «смешанный» канал рассеяния, который обуславливает аномальный транспорт в некотором диапазоне температур. Вычисляется теплопроводность и вязкость пленки в указанном режиме с учетом толщины пленки и автокорреляционной функции шероховатости поверхности, которая входит в постановку задачи как независимая величина. Представленные вычисления могут быть полезны для понимания и выделения эффектов конфайнмента и эффектов, связанных с поверхностной шероховатостью, особенно в контексте исследования сверхтекучих фаз в пленках.

DOI: 10.7868/S0044451018020062

1. ВВЕДЕНИЕ

Влияние границ на характеристики физических систем становится существенным при уменьшении размеров системы. В последнее время стали широко распространены системы с ограниченной на мезоскопических и наномасштабах геометрией, например, такие как наноканалы, квантовые нити, тонкие пленки и квантовые точки. Квантовые размерные эффекты (КРЭ) — это квантовомеханические эффекты, которые начинают проявляться при достаточно малых ограничивающих размерах посредством квантования различных физических величин характеризующих систему. Учет влияния на систему поверхностной шероховатости ограничивающих

стенок — более сложная задача, однако фундаментально важная. Здесь рассматривается данная задача и анализируются транспортные свойства ферми-жидкости мезоскопически ограниченной шероховатыми стенками.

Жидкий ^3He является типичным примером ферми-жидкости и обнаруживает богатую фазовую диаграмму со сверхтекучими фазами, обладающими комплексным параметром порядка, соответствующим нетривиальному p -волновому спариванию [1]. В отсутствие приложенного магнитного поля существуют две устойчивые объемные сверхтекучие фазы с триплетным спариванием. Одна из них — это B -фаза, которая инвариантна относительно обращения времени, обладает изотропной щелью в спектре возбуждений и устойчива при низких температурах. Вторая — A -фаза, киральная фаза с

* E-mail: shpriya@iisc.ac.in

узловыми точками в щели и ненулевым внутренним угловым моментом пары. Сверхтекучий ${}^3\text{He}$ является топологической сверхтекучей жидкостью, в которой было предсказано существование краевых токов и поверхностных возбуждений для обеих сверхтекучих фаз [2]. Эти майорановские состояния обладают уникальными нелокальными свойствами, которые позволяют использовать их для применения в квантовых вычислениях [3]. Однако обнаружить данные состояния трудно [4]. Сверхтекучий ${}^3\text{He}$ представляет собой модельную систему для поиска подобных состояний. В связи с развитием производства нанополостей, подходящих для изучения сверхтекучего ${}^3\text{He}$, поиск майорановских состояний в системах с ограниченной геометрией в последнее время активизировался [5, 6]. Изначально изучение жидкого ${}^3\text{He}$ в ограниченной геометрии было обусловлено предсказанием существования новых фаз, которых нет в объемном случае [7]. Изучение конфайнмента и размерных эффектов неизбежно поднимает вопросы об условиях рассеяния на поверхности и эффектах поверхностной шероховатости.

Более ранние исследования эффекта поверхностной шероховатости для жидкого ${}^3\text{He}$ в плоскопараллельной геометрии выявили аномальную скорость релаксации ферми-жидкости в экспериментах по методу крутильного маятника [8]. В настоящей статье представлены строгие вычисления, описывающие перенос тепла и импульса для нормального состояния жидкого ${}^3\text{He}$ в плоскопараллельной геометрии. Для данного аномального режима получены выражения для вязкости и теплопроводности как функции поверхностной шероховатости. Посредством этих вычислений предлагается метод для описания характерных свойств нормального состояния жидкого ${}^3\text{He}$ в плоскопараллельной геометрии, что является существенным шагом в направлении решения задач, связанных с фазовой диаграммой сверхтекучих фаз ${}^3\text{He}$ в ограниченной геометрии. Данные вычисления также применимы к тонким металлическим пленкам, в которых, как ожидается, электронная ферми-жидкость будет демонстрировать аномальное поведение коэффициентов переноса, аналогичное описанному в этой статье.

Для температур меньших, чем несколько сотен милликельвинов, процессы переноса в объемной квантовой жидкости хорошо объясняются в рамках теории ферми-жидкости Ландау [9]. Возбуждениями системы, которые определяют физические свойства в режиме ферми-жидкости, являются квазичастицы с хорошо определенным импульсом \mathbf{p}_F

и энергией ε_F (соответственно ферми-импульс и энергия). Для температур меньших, чем 100 мК ($T \ll \varepsilon_F/k_B \sim 1$ К для жидкого ${}^3\text{He}$), квазичастицы образуют систему вырожденных фермионов с эффективной массой m , т.е. $\varepsilon_F = p_F^2/2m$, а ферми-жидкостное взаимодействие описывается с помощью хорошо известных коэффициентов Ландау [10, 11]. Рассеяние квазичастиц происходит за счет парных столкновений, частота которых пропорциональна T^2 . Перенос тепла и импульса, вызванный механизмом рассеяния квазичастиц в объеме жидкого ${}^3\text{He}$, приводит к температурной зависимости вязкости $\eta_b \propto T^{-2}$ и теплопроводности $\kappa_b \propto T^{-1}$. Средняя длина свободного пробега для неупругого рассеяния, $\ell_{in} \propto T^{-2}$, меняется от нескольких нанометров при высоких температурах до десятков микрон при низких температурах. По мере того, как размер системы уменьшается и становится сравнимым с ℓ_{in} , процессы переноса приводят к переходу в кнудсеновский режим. При охлаждении величина ℓ_{in} для жидкого ${}^3\text{He}$ изменяется на три порядка, поэтому в кнудсеновском пределе можно исследовать широкий диапазон размеров системы. В этом пределе для меньших размеров системы наблюдаются КРЭ и шероховатость ограничивающей поверхности начинает играть важную роль в физике явлений. События, связанные с неупругим рассеянием квазичастиц, становятся более редкими и обусловлены упругим рассеянием на шероховатости поверхности. По мере приближения к кнудсеновскому пределу квазичастицы начинают сохранять когерентность при переходах под действием обоих рассеивающих каналов и процессы переноса определяются квазичастицами, рассеивающимися в когерентном «смешанном» канале. Этот режим будет рассмотрен далее в статье.

Когда жидкий ${}^3\text{He}$ ограничен внутри плоскопараллельной щели толщиной L , размерное квантование в поперечном направлении расщепляет спектр квазичастиц на зоны $\varepsilon_n(\mathbf{q})$ с квазичастицами, свободно двигающимися с продольным (вдоль плоскости) импульсом q . Для $L \lesssim \ell_{in}$ это изменяет фазовый объем доступный для неупругого рассеяния квазичастиц и поэтому меняется частота двухчастичного рассеяния. Для поверхности подложки с небольшой шероховатостью, заданной профилем высоты, $h(x, y)$, (z — направление поперечного ограничения), спектр квазичастиц, связанный с поперечным квантованием, становится локальным и меняется в продольном направлении. При $h/L \ll 1$ квазичастицы можно рассматривать как свободные частицы, совершающие переходы между зонами, во

время их движения вдоль траекторий $\hat{\mathbf{r}}_F$. Такая картина может быть формализована в терминах виртуального «объемного» случайного потенциала, который вызывает эти переходы в системе с гладкими стенками. Это преобразование было независимо предложено Тесановичем и др. [12] и Триведи и Ашкрофтом [13] и было использовано Мейеровичем с соавторами для формулировки теории слоистых систем [14–16]. Было найдено, что рассеяние на виртуальном случайном потенциале пропорционально $(h/L)^2 \ll k_B T$, что примерно равно энергии возбуждения квазичастиц. Таким образом, можно считать, что упругое рассеяние на шероховатостях не влияет на промежуточные состояния, через которые происходят неупругие столкновения квазичастиц. Фазовое пространство, доступное для рассеянных при двухчастичных столкновениях квазичастиц, описывается плотностью состояний, которая может быть разложена по степеням h/L для $h/L \ll 1$ и для поверхности со случайной шероховатостью $\langle h(x, y) \rangle_{(x, y)} = 0$ (угловые скобки означают пространственное усреднение). Частота рассеяния для неупругих столкновений в данной системе пропорциональна T и может быть выражена [17] в терминах спектральной функции шероховатости поверхности $\langle h(\mathbf{q})h(\mathbf{q}') \rangle_{(x, y)} \equiv \zeta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$, которую часто называют автокорреляционной функцией шероховатости поверхности. Данная аномальная линейная зависимость скорости релаксации от температуры была измерена [8] методом крутильного маятника для пленок ^3He толщиной в несколько сотен нанометров и успешно интерпретирована с помощью теории Мейеровича [18]. Как следствие, ожидается, что свойства переноса могут обладать данной необычной температурной зависимостью, что и будет рассмотрено в настоящей статье.

Представленные ниже вычисления предсказывают аномальную температурную зависимость теплопроводности и вязкости ^3He в тонких пленках с толщинами в диапазоне от 100 нм до примерно 1 мкм. Коэффициенты переноса даются выражениями, которые выведены с использованием обсуждавшегося выше формализма, и могут быть численно получены для заданной автокорреляционной функции шероховатости поверхности. Последняя может быть независимо экспериментально определена при помощи техники сканирующей зондовой микроскопии и войти в вычисления как известная величина. Вычисление коэффициентов переноса в данных терминах особенно эффективно для отделения эффектов пространственного ограничения от эффектов шероховатости поверхности.

2. ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА

Рассмотрим жидкий ^3He , ограниченный бесконечной плоскопараллельной щелью шириной L с одной шероховатой стенкой, имеющий заданную спектральную плотность шероховатости, $\zeta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$, вторая стенка гладкая. Для изотропной случайно шероховатой поверхности имеем $\zeta = \zeta(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|)$. А именно, если высота профиля шероховатости дается выражением $h(x, y) \equiv h(\mathbf{s})$, то автокорреляционная функция шероховатости поверхности будет иметь вид

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{q}) &= \int ds e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{s}/\hbar} \zeta(\mathbf{s}), \\ \zeta(\mathbf{s}) &= \int ds_1 h(\mathbf{s}_1) h(\mathbf{s} + \mathbf{s}_1), \end{aligned} \tag{1}$$

\mathbf{q} и \mathbf{s} — лежащие в плоскости двумерные векторы соответственно в импульсном и координатном пространствах (плоскость xy показана на рис. 1). Как указывалось в предыдущем разделе, рассеяние квазичастиц ^3He на шероховатой поверхности может быть описано виртуальным объемным случайным потенциалом для геометрической системы с гладкими стенками [12]. Это достигается с помощью преобразования координат, впервые предложенного Триведи и Ашкрофтом [13], которое применимо для масштабов неоднородностей больших, чем длина волны квазичастиц $k_F h \gg 1$ и малых по сравнению с размером системы, $h \ll L$. Для небольшой шероховатости, $h \ll \ell_{in}$, в кнудсеновском режиме систему можно рассматривать в непрерывном пределе $k_F L \gg 1$. Разумеется, масштабное преобразование можно применять, когда координаты изменяются так, что h меньше, чем расстояние, на котором квазичастицы ^3He остаются когерентными, т. е. меньше длины, на которой происходит потеря когерентности квазичастиц. Эта длина определяется тепловой

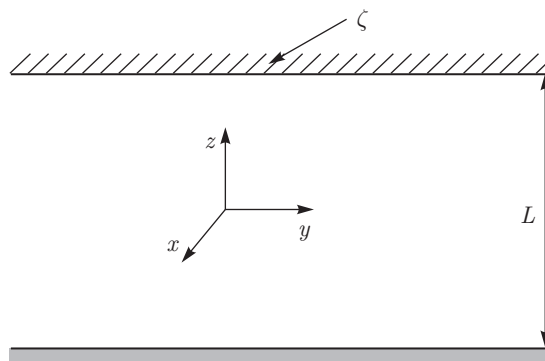


Рис. 1. Геометрия пленки

частотой порядка $\hbar/k_B T$, т. е. $h \ll v_F \hbar/k_B T \sim 50$ нм при $P = 0$ и $T = 10$ мК.

Скорость релаксации дается [17] главным членом разложения по $h/L \ll 1$ с точностью до $\vartheta((h/L)^2)$:

$$\frac{1}{\tau_{eff}^j(\mathbf{p})} = \frac{1}{\tau_b^j(\mathbf{q})} + \sum_{j'=1}^S \times \\ \times \int \frac{W_{jj'}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')/\tau_b^{j'}(\mathbf{q}')}{(\varepsilon_{j'}(\mathbf{q}') - \varepsilon_F)^2/\hbar^2 + (1/2\tau_b^{j'}(\mathbf{q}'))^2} \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi\hbar)^2}. \quad (2)$$

Здесь τ_b — объемная скорость релаксации, включающая в себя неупругие процессы рассеяния, j, j' — индексы, соответствующие номерам минизон для размерного квантования вдоль направления z , а ε_F — энергия Ферми; S — полное число минизон, по которому происходит суммирование. Вероятность рассеяния дается выражением

$$W_{jj'}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{\pi^4 \hbar^2}{m^2 L^6} \zeta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') j^2 j'^2. \quad (3)$$

Здесь m — масса квазичастиц. Для щели с двумя шероховатыми стенками похожий член со спектральной плотностью поверхностной шероховатости ζ_2 для второй поверхности добавляется в предыдущее выражение для вероятности. Если шероховатости обеих поверхностей скоррелированы, то простое выражение, написанное ранее, больше не применимо. Такой режим гораздо более сложен и был рассмотрен Мейеровичем [14]. Однако все последующие соображения предполагают, что поверхностные шероховатости нескоррелированы в отличие от режима «квантового резонанса».

В нормальном состоянии при приложении градиента температуры ∇T или потока жидкости \mathbf{u} плотность состояний ферми-жидкости не изменяется, а функция распределения квазичастиц реагирует на приложенные градиент/поток изменением $\delta n_{\mathbf{p}\sigma}$. Линеаризованное уравнение переноса Больцмана–Ландау для функции распределения $n_{\mathbf{p}\sigma}$ может быть использовано для квазичастиц с импульсом \mathbf{p} и спином σ в равновесном состоянии, а именно,

$$\frac{\partial n_{\mathbf{p}\sigma}}{\partial \varepsilon_{\mathbf{p}\sigma}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}\sigma} \cdot \nabla (\delta \varepsilon_{\mathbf{p}\sigma}) = I[n_{\mathbf{p}\sigma}]. \quad (4)$$

Ведущий член $I[n_{\mathbf{p}\sigma}]$ — интеграл столкновений, который определяется неупругим рассеянием, а также рассеянием на виртуальном случайном потенциале со скоростью, определяемой уравнением (3). Рассмотрим линейные отклонения из положения равновесия, а именно,

$$n_{\mathbf{p}} = n_{\mathbf{p}}^0 + \delta n_{\mathbf{p}}. \quad (5)$$

Тогда

$$n_{\mathbf{p}}(1 - n_{\mathbf{p}'}) - n_{\mathbf{p}'}(1 - n_{\mathbf{p}}) = \delta n_{\mathbf{p}} - \delta n_{\mathbf{p}'}, \quad (6)$$

где

$$n_i^0 = \frac{1}{1 + e^{\beta \varepsilon_i}}, \quad \beta \equiv (k_B T)^{-1} \quad (7)$$

— функция распределения Ферми. Таким образом,

$$\frac{\partial n_i^0}{\partial \varepsilon_i} = -\frac{\beta e^{\beta \varepsilon_i}}{(1 + e^{\beta \varepsilon_i})^2} = -\beta n_i^0 (1 - n_i^0) = \\ = \frac{-\beta}{4} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\chi}{2} \right). \quad (8)$$

Здесь $\chi = (\varepsilon - \varepsilon_F)/k_B T$. Введем функцию Φ_i как

$$\delta n_i = -\frac{\partial n_i^0}{\partial \varepsilon_i} \Phi_i \quad (i = \mathbf{p}, \mathbf{p}'). \quad (9)$$

Левая часть уравнения Больцмана (4) может быть преобразована с помощью выражений (7)–(9) и вместе с интегралом столкновений, который будет получен в следующем разделе, уравнение Больцмана сводится к уравнению для Φ_i .

2.1. Интеграл столкновений

Правая часть уравнения Больцмана дается интегралом столкновений. Для того чтобы написать интеграл столкновений, рассмотрим член, обусловленный шероховатостью, а именно второй член в уравнении (2). Первый член в уравнении (2) — это объемный член, который добавляется к поверхностному члену в приближении времени релаксации, а именно,

$$\eta_{eff}^{-1} = \eta_{bulk}^{-1} + \eta_{wall}^{-1}$$

для вязкости и похожим образом для теплопроводности. Линеаризуя интеграл столкновений, используя уравнение (3) и переходя к непрерывному пределу (как указывалось в [17]), а именно, $p_z L \gg 1$ и $j \gg 1$, получим

$$I[n_{\mathbf{p}\sigma}] = -2L \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\zeta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')}{m^2 L^2 \hbar^2 \tau_b} \times \\ \times \frac{p_z^2 p_z'^2}{(\chi'^2 k_B^2 T^2/\hbar^2 + (2\tau_b)^{-2})} \delta(\chi - \chi') (\delta n_{\mathbf{p}} - \delta n_{\mathbf{p}'}), \quad (10)$$

где

$$\chi = \frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{k_B T}, \quad p_z = \frac{j\pi\hbar}{L}.$$

С помощью выражений (8) и (9) правую часть уравнения Больцмана можно выразить через Φ_i . Отклонения $\delta n_{\mathbf{p}\sigma}$ получаются путем решения уравнения Больцмана–Ландау для $\Phi_{\mathbf{p}\sigma}$.

2.2. Вязкость

Пусть скорость жидкости (поток) \mathbf{u} направлена вдоль направления x т.е., $\mathbf{u} = u(z)\hat{\mathbf{x}}$, как это проиллюстрировано на рис. 1. Очевидно, что x и y — эквивалентные направления. Диссипативная компонента тензора плотности потока импульса, а именно, одна из компонент тензора вязких напряжений σ_{xz} , дается выражением

$$\sigma_{xz} \equiv \eta \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\Sigma_\sigma \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} p_{x\sigma} (\mathbf{v}_{\mathbf{p}\sigma})_z \delta n_{\mathbf{p}\sigma}, \quad (11)$$

где η — коэффициент вязкости. С учетом потока жидкости,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{p}} &= \varepsilon_F + \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}, \\ \nabla \varepsilon_{\mathbf{p}} &= \nabla(p_x u_x) = \hat{\mathbf{z}} p_x \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя это в уравнение Больцмана (4) и используя уравнение (8), для не зависящего от спина рассеяния получим

$$\beta n_{\mathbf{p}}^0 (1 - n_{\mathbf{p}}^0) (\mathbf{v}_{\mathbf{p}})_z p_x \frac{\partial u_x}{\partial z} = I[n_{\mathbf{p}}]. \quad (13)$$

Подставляя выражения (8), (9) в интеграл столкновений (уравнение (10)), получим

$$\begin{aligned} I[n_{\mathbf{p}}] &= \frac{-2N_f p_z^2}{\hbar^2 m^2 L \tau_b} \frac{n_{\mathbf{p}}^0 (1 - n_{\mathbf{p}}^0)}{((\varepsilon - \varepsilon_F)^2 / \hbar^2 + (1/2\tau_b)^2)} \times \\ &\times \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \zeta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') p_z'^2 (\Phi_{\mathbf{p}} - \Phi_{\mathbf{p}'}), \end{aligned} \quad (14)$$

где N_f — плотность состояний на уровне Ферми, $N_f = mp_F / 2\pi^2 \hbar^3$. Предположим, что зависимости от импульса и энергии могут быть разделены, т.е.

$$\Phi_{\mathbf{p}} \equiv \varphi(\mathbf{p}) \psi(\chi). \quad (15)$$

Это стандартное предположение для линейного режима уравнения Больцмана, которое оправдывается при рассмотрении эволюции функции распределения и ее отклонения от не зависящей от импульса равновесной формы. С помощью анзаца

$$\psi(\chi) = \frac{-\hbar^2 L m^2 \tau_b}{2N_f p_F^4 (k_B T)} \left(\chi^2 \frac{k_B^2 T^2}{\hbar^2} + \left(\frac{1}{\tau_b} \right)^2 \right) \quad (16)$$

уравнение Больцмана сводится к интегральному уравнению для $\varphi(\mathbf{p})$:

$$\begin{aligned} \frac{p_F^2}{m} \sin \theta \cos \theta \cos \phi \frac{\partial u}{\partial z} &= \cos^2 \theta \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \zeta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \times \\ &\times \cos^2 \theta' (\varphi(\theta, \phi) - \varphi(\theta', \phi')), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\mathbf{p} = (\mathbf{q}, p_z) = (p \sin \theta \cos \phi, p \sin \theta \sin \phi, p \cos \theta)$ и аналогично для $\mathbf{p}'(\theta', \phi')$. Здесь

$$d\Omega' = d(\cos \theta') d\phi'$$

и интеграл берется по направлениям $\hat{\mathbf{p}}'$. Введем $\bar{\varphi}(\theta, \phi)$ как

$$\bar{\varphi}(\theta, \phi) = \varphi(\theta, \phi) \frac{1}{(p_F^2/m) \cdot \partial u / \partial z}. \quad (18)$$

Решение для вязкости совместно с уравнением самосогласования для $\bar{\varphi}$ (получаемым из уравнения (17)) дается следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{-\hbar^2 L \tau_b}{2k_B T} \left(\pi^2 \frac{k_B^2 T^2}{3\hbar^2} + \left(\frac{1}{2\tau_b} \right)^2 \right) \times \\ &\times \int \frac{d\Omega}{4\pi} \sin \theta \cos \theta \cos \phi \bar{\varphi}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\theta, \phi) \cos^2 \theta \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \zeta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cos^2 \theta' &= \sin \theta \cos \theta \times \\ \times \cos \phi + \cos^2 \theta \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \zeta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cos^2 \theta' \bar{\varphi}(\theta', \phi'). \end{aligned} \quad (20)$$

Разложим $\bar{\varphi}$ по сферическим функциям Y_{lm} ,

$$\bar{\varphi}(\theta, \phi) = \Sigma_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \bar{\varphi}_{lm}, \quad (21)$$

и воспользуемся их ортогональностью

$$\begin{aligned} I_\eta &\equiv \int \frac{d\Omega}{4\pi} \sin \theta \cos \theta \cos \phi \bar{\varphi}(\theta, \phi) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{15}} (\bar{\varphi}_{2,-1} - \bar{\varphi}_{2,1}). \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя это обратно в уравнение (19), приходим к выражению для вязкости

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\hbar^2 L \tau_b}{2k_B T} \left(\pi^2 \frac{k_B^2 T^2}{3\hbar^2} + \left(\frac{1}{2\tau_b} \right)^2 \right) \times \\ &\times (\bar{\varphi}_{2,1} - \bar{\varphi}_{2,-1}) \frac{1}{\sqrt{15}}, \end{aligned} \quad (23)$$

которое вычисляется совместно с самосогласованным уравнением для $\bar{\varphi}$ (20).

Анализ симметрии уравнения Больцмана (по отношению к lm) показывает, что единственные ненулевые компоненты в обеих частях уравнения для $\bar{\varphi}$, а именно, уравнения (17), это компоненты с $l = 2$, $m = \pm 1$. При рассмотрении угловых моментов в обеих частях уравнения (17) с использованием формул из Приложения D можно получить, что $\bar{\varphi}_{lm} = 0$,

$m \neq \pm 1$ и $\bar{\varphi}_{l\pm 1} = 0 \forall l \neq 2, 4, 6$. Таким образом, полное разложение $\bar{\varphi}$ дается выражением

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\theta, \phi) = & \bar{\varphi}_{21} Y_{2,1}(\theta, \phi) + \bar{\varphi}_{2-1} Y_{2,-1}(\theta, \phi) + \\ & + \bar{\varphi}_{41} Y_{4,1}(\theta, \phi) + \bar{\varphi}_{4-1} Y_{4,-1}(\theta, \phi) + \\ & + \bar{\varphi}_{61} Y_{6,1}(\theta, \phi) + \bar{\varphi}_{6-1} Y_{6,-1}(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (24)$$

Если в этом выражении оставить только первые два члена, то вязкость можно записать в виде

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{15} L \tau_0(P) k_B \pi^2 \mathcal{G}_\eta \left(\frac{1}{T} + \frac{3\hbar^2}{4\pi^2 k_B^2} \frac{T}{4\tau_0^2} \right) \varpi, \quad (25)$$

где $\tau_b = \tau_0(P)/T^2$, P — давление, $\mathcal{G}_\eta = 1/3$ — числовая константа, а ϖ — геометрический фактор, зависящий от различных компонент в структурном факторе шероховатости ζ (Приложение В). С учетом симметрии (или просто после явных вычислений) $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} \equiv \sigma_{||}$, значения η для обоих направлений одинаковы.

2.3. Теплопроводность

Теплопроводность вычисляется с помощью уравнения Больцмана (4) с интегралом столкновений, который определяется рассеянием на шероховатости поверхности, см. уравнение (10). Как и в случае с вязкостью, будем использовать функцию Φ , определенную выражением (9) с

$$\Phi(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) \psi(\chi).$$

Разумеется, функции $\varphi(\mathbf{p})$ и $\psi(\chi)$ будут отличаться от тех, которые были вычислены для случая вязкости. Для этого случая используем анзац

$$\psi(\chi) = \frac{-\hbar^2 L m^2 \tau_b}{2N_f p_F^4 k_B T} \left(\frac{\chi^2 k_B^2 T^2}{\hbar^2} + \left(\frac{1}{2\tau_b} \right)^2 \right) \chi. \quad (26)$$

Рассмотрим градиент температуры в направлении $\nabla T \parallel \hat{\mathbf{x}}$. Случай, когда градиент температуры лежит в плоскости щели, а именно, в плоскости xy , представляет естественный физический интерес. Теплопроводность $\bar{\kappa}$ — это линейный отклик на градиент температуры, который определяется следующим образом:

$$\bar{\kappa} \cdot \nabla T = \Sigma_\sigma \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} (\varepsilon_{\mathbf{p}\sigma} - \mu) (\mathbf{v}_{\mathbf{p}\sigma}) \delta n_{\mathbf{p}\sigma}. \quad (27)$$

В этом случае

$$\kappa_{xx} |\nabla T| = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) (\mathbf{v}_{\mathbf{p}})_x \delta n_{\mathbf{p}}. \quad (28)$$

После подстановки этого выражения в уравнение Больцмана получим интегральное уравнение для $\bar{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\mathbf{p}) \cos^2 \theta \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \zeta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cos^2 \theta' = & \sin \theta \cos \phi + \\ & + \cos^2 \theta \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \zeta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cos^2 \theta' \bar{\varphi}(\mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\bar{\varphi}(\mathbf{p}) = \frac{\varphi(\mathbf{p})}{k_B v_F |\nabla T|};$$

$$\begin{aligned} \kappa_{xx} = & \frac{L \tau_b k_B \pi^2}{6k_F^2} \left(\frac{8}{5} \pi^2 \frac{(k_B T)^2}{\hbar^2} + \left(\frac{1}{2\tau_b} \right)^2 \right) \times \\ & \times \int \frac{d\Omega}{4\pi} \sin \theta \cos \phi \bar{\varphi}(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (30)$$

Раскладывая $\bar{\varphi}$ по сферическим гармоникам так же, как и ранее в уравнении (21), вычислим

$$I_\kappa^{xx} \equiv \int \frac{d\Omega}{4\pi} \sin \theta \cos \phi \bar{\varphi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{6}} (\bar{\varphi}_{1,-1} - \bar{\varphi}_{1,1}) \quad (31)$$

и получим выражение для коэффициента теплопроводности κ_{xx} ,

$$\begin{aligned} \kappa_{xx} = & \frac{L \tau_b k_B \pi^2}{6\sqrt{6} k_F^2} \left(\frac{8}{5} \pi^2 \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right)^2 + \left(\frac{1}{2\tau_b} \right)^2 \right) \times \\ & \times (\bar{\varphi}_{1,-1} - \bar{\varphi}_{1,1}). \end{aligned} \quad (32)$$

Для того чтобы получить κ_{xx} , необходимо одновременно решить уравнения (29) и (32). Ведущим членом в уравнении для $\bar{\varphi}$ является первый член в правой части уравнения (29). Для случая теплопроводности этот член имеет симметрию $l = 1, m = \pm 1$, поэтому в обеих частях уравнения только компоненты с $lm = 1 \pm 1$ не будут равны нулю. Рассматривая моменты в интегралах в обеих частях уравнения, получим $\bar{\varphi}_{lm} = 0; m \neq 1$ и $\bar{\varphi}_{l\pm 1} = 0 \forall l \neq 1, 3, 5$. Таким образом, имеем полное разложение для $\bar{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\theta, \phi) = & \bar{\varphi}_{11} Y_{1,1}(\theta, \phi) + \bar{\varphi}_{1-1} Y_{1,-1}(\theta, \phi) + \\ & + \bar{\varphi}_{31} Y_{3,1}(\theta, \phi) + \bar{\varphi}_{3-1} Y_{3,-1}(\theta, \phi) + \bar{\varphi}_{51} Y_{5,1}(\theta, \phi) + \\ & + \bar{\varphi}_{5-1} Y_{5,-1}(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (33)$$

Если оставить только два первых члена, то теплопроводность дается следующим выражением:

$$\kappa_{xx} = \frac{L k_B^3 \pi^4}{\hbar^2 k_F^2} \tau_0(P) \mathcal{G}_\kappa \left(1 + \frac{5T^2}{64\pi^2 \tau_0^2} \frac{\hbar^2}{k_B^2} \right) \varpi_\kappa, \quad (34)$$

где, как и ранее, $\tau_b = \tau_0(P)/T^2$, $\mathcal{G}_\kappa = 4/45$ — численный коэффициент, а ϖ_κ — это геометрический множитель, зависящий от различных компонент структурного множителя, обусловленного шероховатостью

шероховатостью ζ (Приложение С). Микроскопические процессы, лежащие в основе передачи тепла, — это рассеяние квазичастиц друг на друге и на виртуальном случайном потенциале. Поскольку эти процессы изотропны для каждого акта рассеяния, поперечные компоненты коэффициента теплопроводности равны нулю, $\kappa_{xz} = \kappa_{xy} = 0$. Если $\nabla T \parallel \hat{y}$, то из симметрии задачи следует (или просто получается после явных вычислений), что $\kappa_{xx} = \kappa_{yy} \equiv \kappa_{||}$ и $\kappa_{yz} = \kappa_{xz} = \kappa_{yx} = 0$.

2.4. Низкотемпературный предел

При $T \rightarrow 0$ исчезает неупругое рассеяние и, соответственно, процессы рассеяния, рассмотренные ранее в вычислениях. В этом пределе рассеяние осуществляется только на шероховатостях, и это исключительно упругий канал рассеяния, который не был включен в рассмотрение до этого момента. Рассеяние в данном случае не зависит от температуры и его скорость определяется как $\tau_{el}^{-1} \sim v_F / \ell_{surface}$, где $\ell_{surface}$ — это характерная длина шероховатости, оцененная Тесановичем и др. [12]; $\ell_{surface}$ возникает вследствие остаточного рассеяния на неровностях и для автокорреляционной функции, соответствующей белому шуму со среднеквадратичным отклонением неровностей $\Delta h \sim 10$ нм, $\ell_{surface} \sim 10^{-5}$ м. Ясно, что эта длина гораздо больше средней длины свободного пробега в объеме. При низких температурах вязкость $\eta_{T \rightarrow 0} \sim 3 \cdot 10^{-4}$ кг · м⁻¹ · с⁻¹ для $P = 0$. Это называется остаточной вязкостью. Остаточная теплопроводность $\kappa_{T \rightarrow 0} \propto T$. Эти остаточные значения вязкости и теплопроводности, так же как и температура перехода к такому «остаточному поведению», зависят от давления и вида шероховатости.

Остаточные значения коэффициентов переноса возникают из-за квантовых размерных эффектов и не имеют классического аналога. В классическом пределе при стремлении температуры к нулю перенос пропадает, т. е. при отсутствии механизма рассеяния в объеме пучок квазичастиц, распространяющийся вдоль пленки, никак не взаимодействует с неровностями поверхности. Вместе с тем, в квантовомеханическом пределе нулевые колебания исключают строго двумерное ограничение в плоскости пленки, что дает вклад в ненулевой перенос в «остаточном» пределе. В общем случае $\ell_{surface}$ — это масштаб длины, соответствующий скорости релаксации, связанный только с рассеянием на поверхности, т. е. в отсутствие других каналов рассеяния при $T = 0$. Этот масштаб соответствует длине сво-

бодного пробега, возникающей из-за квантового размерного эффекта и рассеяния на неровностях поверхности. Для данного предела она устанавливает масштаб длин, на которых квазичастичная волновая функция теряет когерентность.

2.5. Области перехода

Если скорость неупругого рассеяния в объеме велика, то такие процессы преобладают и размывают аномальный эффект, возникающий вследствие неупругих процессов, вызванных рассеянием на случайном виртуальном потенциале. Объемная зависимость является главной при температурах $T > T^* = k_B \tau_0(P) / \hbar \sim 200$ мК для $P = 0$.

Если частота неупругого рассеяния в объеме очень мала и $\ell_{in} \gg \ell_{el}$, где ℓ_{el} — характерный масштаб длин для упругого рассеяния на случайном виртуальном потенциале, то такое неупругое квазичастичное рассеяние больше не будет никак связано с упругим рассеянием на неровностях стенок, которое теперь и станет доминирующим, поэтому аномальный эффект пропадает при $T < T^{*'} \sim \tau_0(P) k_F (\hbar / L) \sim 1$ мК для $P = 0$.

Таким образом, аномальный эффект существует только в интервале температур $T^{*'} < T < T^*$, где предельные значения температур зависят от давления, толщины пленки и шероховатости.

3. ПОВЕРХНОСТНАЯ ШЕРОХОВАТОСТЬ

Шероховатость ограничивающих стенок может быть определена с помощью техники поверхностной микроскопии высокого разрешения. Для целей данной работы структурный фактор шероховатости считается известным и входит в вычисления как определенный из эксперимента. Для обсуждения результатов теоретических предсказаний будут использованы три различные автокорреляционные функции. Первая — это гауссова автокорреляционная функция

$$\zeta(\mathbf{q})_G = 2\pi l^2 R^2 e^{-|\mathbf{q}|^2 R^2},$$

где l и R — параметры распределения Гаусса, определяющие высоту и корреляционную длину неоднородностей. Вторая форма линии соответствует автокорреляционной функции самоаффинного фрактала

$$\zeta_F(\mathbf{q}) = (\Delta h)^2 / |\mathbf{q}|^H,$$

где Δh — среднеквадратичное отклонение высоты шероховатости и H — фрактальная экспонента. Третий используемый тип шероховатости соответствует

равномерному спектральному распределению (белый шум)

$$\zeta_{WN} = (\Delta h)^2 / k_F^2,$$

где Δh — среднеквадратичное отклонение высоты шероховатости. Эти типы автокорреляционных функций были выбраны для подгонки функций, полученных для реальных шероховатых поверхностей [19]. Выбранные значения параметров являются типичными для гладко отполированных поверхностей, которые, в свою очередь, обычно используются в экспериментах с ^3He для щели.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 2 представлена полученная зависимость вязкости для интервала температур, где ожидается ее аномальное поведение. Для более слабых шероховатостей (ζ_{WN} и ζ_F на рис. 2) переход от объемной зависимости $\eta_b \propto 1/T^2$ к линейной $\eta_{||} \propto 1/T$ заметен в области температур, где справедлива обсуждаемая теория. Для более шероховатых поверхностей (например, ζ_G на рис. 2) вклад от стенок преобладает и зависимость $\eta_{||} \propto 1/T$ занимает широкий интервал температур. Как следует из сравнения результатов для ζ_{WN} и ζ_G с одинаковыми среднеквадратичными отклонениями (представлены на рис. 2), форма автокорреляционной функции, в известном смысле, играет важную роль в определении степени шероховатости. Форма ζ входит в выражение для η неявно через функцию φ в уравнении (23) и свидетельствует о зависимости переноса импульса от пространственного вида корреляций шероховатости (или их отсутствия). Акты рассеяния на стенках, которые приводят к неупругим столкновениям квазичастиц, увеличивают перенос тепла в параллельном направлении и приводят к уменьшению вязкости относительно ее значения в объеме.

Найденные значения для переноса тепла в том же температурном интервале показаны на рис. 2. Акты рассеяния на стенках, которые приводят к столкновениям квазичастиц, подавляют теплопередачу при охлаждении, и теплопроводность стремится к меньшему эффективному значению, чем в объемном случае.

5. ВЫВОДЫ

В данной работе представлен теоретический анализ вязкости и теплопроводности для режима переноса с доминирующим когерентным «смешанным» каналом рассеяния, т.е. таким, в котором

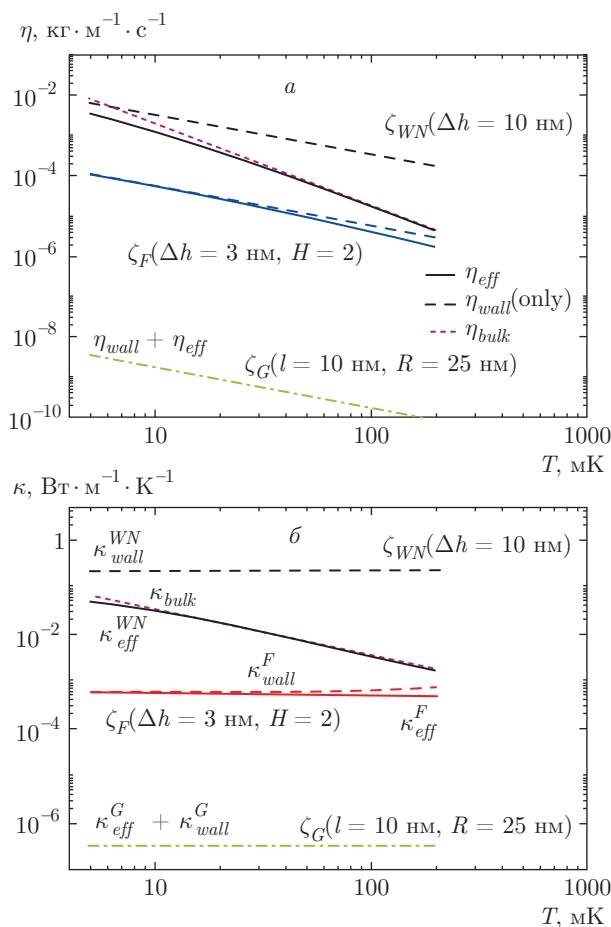


Рис. 2. Найденные значения вязкости (а) и теплопроводности (б) для пленки толщиной $L = 700$ нм и давления $P = 0$. Пунктир показывает объемную зависимость $\eta_b \propto T^{-2}$ или $\kappa_b \propto T^{-1}$. Объемная зависимость, включая $\tau_0(P)$, взята из [11]. Штриховые линии показывают вычисленные значения для смешанного канала рассеяния. Сплошные линии соответствуют эффективным значениям, включающим в себя оба вклада — объемный и смешанный. При низких температурах стремление к индуцированному стенкой вкладу видно для фрактального случая, для которого были использованы среднеквадратичное отклонение шероховатости $\Delta h = 3$ нм и фрактальная экспонента $H = 2$. Для равномерно распределенных неровностей (белый шум) со среднеквадратичным отклонением шероховатости $\Delta h = 10$ нм переход от объемной зависимости к индуцированной стенками сдвигается к более низким температурам. Для более шероховатых поверхностей индуцированный стенками вклад преобладает. На рисунке также показан случай гауссовой шероховатости с высотой $l = 10$ нм и корреляционной длиной $R = 25$ нм (штрихпунктир)

неупругие столкновения квазичастиц обусловлены актами рассеяния на неровностях ограничивающих стенок. В этом режиме теплопроводность, которая весьма эффективна в объемном ${}^3\text{He}$, подавлена и стремится к постоянной остаточной величине. Перенос импульса в этом режиме становится более эффективным, и вязкость уменьшается по сравнению с объемным случаем. Область перехода от объемной зависимости к рассматриваемой является функцией давления, толщины пленки и существенно зависит от размера и формы автокорреляционной функции шероховатости поверхности. Рассматриваемый аномальный перенос должен наблюдаться в пленках с толщиной порядка нескольких сотен нанометров в интервале температур порядка 10–200 мК, будучи наиболее сильно выраженным для более тонких пленок и более высоких температур. Эффект остаточного рассеяния при низких температурах, вероятно, может повлиять на фазовую диаграмму сверхтекучего состояния.

Автор выражает благодарность Центру нанонауки и инженерии ИИН за поддержку.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Автокорреляционная функция

Автокорреляционная функция ζ является функцией двух лежащих в одной плоскости векторов \mathbf{q} и \mathbf{q}' . Считая ϕ азимутальным углом, можно разложить ζ в ряд $\sum_m \zeta_m(\theta, \theta') e^{im\phi} e^{-im\phi'}$. В силу изотропии ζ в плоскости это будет просто разложение по $\phi - \phi'$. Коэффициенты этого разложения зависят от величин векторов \mathbf{q} и \mathbf{q}' , а именно, от θ и θ' . С учетом тривиальной симметрии функции перпендикулярно к поверхности (так как ζ определена как автокорреляционная функция только на поверхности) ранее упомянутые коэффициенты могут быть разложены по полному набору полиномов Лежандра от θ и θ' . Это разложение обосновано и является полным представлением функции ζ в этом случае. Тем не менее, поскольку функция $\bar{\varphi}$ входит в выражения для коэффициентов переноса и может быть разложена по сферическим функциям (21), для вычисления η, κ представляется удобным также переписать разложение ζ через сферические гармоники. С этой целью сделана экстраполяция двумерной функции $\zeta(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ к трехмерной, а именно, $\zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$. Такая экстраполяция не единственная, и можно выбрать ту, которая лучше подходит для наших целей. Поскольку векторы \mathbf{p} и \mathbf{p}' независимы, переменные θ и θ'

также независимы и поэтому могут считаться разделяемыми. Далее рассмотрим конкретное разложение

$$\zeta(\theta, \theta', \phi, \phi') = \sum_{lm} \zeta_{lm} P_{lm}(\theta) P_{lm}(\theta') e^{im\phi} e^{-im\phi'}. \quad (35)$$

Здесь P_{lm} — присоединенные полиномы Лежандра. Конкретный выбор в виде одинаковых индексов (l, m) в $P_{lm}(\theta)$ и $P_{l'm'}(\theta')$ сделан для удобства. Несмотря на то что любой выбор $l' \neq l; m' \neq m$ дал бы правильные физические проекции ζ в двух измерениях, случай $l' = l$ выбран для удобства. Выбор $m = m'$ продиктован изотропией функции в плоскости, а именно, $\zeta(\phi, \phi') = \zeta(\phi - \phi')$. Рассматриваемое разложение является более общим, но все еще полным разложением ζ в трех измерениях, а последнее написанное выражение — это его проекция. Рассмотрим написанный выше более общий вид ζ в эквивалентной форме:

$$\zeta(\theta, \theta', \phi, \phi') = \sum_{lm} \zeta_{lm} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi'). \quad (36)$$

Здесь Y_{lm} — сферические функции (Приложение D). Вычисления упрощаются при сделанном обобщении для ζ . Ясно, что решение определенно включает конкретный вид ζ для рассматриваемой поверхности, который должен быть правильным ее описанием. Более того, P_{lm} — это полный набор ортогональных полиномов и при разделении зависимостей от θ и θ' они дают правильное разложение $\zeta_m(\theta, \theta')$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Вычисление вязкости

Усеченное разложение для $\bar{\varphi}$ будет иметь вид

$$\bar{\varphi}(\theta, \phi) = \bar{\varphi}_{2,1} Y_{2,1}(\theta, \phi) + \bar{\varphi}_{2,-1} Y_{2,-1}(\theta, \phi). \quad (37)$$

Проецируя уравнение (19) на $Y_{21}^*(\theta, \phi)$ (19) и используя свойства сферических гармоник (Приложение C), получим

$$\bar{\varphi}_{2,1} = \left\{ \sqrt{30} \left(\zeta_{41} B_{41} A_{21} + \zeta_{21} D_{21}^2 - A_{21} B_{41} \zeta_{20} - D_{21}^2 \zeta_{20} - \frac{D_{21}}{3} (\zeta_{00} - \zeta_{20}) \right) \right\}^{-1}. \quad (38)$$

Следуя тому же принципу, проецируя уравнение (19) на $Y_{2,-1}^*(\theta, \phi)$, получим

$$\bar{\varphi}_{2,-1} = \left\{ \sqrt{30} \left(A_{2-1} B_{4-1} \zeta_{20} + D_{2-1}^2 \zeta_{20} + \frac{\zeta_{00} - \zeta_{20}}{3} D_{2-1} - B_{4-1} \zeta_{4-1} A_{2-1} - \zeta_{2-1} D_{2-1}^2 \right) \right\}^{-1}. \quad (39)$$

Подстановка $\bar{\varphi}_{2\pm 1}$ в уравнение (23) дает уравнение (25) для вязкости, где

$$\begin{aligned} \varpi = & \left(\zeta_{41} B_{41} A_{21} + \zeta_{21} D_{21}^2 - A_{21} B_{41} \zeta_{20} - \right. \\ & \left. - D_{21}^2 \zeta_{20} - \frac{D_{21}}{3} (\zeta_{00} - \zeta_{20}) \right)^{-1} + \\ & + \left(-A_{2-1} B_{4-1} \zeta_{20} - D_{2-1}^2 \zeta_{20} - \frac{\zeta_{00} - \zeta_{20}}{3} D_{2-1} + \right. \\ & \left. + B_{4-1} \zeta_{4-1} A_{2-1} + \zeta_{2-1} D_{2-1}^2 \right)^{-1}. \quad (40) \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Вычисление теплопроводности

Усеченное разложение для $\bar{\varphi}$ теперь будет

$$\bar{\varphi}(\theta, \phi) = \bar{\varphi}_{1,1} Y_{1,1}(\theta, \phi) + \bar{\varphi}_{1,-1} Y_{1,-1}(\theta, \phi). \quad (41)$$

Проецируя уравнение (29) на $Y_{1\pm}^*$, мы получим

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{1,1} = & - \left(\sqrt{6} \left(\zeta_{20} A_{11} B_{31} + D_{11}^2 \zeta_{20} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\zeta_{00} - \zeta_{20}}{3} D_{11} - A_{11} B_{3-1} \zeta_{3-1} - D_{11} D_{1-1} \zeta_{1-1} \right) \right)^{-1}, \\ \bar{\varphi}_{1,-1} = & \left(\sqrt{6} \left(\zeta_{20} A_{1-1} B_{3-1} + D_{1-1}^2 \zeta_{20} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\zeta_{00} - \zeta_{20}}{3} D_{1-1} - A_{1-1} \zeta_{31} B_{3-1} - D_{1-1} D_{11} \zeta_{11} \right) \right)^{-1}. \quad (42) \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (32), мы получим уравнение (34) для κ_{xx} , где

$$\begin{aligned} \varpi_{\kappa} = & \left(\left(\zeta_{20} A_{1-1} B_{3-1} + D_{1-1}^2 \zeta_{20} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\zeta_{00} - \zeta_{20}}{3} D_{1-1} - A_{1-1} \zeta_{31} B_{3-1} - D_{1-1} D_{11} \zeta_{11} \right) \right)^{-1} + \\ & + \left(\zeta_{20} A_{11} B_{31} + D_{11}^2 \zeta_{20} + \frac{\zeta_{00} - \zeta_{20}}{3} D_{11} - \right. \\ & \left. - A_{11} \zeta_{31} B_{3-1} - D_{11} D_{1-1} \zeta_{11} \right)^{-1}. \quad (43) \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ D

Свойства сферических функций

Мы используем сферические функции, определенные как

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{(2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (44)$$

тем самым, с условием нормировки

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}^*(\Omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (45)$$

где P_l^m — присоединенные полиномы Лежандра. Теперь, как показано в работе [20], существует соотношение

$$\begin{aligned} z P_n^m(z) = & \frac{1}{(2n+1)} \times \\ & \times ((n-m+1) P_{n+1}^m(z) + (n+m) P_{n-1}^m(z)). \quad (46) \end{aligned}$$

Используем рекурсивно уравнение (46)

$$\begin{aligned} z^2 P_n^m(z) e^{im\phi} = & C_{nm} P_{n+2}^m(z) e^{im\phi} + \\ & + C'_{nm} P_{n-2}^m(z) e^{im\phi} + C''_{nm} P_n^m(z) e^{im\phi}, \quad (47) \end{aligned}$$

где константы C определены как

$$\begin{aligned} C_{nm} = & \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)}, \\ C'_{nm} = & \frac{(n+m)(n+m-1)}{(2n+1)(2n-1)}, \\ C''_{nm} = & \frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{(n+m)(n-m)}{(2n+1)(2n-1)}. \quad (48) \end{aligned}$$

Определим

$$C = \sqrt{(2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}, \quad (49)$$

и, используя (44) и $z \equiv \cos \theta$, запишем уравнение (47) в виде

$$\begin{aligned} z^2 Y_{nm}(\theta, \phi) = & A_{nm} Y_{n+2,m}(\theta, \phi) + \\ & + B_{nm} Y_{n-2,m}(\theta, \phi) + D_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi), \quad (50) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{nm} = & \frac{C_{nm}}{C_{n+2,m}}; \quad B_{nm} = \frac{C'_{nm}}{C_{n-2,m}}; \\ D_{nm} = & \frac{C''_{nm}}{C_{nm}}. \quad (51) \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Vollhardt and P. Wölfle, *The Superfluid Phases of Helium 3*, Taylor and Francis (1990).
2. G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Clarendon Press (2003).
3. J. D. Sau, R. M. Lutchyn, S. Tewari, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **104**, 040502 (2010).
4. Suk Bum Chung and Shou-Cheng Zhang, Phys. Rev. Lett. **103**, 235301 (2009).
5. L. V. Levitin, R. G. Bennett, E. V. Surovtsev et al., Phys. Rev. Lett. **111**, 235304 (2013).
6. L. V. Levitin, R. G. Bennett, A. Casey et al., Science **340**, 841 (2013).
7. A. B. Vorontsov and J. A. Sauls, Phys. Rev. Lett. **98**, 045301 (2007).
8. A. Casey, J. Parpia, R. Scanen et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 255301 (2004).
9. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics: Part 2*, Pergamon Press (1980).
10. A. J. Leggett, Rev. Mod. Phys. **47**, 331 (1975).
11. J. C. Wheatley, Rev. Mod. Phys. **47**, 415 (1975).
12. Z. Tesanovic, M. V. Jaric, and S. Maekawa, Phys. Rev. Lett. **57**, 2760 (1986).
13. N. Trivedi and N. W. Ashcroft, Phys. Rev. B **38**, 12298 (1988).
14. A. E. Meyerovich and A. Stepaniants, Phys. Rev. B **58**, 13242 (1998).
15. A. E. Meyerovich and A. Stepaniants, Phys. Rev. B **60**, 9129 (1999).
16. A. E. Meyerovich and I. V. Ponomarev, Phys. Rev. B **65**, 155413 (2002).
17. A. E. Meyerovich and A. Stepaniants, J. Phys. Cond. Matt. **12**, 5575 (2000).
18. P. Sharma, A. Córcoles, R. G. Bennett et al., Phys. Rev. Lett. **107**, 196805 (2011).
19. B. N. J. Persson, O. Albohr, U. Tartaglino et al., J. Phys. Cond. Matt. **17**, R1 (2005).
20. H. A. Mavromatis and R. S. Alassar, App. Math. Lett. **12**, 101 (1999).